

分类号_____ 密级_____

U D C _____ 编号_____

北 京 大 学

博士后研究工作报告

薄板结构界面粘附行为的理论研究及其应用

李航

工作完成日期 2022 年 6 月 - 2025 年 6 月

报告提交日期 2025 年 6 月

北 京 大 学 (北京)

2025 年 6 月

北京大学博士后研究报告原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的博士后研究报告，是本人在合作导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

报告作者签名：

日期： 2025 年 6 月 1 日

博士后研究报告使用授权说明

（必须装订在提交学校图书馆的印刷本中）

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用博士后研究报告的规定，即：

- 按照学校要求提交博士后研究报告的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存博士后研究报告的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存博士后研究报告；
- 因特殊原因需要延迟发布博士后研究报告电子版，授权学校一年/两年/三年以后，在校园网上全文发布。

（涉密报告在解密后遵守此规定。）

报告作者签名：

合作导师签名：

日期： 2025 年 6 月 1 日

薄板界面粘附/脱粘行为的理论研究及其应用

Theoretical investigation and applications of interface adhesion/delamination mechanisms

博 士 后 姓 名：李航

流动站（一级学科）名称：北京大学力学

专 业（二级学科）名称：固体力学

研究工作起始时间：2022 年 6 月 15 日

研究工作期满时间：2025 年 6 月 15 日

北京大学工学院（北京）

2025 年 5 月

摘要

近年来，柔性电子器件和微/纳机电系统（M/NEMS）快速发展，其中广泛存在微梁或薄板的界面粘附问题，严重影响器件的服役可靠性与稳定性。本研究从力学角度系统分析了微纳尺度下薄板的粘附行为，旨在为不同服役环境中的结构设计与失效预测提供理论依据。

首先，针对薄板在界面作用力作用下的弯曲与拉伸耦合响应，分析了预应力、弯曲刚度与拉伸刚度之间的竞争关系，识别出控制粘附行为的关键无量纲参数。基于此，构建了弯曲主导、拉伸主导与预应力主导等不同物理区域的划分框架，并在各区域中推导出黏附长度的解析或渐近表达式。相关理论结果与二维材料（厚度范围 3-500 nm）实验数据相符，验证了模型的适用性。

其次，考虑弹性基底上薄板的脱粘行为，系统研究了弹性胶层的可压缩性对粘附过程的影响。通过解析建模、有限元模拟及桌面实验发现，由于胶层通常具有较大的几何细长比，即使是典型弹性体也可视为近似可压缩材料。在此条件下，脱粘前沿处常见的零压强与零压强梯度边界条件在考虑能量释放率的前提下，二者的差异在工程应用中可忽略。

最后，针对微纳尺度下界面作用力的显著尺度效应，构建了考虑可变形基底和长程界面作用的统一粘附模型。研究表明，基底弹性将显著改变传统 Griffith 或 JKR 类型模型中的临界黏附条件。我们引入一个统一的过渡参数，以判断何时可忽略基底弹性。在小尺度结构中，界面由尖锐的黏附前沿过渡为平滑的作用力分布（如 Lennard-Jones 势），并随着系统尺度的增大逐渐回归至宏观 Griffith 型黏附行为。

关键词：粘附/脱粘，几何非线性，弹性基底，跨尺度

ABSTRACT

ABSTRACT

The rapid development of flexible electronics and micro/nano-electromechanical systems (M/NEMS) has brought increasing attention to interfacial adhesion problems involving microbeams or thin plates, which critically affect device reliability and stability. This study provides a comprehensive mechanical analysis of adhesion behavior in micro- and nanoscale plate structures, offering theoretical insights for structural design and failure prediction under diverse service conditions. We first investigate the coupled bending and stretching responses of thin plates subjected to interfacial forces, focusing on the competition among bending stiffness, stretching stiffness, and prestress. Key dimensionless parameters governing the adhesion behavior are identified, enabling a classification of distinct physical regimes: bending-dominated, stretching-dominated, and prestress-dominated. Analytical or asymptotic expressions for the adhesion length are derived in each regime, and the theoretical predictions are validated by experimental data from two-dimensional materials with thicknesses ranging from 3 to 500 nm.

Building on this framework, we further study the adhesion and delamination behavior of plates on elastic substrates, with particular emphasis on the role of adhesive layer compressibility. Through analytical modeling, finite element simulations, and tabletop experiments, we demonstrate that typical elastomeric layers due to their high slenderness can be approximated as compressible in practical applications. As a result, the commonly used zero-pressure and zero-pressure-gradient boundary conditions at the delamination front yield negligible differences in engineering contexts, provided that the energy release rate is properly accounted for.

Finally, to capture the scale-dependent nature of adhesion, especially at small scales where long-range intermolecular forces become dominant, we develop a unified model incorporating deformable substrates and long-range interfacial interactions. We show that accounting for substrate elasticity qualitatively alters the critical adhesion conditions predicted by classical Griffith or JKR-type models. A single transition parameter is introduced to determine when substrate elasticity must be considered. At small scales, sharp adhesion fronts are replaced by smooth interfacial force distributions (e.g., Lennard-Jones potential), while the adhesion behavior transitions back to the Griffith-type model as the system size increases.

Keywords: Stiction/Delamination, geometric nonlinearity, elastic foundation, multiscale

ABSTRACT

目录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 研究现状	1
1.3 拟解决的问题及本文的研究内容	4
1.3.1 拟解决的问题	4
1.3.2 本文的研究内容	4
第二章 薄板轴对称粘附的状态分析	7
2.1 引言	7
2.2 轴对称粘附理论模型	7
2.2.1 轴对称模型	7
2.2.2 关键参数	8
2.2.3 问题描述	9
2.2.4 无量纲化处理	11
2.3 理论解答	11
2.3.1 弯曲主导情形 ($\mathcal{K}_h \ll 1, \mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$)	11
2.3.2 弯曲和预应力主导情形 ($\mathcal{K}_h \ll 1, \mathcal{N} \gg 1$)	13
2.3.3 预应力主导情形 ($\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1, \mathcal{N} \gg 1$)	16
2.3.4 拉伸主导情形 ($\mathcal{K}_h \gg 1, \mathcal{N} \ll 1$)	18
2.4 实验对比	20
2.5 本章小结	22
第三章 弹性薄层对脱粘行为影响的理论和实验研究	24
3.1 前言	24
3.2 理论模型	24
3.2.1 问题描述	24
3.2.2 无量纲化	26
3.3 解析解答	28
3.3.1 通解	28
3.3.2 完全可压缩情形	30
3.3.3 完全不可压缩情形	31
3.3.4 有限元计算	34

3.4 实验结果	37
3.5 本章小节	39
第四章 长程作用力对界面粘附影响的实验及理论研究	41
4.1 前言	41
4.2 问题描述	42
4.2.1 Griffith 方法	42
4.2.2 Dugdale 方法	44
4.2.3 向稳态的过渡	45
4.3 Griffith 模型：弹性基底的影响	45
4.3.1 尺度律分析	45
4.3.2 无量纲化	46
4.3.3 解析解答	47
4.3.4 有限元计算	48
4.4 长程作用力的影响	49
4.4.1 尺度律分析	49
4.4.2 刚性基底	50
4.4.2 可压缩基底	52
4.5 本章小结	54
第五章 总结与展望	56
5.1 全文总结	56
5.2 本文创新点	56
5.3 展望	57
参考文献	59
个人简历、博士后期间发表的论文与其他相关成果	65

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

薄板/膜结构的粘附与脱粘行为是横跨微电子、生物医学及智能材料等多个前沿领域的共性科学问题，其精准调控直接影响关键技术的可靠性与创新突破。在微纳机电系统中（MEMS/NEMS），硅基底与悬臂梁的毛细诱导粘附已被证实是导致器件功能失效的主要机制之一^[1]。这一问题在湿度敏感的微谐振器中尤为突出，其粘附失效概率随环境湿度升高呈非线性增长^[2]。在生物医学工程领域，柔性电子表皮传感器的界面脱粘会引发心电信号监测中断^[3]，生物医用粘胶在服役过程中会因承受机械循环载荷而产生界面的疲劳脱粘^[4]，严重影响此类器件应用的可靠性。在二维材料领域，石墨烯薄层密封腔体因范德华力驱动的非预期粘附，会导致气体阻隔测试的灵敏度明显下降^[5]，严重制约其在超灵敏传感器中的应用。因此，建立多物理场耦合的薄板粘附理论模型，是解决器件设计与可靠性问题的关键。

从以上的应用背景可以发现，薄板/膜结构的粘附与脱粘问题存在以下特点：（1）薄板弯曲变形与拉伸变形之间的竞争与非线性耦合，取决于薄板抵抗弯曲变形和拉伸变形的力学特性；（2）基底刚度多样性，基底从刚性（硅基 MEMS）向超柔性（水凝胶、弹性体）跨越，界面力学行为发生质变。在传统微纳机电系统中，刚性基底使粘附能完全由薄板变形耗散；而在柔性电子器件中，软基底的弹性变形使得结构的能量耗散变形十分复杂，给此类应用中粘附和脱粘行为的预测带来了极大的挑战；（3）粘附行为的尺度依赖性，粘附作用从宏观（毫米级可穿戴器件）延伸至微观（纳米级二维材料），作用力主导机制发生根本转变。在微纳尺度下，分子间的长程作用力的影响愈发明显，界面表现出明显的尺度依赖性。除此之外，微尺度下金属材料与结构的力学行为也表现出强烈的尺度效应。因此，开展薄板结构粘附行为的理论研究，揭示几何非线性、基底刚度多样性和界面和材料尺度依赖性对于粘附行为的影响，已成为突破微纳器件可靠性瓶颈的关键科学挑战。本章首先对当前粘附相关的研究工作进行简单介绍；然后，介绍了本文重点关注的三个科学问题；最后，介绍了本论文的章节安排。

1.2 研究现状

关于刚性基底粘附问题的研究已有大量文献报道^[6-8]，重点探讨了粘附发生的判据以及基底上粘附结构的几何特征^[9-13]。该领域常用模型为悬置于刚性基底上方且具有微小间隙的弹性悬臂梁结构。例如，Mastrangelo 和 Hsu^[10,11]基于 JKR 模型考虑接触区

域的界面能以及系统的变形能，通过最小自由能方法进行分析，研究了毛细力和粘附力共同作用下此类结构的力学稳定性。此外，Mastrangelo^[12]还运用该方法讨论了 MEMS 中不同几何形状梁和板的粘附/脱附长度。De Boer 和 Michalske^[13]从断裂力学角度（Griffith 模型）研究了微梁粘附问题，通过分析系统脱粘过程中的能量释放率，并将得到解析结果应用于悬臂梁粘附力的测量。Jones 等对循环点载荷作用下的 MEMS 悬臂梁粘附特性进行了表征，研究了自由状态、弧形和 S 形三种平衡构型之间的转变 [9]。Fang 等^[14]则同时考虑了梁横向挠曲引起的弯曲能和非线性拉伸能，探讨了几何非线性对粘附行为的影响。在以上的梁结构粘附研究中，能量法与断裂力学分析法是最常用的两类方法。具体而言，能量平衡法通过建立系统总自由能表达式 $U = U_b + U_s$ （其中 U_b 表征梁的弹性应变能， U_s 代表结构的界面表面能），并基于最小势能原理求解 $\partial U / \partial a = 0$ （ a 为待定接触区长度）来确定结构的平衡构型。断裂力学分析法则着重考察能量释放率 $\partial U_b / \partial a$ 这一关键参数，当系统处于稳定平衡状态时，必须满足 $\partial U_b / \partial a = \gamma$ 的能量平衡条件（ γ 为界面断裂能）。

除上述 JKR 模型和 Griffith 方法外，Glassmaker 和 Hui^[15]通过裂纹长度增量变化引起的应变能改变（J 积分方法），计算了粘附系统的能量释放率。该方法直接聚焦于粘附/脱附前沿，导出了以梁曲率或弯矩突变为特征的临界粘附边界条件。随后，Majidi 等^[16, 17]通过变分法推导得到了相同的粘附边界条件，并建立了适用于梁与弹性体粘附问题的控制方程。最新研究进展方面，Okegbu 等^[18]和 Nguyen 等^[19]通过发展大挠度条件下的 J 积分分析方法，成功将其应用于悬臂梁夹层复合材料测试构型的能量释放率计算。该工作突破了传统小变形理论的局限，为复合材料界面失效分析提供了新的理论工具。可以发现，J 积分方法可有效用于粘附问题去描述脱粘尖端出的能量释放率。

在轴对称粘附问题的研究中，问题的复杂性源于薄板固有的非线性弹性特征，以及板弯曲、横向挠曲引发的薄膜拉伸和板内初始残余预应力等多重因素的耦合作用。现有成果主要集中于特定极限条件下的理论分析，忽略弯曲、拉伸和预应力三种效应中的一种或两种进行简化，以获得相应的解析解或近似解。例如通过忽略圆板内部的拉伸效应和预应力，将问题线性化后推导出解析解^[20-22]。针对薄膜拉伸引起的几何非线性问题，Sun 等^[21]和 Gong 等^[23]采用了数值计算方法处理复杂的非线性方程，而 Williams^[24]、Wan^[25]以及 Xu 和 Liechti^[26]则基于径向应力均匀分布的假设提出近似解，但这些假设在物理本质上存在偏差。尽管薄板的临界粘附条件与粘附行为可在不同极限条件下进行讨论，但这些不同作用机制的显现条件与适用范围仍不明确。因此，目前仍缺乏能够为实验研究提供直接指导的机理图谱，用以规避或利用粘附现象。

在刚性基底与薄板粘附的问题中，薄板的粘附与否取决于薄板的力学性质和界面本征特性。但在柔性基底上，基底的变形使得问题变得复杂，粘附还与弹性基底的厚度、杨氏模量及泊松比等力学参数密切相关^[27-31]。探究薄层粘接剂在机械载荷作用下

的变形演化规律与裂纹萌生机理，首先需要准确描述薄层的变形。

薄层弹性体变形研究中，Winkler 地基模型（又称弹性地基模型）是最广泛应用的模型^[32]。该模型假定弹性层表面某位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ 处的法向位移 w 与局部法向应力呈线性关系，可表示为

$$w(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{k_w} \quad (1.1)$$

式中 k_w 为 Winkler 地基刚度系数。Skotheim 等^[33]借助流体动力润滑理论类比推导，得到该刚度系数可表达为

$$k_w = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G}{d}, \quad (1.2)$$

其中 ν 、 G 和 d 分别表示弹性层的泊松比、剪切模量及厚度。在该理论模型中，弹性层被等效为离散分布的弹性弹簧阵列，因而经典线性弹性断裂力学中的平方根奇异性特征在此不再显现。尽管如此，研究者仍可通过变分分析法与 J-积分法计算 Winkler 弹性地基对应的能量释放率：

$$\mathcal{G} = \frac{p^2}{2k_w} = \frac{1}{2} pw = \frac{1}{2} k_w w^2. \quad (1.3)$$

该能量释放率表征接触边缘或分层前缘处的力学状态^[34-38]。当 $\mathcal{G} = \gamma$ 时发生界面分层，其中 γ 表示粘接层与被粘物间的有效界面韧性。

值得注意的是，当粘接层接近不可压缩 ($\nu \rightarrow 1/2$) 时，Winkler 地基模型的刚度系数 $k_w \rightarrow \infty$ 会趋向无穷大，导致模型预测结果与实际情况不符。这是因为该模型未能考虑不可压缩材料通过剪切产生的变形^[39, 40]。Dillard 等^[40]的研究表明，对于完全不可压缩的薄粘接层，其垂直变形实际上与压力的二阶导数相关，具体关系可表示为：

$$w(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k_I} \nabla^2 p(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

该模型已被拓展至二维构型的研究中，其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为二维空间下的拉普拉斯算子。不可压缩模量 k_I 的值取决于粘接层表面的边界条件：当表面剪切位移为零时 $k_I = 12G/d^3$ ^[40, 41]；而当表面剪切应力为零时 $k_I = 3G/d^3$ ^[39]。这与流体润滑理论中的前置系数类似^[42]。

在上述的理论研究工作中，所用到的 JKR 理论、Griffith 理论和 J 积分方法在本质上是等效的宏观研究方法，它们都假设界面特性可以仅用粘附能来描述。然而，当梁与基底之间的间隙达到亚微米尺度时，采用 Dugdale 型方法（特别是基于 Lennard-Jones 势函数描述界面相互作用）去描述长程作用力更为合适。Liu 等^[43]通过对石墨薄片的实验研究验证了这一方法的有效性。Wagner 和 Vella^[44]的数值模拟进一步表明，当系

统特征长度增大时，基于 Lennard-Jones 势函数计算的粘附行为会逐渐收敛到宏观跳跃边界条件预测的结果。除此之外，微纳尺度下金属材料的力学行为也表现出强烈的尺度效应。例如，当铜丝直径从 $50 \mu\text{m}$ 减小到 $20 \mu\text{m}$ 时，无量纲的扭矩增加约 2 倍^[45, 46]；柔性基底上受限金属铬薄膜厚度从 500 nm 减小到 50 nm 时，断裂强度增加约 3.7 倍^[47]。

1.3 拟解决的问题及本文的研究内容

1.3.1 拟解决的问题

拟解决的问题 1：如何高效评估不同变形模式下界面粘附的。该问题的复杂性主要源于薄板固有的非线性弹性特性，以及与三种力学效应间的复杂耦合作用：其一为板弯曲变形，其二为横向挠度引发的薄板拉伸效应，其三为板内初始残余预应力。这三种机制的协同作用使得理论建模面临本构方程非线性耦合的挑战。

拟解决的问题 2：如何描述软基底对于界面脱粘的影响。弹性体粘接剂广泛应用于各类工程系统中，其粘接层通常位于两个柔性或刚性基材之间。受限粘接层的力学参数（包括厚度、弹性模量和泊松比）对粘接性能的影响与表面化学性质同等重要。已有研究多在完全可压缩或完全不可压缩的假设下讨论该构型，但实际弹性体粘接层很少呈现这两种理想状态。亟须定量刻画材料可压缩性对于脱粘行为的影响，以及探究脱粘前沿边界条件的普适性和有效性。为航空航天、柔性电子等领域的粘接界面优化设计提供了理论依据。

拟解决的问题 3：如何描述界面粘附作用的尺度效应和材料力学行为的尺度效应。发展合适的理论框架探究微纳尺度下基底弹性与界面长程作用力的耦合作用下薄板的脱粘特性，揭示材料力学行为的尺度效应对脱粘行为的影响。可为微纳机电系统中柔性粘接层设计、微流控芯片界面可靠性评估及可穿戴电子器件跨尺度粘附分析等工程领域提供理论指导，为涉及软粘接层或微纳尺度结构的系统优化提供普适性理论工具。

1.3.2 本文的研究内容

针对上述拟解决的问题，本文对薄板粘附及开展了研究，余下各章节的安排概述如下：

在第二章，通过建立轴对称粘附问题的非线性控制方程和关键边界条件，系统阐述该物理模型的理论框架。我们将识别若干关键物理参数，并探讨不同参数域下控制方程的简化形式。重点研究四种典型工况：纯弯曲工况、弯曲-预应力耦合工况、纯预

应力工况以及纯拉伸工况。针对每种工况，我们不仅推导出临界粘附条件和粘附长度的解析解，还通过与完整控制方程的数值解对比验证了解析解的准确性。基于这些结果，构建了相图去揭示轴对称粘附问题中薄板丰富的粘附行为特征，并具体说明该相图在薄板器件结构可靠性实验评估中的应用方法。

在第三章，首先建立平面条件下任意泊松比薄粘接层的力学模型，并推导相应的脱粘条件，通过解析解、内聚区模型和实验相结合的方法，系统比较不同边界条件的计算结果，并深入分析粘接层的等效可压缩性对于脱粘行为的影响。最后，总结本研究的主要发现及其工程应用价值。

在第四章，重点探讨薄弹性基底和长程界面力对粘附条件及行为的影响机制及其适用边界。建立基于 Griffith 型和 Dugdale 型理论的薄板脱粘模型；通过定义脱粘区与接触区特征长度的比值作为过渡参数，成功建立弹性/刚性基底结果的统一关联。最后重点讨论 Dugdale 模型及相应的过渡参数。

在第五章，总结全文主要内容和结论，并对薄板界面脱粘行为的研究进行了展望。

第二章 薄板轴对称粘附的状态分析

2.1 引言

预拉伸弹性薄板与微腔底部的粘附现象，这种情形常见于从压力传感器到微流控器件等各种薄膜器件中。该粘附现象在纳米/微机电系统领域亦称为"静摩擦"。我们研究的几何构型具有轴对称特性（故将此问题称为"轴对称粘附"）。

为实现对薄板粘附现象的预测或利用，建立能够预测粘附临界条件及粘附发生后接触长度的理论模型至关重要^[48]。这正凸显了本文研究的薄板粘附问题（鉴于其轴对称特性称为"轴对称粘附"）的核心价值。从粘附力学或断裂力学角度而言，固体表面间的粘附能显然是驱动粘附现象的唯一能量来源^[49]。该问题的复杂性源于薄板固有的非线性弹性特性，以及板的弯曲、横向挠度诱导的膜拉伸与初始残余预张力三者间的复杂耦合作用^[50, 51]。现有研究主要集中于轴对称粘附问题的简化情况，忽略弯曲、拉伸和预张力效应中的一至两项。尽管薄板的临界粘附条件与粘附行为可在不同极限情况下讨论，但这些状态的出现条件与适用范围尚未完全明晰。因此，目前仍缺乏能为实验研究中静摩擦现象的抑制或利用提供直接指导的状态图谱。

本文重点讨论了由弯曲、拉伸和预张力效应相互作用所产生的轴对称粘附问题的多种极限状态。具体而言，我们分析了该问题中的关键无量纲物理参数，并界定了这些参数用于区分不同状态的范围。通过这种分类方法，我们推导出了不同状态下临界粘附条件和粘附长度的解析/渐近解，其中多个解析解答在现有文献中尚未见报道。这些解析结果不仅通过数值计算得到验证，还与基于 3-500 nm 厚度的二维材料的实验结果进行了对比。因此，本研究完整阐述了与轴对称粘附相关的物理状态，建立的"状态图谱"可直接用于评估快速发展的薄板器件的结构可靠性。

2.2 轴对称粘附理论模型

在第小节中，通过讨论非线性控制方程引入了轴对称粘附的物理模型。同时详细阐述了求解该粘附问题所需的基本边界条件。研究识别出了该问题中的几个关键物理参数，并探讨了在不同参数状态下控制方程可能的简化形式。

2.2.1 轴对称模型

如图 2.1 所示，典型器件中的轴对称粘附问题通常涉及厚度为 t 的薄板悬置于半径为 R_f 、深度为的圆形微腔上方。在常规实验配置中，通常将薄板置于微腔顶部来实现

该结构，这会导致板内产生残余应力或预张力 N_0 ^[52]。为简化分析，假设该预张力是均匀分布。同时，我们考虑悬臂板边缘与基底接触处采用固支边界条件，这等效于在悬臂板边缘施加恒定位移约束。多数实验中几何参数满足 $t \ll R_f$ 和 $h^2/R_f^2 \ll 1$ 的条件。基于此，我们采用 Föppl–von Kármán (FvK) 方程描述薄板的挠曲变形^[51]。在此框架下，薄板的力学特性由泊松比 ν 、弯曲刚度 B 和面内刚度 Et 表征，其中 E 为杨氏模量。

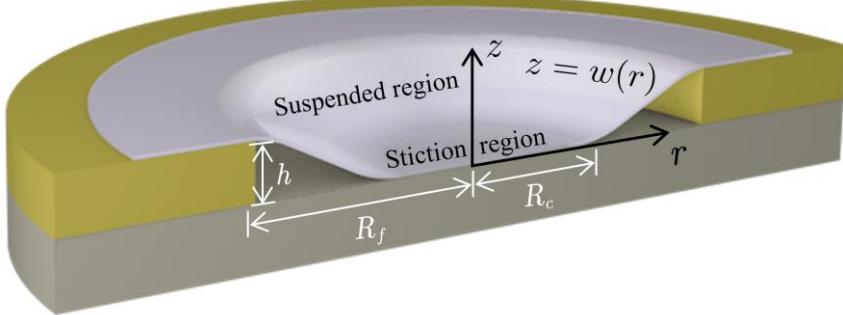


图 2.1 轴对称薄板粘附分析的示意图及参数标注。厚度为 t 的薄板粘附于微腔底部，粘附半径为 R_c 。圆形空腔的半径为 R_f 、深度为 h

当发生粘附时，薄板与微腔底部接触，形成半径为 R_c 的圆形接触区域（如图 2.1 所示）。确定该 R_c 需要建立薄板与基底相互作用的界面定律^[53]。考虑到实际应用中微腔深度从数十纳米到数毫米不等，采用单位面积粘附能 γ 来表征界面作用。这一简化忽略了分子间力的长程效应^[53, 54]。此外，我们有意忽略了薄板与基底间摩擦力的影响，但对于很多结构是合理的，比如二维材料体系，因为其表面具有自润滑特性^[55]。

2.2.2 关键参数

本研究的主要目标是探究粘附发生的可能性，并分析 R_c 值如何受系统几何与物理参数的影响。为此，我们引入以下无量纲参数（这些参数将在后文详细讨论）：

$$\lambda = \frac{R_c}{R_f}, \quad \mathcal{N} = \frac{N_0 R_f^2}{Eth^2}, \quad \Gamma = \frac{\gamma R_f^4}{Eth^4}, \quad \mathcal{K}_h = \frac{Eth^2}{B}. \quad (2.1)$$

其中 λ 表示接触区域半径 R_c 与微腔半径 R_f 的相对比值，表征预张力 \mathcal{N} 与挠曲诱导张力的比值（薄板粘附会产生量级为 $\epsilon_{\text{induced}} \sim h^2/R_f^2$ 的拉伸应变）。 Γ 反映单位面积粘附能 γ 与诱导拉伸能量密度 ($\sim Eth^2$) 的比值。 \mathcal{K}_h 是比较诱导拉伸能量密度与弯曲能量密度 ($\sim B\kappa_{\text{induced}}^2$)，其中诱导曲率 $\kappa_{\text{induced}} \sim h/R_f^2$ 。表 1 汇总了可穿戴电子器件、二维材料器件等 MNEMS 实验中的相关参数取值。我们基于最大残余应变为 0.1% 估算了预张力，结果发现 \mathcal{N} 通常小于 10，而 \mathcal{K}_h 的实验值分布在 10^{-2} 至 10^7 范围内。这些特性促使我们开展不同 \mathcal{N} 和 \mathcal{K}_h 状态下系统的 $\lambda-\Gamma$ 关系（粘附长度-粘附强度关系）的研究。

Reference		Radius R_f	Height h	Thickness t	\mathcal{K}_h	\mathcal{N}
Ma et al. (2017)	S1	~500 μm	~100 μm	~200 μm	~ 10^0	~0.03
	S2	~1000 μm	~100 μm	~200 μm	~ 10^0	~0.10
	S3	~1000 μm	~200 μm	~200 μm	~ 10^1	~0.03
	S4	~2000 μm	~200 μm	~200 μm	~ 10^1	~0.10
Radha et al. (2016)	S5	~65 nm	~1 nm	~52 nm	~ 10^{-1}	~5.20
	S6	~65 nm	~1 nm	~12 nm	~ 10^0	~5.20
Sun et al. (2020)	S7	~500 nm	~50 nm	~0.34 nm	~ 10^6	~0.10
	S8	~1000 nm	~50 nm	~12 nm	~ 10^6	~0.40
José Cartamil-Bueno et al. (2017)	S9	~5000 nm	~630 nm	~0.68 nm	~ 10^7	~0.06
	S10	~5000 nm	~285 nm	~0.34 nm	~ 10^7	~0.30
Ronceray et al. (2023)	S11	~1500 nm	~45 nm	~48 nm	~ 10^{-1}	~1.10
Yang et al. (2020)	S12	~75 nm	~1 nm	~50 nm	~ 10^{-2}	~12.20
Esfandiar et al. (2017)	S13	~65 nm	~1 nm	~70 nm	~ 10^{-2}	~9.40
Lee et al. (2019)	S14	~5000 nm	~285 nm	~7 nm	~ 10^4	~0.30
Davidovikj et al. (2017)	S15	~2500 nm	~110 nm	~6 nm	~ 10^5	~0.52

表 2.1 文献中相关器件的几何参数与控制参数汇总

2.2.3 问题描述

我们首先讨论薄板理论以及轴对称粘附问题的粘附判据。系统的总能量可表示为：

$$\Pi = \Pi_B + \Pi_S - \pi R_c^2 \gamma, \quad (2.2)$$

其中 Π_B 和 Π_S 分别表示薄板中储存的弯曲能量和拉伸能量。基于线性材料本构和小假设 [51]，这两个弹性能量项可展开表示为：

$$\Pi_B = 2\pi B \int_{R_c}^{R_f} \frac{1}{2} \left(w''^2 + \frac{1}{r^2} w'^2 + \frac{2}{r} \nu w' w'' \right) r \, dr, \quad (2.3)$$

以及

$$\Pi_S = 2\pi \int_0^{R_f} \left(\frac{1}{2} N_r \varepsilon_r + \frac{1}{2} N_\theta \varepsilon_\theta \right) r \, dr. \quad (2.4)$$

此处， w 表示薄板的面外位移（如图 2.1 所示）， $x' = dx/dr$ ； N_r 与 N_θ 分别为径向和周向应力合力。 $\varepsilon_r = (N_r - \nu N_\theta)/Et$ 和 $\varepsilon_\theta = (N_\theta - \nu N_r)/Et$ 则分别为径向和周向应变分量。根据薄板中面的运动学关系，可得 $\varepsilon_r = u' + w'^2/2$ 及 $\varepsilon_\theta = u/r$ ，其中 u 表示中面内的面内位移。

能量原理（或称变分原理）是求解该问题最有效的方法，因为它可以推导出不同状态下的控制方程和粘附条件。我们将变分原理应用于公式 2.1 可给出的总能量 $\Pi(u, w, w', w'')$ ，考虑移动边界条件，即 $\delta R_c \neq 0$ 。令 $\delta u \neq 0$ ，可得到面内平衡方程：

$$\frac{d}{dr}(rN_r) - N_\theta = 0 \quad (2.5)$$

对于 $0 < r < R_f$ 区域，同理，令 $\delta w \neq 0$ 可导出面外平衡方程：

$$B \nabla^2 \nabla^2 w - N_r \kappa_r - N_\theta \kappa_\theta = 0 \quad (2.6)$$

对于 $R_f < r < R_c$ 区域，其中 $\kappa_r = d^2 w / dr^2$ 和 $\kappa_\theta = r^{-1} dw / dr$ 分别表示径向曲率和环向曲率，微分算子 $\nabla^2 f = d^2 f / dr^2 + r^{-1} df / dr$ 。平衡方程公式 2.5 和 2.6 是经典 FvK 方程的轴对称形式 [51]。在薄板粘附区域 $0 < r < R_f$ （此处 $w = 0$ ），控制方程可简便求解。根据变分过程中自然采用的连续性条件，我们得到悬浮部分的边界条件：

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad \text{and} \quad u' = u/r \quad \text{at} \quad r = R_c, \quad (2.7)$$

其中第三个边界条件源于粘附区域内的等双轴应力状态。此外，在薄板/空腔边缘还存在以下自然边界条件：

$$w = h, \quad w' = 0, \quad \text{and} \quad u/r = (1 - \nu) N_0 / Et \quad \text{at} \quad r = R_f, \quad (2.8)$$

其中的第三个边界条件源于预张力导致的规定面内位移。最后，总能量中的粘附效应会导致接触区域边缘处薄板曲率发生突变：

$$\gamma - \frac{1}{2} B [w''(R_c)]^2 = 0, \quad (2.9)$$

该条件在文献中已有讨论 [15, 17]。从物理意义上说，这一条件表明在粘附前沿处薄板的能量释放率等于粘附能。

为简化分析，引入 Airy 应力函数 ϕ ，令 $N_r = r^{-1} d\phi / dr$ 和 $N_\theta = d^2 \phi / dr^2$ ，此时面内平衡方程公式 2.5 自动满足。因此，公式 2.6 可表示为：

$$B \nabla^2 \nabla^2 w - [\phi, w] = 0, \quad (2.10)$$

以及 Airy 应力函数的相容性条件

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} Et [w, w] = 0, \quad (2.11)$$

其中 $[f, g] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} \right)$ 。

2.2.4 无量纲化处理

我们选取薄板半径 R_f 和微腔深度 h 分别作为水平和垂直方向的特征长度，同时采用固有面内刚度 E^t 对问题进行无量纲化处理。具体而言，进行如下变换：

$$\rho = \frac{r}{R_f}, W = \frac{w}{h}, \bar{u} = \frac{uR_f}{h^2}, \bar{N}_r = \frac{N_r R_f^2}{E^t h^2}, \bar{N}_\theta = \frac{N_\theta R_f^2}{E^t h^2}, \bar{\Pi} = \frac{\Pi R_f^2}{E^t h^4}, \Phi = \frac{\phi}{E^t h^2}. \quad (2.12)$$

由此得到面外平衡方程的无量纲形式：

$$\mathcal{K}_h^{-1} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} - \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \frac{dW}{d\rho} \right) = 0 \quad (2.13)$$

以及相容性方程

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\rho} \right)^2 = 0 \quad (2.14)$$

并满足以下边界条件：

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= 0, & W'(\lambda) &= 0, & \Phi(\lambda) &= 0, & \Phi''(\lambda) - \Phi'(\lambda)/\lambda &= 0, \\ W(1) &= 1, & W'(1) &= 0, & \Phi''(1) - \nu \Phi'(1) &= (1 - \nu) \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

以及粘附条件：

$$W''(\lambda) = (2\Gamma\mathcal{K}_h)^{1/2}, \quad (2.16)$$

其中关键参数 λ 、 \mathcal{N} 、 Γ 和 \mathcal{K}_h 已在公式 2.1 中定义。需注意 $\Phi(\lambda)$ 的选取具有任意性，因仅 $\Phi'(\lambda)$ 有具有物理意义。方程组 2.12-2.15 构成了轴对称粘附问题的完整理论体系。该边值问题及其未知量 λ 可直接通过 MATLAB 内置的常规边值问题求解器进行求解。下文将针对 \mathcal{K}_h 和 \mathcal{N} 处于若干极限状态的情形进行解析求解。

2.3 理论解答

2.3.1 弯曲主导情形 ($\mathcal{K}_h \ll 1, \mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$)

我们首先考虑一个简化情形，即系统的总弹性能仅包含弯曲能。此类轴对称情形在文献中已有研究 [3, 20, 21, 23, 25, 56]，并给出了解析解答。此时，公式 2.3 简化为

$$\bar{\Pi} = 2\pi \mathcal{K}_h^{-1} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{2} \left(W''^2 + \frac{1}{\rho^2} W'^2 + 2\nu \frac{1}{\rho} W' W'' \right) \rho \, d\rho - \pi \lambda^2 \Gamma. \quad (2.17)$$

该纯弯曲状态要求诱导弯曲能量密度 ($\sim Bh^2/R_f^4$) 远大于诱导拉伸能量密度 ($\sim Eth^4/R_f^4$) 和预张力贡献的能量密度 ($\sim N_0 h^2/R_f^2$)，即根据公式 2.1 有 $\mathcal{K}_h \ll 1$ 以及 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$ 。此条件下，控制方程可简化为：

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} = 0 \quad (2.18)$$

其解答为

$$W = \frac{a_1 \rho^2 + a_2 \rho^2 \log \rho + a_3 \log \rho + a_4}{(\lambda^2 - 1)^2 - (2\lambda \ln \lambda)^2}, \quad (2.19)$$

其中 a_1, a_2, a_3 和 a_4 是积分常数。通过公式 2.15 可得

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \lambda^2 - 2\lambda^2 \ln \lambda, \quad a_2 = 2(\lambda^2 - 1), \\ a_3 &= 4\lambda^2 \ln \lambda, \quad a_4 = \lambda^2 [\lambda^2 - 1 + 2\ln \lambda - 4(\ln \lambda)^2], \end{aligned} \quad (2.20)$$

以及一个可用于确定粘附长度 λ 的表达式：

$$\mathcal{K}_h \Gamma = 8 \left[\frac{1 + 2\ln \lambda - \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2 - (2\lambda \ln \lambda)^2} \right]^2. \quad (2.21)$$

该解析关系式 $\mathcal{K}_h \Gamma - \lambda$ 绘制于图 2.2 中(实线)，同时展示了未简化问题(公式 2.13-2.16)的数值解结果(彩色标记点)。显然，当参数满足 $\mathcal{K}_h \ll 1$ 且 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$ 时，数值解收敛于公式 2.21。图 2.2a 同时表明存在临界粘附能 Γ_{cr} ，当粘附能低于此值时粘附长度无解。最终可求得该临界粘附能及其对应的临界粘附长度分别为

$$\Gamma_{cr}^I \approx 157.3 / \mathcal{K}_h \quad \text{and} \quad \lambda_{cr}^I \approx 0.18, \quad (2.22)$$

其中上标 I 表示纯弯曲极限下的解。当 $\Gamma > \Gamma_{cr}$ 时，会出现两个满足粘附边界条件公式 2.21 或 2.14 的粘附长度解，但仅有一个具有物理意义。为说明这一点，图 2.2b 展示了系统在 $\Gamma = \Gamma_{cr}/2$ 、 Γ_{cr} 和 $2\Gamma_{cr}$ 时的总能量变化。当 $\Gamma = \Gamma_{cr}/2$ 时，总能量随 λ 单调递增，表明 $\lambda = 0$ (即不会发生粘附)。在 $\Gamma = \Gamma_{cr}$ 情况下， $\lambda = \lambda_{cr}$ 处出现局部能量极小值(图 2.2b 实心标记点)，这定义了纯弯曲极限下系统可实现的最小粘附长度。对于给定的 $\Gamma = 2\Gamma_{cr}$ ，较小的解(记为 λ_1^I) 对应不稳定的局部能量极大值，而较大的解(λ_2^I) 则对应稳定的局部能量极小值。此时，薄板可能不发生粘附(对应能量边界状态)或以 λ_2 的粘附长度与

微腔底部结合，具体取决于薄板的初始构型或转移至空腔的精准程度。

为便于指导薄板器件的设计，有必要重述 λ 随 Γ 变化的函数关系（图 2.2c）。图中采用虚线表示解的失稳分支，实线表示稳定分支。此外，我们通过令 $\Gamma = \Gamma_{\text{cr}}^{\text{I}}(1 + \delta_{\Gamma})$ 和 $\lambda = \lambda_{\text{cr}}^{\text{I}}(1 + \delta_{\lambda})$ ，其中 $|\delta_{\Gamma}|, |\delta_{\lambda}| \ll 1$ ，对式 2.21 进行摄动求解，可以得到

$$\lambda \approx \lambda_{\text{cr}}^{\text{I}} + 0.11 (\sqrt{\mathcal{K}_h \Gamma} - \sqrt{\mathcal{K}_h \Gamma_{\text{cr}}^{\text{I}}})^{1/2} \quad \text{as} \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_{\text{cr}}^{\text{I}} \quad (2.23)$$

由此得到图 2.2c 中的虚线。类似地，当粘附力远大于弹性力时，可以获得渐进行为：

$$\lambda \sim 1 - (18/\mathcal{K}_h \Gamma)^{1/2} \quad \text{as} \quad \Gamma \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

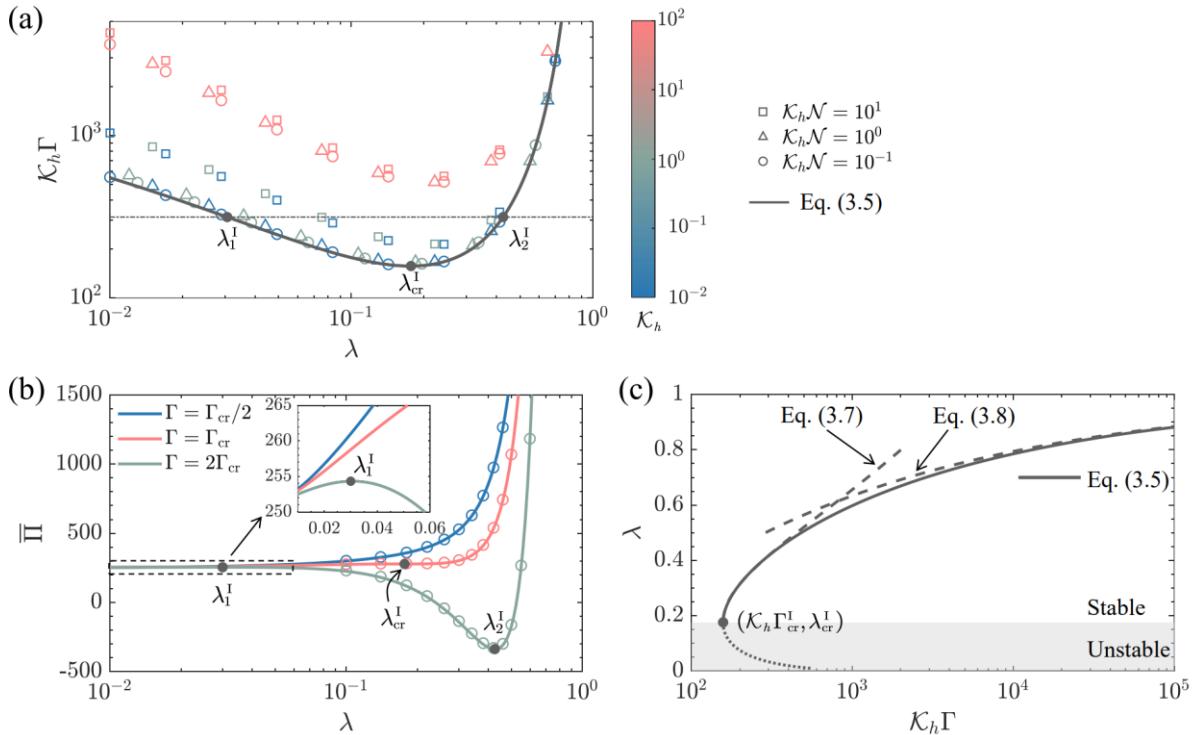


图 2.2 纯弯曲极限下的粘附行为 (a) 粘附能随粘附长度 $\mathcal{K}_h \Gamma$ 的变化关系。实线由式 2.21 给出，彩色标记点则通过数值求解方程组公式 2.13-2.16 获得（不同标记形状对应同 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 值，不同颜色表示 \mathcal{K}_h 大小）；(b) 系统总能量 $\bar{\Pi}$ 随 λ 的变化曲线（取 $\mathcal{K}_h = 10^{-1}$ 和 $\mathcal{N} = 0$ ）。实线通过将式 2.19 代入式 2.17 解析计算得到，彩色标记点基于公式 2.2 数值计算；(c) 粘附长度-粘附强度关系曲线。实线来自公式 2.21，虚线分别为渐近解公式 2.23 和公式 2.24。实心标记点标注了系统可实现的最小粘附长度及纯弯曲极限下触发粘附所需的最小粘附能。

2.3.2 弯曲和预应力主导情形 ($\mathcal{K}_h \ll 1, \mathcal{N} \gg 1$)

接下来考虑预张力的影响，同时仍忽略面内变形诱导张力的作用。该情形已在文

献中研究过, 但迄今尚未获得解析解^[25, 56]。沿用纯弯曲极限的思路, 可假设该状态下 $\mathcal{K}_h \ll 1$ 且 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \sim 1$ 。然而, 我们将证明该状态不仅限于 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \sim 1$, 特别是考虑到本节解析结果在 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \rightarrow 0$ 时可退化为纯弯曲极限 (2.3.1 节已讨论), 而在 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \rightarrow \infty$ 时可退化为预张力极限 (2.3.3 节讨论)。更准确的极限状态划分应基于诱导拉伸能相对于弯曲能或预张力贡献能可忽略的条件, 即 $\mathcal{K}_h \ll 1$ 或 $\mathcal{N} \gg 1$ 。此时系统总能量可简化为:

$$\begin{aligned}\bar{\Pi} = & 2\pi \mathcal{K}_h^{-1} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{2} \left(W''^2 + \frac{1}{\rho^2} W'^2 + 2\nu \frac{1}{\rho} W' W'' \right) \rho \, d\rho \\ & + 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\mathcal{N} \bar{\varepsilon}_r + \mathcal{N} \bar{\varepsilon}_\theta \right) \rho \, d\rho - \pi \lambda^2 \Gamma.\end{aligned}\quad (2.25)$$

因此, 控制方程可以表示为:

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} - \mathcal{K}_h \mathcal{N} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dW}{d\rho} \right) = 0. \quad (2.26)$$

公式 2.26 的解可通过将其转化为 $\nabla^2 W = pW$ 的形式求解, 其中 $p^2 - \eta^2 p = 0$ 且 $\eta^2 = \mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 。由此可以得到 $p=0$, η^2 , 因此通解为:

$$W = b_1 I_0(\eta\rho) + b_2 K_0(\eta\rho) + b_3 \log \rho + b_4, \quad (2.27)$$

其中 I_n 和 K_n ($n=0, 1, 2$) 分别表示第 n 阶第一类和第二类修正贝塞尔函数。公式 2.26 中的积分常数可通过应用公式 2.27 中的边界条件确定:

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{\eta [K_1(\eta) - \lambda K_1(\eta\lambda)]}{f(\eta, \lambda)}, \quad b_2 = \frac{\eta [I_1(\eta) - \lambda I_1(\eta\lambda)]}{f(\eta, \lambda)}, \\ b_3 &= \frac{-\eta^2 \lambda [K_1(\eta) I_1(\eta\lambda) - I_1(\eta) K_1(\eta\lambda)]}{f(\eta, \lambda)}, \\ b_4 &= \frac{1 + \eta K_1(\eta) [\eta \lambda I_1(\eta\lambda) \log \lambda - I_0(\eta\lambda)] - \eta I_1(\eta) [\eta \lambda K_1(\eta\lambda) \log \lambda + K_0(\eta\lambda)]}{f(\eta, \lambda)},\end{aligned}\quad (2.28)$$

其中 $f(\eta, \lambda) = 2 + \eta \lambda I_1(\eta\lambda) [\eta K_1(\eta) \log \lambda - K_0(\eta)] - \eta [I_0(\eta\lambda) K_1(\eta) + \lambda I_0(\eta) K_1(\eta\lambda) + I_1(\eta) K_0(\eta\lambda) + \eta \lambda I_1(\eta) K_1(\eta\lambda) \log \lambda]$ 。此外, 应用粘附条件公式 2.16 可得到粘附长度的表达式:

$$\mathcal{K}_h \Gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} b_1 \eta^2 [I_0(\eta\lambda) + I_2(\eta\lambda)] + \frac{1}{2} b_2 \eta^2 [K_0(\eta\lambda) + K_2(\eta\lambda)] - \frac{b_3}{\lambda^2} \right\}^2. \quad (2.29)$$

在图 2.3a 中, 我们根据公式 2.29 绘制了不同 η^2 值下 $\mathcal{K}_h \Gamma$ 随 λ 的变化曲线, 同时包含了方程组 (公式 2.13-2.16) 针对不同 \mathcal{K}_h 和 \mathcal{N} 的数值解。可以看出, 只要满足 $\mathcal{K}_h \ll 1$ 或 $\mathcal{N} \gg 1$, 公式 2.29 对任意 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 值均成立。当 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$ 时, 公式 2.29 趋近于与 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 无关的极限情

况，即前文讨论的纯弯曲极限。值得注意的是，与纯弯曲极限中的粘附行为类似，同时考虑弯曲和预张力的状态也存在临界粘附能/长度，超过该阈值会出现稳定的粘附长度解。这一特性可通过图 2.3b 中不同 Γ 下总能量随 λ 的变化曲线得以验证（该图特定取 $\mathcal{K}_h = 0.1$ 和 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} = 10$ ）。然而，与纯弯曲极限不同，在弯曲-预张力耦合状态下，临界粘附能及其对应的临界粘附长度均与 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 相关，如图 2.4 所示。

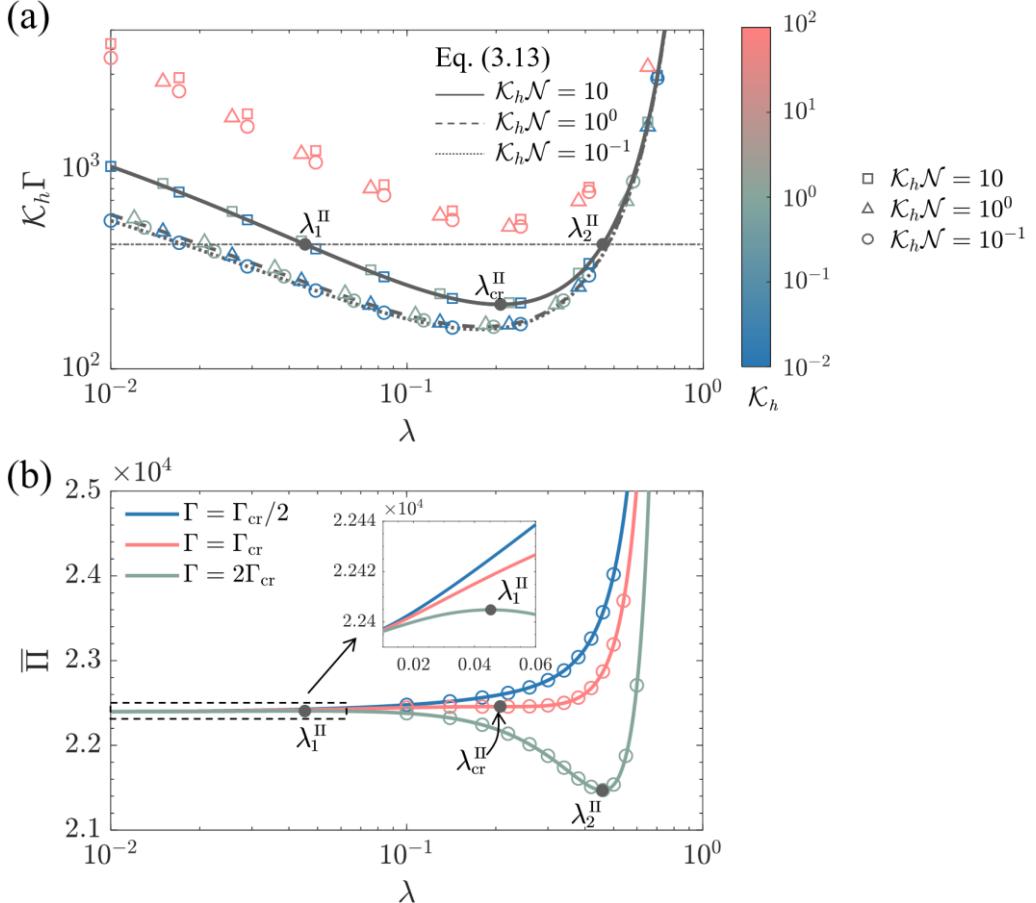


图 2.3 弯曲与预张力主导下的粘附行为: (a) 粘附能随粘附长度的变化关系 (取决于特定 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 值)。曲线由式 2.19 给出, 彩色标记点则基于方程组 (公式 2.13-2.16) 对不同 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 和 \mathcal{K}_h 的数值计算结果; (b) 结构总能量随脱粘长度的变化曲线 (对应不同预设粘附能)。实线由式 2.25 解析给出, 标记点为未简化数值解 (取 $\mathcal{K}_h = 0.1$ 和 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} = 10$)。

我们进一步研究了系统在 $\mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 较小和较大时的临界粘附能与粘附长度。对于 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$ 的情况, 我们将公式 2.29 右侧进行渐近展开, 保留至项 $O(\eta^2)$ 。值得注意的是, 该展开的首项与公式 2.22 右侧完全相同。因此, 我们通过引入 $\lambda_{cr}^{II} = \lambda_{cr}^I + \delta\lambda$ 和 $\Gamma_{cr}^{II} = \Gamma_{cr}^I + \delta\Gamma$ 来寻求最小粘附长度及其临界粘附能的摄动解。最终, 得到以下结果:

$$\lambda_{cr}^{II} \sim \begin{cases} \lambda_{cr}^I + \frac{1}{253} \mathcal{K}_h \mathcal{N}, & \text{for } \mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1 \\ \frac{1}{e} - \frac{2+e}{2e} (\mathcal{K}_h \mathcal{N})^{-1/2}, & \text{for } \mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

以及

$$\Gamma_{\text{cr}}^{\text{II}} \sim \begin{cases} \Gamma_{\text{cr}}^{\text{I}} + 5.5\mathcal{N}, & \text{for } \mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1 \\ \frac{1}{2}e^2 \mathcal{N} + \frac{2e^2 + e^3}{2}\mathcal{N}(\mathcal{K}_h \mathcal{N})^{-1/2}, & \text{for } \mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

其中 $\lambda_{\text{cr}}^{\text{I}}$ 和 $\Gamma_{\text{cr}}^{\text{I}}$ 已在纯弯曲状态的式 2.22 中讨论。类似地，我们在式 2.30 和 2.31 中给出了 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1$ 时临界粘附能和粘附长度的渐近行为。这些解析结果与式 2.29 一致，如图 2.2a 和 b 所示。

2.3.3 预应力主导情形 ($\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1, \mathcal{N} \gg 1$)

接下来考虑的是预张力主导其他效应（包括弯曲和诱导拉伸）的极限情况。延续前述讨论，这要求预张力相关的能量密度 ($\sim N_0 \epsilon_{\text{induced}}$) 远大于诱导弯曲能量密度 ($\sim Bh^2/R_f^4$) 和拉伸能量密度 ($\sim Eth^4/R_f^4$)，即 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1$ 和 $\mathcal{N} \gg 1$ 。虽然文献已研究过该特定情况，但临界粘附条件公式 2.9 如何简化尚不明确 [56-61]。我们再次通过最小化总能量来求解，此时总能量表达式为：

$$\bar{\Pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \left(N \bar{\varepsilon}_r + N \bar{\varepsilon}_\theta \right) \rho \, d\rho - \pi \lambda^2 \Gamma. \quad (2.32)$$

从能量的表达式最终可以得到控制方程为

$$\nabla^2 W = 0. \quad (2.33)$$

简化后的边界条件为 $W(\lambda) = 0$ 和 $W(1) = 1$ ，由此可得式 2.33 的解为

$$W = 1 - \log \rho / \log \lambda. \quad (2.34)$$

忽略弯曲项后，控制方程的阶数降低。相应地，粘附条件等价于在 $\rho = \lambda$ 处施加一个转折点，其斜率为：

$$\Gamma = \frac{1}{2} N [W'(\lambda)]^2. \quad (2.35)$$

由此我们得到一个简单的粘附强度-粘附长度关系式：

$$\Gamma = \frac{N}{2(\lambda \log \lambda)^2}. \quad (2.36)$$

我们在图 2.4a 中绘制了 $\Gamma/\mathcal{N} - \lambda$ 关系曲线（实线），并与未简化模型针对不同 \mathcal{K}_h 和 \mathcal{N} 的数值解（彩色标记点）进行比较。可以发现，该纯预张力极限仅当满足 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1$ 且 $\mathcal{N} \gg 1$ 时成立。类似地，该状态下也存在临界粘附能 $\Gamma_{\text{cr}}^{\text{III}}$ 和临界粘附长度（图 2.4b），其表达式为：

$$\Gamma_{\text{cr}}^{\text{III}} = \frac{Ne^2}{2} \quad \text{and} \quad \lambda_{\text{cr}}^{\text{III}} = \frac{1}{e}. \quad (2.37)$$

此外，我们给出了当粘附能接近临界粘附能和趋近无穷大时的解析 $\lambda - \Gamma$ 关系：

$$\lambda = \lambda_{\text{cr}}^{\text{III}} \left[1 + \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{cr}}^{\text{III}}} - 1 \right)^{1/2} \right] \quad \text{as} \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_{\text{cr}}^{\text{III}} \quad (2.38)$$

和

$$\lambda = 1 - \left(\frac{N}{2\Gamma} \right)^{1/2} \quad \text{as} \quad \Gamma \rightarrow \infty, \quad (2.39)$$

这些关系同样展示在图 2.4c 中。

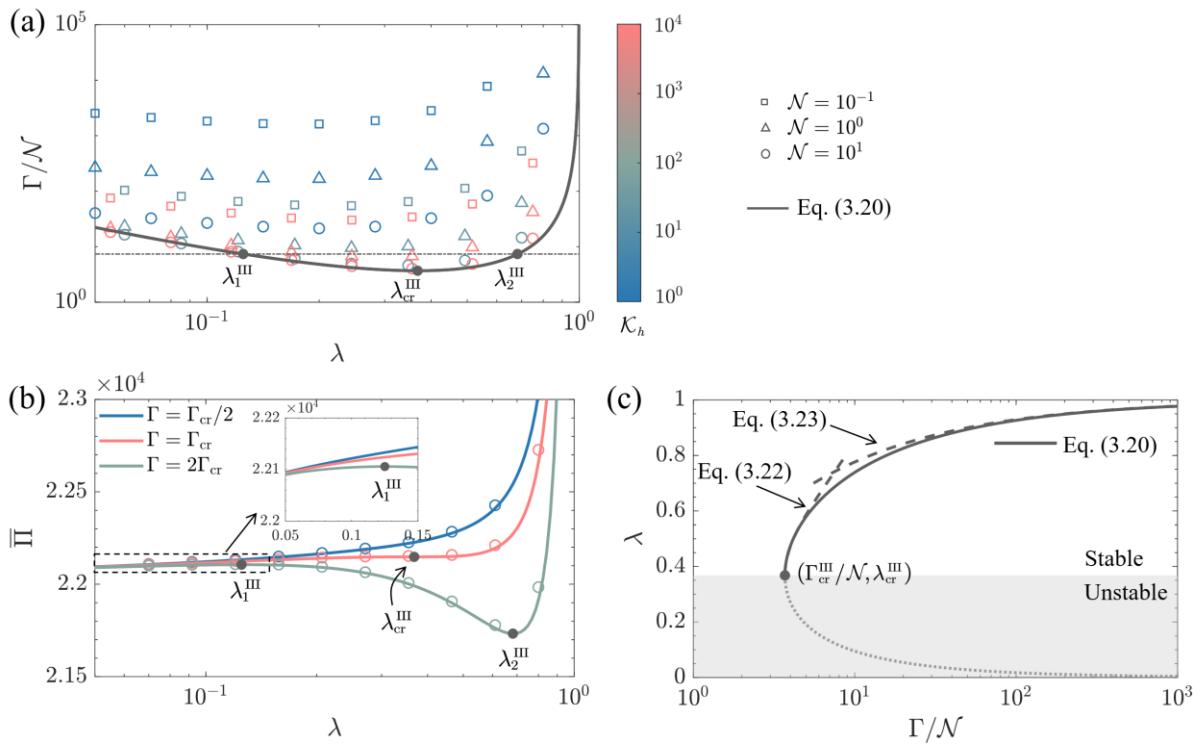


图 2.4 弯曲与预张力主导下的粘附行为：(a) 粘附能随粘附长度的变化关系（实线为公式 2.36）与不同 \mathcal{K}_h 和 \mathcal{N} 下数值解（彩色标记点）的对比；(b) 结构总能量随脱粘长度的变化曲线（对应不同预设粘附能）；(c) 由式 2.36 给出的粘附长度-粘附强度关系曲线。实心标记点表示单纯预张力主导下最小稳定粘附长度及其对应粘附能。

2.3.4 拉伸主导情形 ($\mathcal{K}_h \gg 1, \mathcal{N} \ll 1$)

我们继续讨论轴对称粘附问题的最后一个极限情形-纯拉伸状态, 即 $\mathcal{K}_h \gg 1$ 且 $\mathcal{N} \ll 1$ 。这意味着由粘附引起的诱导拉伸能量密度 ($\sim E h^4 / R_f^4$) 远大于诱导弯曲能量密度 ($\sim B h^2 / R_f^4$) 和预张力相关能量密度 ($\sim N_0 h^2 / R_f^2$)。此时, 系统的总能量表达式为:

$$\bar{\Pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (\bar{N}_r \bar{\varepsilon}_r + \bar{N}_\theta \bar{\varepsilon}_\theta) \rho \, d\rho - \pi \lambda^2 \Gamma. \quad (2.40)$$

同样地, 对总能量在移动边界 $\rho = \lambda$ 处进行变分分析, 可以得到问题的控制方程, 包括面外平衡方程:

$$\frac{d}{d\rho} (\Phi' W') = 0, \quad (2.41)$$

以及相容方程

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \Phi') \right] + \frac{1}{2} W'^2 = 0. \quad (2.42)$$

此处为方便起见, 我们采用 Airy 应力函数 Φ , 其中 $\bar{N}_r = \Phi'/\rho$ 和 $\bar{N}_\theta = \Phi''$ 。在纯拉伸状态下, 该问题的求解需满足以下边界条件:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= 0, & W(1) &= 1, \\ \Phi'(\lambda) - \lambda \Phi''(\lambda) &= 0, & \Phi''(1) - \nu \Phi'(1) &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

以及 $\rho = \lambda$ 处的简化的粘附条件:

$$\Gamma = \frac{1}{2\lambda} \Phi'(\lambda) [W'(\lambda)]^2. \quad (2.44)$$

先前针对公式 2.41-公式 2.44 描述的非线性问题的解析解通常需要引入应力均匀恒定等假设, 从而导致精度受限 [24, 25]。而 Jin [62]给出的解虽精确但为隐式, 仅讨论了 $\lambda_{cr}^{IV} \approx 1.9$ 时的极限情况, 缺失临界粘附能等重要参数。本文采用 Scherwin 型解法 [63, 64], 其基本思想基于以下解的形式:

$$\hat{W}(\rho) = 1 - \frac{1 - \rho^{2/3}}{1 - \lambda^{2/3}} \quad \text{and} \quad \hat{\Phi}'(\rho) = \frac{\rho^{1/3}}{4(1 - \lambda^{2/3})^2}, \quad (2.45)$$

此解答满足控制方程但是不满足边界条件。为此引入附加摄动项:

$$W = \widehat{W} + \widetilde{W} \quad \text{and} \quad \Phi' = \widehat{\Phi}' + \widetilde{\Phi}' \quad (2.46)$$

其中 $|\widetilde{W}| \ll \widehat{W}$ 且 $|\widetilde{\Phi}'| \ll \widehat{\Phi}'$ 。将式 2.45 代入平衡方程公式 2.41 和相容方程公式 2.24 并忽略高阶项，可得到一对简化的摄动控制方程：

$$\widetilde{\Phi}' \widehat{W}' + \widetilde{W}' \widehat{\Phi}' = 0, \quad (2.47)$$

和

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \widetilde{\Phi}') \right] + \widetilde{W}' \widehat{W}' = 0. \quad (2.48)$$

联立这两个方程可得到关于 Φ' 的单一解析可解方程：

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \widetilde{\Phi}') \right] - \frac{16}{9\rho} \widetilde{\Phi}' = 0, \quad (2.49)$$

可以解得：

$$W(\rho) = 1 - \frac{1}{1 - \lambda^{2/3}} \left[1 - \rho^{2/3} + \frac{4}{3} d_1 (\rho^2 - 1) - 2 d_2 (\rho^{-4/3} - 1) \right] \quad (2.50)$$

和

$$\Phi' = \frac{1}{(1 - \lambda^{2/3})^2} \left(\frac{1}{4} \rho^{1/3} + d_1 \rho^{5/3} + d_2 \rho^{-5/3} \right), \quad (2.51)$$

该解可满足式 2.41 至公式 2.43 中的所有方程。具体而言，积分常数 d_1 和 d_2 由式 2.43 中的边界条件确定：

$$d_1 = \frac{4(1 - 3\nu) + \lambda^2(5 + 3\nu)}{16(3\nu - 5) + 4\lambda^{10/3}(5 + 3\nu)}, \quad d_2 = \frac{\lambda^2[5 - 3\nu + \lambda^{4/3}(1 - 3\nu)]}{16(3\nu - 5) + 4\lambda^{10/3}(5 + 3\nu)}. \quad (2.52)$$

因此，我们可以利用该摄动解及式 2.44 来确定满足以下关系的粘附长度 λ ：

$$\Gamma = \frac{(\lambda^2 + 4d_1\lambda^{10/3} + 4d_2)(\lambda^2 - 4d_1\lambda^{10/3} - 4d_2)^2}{18\lambda^{22/3}(\lambda^{2/3} - 1)^4}. \quad (2.53)$$

在图 2.5a 中，我们绘制了式 2.53 的解析 $\Gamma - \lambda$ 关系曲线，并与方程组（公式 2.13-公式 2.16）的数值解（圆形标记对应 $\nu = 1/3$ ，三角形标记对应 $\nu = 1/2$ ）进行对比。发现解析结果与数值解高度吻合，尤其在临界粘附点附近。此外，鉴于泊松比 ν 的影响有

限，此处采用 $\nu=1/3$ 进一步简化式 2.52，可得到：

$$\lambda \approx \lambda_{\text{cr}}^{\text{IV}} + 0.14(\Gamma - \Gamma_{\text{cr}}^{\text{IV}})^{1/2} \quad \text{as} \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_{\text{cr}}^{\text{IV}}, \quad (2.54)$$

以及

$$\lambda \approx 1 - \left(\frac{2\Gamma}{9} \right)^{1/3} \quad \text{as} \quad \Gamma \rightarrow \infty, \quad (2.55)$$

其中

$$\Gamma_{\text{cr}}^{\text{IV}} \approx 3.0 \quad \text{and} \quad \lambda_{\text{cr}}^{\text{IV}} \approx 0.19. \quad (2.56)$$

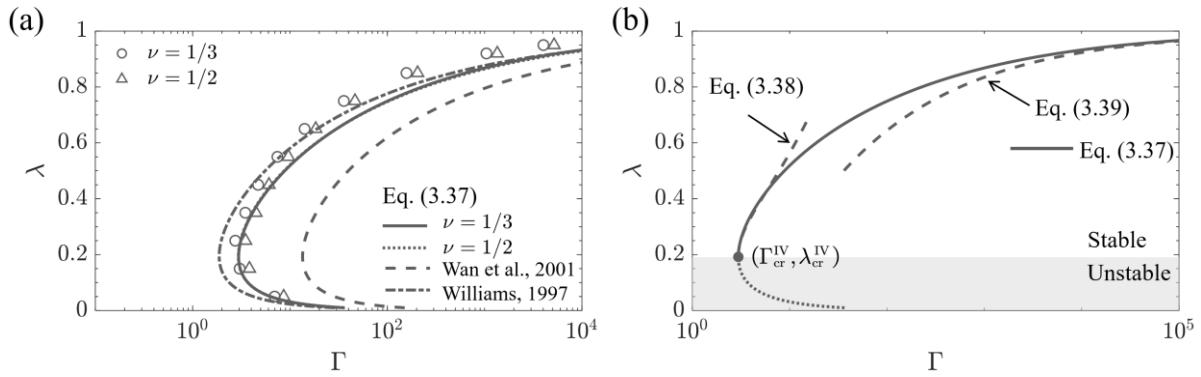


图 2.5 拉伸主导下的粘附行为：(a) 粘附能随粘附长度的变化关系（实线为公式 2.52）与不同泊松比下数值的对比；(b) 基于摄动解的粘附能与粘附半径关系曲线。

2.4 实验对比

在详细讨论了弹性薄板在不同参数区域的丰富粘附行为后，我们将这些解析结果整合为图 2.6 所示的统一区域图。具体而言，我们分别标定了以下四种典型状态的临界粘附条件和粘附长度：纯弯曲主导（适用于 $\mathcal{K}_h \ll 1, \mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1$ ）；纯预张力主导（适用于 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1, \mathcal{N} \gg 1$ ）；纯拉伸主导（适用于 $\mathcal{K}_h \gg 1, \mathcal{N} \ll 1$ ）；弯曲和预张力主导（适用于 $\mathcal{K}_h \ll 1, \mathcal{N} \gg 1$ ）。需特别说明的是，弯曲-预张力耦合区包含 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \ll 1$ 和 $\mathcal{K}_h \mathcal{N} \gg 1$ 两组解析解：前者在 $\mathcal{N} \ll 1$ 时退化为纯弯曲解，后者在 $\mathcal{K}_h \gg 1$ 时退化为纯预张力主导下的解。各区域边界（即图 2.6 中实线）定义为渐近解与数值解的偏差达到 10% 的位置。

图 2.7 展示了该区域图在实验中的应用案例，包括表 2.1 总结的穿戴式电子器件（石墨烯、二硫化钨、ecoflex）、二维材料器件和微/纳机电系统（M/NEMS）器件等多尺度结构的可靠性评估。通过对实验参数与理论区域的对应关系，可有效预测器件在实际工况下的粘附失效风险。

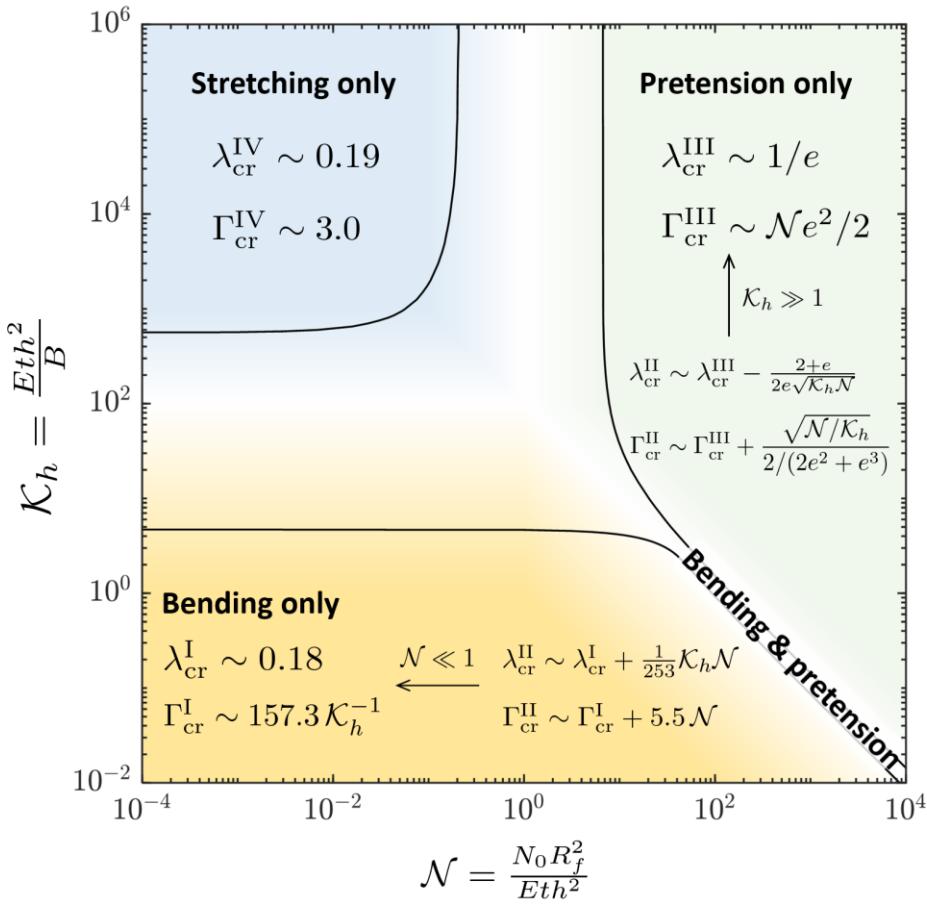


图 2.6 轴对称粘附问题的参数区域图。在不同参数空间 $\{\mathcal{K}_h, N\}$ 内，触发粘附所需的临界粘附能及对应的最小粘附长度具有显著差异。

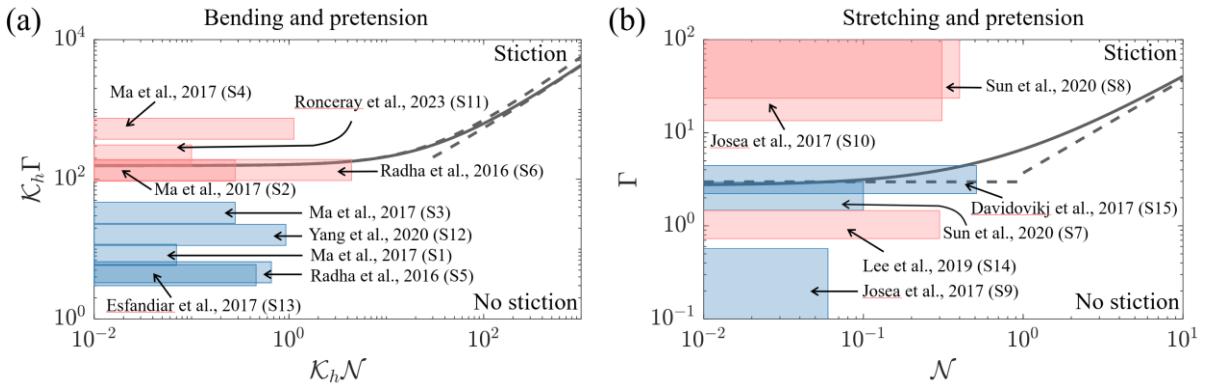


图 2.7 粘附理论预测与可穿戴器件、二维材料和 M/NEMS 器件实验观测的对比。图中红色阴影区域表示实验中观察到粘附现象，蓝色阴影区域表示器件成功制备无粘附。(a) \mathcal{K}_h 值比较小（可忽略诱导拉伸）的粘附区域图。实线为 $\mathcal{K}_h = 0.1$ 时临界粘附能的数值解，两条虚线分别对应弯曲-预张力耦合区在 $\mathcal{K}_h N \ll 1$ 和 $\mathcal{K}_h N \gg 1$ 时的渐近解。 (b) 大 \mathcal{K}_h 值的粘附区域图。实线为 $\mathcal{K}_h = 10^4$ 时采用腔体边缘固定（无滑移）边界条件的数值解，点线为采用无剪切边界条件的数值解。显然，基底上的板滑移会降低临界粘附能从而促进粘附发生。虚线分别为纯预张力极限和纯拉伸极限的摄动解

表 2.1 总结的薄板器件物理参数具有 \mathcal{K}_h 极大或极小的特征。因此，我们在图 2.7 中绘制了数值计算的粘附判据主曲线：对于 $\mathcal{K}_h \ll 1$ 的情况（图 2.7a）表现为临界 $\mathcal{K}_h \Gamma - \mathcal{K}_h \mathcal{N}$ 关系，而对于 $\mathcal{K}_h \gg 10^4$ 的情况（图 2.7b）表现为 $\Gamma - \mathcal{N}$ 临界关系。需要指出的是，这些数值曲线可以通过相应的渐近/摄动解很好地近似。图中红色阴影区域表示实验中发生了粘附，蓝色区域表示未发生粘附。绘制这些区域时，我们采用了以下参数标准：二维材料板的粘附能取 $0.05 - 0.1 \text{ J/m}^2$ 或相应的文献报道值，而预张力通过假设残余应变小于 0.1% 估算得到。

总体而言，理论预测与实验观测高度吻合。例如，Ma 等^[65]研究了可穿戴电子器件中不同尺寸的 ecoflex 薄板稳定性（表 2.1 中 S1-S4 样本），发现 S2 和 S4 会发生塌陷，而 S1 和 S3 保持稳定。该现象与理论完全一致：S1 和 S3 的无量纲粘附能低于粘附判据线（图 2.7a 实线），而 S2 和 S4 则超过该阈值。Radha 等^[66]报道的 52 nm (S5) 和 12 nm (S6) 石墨烯覆盖纳米通道是另一典型案例：较薄的 S6 样本满足粘附判据并被观测到下陷，而较厚的 S5 因较小 $\mathcal{K}_h \Gamma$ 维持了结构完整性。通过试错法，Yang 等^[5]和 Esfandiar 等^[67]成功制备了顶板厚度 50-70 nm 的稳定的纳米通道，图 2.7 显示这些几何参数完全符合理论判据的理性设计。最近，Ronceray 等^[68]设计的 6-48 nm 顶板纳米开关器件中，即便最厚样本也观测到通道塌陷，这与图 2.7a 理论预测再次吻合。

图 2.7b 展示了超薄板的实验研究结果。通过取 $\mathcal{K}_h = 10^4$ 数值计算得到的粘附判据线（实线，更大 \mathcal{K}_h 值结果相同）可解释以下现象：Josea 等^[69]系统研究了不同尺寸腔体上悬浮单层/双层石墨烯的粘附率，发现深度 630 nm、半径小于 $5 \mu\text{m}$ 腔体上的双层石墨烯 (S9) 粘附率低于 $5 \mu\text{m}$ ，而深度 285 nm、半径大于 $5 \mu\text{m}$ 腔体上的单层石墨烯 (S10) 粘附率高达 92%。其他验证案例包括：Sun 等^[70]的气密性测试中单层石墨烯 (S7-S8)，以及 Davidovikj 等^[71]的纳米压力传感器 (S15)。需说明的是，处于粘附区的样本需机械激励才会实际塌陷，而处于非粘附区的样本理论上不应发生粘附。Lee 等^[72]的谐振压力传感器 (S14) 是唯一例外——其无量纲参数位于非粘附区，但石墨烯顶板在环境条件下工作两月后仍发生塌陷。这可能是由于石墨烯基底滑移导致边界条件从无滑移变为无剪切，从而使判据线下移（图 2.7b 点线）。

2.5 本章小结

本章通过理论与实验相结合，阐明了轴对称粘附问题的物理模型和关键无量纲参数。我们重点分析了四种极限状态（纯弯曲主导区、弯曲-预张力耦合区、纯预张力主导区和纯拉伸主导区）及其对应的参数适用范围，构建了包含详细解析解的参数空间区域图。该图谱对薄板器件的设计具有重要指导价值，可有效避免粘附失效（传统实验方法多依赖试错法）。

轴对称假设使得这一复杂粘附问题获得解析解成为可能。数值解与解析解均与文献及本文实验数据高度吻合，但当涉及材料/界面的复杂行为（如基底上薄板的滑移和屈曲分层）时会出现偏差。这些行为通常会降低薄板抵抗变形的能力，使得实际粘附比理论预测更易发生。此外，滑移和屈曲分层会破坏系统的轴对称性，需进一步研究以完善更精确的区域图谱。

尽管本研究聚焦于刚性基底上的薄板粘附行为，柔性电子和微纳机电系统(M/NEMS)领域日益广泛应用的软基底提出了一个核心科学问题：基底弹性如何影响粘附特性。解决弹性基底效应的挑战主要体现在两方面：一是求解非线性控制方程，二是确定临界粘附条件。鉴于几何非线性特性，可借鉴 Rayleigh 近似等方法，通过位移场近似获得解析解。该方法已在等近期研究中得到成功应用，但针对不同参数区域构建适宜的基底-薄板位移场简化模型仍具挑战性。此外，如式 2.9 所示的临界粘附条件会因基底变形发生本质改变。虽然基于 Griffith 断裂力学和 JKR 粘附理论的总能量最小化方法仍适用，但探索相应的局部粘附条件将具有重要理论价值。

第三章 弹性薄层对脱粘行为影响的理论和实验研究

3.1 前言

弹性体粘合剂广泛应用于各类工程系统中，其粘附层通常夹置于两个柔性或刚性被粘物之间。在此类结构中，受限粘附层的力学特性参数（如厚度、弹性模量和泊松比）与表面化学性质对粘附性能具有同等重要的影响。这一现象在典型构型——从受限粘附层剥离柔性板材的过程中得到最新验证。虽然现有研究多基于材料完全可压缩或完全不可压缩的假设展开讨论，但实际应用中弹性体类粘附层极少呈现理想的可压缩特性。为厘清可压缩与不可压缩的理论争议，本研究选取典型构型——具有任意可压缩性的粘附层-柔性板材剥离体系进行探究。

3.2 理论模型

3.2.1 问题描述

受到 Ghatak^[28]实验设计的启发，我们研究粘附在弹性薄层上的柔性薄板（薄层固定于刚性基底，见图 3.1）。重点分析在薄板左端 ($x = 0$) 施加垂直位移 δ 所需的剥离力 F 及其对应的脱粘长度 ℓ 。为表征任意泊松比薄层的力学响应，采用 Chandler 和 Vella^[39]通过摄动分析发展的“组合基底”模型，其中薄层厚度作为小参数处理。具体而言，薄层位移场 $w_s(\mathbf{x})$ 满足：

$$w_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_w} p(\mathbf{x}) - \frac{1}{k_l} \nabla^2 p(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

其中等式右侧第一项表示弹性薄层的 Winkler 型体积变形，第二项表征形状改变（剪切）变形。假设薄板与薄层界面为无滑移条件，基底刚度可表示为：

$$k_w = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G}{d} \quad \text{and} \quad k_l = \frac{3(1-\nu)^2}{(3/4-\nu)(\nu-1/4)} \frac{G}{d^3}, \quad (3.2)$$

其中 G 为剪切模量， d 为厚度， ν 为基底的泊松比。显然，当 $\nu \rightarrow 1/2$ 时，该组合基底模型退化为式 1.4 的完全不可压缩模型^[40]；当长细比较大且泊松比远大于 $1/2$ 时，则退化为式 1.2 的完全可压缩模型。对于横观各向同性薄层，包含高阶项的渐近分析可导出与式 1.2 形式相同的基底模型。

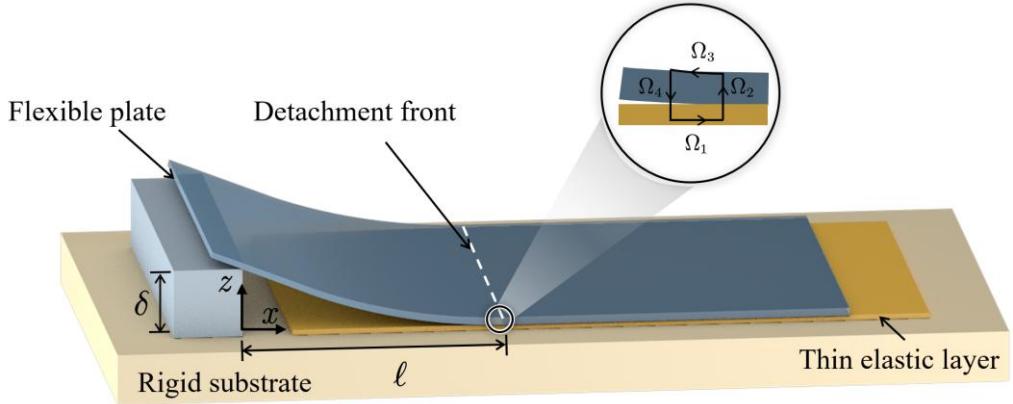


图 3.1 柔性薄板从弹性薄层剥离的示意图。弯曲刚度为 B 的薄板粘附于剪切模量 G 、泊松比 ν 、厚度 d 的弹性薄层上。薄板左端施加垂直位移 d 引发界面剥离, 形成长度为 ℓ 的脱粘区放大视图展示了脱粘前沿 J 积分计算的路径

假设弯曲刚度为 B 的柔性薄板发生平面应变变形 $w(x)$, 其力学行为遵循 Kirchhoff-Love 板理论。其控制方程可以表示为:

$$Bw'''' + p = 0, \quad (3.3)$$

其中 $w' = dw/dx$, p 表示薄板与薄层间的相互作用力。如图 3.1 所示, 脱粘区 ($0 < x < \ell$) 满足 $p = 0$, 接触区 ($x > \ell$) 满足 $w = w_s$ 。联立公式 3.1 和公式 3.2 可得薄板挠度的统一控制方程:

$$k_I B w'''' + k_W (k_I w - B w''''') \mathcal{H}(x - \ell) = 0, \quad (3.4)$$

其中 \mathcal{H} 为 Heaviside 阶跃函数。该公式与以往关于完全可压缩薄层和完全不可压缩薄层上薄板的研究有所不同。

求解该多点边值问题需要 11 个边界/匹配条件 (10 个用于常微分方程, 1 个用于确定未知脱粘长度 ℓ)。针对图 3.1 所示的实验构型, 自然边界条件包括:

$$w(0) = \delta, \quad w''(0) = 0, \quad w(\infty) = 0, \quad w'(\infty) = 0, \quad w''(\infty) = 0, \quad (3.5)$$

以及挠度、斜率、曲率和剪力的连续性条件要求:

$$[w(\ell)] = [w'(\ell)] = [w''(\ell)] = [w'''(\ell)] = 0, \quad (3.6)$$

其中 $[f(\ell)] = f(\ell^+) - f(\ell^-)$ 表示脱粘前沿 $x = \ell$ 处的物理量跃变。此类高阶连续性条件与刚性基底上的薄板剥离行为存在本质差异——后者在脱粘前沿处会出现曲率突变现象。

为确定脱粘长度的临界条件, 我们通过分析脱粘扩展所需的能量, 采用 J 积分方

法进行推导。具体而言，考虑沿脱粘路径 J 积分表达式：

$$J = \oint_{\Omega} \left(\mathcal{W} n_x - \sigma_{ij} n_j \frac{du_i}{dx} \right) d\Omega, \quad (3.7)$$

用于计算能量释放率 [73]，其中 $\mathbf{n} = (n_x, n_z)$ 为路径外法向矢量， \mathcal{W} 表示应变能密度， σ_{ij} 和 u_i 分别为应力分量和位移分量。我们考察紧邻脱粘前沿的路径 Ω 见图 3.1 中的插图，该路径可分解为 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ 。基于线性板理论和式 3.1 的组合基底模型，最终推导得到：

$$J = \left(pw - \frac{p^2}{2k_w} + \frac{p'^2}{2k_l} \right) \Big|_{x=\ell^+}. \quad (3.8)$$

我们通过忽略模态混合效应来简化分析，并假设界面粘附能（或界面韧性） γ 为常数。由此可得脱粘前沿的跃变条件：

$$\left[p(\ell)w(\ell) - \frac{p^2(\ell)}{2k_w} + \frac{p'^2(\ell)}{2k_l} \right] = \gamma. \quad (3.9)$$

最后，类似于典型的接触力学问题 [27]，我们仍缺少一个可由物理条件确定的最终方程。文献中提出两种可能选择：(1) $\llbracket w'''(\ell) \rrbracket = 0$ （即 $\llbracket p(\ell) \rrbracket = 0$ ）保证高阶连续性；(2) $\llbracket w''''(\ell) \rrbracket = 0$ （即 $\llbracket p'(\ell) \rrbracket = 0$ ）使脱粘前沿处压力达到最大拉伸状态 [28]。本文首先采用第一种条件，后续章节将证明：只要一致应用式 3.9，两种选择的差异仅体现为定量结果不同。具体而言，第一种假设下

$$\llbracket w'''(\ell) \rrbracket = 0 \quad \text{and} \quad \llbracket w''''^2(\ell) \rrbracket = 2k_l \Gamma / B^2. \quad (3.10)$$

因此，式 3.4 在边界条件公式 3.5、连续性条件公式 3.6 以及跳跃条件公式 3.9 的约束下可解析求解。

3.2.2 无量纲化

我们首先讨论无量纲化前系统的特征长度。为建立脱粘区长度尺度 ℓ ($0 < x < \ell$) 与系统本征参数的关系，通过比较薄板存储的弹性能 $\sim B\delta^2/\ell^3$ 与粘附能 $\sim \gamma\ell$ ，可推导出弯曲-粘附特征长度（又称弹性-毛细长度）：

$$\ell_{ec} = (B\delta^2/\gamma)^{1/4}. \quad (3.11)$$

在接触区 ($x > \ell$)，根据体积变形与形状变形的主导作用不同，存在两个特征长度尺度来描述挠度衰减区域。当体积变形主导时，得到经典 Winkler 长度：

$$\ell_w = \left(\frac{B}{k_w} \right)^{1/4} = \left[\frac{(1-2\nu)Bd}{2(1-\nu)G} \right]^{1/4}. \quad (3.12)$$

对于相对不可压缩的弹性薄层，当 $\ell_w \rightarrow 0$ 时，特征长度由下式给出：

$$\ell_I = \left(\frac{B}{k_I} \right)^{1/6} = \left[\frac{(3/4-\nu)(\nu-1/4)Bd^3}{3(1-\nu)^2G} \right]^{1/6}. \quad (3.13)$$

对比这两个水平方向的特征长度可以得到：

$$\epsilon = \left(\frac{\ell_w}{\ell_I} \right)^6 = (1-2\nu)^{3/2} \frac{3(1-\nu)^{1/2}}{2^{3/2}(3/4-\nu)(\nu-1/4)} \left(\frac{B}{Gd^3} \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

该特征长度可解释为弹性薄层的等效压缩性度量。值得注意的是，在典型实验（如文献）中，薄板的弯曲刚度和厚度通常远大于粘附层（即 $B \gg Gd^3$ ）。这意味着除非薄层泊松比 ν 极度接近 $1/2$ ，否则参数 ϵ 恒满足 $\epsilon \ll 1$ 。

我们采用抬起的位移 δ 和 Winkler 长度 ℓ_w 作为标度化参数，具体定义以下无量纲变量：

$$X = x/\ell_w, \quad L = \ell/\ell_w, \quad W = w/\delta, \quad (3.15)$$

以及无量纲化的等效粘附能

$$\Gamma = \frac{\gamma \ell_w^4}{B \delta^2} = \frac{\gamma}{k_w \delta^2}. \quad (3.16)$$

基于上述无量纲化体系，原控制方程 3.4、边界条件 3.5、连续性条件 3.6 及粘附条件 3.10 所描述的力学问题可转化为以下无量纲形式：

$$\epsilon^{-1} W''''' \mathcal{H}(X-L) - W''' - W \mathcal{H}(X-L) = 0, \quad (3.17)$$

承受以下边界约束：

$$W(0) = 1, \quad W''(0) = 0, \quad W(\infty) = 0, \quad W'(\infty) = 0, \quad W''(\infty) = 0, \quad (3.18)$$

连续性条件：

$$[W(L)] = [W'(L)] = [W''(L)] = [W'''(L)] = [W''''(L)] = 0, \quad (3.19)$$

以及粘附跳跃条件:

$$\llbracket W''''^2(L) \rrbracket = 2\epsilon\Gamma, \quad (3.20)$$

经无量纲化处理后, 该问题仅依赖于两个关键参数: 等效材料压缩性 ϵ 与等效粘附能 Γ 。需再次强调, 除极端不可压缩材料外, 式 3.17 中 ϵ 恒满足 $\epsilon^{-1} \ll 1$ 。

3.3 解析解答

3.3.1 通解

我们进一步探讨可获得的解析进展。脱粘区内的解析解形式简明。接触区的解可通过求解特征方程 $W'' = \lambda^2 W$ 获得, 其中 λ 满足 $\lambda^6/\epsilon - \lambda^4 - 1 = 0$ 。由此可得三组根: $\lambda^2 = \lambda_1^2$, λ_2^2 和 λ_3^2 。当 $\epsilon > 0$ 时, 仅存在一对实根 $\pm \lambda_1$, 其表达式为:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3^{1/2}} \left[\epsilon + \frac{\epsilon^2}{f(\epsilon)} + f(\epsilon) \right]^{1/2}, \quad (3.21)$$

其中 $f(\epsilon) = [\epsilon^3 + 3(9\epsilon + \sqrt{81\epsilon^2 + 12\epsilon^4})/2]^{1/3}$ 。我们将其余两对复根表示为模量-幅角形式 $\lambda_2^2 = -\lambda_R + \lambda_I i$ 和 $\lambda_3^2 = -\lambda_R - \lambda_I i$, 其中

$$\theta = \arctan \left[\frac{\sqrt{3}f^2(\epsilon) - \sqrt{3}\epsilon^2}{f^2(\epsilon) + \epsilon^2 - 2\epsilon f(\epsilon)} \right] \quad (3.22)$$

以及

$$\Lambda = \frac{1}{3^{1/2}f^{1/2}(\epsilon)} [(f^3(\epsilon) - \epsilon^3)(f(\epsilon) - \epsilon)]^{1/4}. \quad (3.23)$$

基于上述根的分析并结合边界/连续性条件, 我们得到方程 3.17 的解为

$$W(X) = (C_1 X^3 + C_2 X + 1) \mathcal{H}(L - X) + \\ \left[C_3 e^{-\lambda_1 X} + \exp\left(-\Lambda \sin \frac{\theta}{2} X\right) \left(C_4 \cos \frac{\Lambda \theta X}{2} + C_5 \sin \frac{\Lambda \theta X}{2} \right) \right] \mathcal{H}(X - L), \quad (3.24)$$

其中常数 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 依赖于 $\lambda_1(\epsilon)$, $\Lambda(\epsilon)$, $\theta(\epsilon)$ 及 $L(\epsilon, \Gamma)$ 的解析表达式。据我们所知, 该解析解为首次获得。

通过建立薄板端部的剪力平衡条件, 可推导实现该剥离状态所需的无量纲化剥离力:

$$\mathcal{F} = \frac{F \ell_{\text{ec}}^3}{B\delta} = F \left(\frac{\delta^2}{B\gamma^3} \right)^{1/4} = \frac{3\lambda_1^2 \Lambda^3}{g(\lambda_1, \Lambda, \theta, L) \Gamma^{3/4}}, \quad (3.25)$$

其中

$$g(\lambda_1, \Lambda, \theta, L) = \left[6\lambda_1^2 + 12\lambda_1\Lambda(1 + \lambda_1 L)\sin \frac{\theta}{2} + 6(1 + \lambda_1 L)^2\Lambda^2 \right] \sin \frac{\theta}{2} + L\Lambda^3(3 + 3L\lambda_1 + L^2\lambda_1^2). \quad (3.26)$$

需要特别说明的是，本文采用 ℓ_{ec} 来定义无量纲剥离力，其依据在于刚性基底上薄板的经典剥离力解为：

$$\mathcal{F}_{\text{rigid}} = (8/9)^{1/4}. \quad (3.27)$$

当脱粘持续扩展时，系统最终将达到稳态，此时薄层弹性效应可忽略不计。因此可以预见，随着特征长度 L 增大，无量纲剥离力 \mathcal{F} 将渐近趋近于刚性基底解 $\mathcal{F}_{\text{rigid}}$ 。

需要特别指出的是，脱粘长度 L 作为问题的解的一部分，需通过式 3.20 给出的脱粘条件进行求解，具体而言：

$$\Gamma = \frac{1}{2\epsilon} \left[\frac{\lambda_1 \left(2\sin \frac{\theta}{2} + \Lambda L \right) + \Lambda}{g(\lambda_1, \Lambda, \theta, L)/(3\lambda_1^2 \Lambda^4)} \right]^2. \quad (3.28)$$

脱粘长度 L 同时取决于薄层压缩性参数 ϵ 和等效粘附能 Γ ，而根据式 3.16， Γ 本身又是提升高度、基底刚度和界面粘附能的函数。类比稳态或刚性基底情形，我们将通过以下无量纲参数分析脱粘长度：

$$\mathcal{L} = \ell/\ell_{\text{ec}} = \Gamma^{1/4} L, \quad (3.29)$$

由于 Obreimoff 经典理论给出的解为：

$$\mathcal{L}_{\text{rigid}} = (9/2)^{1/4}. \quad (3.30)$$

因此，对于给定的 Γ ，我们可以基于式 3.28 计算任意压缩性 ϵ 薄层的脱粘长度，并通过式 3.25 确定所需剥离力。此外，当 $\Gamma \ll 1$ 时，无论材料压缩性如何，均有 $L \gg 1$ 、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{rigid}}$ 和 $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{rigid}}$ 。然而，式 3.28 给出的脱粘长度解并非总是存在，尤其在 Γ 较大时。从物理上理解，这意味着当 Γ 较大（即强粘附、软基底）时，界面将完全不发生脱粘。此时，只需令 $L=0$ ，式 3.20 给出的解析解仍然成立，而无量纲剥离力简化为：

$$\mathcal{F}(L=0) = \frac{\lambda_1^2 \Lambda^3 \csc \frac{\theta}{2}}{2 \left(2\lambda_1 \Lambda \sin \frac{\theta}{2} + \lambda_1^2 + \Lambda^2 \right)} \cdot \frac{1}{\Gamma^{3/4}}. \quad (3.31)$$

此类无脱粘解与脱粘解公式 3.25 存在本质差异，可通过无量纲形式阐明：在脱粘发生前，式 3.31 表明 $F \propto \delta$ 的线性关系；而脱粘发生后，式 3.25 则近似给出 $F \propto \delta^{-1/2}$ 的非线性依赖。这一对比关系将在图 3.2 和图 3.3 中进一步展示。

3.3.2 完全可压缩情形

图 3.2 展示了具有不同压缩性 ϵ 的薄层中，脱粘长度和剥离力随等效粘附能 Γ 的变化关系。正如预期，当 Γ 极小时，无论 ϵ 取值如何，脱粘长度都会显著增大，系统趋于稳态：此时薄板从弹性薄层上剥离的行为近似于从刚性基底剥离，其特征参数为 $\mathcal{L}_{\text{rigid}} = (9/2)^{1/4}$ 和 $\mathcal{F}_{\text{rigid}} = (8/9)^{1/4}$ 。对于有限 Γ 值，剥离力 \mathcal{F} 略高于 $\mathcal{F}_{\text{rigid}}$ ，而脱粘长度 L 可能远小于 $\mathcal{L}_{\text{rigid}}$ 。此外，当等效粘附能 Γ 超过临界值时，系统不发生脱粘，此时由式 3.31 给出的力-挠度关系呈现线性特征，如图 3.2b 中虚线所示，具体将在式 3.37 中讨论。

图 3.2 表明薄层的可压缩性会影响其脱粘行为。然而，对于充分可压缩的薄层（即 $\epsilon \gg 1$ ）， $\mathcal{L}-\Gamma$ 与 $\mathcal{F}-\Gamma$ 关系均趋于对应于完全可压缩极限的主曲线。具体而言，当 $\epsilon \rightarrow \infty$ 时，我们得到：

$$\lambda_1 \rightarrow \infty, \quad \Lambda \rightarrow 1, \quad \text{and} \quad \theta \rightarrow \pi/2 \quad (3.32)$$

根据式 3.31、3.32 和 3.33，在完全可压缩极限下，界面开始发生脱粘所对应的临界附着能为 $\Gamma_{\text{cr}} = 1/2$ 。这一临界值对应的有量纲临界抬起挠度为：

$$\delta_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{k_w}} = \sqrt{\frac{(1-2\nu)\gamma d}{(1-\nu)G}}. \quad (3.33)$$

类似地，临界剥离力为 $\mathcal{F}_{\text{cr}} = 2^{1/4} = \sqrt{3/2} \mathcal{F}_{\text{rigid}}$ ，其有量纲形式为：

$$F_{\text{cr}} = \left(\frac{2B\gamma^3}{\delta^2} \right)^{1/4} = \left[\frac{2(1-\nu)BG\gamma^2}{(1-2\nu)d} \right]^{1/4}. \quad (3.34)$$

这清楚地表明，脱粘发生所对应的临界剥离力不仅受固有附着韧性的影响，还与系统的力学性质有关，包括胶层的厚度、泊松比和剪切模量等参数 [30]。

在发生脱粘之后，完全可压缩极限下的脱粘长度为：

$$\ell = \left[\frac{2^{3/4} k_W^{1/4} \delta^{1/2}}{\gamma^{1/4}} \sin \left(\frac{1}{3} \arctan \sqrt{\frac{k_W^{3/2} \delta^3}{2^{1/2} \gamma^{3/2}} - 1} + \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{2} \right] \left(\frac{B}{k_W} \right)^{1/4} \quad (3.35)$$

其形式可进一步简化为：

$$\ell = \begin{cases} 0, & \text{for } \delta \leq \delta_{\text{cr}} \\ (1 - \delta_{\text{cr}}^2 / \delta^2) (B/4k_W)^{1/4}, & \text{for } 0 \leq \delta - \delta_{\text{cr}} \ll \delta_{\text{cr}} \\ (3^{1/2} - 2^{1/4} \delta_{\text{cr}}^{1/2} / \delta^{1/2}) (B\delta^2 / 2\gamma)^{1/4}, & \text{for } \delta \gg \delta_{\text{cr}}. \end{cases} \quad (3.36)$$

此外，剥离力关于板边缘抬起挠度的有量纲表达式为：

$$F = \begin{cases} B\delta / (\sqrt{2} \ell_W^3), & \text{for } \delta \leq \delta_{\text{cr}} \\ 3B\delta / (\ell^3 + 3\sqrt{2} \ell_W \ell^2 + 6\ell_W^2 \ell + 3\sqrt{2} \ell_W^3), & \text{for } \delta > \delta_{\text{cr}}. \end{cases} \quad (3.37)$$

这表明在脱粘发生之前，剥离力与挠度之间呈线性关系；而在脱粘之后，剥离力随抬起挠度增大而减小（因为 ℓ 大致与 $\delta^{1/2}$ 成正比）。需要指出的是，为得到上述简洁的表达式，我们采用了 Winkler 长度 ℓ_W 对系统进行无量纲化，这与可压缩极限 $\epsilon \gg 1$ 是一致的。然而，为了理解在 $\epsilon \ll 1$ 条件下的脱粘行为，更合适的做法是采用 ℓ_1 进行无量纲化，我们将在下文讨论这一情形。

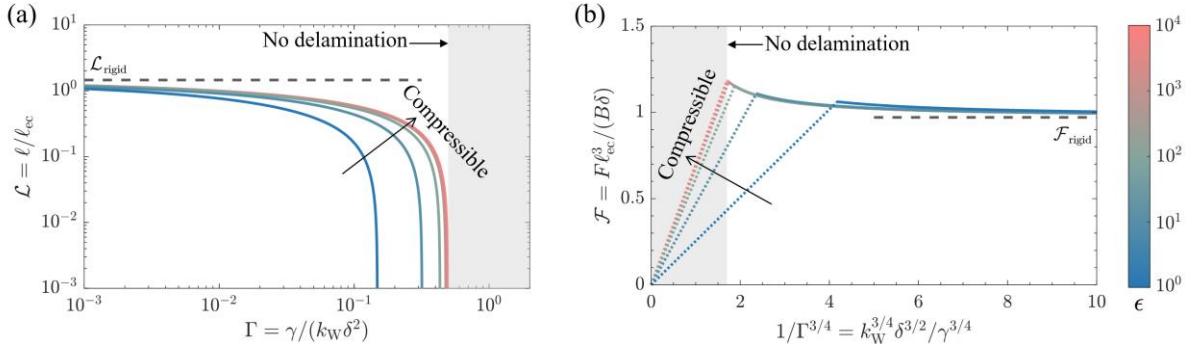


图 3.2 从具有可变可压缩性的薄弹性层上剥离柔性板，其中可压缩性由式 3.14 中的参数 ϵ 表征。(a) 无量纲脱粘长度 \mathcal{L} (定义见式 3.29) 随有效附着能 Γ (定义见式 3.16) 的变化关系。(b) 无量纲剥离力 \mathcal{F} (定义见式 3.25) 随 $\Gamma^{-3/4}$ 的变化关系。彩色实线对应解析解，分别由式 3.25 和 3.28 给出。(b) 图中的虚线基于式 3.31，表示尚未发生脱粘。(a) 和 (b) 图中的虚线则分别表示稳态解，即式 3.30 和 3.27 所示。灰色阴影区域表示在 $\epsilon \rightarrow \infty$ (即完全可压缩极限) 下的无脱粘区。

3.3.3 完全不可压缩情形

当泊松比 $\nu \rightarrow 1/2$ 时，Winkler 长度 ℓ_W 趋近于零。在此情况下，需将式 3.16 中

的 ℓ_w 替换为不可压缩长度 ℓ_I , 以定义不可压缩条件下的有效附着能, 即:

$$\Gamma_I = \frac{\Gamma}{\epsilon^{2/3}} = \frac{\gamma}{B^{1/3} k_I^{2/3} \delta^2}. \quad (3.38)$$

图 3.3 中, 根据式 3.28 和 3.25, 绘制了不同 ϵ 和 Γ 条件下薄层的无量纲脱粘长度与剥离力关于 Γ_I 的变化曲线。显然, 当 $\epsilon \ll 1$ 时, 各曲线趋于一致, 表明在完全不可压缩极限下, Γ_I 是唯一的控制参数。值得注意的是, 与完全可压缩薄层的 Γ 不同, 完全不可压缩薄层的 Γ_I 不仅受基底弹性影响, 还受其弯曲刚度的影响。我们将进一步展示, 这种对板材性质的依赖性可以被利用于实验中评估薄层的有效可压缩性。

为了定量理解完全不可压缩极限下的脱粘行为, 我们将 $\epsilon \rightarrow 0$ 代入式 3.21、3.22 和 3.23, 得到 $\lambda_I \rightarrow \epsilon^{1/3}, \Lambda \rightarrow \epsilon^{1/3}$ 以及 $\theta \rightarrow \pi/3$ 。临界附着能为 $\Gamma_I = 2/9$, 即脱粘发生的临界抬起挠度为:

$$\delta_{cr} = \left[\frac{9(3/4 - \nu)(\nu - 1/4)}{2^{3/2}(1 - \nu)^2} \right]^{1/3} \frac{\gamma^{1/2} d}{B^{1/6} G^{1/3}}. \quad (3.39)$$

临界剥离力略大于稳态剥离力, 其表达式为 $\mathcal{F}_{cr} = (9/8)^{1/4} \approx 1.06 \mathcal{F}_{rigid}$, 对应的有量纲形式为:

$$F_{cr} = \frac{B^{1/3} G^{1/6} \gamma^{1/2}}{d^{1/2}} \left[\frac{6(1 - \nu)^2}{(3 - 4\nu)(4\nu - 1)} \right]^{1/6}. \quad (3.40)$$

在完全不可压缩极限下, 脱粘长度表达式为:

$$\ell = \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2} B^{1/2} k_I \delta^3}{\gamma^{3/2}}} - \frac{1}{2} \right)^{1/3} + \frac{B^{1/6} k_I^{1/3} \delta}{64 \gamma^{1/2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2} B^{1/2} k_I \delta^3}{\gamma^{3/2}}} - 1 \right)^{-1/3} - 2 \right] \left(\frac{B}{k_I} \right)^{1/6}, \quad (3.41)$$

其表达式可简化为:

$$\ell = \begin{cases} 0, & \text{for } \delta \leq \delta_{cr} \\ (1 - \delta_{cr}^2/\delta^2) (18B\delta^2/625\gamma)^{1/4}, & \text{for } 0 \leq \delta - \delta_{cr} \ll \delta_{cr} \\ (3 - 2\sqrt{\delta_{cr}/\delta}) (B\delta^2/18\gamma)^{1/4}, & \text{for } \delta \gg \delta_{cr}. \end{cases} \quad (3.42)$$

对应不同抬起挠度的有量纲剥离力可以表示为:

$$F = \begin{cases} B\delta/(3\ell_I^3), & \text{for } \delta \leq \delta_{cr} \\ 3B\delta/(\ell^3 + 6\ell_I\ell^2 + 9\ell_I^2\ell + 12\ell_I^3), & \text{for } \delta > \delta_{cr}, \end{cases} \quad (3.43)$$

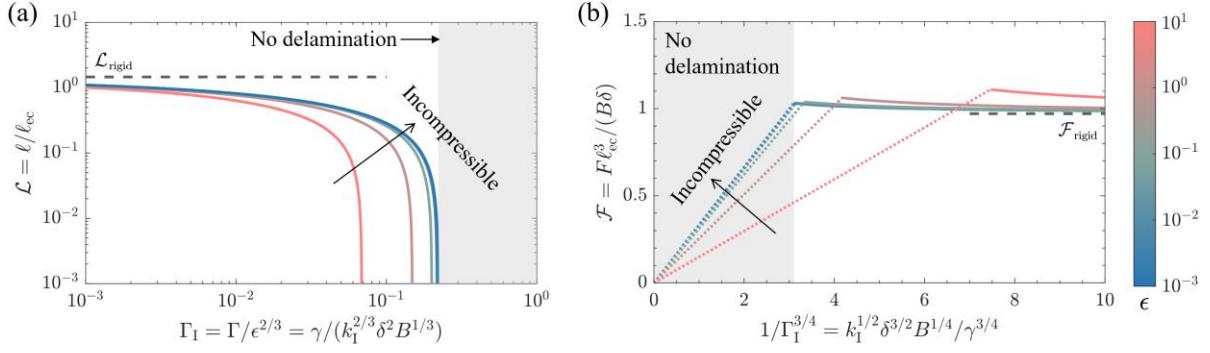


图 3.3 从一层弹性薄层剥离柔性板，薄层的不可压缩性逐渐增强，其程度由参数 ϵ^{-1} 表征。(a) 无量纲脱粘长度 \mathcal{L} (定义见式 3.29) 随有效附着能 Γ (定义见式 3.16) 的变化关系。(b) 无量纲剥离力 \mathcal{F} (定义见式 3.25) 随 $\Gamma^{-3/4}$ 的变化关系。同样，彩色实线对应脱粘解，由式 3.24 和 3.28 给出；(b) 图中的虚线对应无脱粘解，即式 3.31。而 (a) 和 (b) 图中的虚线分别由式 3.30 和 3.27 所示。灰色阴影区域表示在 $\epsilon \rightarrow 0$ (即完全不可压缩极限) 下的无脱粘区。

在研究了可压缩性对剥离行为的影响后，我们将分析结果总结于图 3.4 的区域图中。该图以弹性层的可压缩性和剥离过程中的抬起高度为坐标，便于快速识别脱粘过程中两个最关键的物理量——脱粘长度和剥离力。

上述结果完善了我们基于脱粘前沿零压力假设所得的解析解。然而，目前尚不清楚零压力假设与零压力梯度假设哪一种更为合理。为此，我们进一步在脱粘前沿采用零压力梯度假设对问题进行求解。在此情况下，式 3.10 中的匹配条件变为：

$$[w''''(\ell)] = 0 \quad \text{and} \quad [2kw(\ell)w'''(\ell) + Bw''''^2(\ell)] = 2k_w\gamma/B, \quad (3.44)$$

根据式 3.8 中的广义能量释放率，利用本节中相同的分析过程和无量纲化方法，我们可以计算在脱粘前沿零压力梯度假设下，具有任意可压缩性的薄层对应的板材挠度、脱粘长度及所需剥离力。随后，我们将这两组解析解与更为具体的内聚力模型仿真结果进行对比分析。

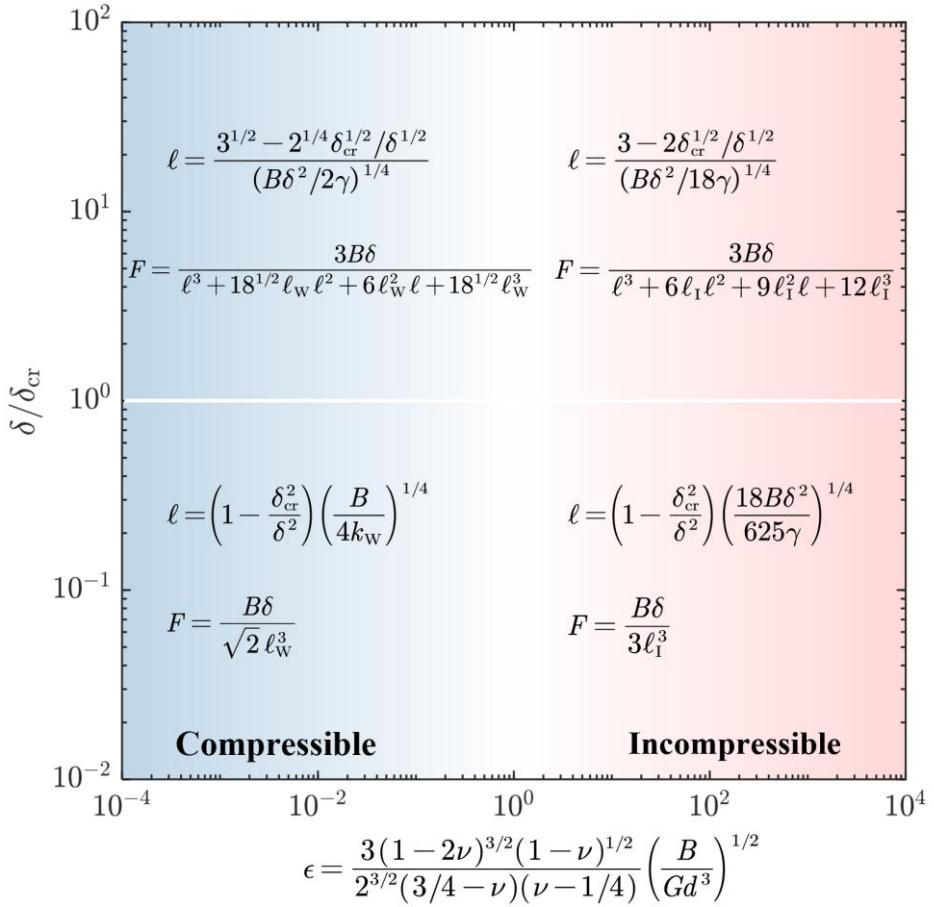


图 3.4 不同可压缩性弹性层剥离的区域图。脱粘长度和剥离力的渐近行为可在不同的 $\{\epsilon, \delta\}$ 空间中观察到。

3.3.4 有限元计算

我们采用模型结合有限元方法 (FEM) 对界面脱粘问题进行模拟。参照文献中的实验参数 [28]，考虑一块玻璃板置于较软的聚合物薄层上，底部表面为完全粘结状态（见图 3.1）。模型中采用典型的双线性黏聚本构关系，断裂能为 $\gamma = 40 \text{ mJ/m}^2$ 。基底材料采用 neo-Hookean 模型，剪切模量为 $G = 0.5 \text{ MPa}$ ，厚度为 $d = 50 \mu\text{m}$ ；计算中，线性弹性板的弯曲刚度为 $B = 9 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$ 。通过调整抬起挠度 δ 来调控有效附着能 Γ ，并通过改变泊松比 ν 来调节基底的有效可压缩性参数 ϵ 。需要注意的是，式 3.1 所基于的复合基础模型的适用性要求基底具有较大的细长比，即 $d \ll \max\{\ell_w, \ell_1\}$ ，这等价于：

$$\mathcal{S} = \max \left\{ \frac{(1-2\nu)B}{2(1-\nu)Gd^3}, \frac{(3/4-\nu)(\nu-1/4)B}{3(1-\nu)^2Gd^3} \right\} \gg 1. \quad (3.45)$$

该要求在我们的有限元模型中是满足的，其中细长比 $\mathcal{S} \sim 10^4$ 。

我们首先考虑图 3.5a 和 b 中的近似可压缩情形，此时基底的泊松比为 $\epsilon=0.35$ ，对应的有效可压缩性为 $\epsilon=425$ 。有趣的是，即使在尚未发生脱粘的区域（见图 3.5b 中的阴影区域）， $p(\ell)=0$ （实线表示）与 $p'(\ell)=0$ （虚线表示）两种边界条件所得到的解之间也几乎没有差异。此外，解析结果与内聚力模型计算结果（用符号表示）表现出极佳的一致性，仅在 $\Gamma=\Gamma_{cr}$ 附近，即脱粘刚开始的阶段，存在轻微偏差。这种微小偏差是可以接受的，因为在该阶段 $L \ll 1$ ，而内聚力模型中引入的过程区具有有限尺寸，这一因素在我们的解析模型中未被考虑。随着脱粘的推进，两组解析结果均能准确预测脱粘长度与剥离力，特别是在接近稳态行为时（见图 3.5a 的插图）。

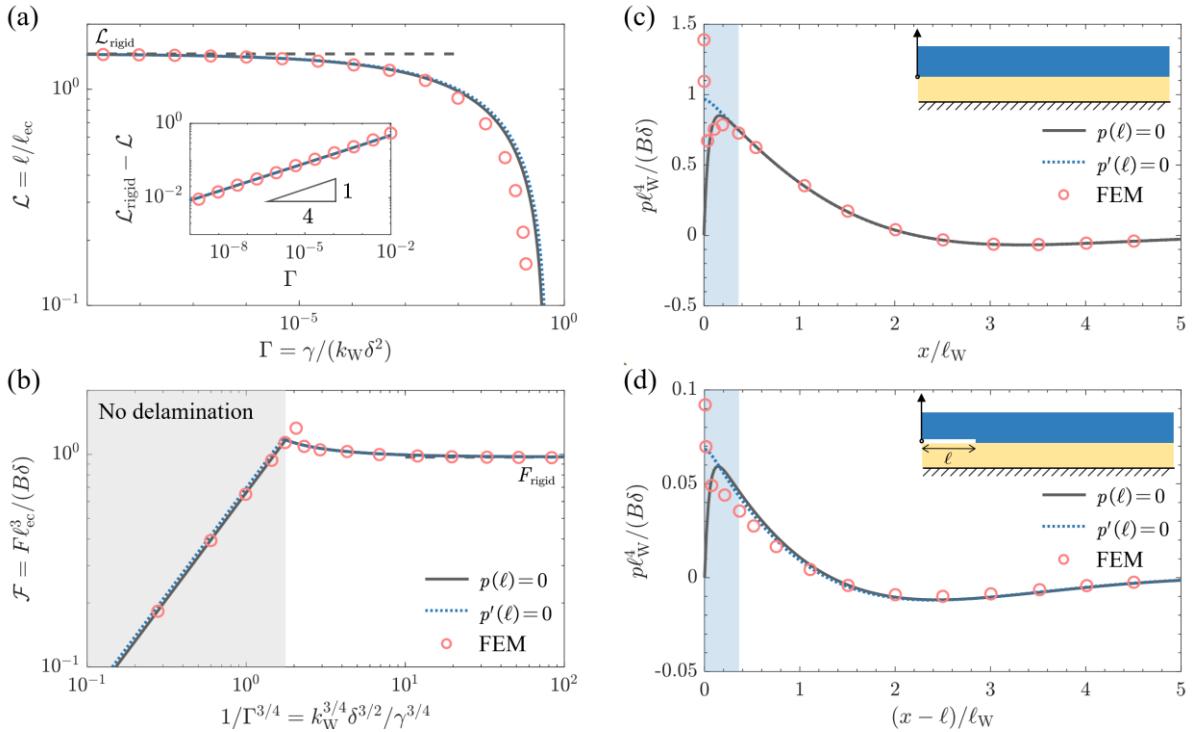


图 3.5 近乎可压缩情形下解析解与黏结区有限元模拟的对比。(a, b) 尺度化脱粘长度 (a) 和剥离力 (b) 随有效附着能 Γ 的变化关系。(c, d) 与板粘结的薄层所承受的尺度化表面法向牵引 $p \ell_W^4 / (B \delta)$ ，其中 (c) 对应无预制裂纹的情况，(d) 对应预制裂纹长度为 $\ell = 5d$ 的情况。所有图中，实线表示在脱粘前沿处施加表面法向牵引连续性（即零压力）条件下得到的解析结果，虚线表示假设法向牵引达到最大值（即零压力梯度）条件下得到的结果。标记点为有限元计算结果，对应 $\epsilon=425$ 。图 (b) 中灰色阴影区域表示无脱粘区。图 (c) 和 (d) 中蓝色阴影区域表示边界层区域 $0 \leq X \leq 1/\epsilon^{1/6}$ 。需要注意的是，有限元模拟中 (a) 和 (b) 使用了内聚力模型，而 (c) 和 (d) 中未使用。

为理解基于两种不同连续性条件的解析解之间差异趋于消失的原因，我们考察了两种构型下板与薄层之间的相互作用压力：一种为无裂纹构型（图 3.5c），另一种为具有长度为 $\ell=5d$ 的预制裂纹构型（图 3.5d），其中 d 为薄层的厚度。板与薄层之间为

直接黏结，未引入内聚力单元。几何与材料参数与前述有限元模型中所用参数完全一致。从图 3.5c 和 d 可以看出，无论是否存在预制裂纹，基于 $p(\ell)=0$ 的解析模型、基于 $p'(\ell)=0$ 的解析模型与数值结果之间的压力分布仅在一个局部区域内存在明显差异。根据方程 3.17 所示，这一边界层的尺度为 $\sim\epsilon^{1/6}$ ，在 $\epsilon \gg 1$ 时，该区域非常小。

然而，能量释放率（或 J 积分）的评估直接依赖于边界层内的压力及其梯度。我们将使用简化地基模型、基于式 3.8 计算所得的结果，与使用原始三维有限元模型、基于式 3.7 的计算结果进行比较。结果显示，在无裂纹情形 ($\ell=0$) 下，基于 $p(\ell)=0$ 条件的地基模型在板边缘处计算的 J 值相较 FEM 的误差为 8.6%，而基于 $p'(\ell)=0$ 条件的模型误差则为 4.6%。在存在预制裂纹 ($\ell=5d$) 的情况下，两种模型的误差进一步减小，分别为 5.6% 和 3.1%。因此，在该近乎可压缩的情形下，只要一致地使用广义 J 表达式（式 3.8），选择使用零压力条件还是零压力梯度条件求解问题，并不会对结果造成显著影响。

我们进一步考虑图 3.6a 和 b 中近乎不可压缩的情形，此时基底的泊松比为 0.499，对应的有效可压缩性为 $\epsilon=0.13$ 。令人意外的是，当 $\Gamma_1=\Gamma/\epsilon^{2/3}$ 较小时，分别基于脱粘前端零压强和零压强梯度假设所计算的脱粘长度与剥离力几乎一致，且均与有限元结果高度吻合。然而，当 Γ_1 相对较大，尤其是在接近或刚开始发生脱粘的阶段，这两组解析解与有限元结果均出现偏离，而采用零压强条件所得到的解在预测剥离力方面仍具有良好的准确性（见图 3.6b）。为进一步理解上述现象，我们分析了板-层界面的压强分布，在有无预置裂纹的两种情况下分别进行了计算（见图 3.6c 和 d）。相比于压强梯度连续条件，采用压强连续条件所得到的解析解在这两种配置下均与有限元结果表现出更优的吻合性。

但需要指出的是，从边界层分析的角度来看，无论是零压强条件还是零压强梯度条件，严格来说都不是必需的或完全合理的。仅在本研究的一维设置中，采用零压强条件的近似恰好没有引入显著偏差。

因此，通过对近似可压缩与近似不可压缩情形的对比分析，我们可以得出结论：零压强条件，或更一般地，连续的 w''' 条件，可作为板从任意可压缩性薄层上剥离问题的良好近似。尽管如此，随着剥离过程的推进，零压强与零压强梯度条件在预测脱粘长度和剥离力方面的差异较小。事实上，对于不同的 ϵ 值，这两种条件之间的差异始终较小。此外，J 积分方法在本质上等价于能量法（即通过对总自由能关于脱粘长度求极小值得到的剥离准则）。然而，本文所采用的方法能够直接给出脱粘前沿的跳跃条件，从而使得任意可压缩性情况下问题的解析求解更具可行性。

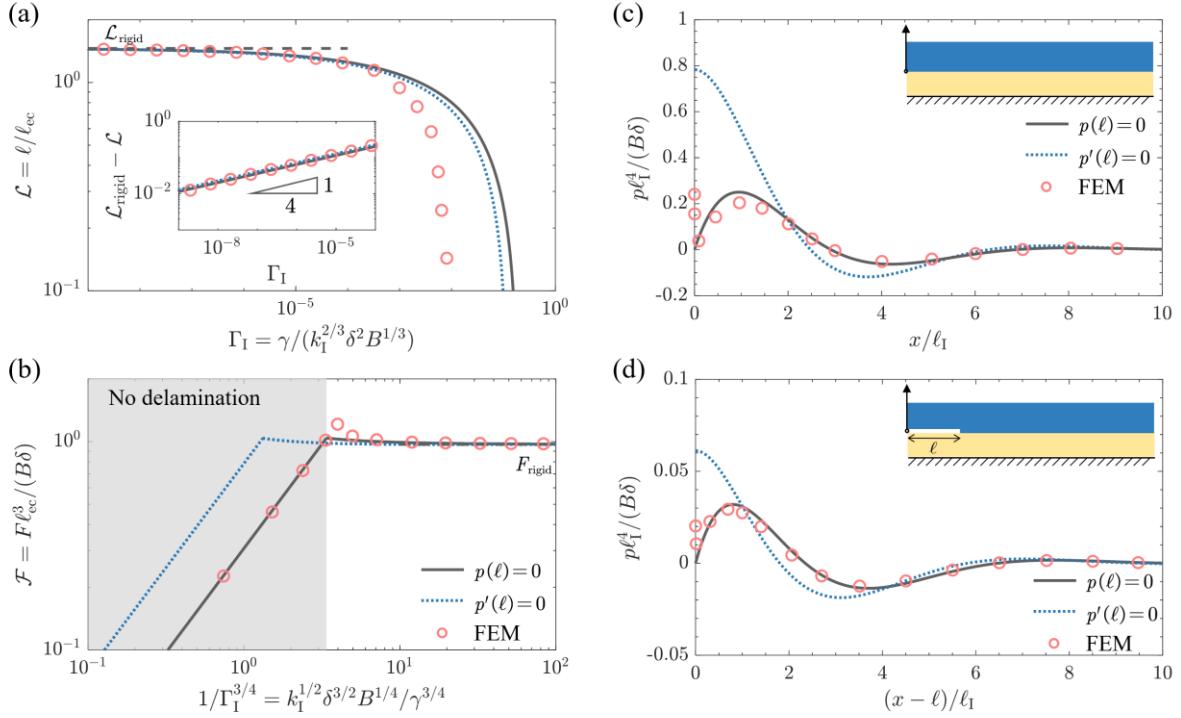


图 3.6 近乎不可压缩情形下解析解与黏结区有限元模拟的对比。(a, b) 尺度化脱粘长度 (a) 和剥离力 (b) 随有效附着能 $\Gamma_I = \Gamma/\epsilon^{2/3}$ 的变化关系。(c, d) 与板粘结的薄层所承受的尺度化表面法向牵引 $p\ell_I^4/(B\delta)$ ，其中 (c) 对应无预制裂纹的情况，(d) 对应预制裂纹长度为 $\ell = 5d$ 的情况。所有图中，实线表示在脱粘前沿处施加表面法向牵引连续性（即零压力）条件所得到的解析结果，虚线表示假设法向牵引达到最大值（即零压力梯度）条件下得到的结果。标记点为有限元计算结果，对应 $\epsilon = 0.13$ 。图 (b) 中灰色阴影区域表示无脱粘区。需要注意的是，有限元模拟中 (a) 和 (b) 使用了内聚力模型，而 (c) 和 (d) 中未使用。

3.4 实验结果

我们现在尝试回答前文提出的问题：薄胶层的脱粘行为是否受材料可压缩性的影响？从上一节的结果可以明确看出，答案是肯定的。此外，我们已经表明，式 3.14 中定义的 ϵ 可用于衡量薄层的有效可压缩性，式 3.1 中的组合基础模型能够表征不同 ϵ 条件下薄层的变形行为，而式 3.7 中的 J 积分则可用来近似评估能量释放率。然而，我们需强调的是，在实验中实现 $\epsilon \ll 1$ 通常是十分困难的，尤其当板比胶层刚性更大或更厚时，除非胶层材料的泊松比接近 0.5。为说明这一点，我们对聚二甲基硅氧烷 (PDMS) 弹性体薄层进行了测试，该材料通常被认为近似不可压缩，其泊松比范围为 $0.45 \lesssim \nu \lesssim 0.5$ 。

如图 3.7a 所示，实验装置遵循图 3.1 中所示的示意图。弹性 PDMS 层通过将基础聚合物与固化剂以 10:0.9 的质量比混合制备，混合物充分搅拌后置于真空腔中以去

除气泡。随后将 PDMS 溶液均匀涂覆在丙烯酸基底上，并在 80°C 下固化两小时。固化完成后，将 PMMA 薄板粘附于 PDMS 表面。在一块丙烯酸块体上加工出一个矩形孔，作为滑块的滑动轨道，并在底座中央攻丝安装一根 M3 螺钉。缓慢旋转螺钉可带动滑块上下移动，从而对上方的丙烯酸板施加位移 δ ，以避免产生速率相关效应。该螺钉的螺距为 0.5 mm，因此每旋转 90° 可使滑块上升约 0.125 mm。

我们解析解在完全可压缩与不可压缩两种极限下所得出的一个有趣结果是，其脱粘行为（例如 $\mathcal{L} = \ell \gamma^{1/4} / (B^{1/4} \delta^{1/2})$ ）分别仅依赖于 $\Gamma \sim \gamma d / (G \delta^2)$ 与 $\Gamma / \epsilon^{2/3} \sim \gamma d^2 / (G^{2/3} B^{1/3} \delta^2)$ 。这表明，薄层材料的可压缩性或不可压缩性可以通过考察其脱粘长度对柔性板参数的依赖关系加以判断。具体而言，对于厚度为 t 的板，在完全可压缩的情况下，重标定的脱粘长度 $\ell / (t^{3/4} \delta^{1/2})$ 依赖于 d / δ^2 ；而在完全不可压缩的情况下，则依赖于 $d^2 / (\delta^2 t)$ 。我们在实验中正是利用这种对板厚不同的依赖性来区分材料的可压缩性，这一方法具有高度实用性，且无需测量剥离力。

剥离实验在厚度为 100--300 μm 的 PDMS 薄层上进行，所用柔性板的厚度分别为 1 mm、2 mm、4 mm、5 mm 和 10 mm。图 3.7b 显示了不同厚度板材的脱粘长度 ℓ 随抬起高度 δ 变化的实验测量结果，脱粘长度与 δ 近似呈平方根关系。随后，我们分别在图 3.7c 及其插图中，将归一化脱粘长度 $\ell / (t^{3/4} \delta^{1/2})$ 绘制为 d / δ^2 和 $d^2 / (\delta^2 t)$ 的函数。图中数据良好地汇聚，表明归一化脱粘长度对板厚的依赖性较弱，即在剥离实验中，PDMS 薄层表现出可压缩性而非不可压缩性。值得注意的是，完全可压缩极限下的解析解（式 3.35），采用粘附能为 72 mJ/m^2 ，能够很好地拟合实验数据。

为进一步阐明可压缩性的影响，我们针对不同基底泊松比的实验进行了额外的有限元模拟。结果表明，当泊松比低于 0.49 时，模拟结果与可压缩极限及实验数据高度吻合；而当泊松比达到 0.499 时，模拟表现出明显的不可压缩性，导致与实验观测结果产生显著偏差。这些发现表明，尽管实验中使用的弹性薄层在体积形态下接近不可压缩，但实际上表现出可压缩行为。图 3.7 中的结果可通过式 3.14 定义的有效可压缩性参数 ϵ 予以解释。即便 PDMS 薄层的泊松比为 $\nu = 0.49$ ，其计算得到的可压缩性仍然较大，随着板材厚度从 1 mm 增加至 10 mm， ϵ 变化范围为 10.1 至 99.2。该结果强调了在粘附结合问题中应用完全不可压缩极限时应保持谨慎：即使是近乎不可压缩的材料，在受限于细长几何形状时，也可能表现出可压缩性。

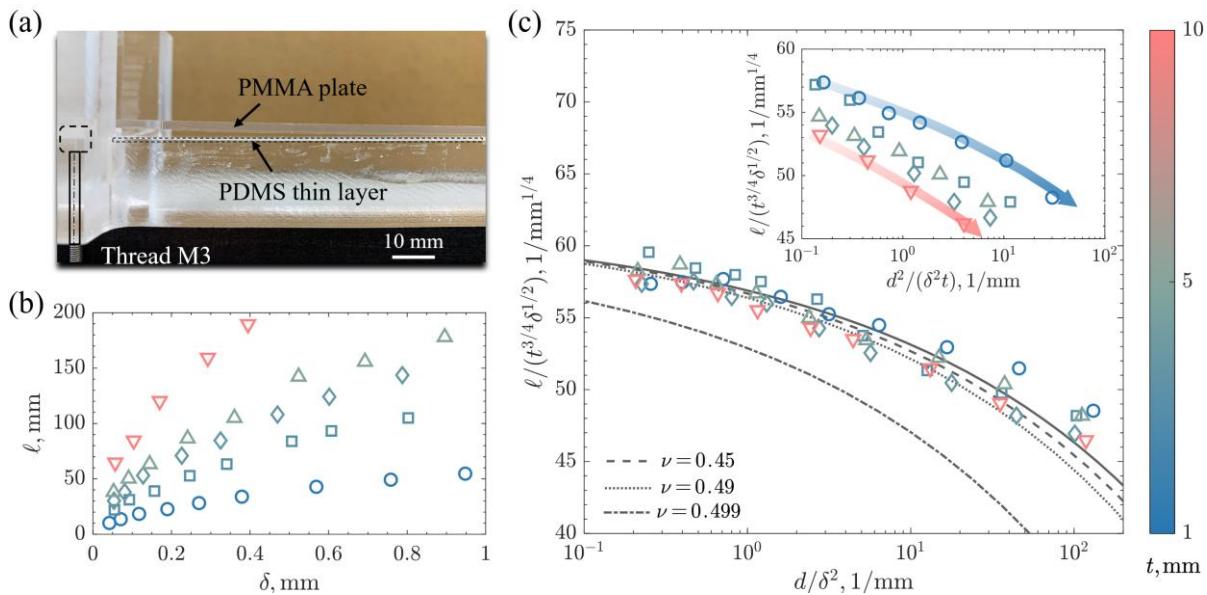


图 3.7 可压缩性测试。(a) 实验装置的照片, 参照图 3.1 所示的结构。(b) 测量得到的丙烯酸板从薄 PDMS 层剥离时的脱粘长度, 标记颜色表示不同板厚, 具体对应关系见色条。(c) 脱粘长度的重标度结果随 d/δ^2 的变化情况。实线表示在理想可压缩极限下、黏附能为 72 mJ/m^2 时的解析解 3.35。插图展示了重标度后的脱粘长度关于 $d^2/(\delta^2 t)$ 的变化。

3.5 本章小节

基于对弹性粘附层既非完全可压缩亦非完全不可压缩模型均不完全适用的考虑, 本研究探讨了柔性板材从具有任意可压缩性的粘附层上剥离的问题。我们讨论了适用的简化基础模型以及由于粘附力存在而引入的匹配条件和跳跃条件。本研究所得若干重要结论, 对于实际应用中薄层粘接的设计与评估具有一定的指导意义。

材料的可压缩性在剥离行为中起着关键作用。我们讨论了式 3.14 中的参数 ϵ , 该参数可用于表征薄粘附层的有效可压缩性, 表明其不仅依赖于材料本征的泊松比, 还与层在挠曲时的有效细长比有关。对于任意可压缩性的薄层, 文献中讨论的完全可压缩模型和完全不可压缩模型均不完全适用。相反, 我们证明了由式 3.1 给出的组合基础模型, 结合广义 J-积分条件, 能够自洽地描述该剥离问题。针对任意可压缩性的薄层剥离问题, 缺乏更高阶的连续性条件, 因此需借助物理图像加以确定。我们发现, 在平面剥离中, 采用剥离前沿处压力的连续性更为合理。但当剥离长度超过薄层厚度的数倍时, 采用两种不同条件预测的剥离行为差异较小。

我们工作中引入的可压缩性参数 ϵ 为快速分析软基体材料——如 MEMS 和生物医用系统中常用的材料——对剥离行为的影响提供了便利。基于弹性层可压缩性与剥离过程中提升高度的状态图, 使读者能够迅速识别剥离过程中的两个关键物理量——剥离长度和剥离力。在实际涉及薄粘附层的实验中, 实现高度不可压缩区间 ($\epsilon \ll 1$) 通常

较为困难。因此，在高度可压缩系统 ($\epsilon \gg 1$) 中，采用压力连续性或压力梯度连续性的差异可忽略不计。

第四章 长程作用力对界面粘附影响的实验及理论研究

4.1 前言

尽管细长结构在刚性基底上的粘附、附着及剥离行为已从多角度得到广泛研究，随着柔性电子器件、微流控装置及微纳米机电系统（M/NEMS）的快速发展，基底材料的可变形性逐渐受到重视。如图 4.1b 所示，许多工程系统采用了柔软的粘合层或弹性涂层覆盖在刚性基底上^[28, 74, 75]。即使在更小尺度的范德华材料器件中（图 4.1c 和 d），功能性薄板通常置于具有一定变形能力的分层（且各向异性）基底上^[52, 76, 77]。可变形基底的引入不仅为这些系统的设计与性能提升提供了新机遇，同时也提出了一个基础性问题：基底弹性如何影响结构的粘附或附着行为？这一问题在将基底视为弹性或粘弹性半空间的背景下已有探讨^[78, 79]。然而，如图 4.1 所示，可变形基底的几何形态明显呈现细长特征。尽管近期已有研究关注类似问题，如薄而不可压缩基底上薄板的剥离行为，但关于薄而可压缩基底的存在如何影响先前为刚性基底推导的曲率跳跃条件^[80]，仍未有清晰结论。此外，在半导体等微小尺度体系中，长程界面力与薄弹性基底的耦合作用是迄今为止尚未充分研究的关键问题。

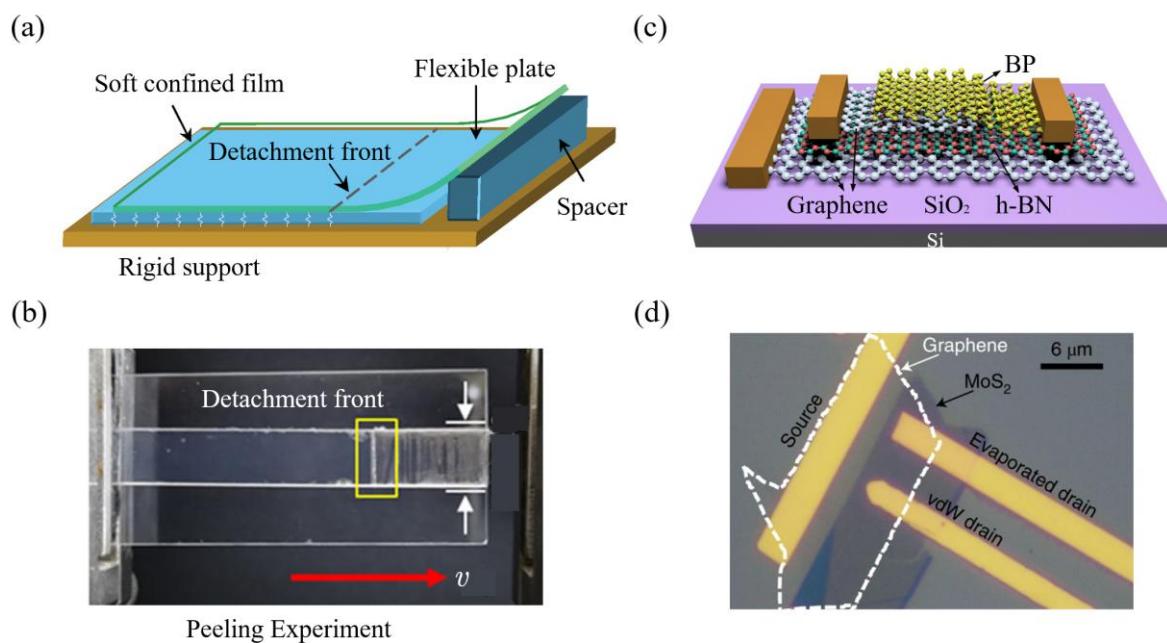


图 4.1 弹性微梁/薄板在薄且可变形基底上的粘附行为。(a) 示意图，显示薄弹性膜上的薄板剥离过程，该弹性膜粘接于刚性基底上^[28]。鉴于弹性膜的细长几何形状，可根据文献将其视为 Winkler 基底^[33]。(b) 相关实验照片，展示弹性薄板从弹性基底上剥离的过程^[75]。(c) 典型二维材料电子器件的示意图（图中为场效应肖特基势垒晶体管），功能性二维材料薄板置于其他

分层结构之上，这些结构亦可视为横向各向同性基底^[76]。此类复合结构通常称为异质结构。

(d) 典型器件的光学图像，展示了文献报道的石墨烯 MoS₂ 器件^[77]。

4.2 问题描述

4.2.1 Griffith 方法

我们首先从 Griffith 型视角出发，考察如图 4.2a 所示的一根弯曲刚度为 B 的梁，该梁粘附在一层薄弹性层上。当在左端 ($x=0$) 施加一个给定的挠度 δ 时，定义梁的挠度为 $w(x)$ ，基底表面变形为 $w_s(x)$ 。假设在接触区内粘附完美，则对于 $x > \ell$ (其中 ℓ 表示粘附或脱粘前沿的位置)，有 $w(x) = w_s(x)$ 。基于线性梁理论，该问题的控制方程可表达为：

$$B \frac{d^4 w}{dx^4} + p = 0, \quad (4.1)$$

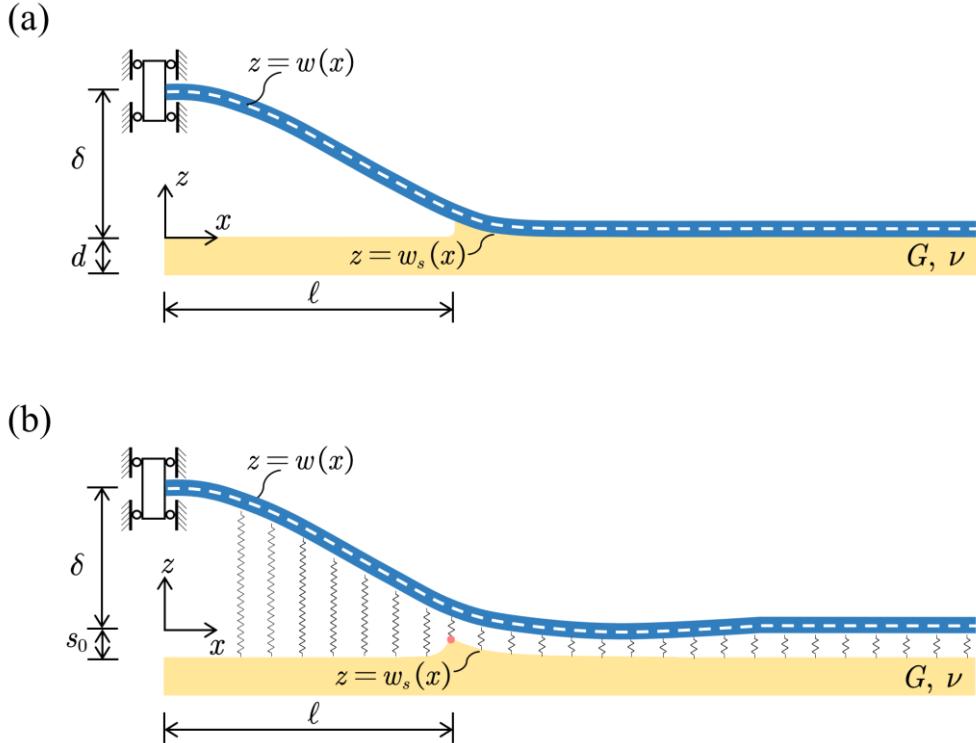


图 4.2 分析示意图及符号说明。(a) 梁或板的弯曲刚度为 B ，其粘附在一层薄弹性层上，该弹性层具有剪切模量 G 、泊松比 ν 和厚度 d 。板的左端以零斜率被抬起，位移为 δ ，界面随后发生脱粘，脱粘长度为 ℓ 。梁的中性轴变形由 $z = w(x)$ 描述，弹性层顶部表面的变形由 $z = w_s(x)$ 描述。(b) Dugdale 型模型示意图，其中梁与基底界面采用平滑的界面力学关系来表征。

对于 $x \geq 0$, 其中 p 是作用在梁上的分布力, 满足以下条件:

$$p = k_w w \mathcal{H}(x - \ell). \quad (4.2)$$

在 Griffith 型视角中, 分布力仅存在于接触区域($x > \ell$), 且与基底的变形成线性关系, 比例系数为常数刚度 k_w 。因此, 式 4.2 中引入了 Heaviside 阶跃函数 \mathcal{H} 。

我们注意到常数 k_w 是一个物理参数。对于剪切模量为 G 、厚度为 d 、泊松比为 ν 的基底, 利用类比流体润滑理论推导出:

$$k_w = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G}{d}. \quad (4.3)$$

这表明薄基底可以用 Winkler 模型来描述, 该模型由一系列独立弹簧组成, 具有常数弹性刚度 k_w 。需要注意的是, 当 $G/d \rightarrow \infty$ 时, 该模型可简化为刚性基底情况, 但无法恢复弹性半空间模型。Winkler 模型适用于描述可压缩薄弹性层的变形, 但对于完全或近乎不可压缩的弹性体 (如常用的橡胶或聚二甲基硅氧烷 (PDMS)) 则失效。这些材料中基底变形与恢复力的拉普拉斯算子有关, 导致控制方程为六阶微分方程, 而非 Winkler 模型中常用的无耦合四阶微分方程。此外, 温克勒弹簧床模型要求基底的细长比足够大, 即基底厚度远小于温克勒弹簧床的典型水平长度尺度。同时, 由于 Winkler 刚度公式 4.3 是基于线性弹性理论推导, 因此要求接触区域内基底的变形远小于其厚度。最近, Chandler 和 Vella^[39]证明只要泊松比不太接近 0.5, 即满足 $1-2\nu \gg d^2/\ell_*^2$ (其中 ℓ_* 是接触区域的水平长度尺度, 后续章节将讨论), 该模型仍然保持准确。另外, 即使基底为横向各向异性 (如图 4.1b 所示), 也可以采用温克勒弹簧床模型, 此时弹性刚度为:

$$k_w = C_{33}/d, \quad (4.4)$$

其中, C_{33} 是横向各向异性材料的弹性常数。

我们可以很自然地为图 4.2a 所示的问题确定几个边界条件, 包括:

$$w(0) = \delta, \quad w'(0) = 0, \quad w(\infty) = 0, \quad w'(\infty) = 0, \quad (4.5)$$

其中 w' 表示 dw/dx 。与刚性基底情况下在剥离前沿处梁曲率存在跳跃不同, 可变形基底的存在减弱了这种不连续性。具体来说, 在 $x = \ell$ 处, 梁的剪力保持连续:

$$[w(\ell)] = [w'(\ell)] = [w''(\ell)] = [w'''(\ell)] = 0, \quad (4.6)$$

其中 $[f(\ell)]$ 表示 $f(\ell^+) - f(\ell^-)$ 。

最终需要满足的条件应涉及推进剥离所需的能量，该条件结合梁-基底界面的粘附阻力，可用来确定剥离长度 ℓ 。我们随后依据 Griffith 的线性断裂力学理论，通过考察单位剥离增长时系统总势能 Π 的瞬时损失，计算系统的能量释放率 \mathcal{G} 。可以得到：

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} k w w^2 \Big|_{x=\ell}. \quad (4.7)$$

需要注意的是，刚性基底情况下的能量释放率已被报道为：

$$\mathcal{G}_{\text{Rigid}} = \frac{1}{2} B w''^2 \Big|_{x=\ell}, \quad (4.8)$$

因此，变形基底的存在将梁的挠度光滑度从 C^1 提升到了 C^3 类别。在本研究中，我们忽略了模式混合效应和界面缺陷，并假设临界能量释放率或附着能 γ 为常数。显然，实际界面常表现出各种缺陷，如表面粗糙度、界面滑移和内部脱粘等，我们也承认这些因素会影响附着行为。这些缺陷的影响应结合实验结果加以分析，以获得更准确的评估。本研究主要聚焦于基底弹性和长程界面力对附着的影响。通过假设完全附着，我们简化了分析，重点研究这些特定因素如何影响附着力学。因此，完成问题所需的最后一个边界条件为：

$$\mathcal{G} = \gamma. \quad (4.9)$$

4.2.2 Dugdale 方法

对于小尺度结构，长程界面相互作用被认为会发挥重要作用^[55, 81]。借鉴断裂力学中 Dugdale 或黏结模型的思想，我们将式 4.2 中离散的梁-基底作用力替换为迟滞型的 London-范德华力，其形式采用 Lennard-Jones 势函数^[82]：

$$p = \frac{9}{2} \frac{\gamma}{s_0} \left[\left(\frac{s_0}{w - w_s} \right)^4 - \left(\frac{s_0}{w - w_s} \right)^{10} \right], \quad (4.10)$$

其中， s_0 是原子尺度下的平衡间距。需要指出的是，其他势函数形式（如非迟滞型的 Lennard-Jones 势、Buckingham 势以及依赖晶格配准的势函数）或许能更准确地描述复杂的界面相互作用。然而，为了便于解析处理，本文仍采用式 4.10 的形式。基于式 4.10 将梁从基底表面自平衡间距分离至无限远所需的能量为单位面积下的黏附能 γ 。在这种 Dugdale 类型的建模方式中，并不存在清晰定义的脱粘或黏附前沿，如图 4.2b 所示；因此，我们定义的脱粘长度为基底表面形变最大的位置（在图 4.2b 中用粉色实心标记表示）。此外，此时基底的表面变形已不再等同于梁的挠度——二者由式 4.10 中给出

的分布载荷 p 联系起来：

$$p = k_w(w_s + s_0). \quad (4.11)$$

显然，随着基底刚度增大（即 $k_w \rightarrow \infty$ ），在所定义的坐标系中， w_s 会趋近于 $-s_0$ 。

4.2.3 向稳态的过渡

Griffith 型与 Dugdale 型模型中所呈现的弹性基底，因其类弹簧的变形特性，导致了与刚性基底中曲率突变条件截然不同的边界条件。然而，在给定端部挠度 δ 的情况下，我们通常会预期出现较大的剥离长度 ℓ 。需要指出的是，这里的端部挠度 δ 被设定得足够小，以确保在剥离过程中储存的弹性能始终以弯曲能为主导。这种设置使得我们所考虑的问题更类似于以弯曲为主导的鼓泡试验，而非以拉伸为主导的剥离试验。在这种情况下，随着剥离前沿的推进，基底中储存的弹性能基本保持不变，因此进入稳态，此时基底弹性对能量释放率的影响将逐渐消失。换言之，在相同的临界能量释放率 γ 下，随着 δ 或 ℓ 的增大，弹性基底下的 Griffith 型与 Dugdale 型模型的结果应逐渐趋近于刚性基底的结果。因此，一个关键的问题是：这一过渡是由哪个无量纲参数所控制的？

我们将表明，这一过渡参数可以通过比较剥离区与接触区内的特征水平长度来定义。在剥离区域 $0 < x < \ell$ 中，相关的水平长度尺度较为直接，即为剥离长度 ℓ 本身。为了将该长度与系统的内在物理属性关联起来，我们可以比较两种能量：梁中储存的弹性能 $\sim B\delta^2/\ell^4 \times \ell$ 与界面粘附能 $\sim \gamma \times \ell$ 。这种能量对比将引入弯粘长度或称弹性毛细长度这一特征尺度：

$$\ell_{ec} = (B\delta^2/\gamma)^{1/4}. \quad (4.12)$$

事实上，已有研究在相同构型（见图 4.2a）但假设基底刚性不变的情形下，已表明

$$\ell_{Rigid} = 18^{1/4} \ell_{ec}. \quad (4.13)$$

接下来的任务是揭示接触区域中梁的变形特征，考虑基底弹性与远程界面作用力的影响，这也将构成本研究余下部分的主要内容。

4.3 Griffith 模型：弹性基底的影响

4.3.1 尺度律分析

我们首先讨论在可变形基底系统中涉及的长度尺度。该系统中需考虑两个主要的

水平长度尺度：一个是在剥离区域（即式 4.12 中已给出的弹性毛细长度 ℓ_{ec} ），另一个则位于接触区域。对于 $x > \ell$ ，由式 4.1 和 4.2 可知，在接触区域中存在一个典型的 Winkler 长度：

$$\ell_w = (B/k_w)^{1/4}. \quad (4.14)$$

在该长度尺度内，梁将引起弹性基底的变形。因此，自然地，我们可以比较这两个区域中的水平长度尺度：

$$K_w = \left(\frac{\ell_{\text{ec}}}{\ell_w} \right)^4 = \frac{k_w \delta^2}{\gamma}. \quad (4.15)$$

该参数可被视为基底的有效刚度，有趣的是它与梁的弯曲刚度无关。因此，我们预期在粘附能 γ 较小、基底刚度 k_w 较大或施加挠度 δ 较大时，有 $K_w \gg 1$ ，此时所计算出的 ℓ 应趋近于式 4.13 所给出的刚性基底情形下的脱粘长度 ℓ_{Rigid} 。

4.3.2 无量纲化

我们主要关注在给定挠度 δ 条件下的脱粘长度。接着，我们采用挠度 δ 和弹性毛细长度 ℓ_{ec} 对系统进行无量纲化。具体操作如下：

$$X = x/\ell_{\text{ec}}, \quad W = w/\delta, \quad P = p\delta/\gamma, \quad L = \ell/\ell_{\text{ec}}. \quad (4.16)$$

接着，我们得到该问题的无量纲形式：

$$W''' + K_w W \mathcal{H}(X - L) = 0, \quad (4.17)$$

对于 $0 \leq X < \infty$ ，存在以下边界作用：

$$\begin{aligned} W(0) &= 1, \quad W'(0) = 0, \quad W(X \rightarrow \infty) = W'(X \rightarrow \infty) = 0, \\ \llbracket W(L) \rrbracket &= \llbracket W'(L) \rrbracket = \llbracket W''(L) \rrbracket = \llbracket W'''(L) \rrbracket = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

以及一个用于确定脱粘长度的粘附条件

$$\frac{1}{2} K_w W^2(L) = 1. \quad (4.19)$$

方程 4.17 至 4.19 构成了完整的问题，其唯一依赖的参数为式 4.15 中定义的有效基底刚度 K_w 。

4.3.3 解析解答

利用边界条件 4.18, 方程组 4.17 至 4.19 的解析解可以直接求得:

$$W(X) = (a_1 X^3 + a_2 X^2 + 1) \mathcal{H}(L - X) + e^{\xi(L-X)} (b_1 \sin \xi X + b_2 \cos \xi X) \mathcal{H}(X - L), \quad (4.20)$$

其中 $\xi = (K_w/4)^{1/4}$, a_i 和 b_i ($i=1, 2$) 为积分常数。我们利用边界条件 4.18 中的匹配条件, 可以得到:

$$a_1 = \frac{2\xi^3}{3 + L\xi[3 + L\xi(3 + L\xi)]}, \quad a_2 = -\frac{3\xi^2(1 + L\xi)}{3 + L\xi[3 + L\xi(3 + L\xi)]}, \quad (4.21)$$

和

$$b_1 = \frac{(1 - L\xi)\cos L\xi + (1 + L\xi)\sin L\xi}{1 + L\xi[1 + L\xi(1 + L\xi/3)]}, \quad b_2 = \frac{(1 + L\xi)\cos L\xi - (1 - L\xi)\sin L\xi}{1 + L\xi[1 + L\xi(1 + L\xi/3)]}. \quad (4.22)$$

最后, 利用条件 4.19, 我们得到了剥离长度的表达式:

$$L = (4/K_w)^{1/4} [G(K_w) - 1] + K_w^{1/4}/G(K_w), \quad (4.23)$$

其中 $G(K_w) = \left(\sqrt{1 - \sqrt{2} K_w^{3/2}/4} - 1\right)^{1/3}$.

不同基底刚度 K_w 下计算得到的梁挠度如图 4.3a 所示 (用彩色实线表示), 图中还标注了相应的剥离前沿位置 (用彩色标记表示)。如预期所示, 当 $K_w \gg 1$ 时, 计算结果逐渐收敛到刚性基底的极限 (虚线曲线)。另一方面, 在剥离前沿附近可以明显观察到基底的变形 (见图 4.3a 放大视图), 这种基底变形导致系统的剥离长度减小 (见彩色标记)。有趣的是, 我们发现只有当 $K_w \geq 2$ 时才会发生剥离或问题有解; 否则, 由粘附引起的基底变形将完全填补由端部位移 δ 所规定的间隙。

我们进一步在图 4.3b 中绘制了由式 4.23 给出的解析 $L - K_w$ 关系 (以实线曲线表示)。为了更清晰地理解剥离长度对 K_w 的依赖性, 我们对式 4.23 进行渐近解法, 令 $K_w = 2 + \tilde{K}_w$, 且 $|\tilde{K}_w| \ll 1$ 。由此得到:

$$L = 2^{-3/4} (K_w - 2)^{1/2} \quad \text{as} \quad K_w \rightarrow 2, \quad (4.24)$$

该式也绘制在图 4.3b 中 (红色虚线)。值得注意的是, 即使在 $K_w \sim 10$ 时, 式 4.24 与完整解的吻合度依然很好。然而, 当有效基底刚度非常大时, 我们需要针对式 4.23 在

$1/K_w \ll 1$ 的条件下寻找解。这将得到：

$$L = 18^{1/4} - (4/K_w)^{1/4} \quad \text{as} \quad K_w \gg 1, \quad (4.25)$$

该式绘制为图 4.3b 中的蓝色虚线。注意， $18^{1/4}$ 是刚性基底的解（见式 4.13）。这些结果表明，参数 K_w 可以作为一个过渡参数，用以连接弹性基底与刚性基底的结果。

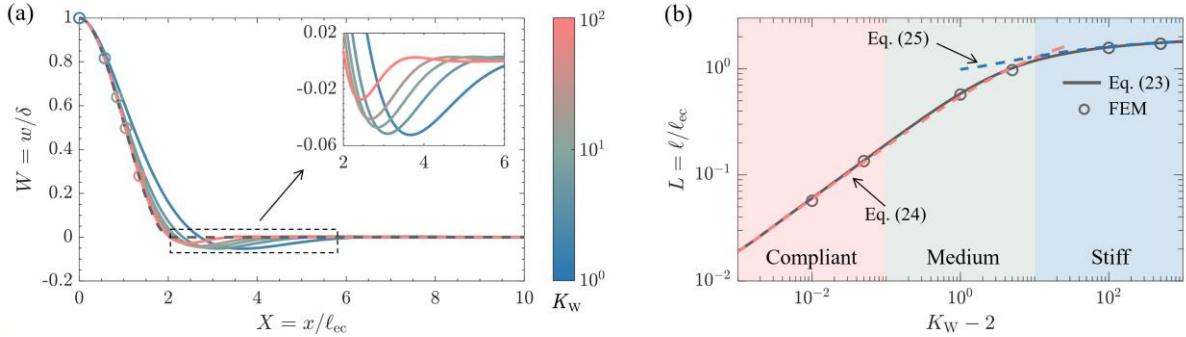


图 4.3 梁在薄弹性基底上粘附的 Griffith 型建模。(a) 不同有效基底刚度 K_w 下梁的无量纲挠度。实线曲线为由方程（方程 4.20—4.22）给出的解析解。彩色标记表示剥离前沿位置。黑色虚线曲线表示刚性基底的结果。(b) 无量纲剥离长度随有效基底刚度的变化关系。实线曲线根据方程 4.23 的解析解绘制。虚线曲线基于当 $K_w \rightarrow 2$ （见方程 4.24）和 $K_w \rightarrow \infty$ （见方程 4.25）时的渐近结果。标记表示 4.34 节中讨论的有限元计算所得结果。

4.3.4 有限元计算

我们注意到，上述简洁的解析解是基于假设弹性基底表现为弹簧式响应得到的。该假设的有效性要求基底具有较大的细长比，即对于我们考虑的问题，需要满足基底厚度远小于 Winkler 长度，即 $d \ll \ell_w$ ，或者满足以下条件：

$$\mathcal{S} = \frac{(1-2\nu)B}{(1-\nu)Gd^3} \gg 1, \quad (4.26)$$

因此，尽管我们问题中的控制参数 K_w 与梁的机械性能无关，但梁的弯曲刚度对于解析解的准确性仍然十分重要。此外，由于式 4.3 中的 Winkler 刚度是基于线性弹性理论得到的，我们要求整个区域内满足位移幅值远小于基底厚度，即 $|w| \ll d$ 。考虑到最大挠度发生在剥离前沿，根据式 4.7 和 4.9，这一条件可通过以下不等式得到满足：

$$\mathcal{L} = \frac{(1-2\nu)\gamma}{(1-\nu)Gd} \ll 1. \quad (4.27)$$

为了进一步验证 Griffith 型模型的结果，我们采用有限元方法（FEM）模拟该界面剥离问题，使用了内聚力模型。参照文献^[38]中的实验，梁体采用玻璃材料，薄弹性基底采用聚合物薄膜，并且与其底面完美结合。界面采用典型的双线性黏结律，粘附能设定为 $\gamma = 40 \text{ mJ/m}^2$ 。计算中，基底的剪切模量为 $G = 1 \text{ MPa}$ ，厚度为 $d = 100 \mu\text{m}$ ，梁的弯曲刚度为 $B = 4 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$ 。在该条件下，参数 $S \sim 10^4$ 与 $L \sim 10^{-3}$ ，同时满足式 4.26 和 4.27 的要求。我们通过调节基底间隙高度，改变有效基底刚度 $K_w = 2.01, 2.05, 3, 7, 102$ 和 502 。图 4.3b 中，有限元计算结果（以圆圈表示）与 Griffith 型模型的预测表现出优异的一致性。

4.4 长程作用力的影响

4.4.1 尺度律分析

对于图 4.1b 所示的基于二维材料的半导体器件，更适合采用 4.2 节中讨论的 Dugdale 型方法来理解梁的粘附行为。通过在公式 4.10 中引入 Lennard-Jones 型的范德华势，我们无需假设宏观的剥离区和接触区。此外，长程界面牵引力引入了新的长度尺度，值得进一步探讨。

首先，类似于薄弹性基底的 Winkler 弹性基础模型，公式 4.10 中的界面牵引力可以视为一组独立的非线性弹簧。对该势能在 $|w - w_s| \ll s_0$ 条件下进行线性化，也能得到范德华弹簧的等效刚度：

$$k_{vdW} = \frac{\gamma}{s_0^2}, \quad (4.28)$$

沿着推导 Winkler 长度 ℓ_w （见公式 4.14）的思路，我们得到一个范德华作用的水平长度尺度：

$$\ell_{vdW} = \left(\frac{B}{k_{vdW}} \right)^{1/4} = \left(\frac{Bs_0^2}{\gamma} \right)^{1/4}. \quad (4.29)$$

此外，范德华势能中还包含一个固有的垂直长度尺度，即平衡间距 s_0 。有趣的是，当我们比较“脱粘”区域和范德华作用区域的垂直长度时，发现

$$\mu = \left(\frac{\ell_{ec}}{\ell_{vdW}} \right)^2 = \frac{\delta}{s_0}, \quad (4.30)$$

这在概念上与比较“脱粘”区域与范德华作用区域中的水平长度是完全一致的。

我们可以将参数 μ 理解为表征体系黏附行为是宏观($\mu \gg 1$)还是微观($\mu \ll 1$)的转变参数。然而, μ 并非唯一决定因素,因为其中尚未考虑基底弹性的影响。这一点可以通过按照式4.16对范德华势能进行无量纲化来加以说明:

$$P = \frac{9\mu}{2} \left[\frac{1}{\mu^4 (W - W_s)^4} - \frac{1}{\mu^{10} (W - W_s)^{10}} \right], \quad (4.31)$$

在该Dugdale型模型中,基底变形 $W_s \neq W$,也是待求解的一部分,需要结合附加的Winkler方程4.11一同确定。该方程的无量纲形式为:

$$P = K_w (W_s + 1/\mu). \quad (4.32)$$

4.4.2 刚性基底

我们首先关注一个极限情形,在该情况下基底变形可以忽略,因此 $w_s \equiv -s_0$ 或 $W_s \equiv -1/\mu$ (见图4.2b)。根据式4.31和4.32,这一假设成立的条件是 $K_w \gg \mu^2$,即:

$$k_w \gg k_{vdw} \quad \text{or} \quad k_w s_0^2 \gg \gamma \quad (4.33)$$

在物理意义上,该条件意味着基底刚度远大于范德瓦尔斯作用引起的表面位移所需的反作用刚度。此时问题可大大简化为:

$$W''' + \frac{9\mu}{2} \left[\frac{1}{(\mu W + 1)^4} - \frac{1}{(\mu W + 1)^{10}} \right] = 0, \quad (4.34)$$

满足以下条件约束:

$$W(0) = 1, \quad W'(0) = 0, \quad W(\infty) = 0, \quad W'(\infty) = 0. \quad (4.35)$$

在这个简化问题中, μ 确实成为唯一的过渡参数。

在图4.4a中,我们绘制了不同 μ 值下的梁挠度曲线。可以明显看出,随着 μ 的增加,挠度曲线逐渐趋近于虚线所示的刚性基底Griffith型模型的结果。该虚线结果是通过求解带有跳跃条件的梁方程(见式4.8)得到的。此外,类似于弹性基底上的粘附行为,当脱粘区域的梁逐渐靠近平衡间距时,由于范德华弹簧的变形,梁表现出轻微的向下凹形变(详见图4.4a中的放大图)。值得注意的是,观测这种凹形变的合适长度尺度不是弹性-黏附长度 ℓ_{ec} ,而是范德华长度 ℓ_{vdw} 。这一点也可以通过对控制方程4.34线性化分析得到进一步验证。

$$W''' + 27\mu^2 W = 0, \quad (4.36)$$

这表明在“接触”区域内有 $X \sim \mu^{-1/2}$ 或 $x \sim \ell_{\text{vdW}}$ 。我们将板产生最小向下挠度的位置定义为 x_{\min} ，相应的挠度为 w_{\min} 。在图 4.4b 中，我们通过将 y 轴以 w_{\min} 的绝对值归一化，并将 x 轴相对于 x_{\min} 按照 ℓ_{vdW} 进行归一化，重新绘制了该凹形区域的变形曲线，得到了一个主曲线，进一步验证了范德瓦尔斯弹簧的挠度变化主要发生在长度尺度为 ℓ_{vdW} 的区域内。

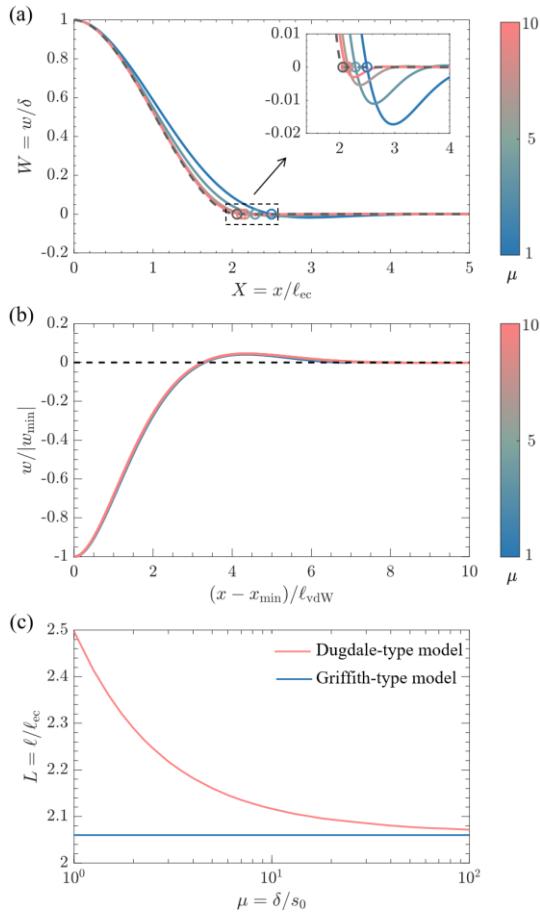


图 4.4 刚性基底上板的吸附行为在微观尺度下可通过 Dugdale 型模型描述。(a) 实线表示在不同 μ 条件下，数值求解控制方程 4.34 并施加边界条件 4.35 所得的挠度曲线。彩色标记点表示对应不同 μ 的脱粘点位置，虚线为刚性基底 JKR 型模型的结果；(b) 实线表示在定义的接触区域内，不同 μ 条件下板的挠度曲线。此处 y 轴以最小挠度 w_{\min} 的绝对值归一化， x 轴则以 ℓ_{vdW} 为尺度相对于最小挠度位置 x_{\min} 归一化；(c) 刚性基底上 Dugdale 型模型下不同 μ 对应的脱粘长度 L 演化曲线，同时给出了 JKR 型模型的结果以作对比。

不同于如图 4.4b 所示，Winkler 弹簧导致剥离长度减小，非线性范德瓦尔斯弹簧则表现出增加表观剥离长度的趋势，如图 4.4a 所示。为了量化这一现象，我们在刚性基底的 Dugdale 模型中，将剥离前沿定义为梁与基底间隙首次达到平衡间距 s_0 的位置，条件是 $x=0$ 处施加预设挠度 δ 。这些剥离前沿以彩色标记示于图 4.4a，并在图 4.4c 中以参数 μ 的函数形式进行了总结。从黏附的微观视角看，Dugdale 型模型中的界面被视

为剥离需要一个大小为 ℓ_{vdW} 的过程区。当该过程区尺寸相比于特征长度尺度 ℓ_{ec} 可忽略不计，即满足 $\mu \gg 1$ 。根据式 4.30，范德瓦尔斯力的长程效应可以被忽略。此时，剥离长度回归至刚性基底下 Griffith 型模型的结果 ℓ_{Rigid} ，该结果在式 4.13 中给出，并以图 4.4c 中的红线表示。

为了从实验角度进一步验证从 Dugdale 型行为向 Griffith 型行为的转变，并捕捉长程范德华力的影响，我们分析了文献 [68] 和 [83] 中的实验结果。图 4.5 展示了无量纲剥离长度与无量纲间隙高度的关系。圆形标记对应的是双层石墨烯，三角形标记对应的是来自文献 [83] 的三层石墨烯实验数据。明显可以看出，当参数 $\mu \sim 1$ （即间隙高度较小时），强烈的长程范德华力对剥离长度有显著影响。实验结果与我们 Dugdale 型模型存在偏差，可能是由于少层石墨烯的异常弯曲刚度以及复杂的界面相互作用，这些因素无法被简化的 Lennard-Jones 势模型完全描述。此外，我们还分析了文献 [68] 中关于二硫化钨不同厚度样品粘附于二氧化硅基底，且间隙高度为 48 nm 的实验数据。结果显示，不同厚度的二硫化钨样品的无量纲剥离长度均接近 Griffith 型模型的解析结果，即 ℓ_{Rigid} 。随着间隙高度的增加，长程范德华力的影响逐渐减弱，系统表现出由 Dugdale 型模型向 Griffith 型模型的明显转变。

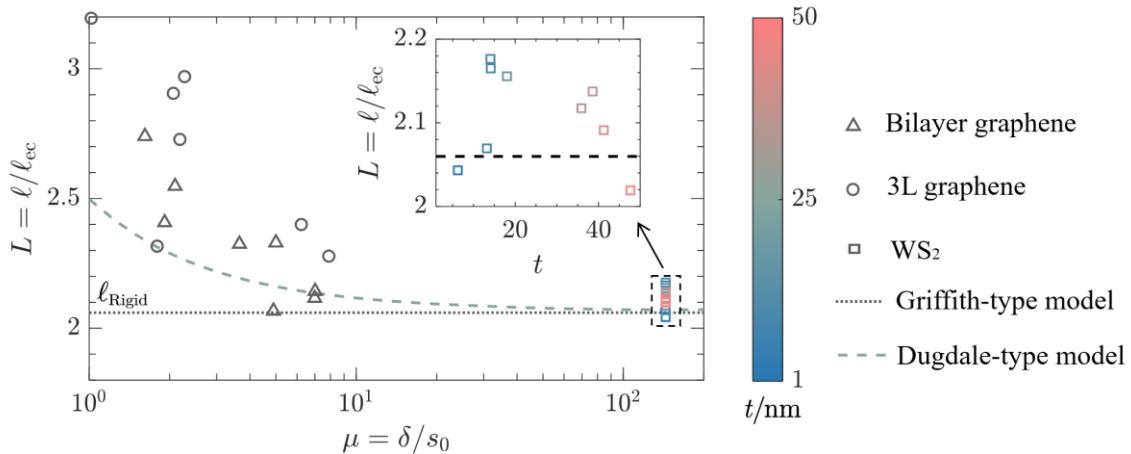


图 4.5 二维层状材料在不同间隙高度基底上的剥离行为实验结果。横轴表示间隙高度，纵轴表示无量纲剥离长度。圆形标记对应文献[83]石墨烯的实验数据，三角形标记表示三层石墨烯的实验数据。方形标记表示文献[68]中不同厚度的二硫化钨粘附于二氧化硅基底的实验结果。

4.4.2 可压缩基底

最后，我们在考虑基底弹性和长程界面力的基础上，研究微梁的粘附行为。基于前几节中建立的理解，现讨论“接触”区域的特征水平长度。Winkler 弹簧与范德华弹簧的结合表明，其有效弹簧刚度为：

$$k_{\text{eff}} = \frac{27k_w k_{\text{vdW}}}{k_w + 27k_{\text{vdW}}}. \quad (4.37)$$

这里我们根据线性化的范德华弹簧方程 4.36 加入了一个 27 的前置因子，以更精确地描述范德华弹簧常数。由此，相应的特征长度可表示为

$$\ell_{\text{eff}} = \left(\frac{B}{k_{\text{eff}}} \right)^{1/4} = \left[\frac{B(k_w s_0^2 + 27\gamma)}{27k_w \gamma} \right]^{1/4}. \quad (4.38)$$

显然，当满足式 4.36 时， $\ell_{\text{eff}} \rightarrow 3^{-3/4} \ell_{\text{vdw}}$ ；反之，则有 $\ell_{\text{eff}} \rightarrow \ell_w$ 。将弹性毛细长度 ℓ_{ec} 与接触区的该有效长度进行比较，得到：

$$\mu_{\text{eff}} = \left(\frac{\ell_{\text{ec}}}{\ell_{\text{eff}}} \right)^4 = \frac{27k_w \delta^2}{k_w s_0^2 + 27\gamma} = \frac{27K_w \mu^2}{K_w + 27\mu^2}, \quad (4.39)$$

该参数应为弹性基底下 Dugdale 型模型的综合转变参数。从概念上看，当 $k_w \ll k_{\text{vdW}}$ （即 $K_w \ll \mu^2$ ）时，该参数与弹性基底下 Griffith 型模型中式 4.15 中的 $\$K_w\$$ 相似；而当 $k_w \gg k_{\text{vdW}}$ （即 $K_w \gg \mu^2$ ）时，则与刚性基底下 Dugdale 型模型中式 4.30 中的 μ 相对应。

根据方程 4.1、4.10、4.11 以及无量纲化关系 4.16，弹性基底的 Dugdale 型模型问题可表述为求解以下方程：

$$W''' + K_w(W_s + 1/\mu) = 0, \\ \frac{2K_w}{9\mu^2}(\mu W_s + 1) - \frac{1}{\mu^4(W - W_s)^4} + \frac{1}{\mu^{10}(W - W_s)^{10}} = 0, \quad (4.40)$$

受限于边界条件 4.35，该问题依赖于参数 μ 和 K_w 。我们在图 4.6 中分别以 $\mu = 1$ （图 4.6a）和 $\mu = 10$ （图 4.6b）绘制了不同 K_w 下通过数值计算得到的梁的挠度曲线。再次观察到接触区内梁的向下凹形挠曲，并定义最小向下挠度的位置为 x_{\min} ，对应的挠度值为 w_{\min} 。通过将挠度归一化为 $w/|w_{\min}|$ ，横坐标归一化为 $(x - x_{\min})/\ell_{\text{eff}}$ ，得到所有计算数据的主曲线（图 4.6c），这表明有效长度尺度 ℓ_{eff} 能很好地刻画该问题的水平长度尺度。

脱粘前沿位置 $X = L$ 定义为基底表面出现最大变形的位置，如图 4.6b 所示。我们在图 4.6d 中展示了不同 K_w 值以及两个特定 μ 值（分别为 1 和 10）下的脱粘长度。基于之前的讨论，我们可以将 μ 视为微观与宏观粘附行为之间的过渡参数， K_w 视为弹性基底与刚性基底之间的过渡参数，而 μ_{eff} 则是向刚性基底宏观粘附行为过渡的组合过渡参数。图 4.6d 中弹性基底下 Dugdale 型模型的数值结果（用标记表示）进一步验证了这一点：当 μ 足够大时，模型结果趋近于弹性基底的 Griffith 型模型（实线，由式 \eqref{eq:L_JKR} 给出）；而要使其趋近于刚性基底的 Griffith 型模型 ($\ell = (18)^{1/4} \ell_{\text{ec}}$ ，式 4.23 所示)，则需要同时具有较大的 μ 和 K_w ，从而保证较大的 μ_{eff} 。

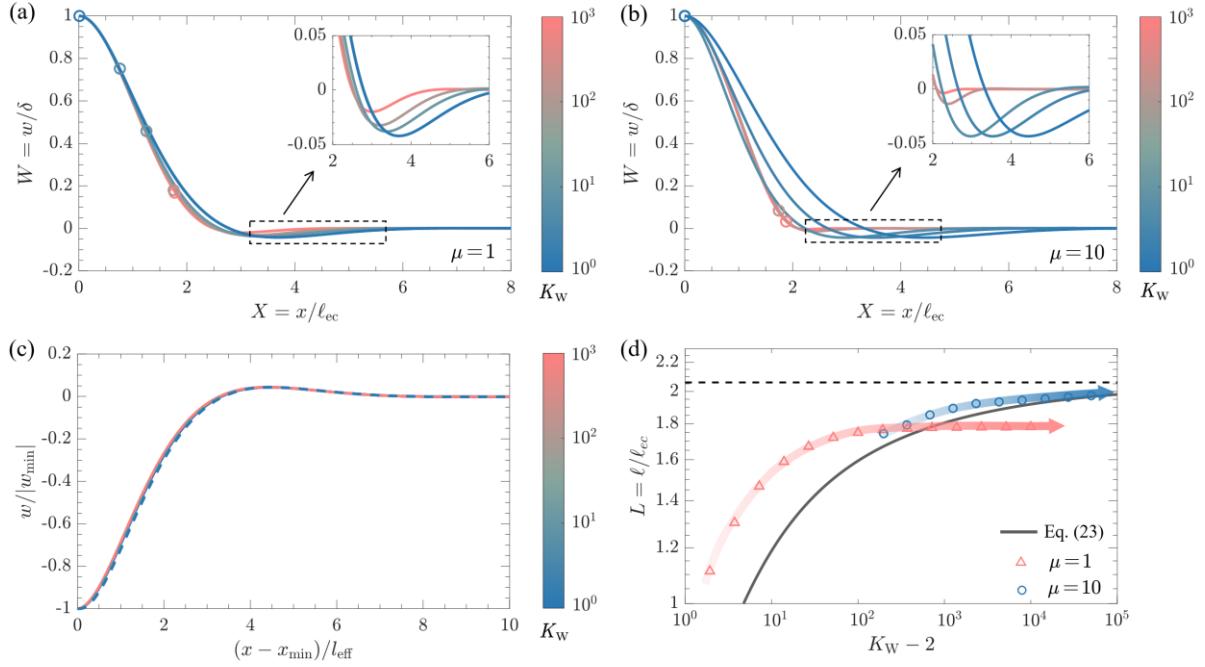


图 4.6 基于 Dugdale 型模型描述的微尺度可变形基底上薄板的粘附现象。(a) 实线曲线通过数值求解方程 4.40 得到, 固定 $\mu=1$, 不同 K_W 值; 彩色标记表示脱附点位置; (b) $\mu=10$ 的计算结果; (c) 在定义的接触区域内, 不同 K_W 下薄板的挠曲曲线, 纵坐标归一化为 $|w_{\min}|$ 的绝对值, 横坐标以相对于 x_{\min} 的距离归一化为 ℓ_{eff} , 实线表示 $\mu=1$ 的结果, 虚线表示 $\mu=10$ 的结果; (d) JKR 型模型 (实线) 与 Dugdale 型模型 (彩色标记) 在不同 K_W 和 μ 条件下的脱附长度 L 对比。

4.5 本章小结

本研究探讨了微梁在弹性基底上的粘附行为, 重点分析了基底弹性和长程界面力的影响。我们构建并分析了 Griffith 型和 Dugdale 型模型, 以理解关键的粘附条件及行为。研究发现, 所有模型均可通过一个定义的过渡参数收敛到经典的刚性基底粘附问题。该参数包含两个长度尺度: 脱粘区域内的特征弯曲粘附长度或弹性毛细长度, 以及根据基底弹性和长程界面力的具体影响所决定的 Winkler 长度、范德华长度或组合长度。结果显示, 基底变形会减小脱粘长度, 而长程界面力的引入则会增加表观脱粘长度。尽管我们的研究集中于图 4.1 中所示的简单结构, 但我们预计所建立的理论框架可方便地扩展到包括微纳米机电系统、微纳米流体器件及含软性粘合层或超小尺度结构的可穿戴电子设备等多种工程系统的不同配置中。

第五章 总结与展望

5.1 全文总结

建立轴对称粘附问题的非线性控制方程和关键边界条件，系统阐述该物理模型的理论框架。我们将识别若干关键物理参数，并探讨不同参数域下控制方程的简化形式。重点研究四种典型工况：纯弯曲工况、弯曲-预应力耦合工况、纯预应力工况以及纯拉伸工况。针对每种工况，我们不仅推导出临界粘附条件和粘附长度的解析解，还通过与完整控制方程的数值解对比验证了解析解的准确性。基于这些结果，构建了相图去揭示轴对称粘附问题中薄板丰富的粘附行为特征，并具体说明该相图在薄板器件结构可靠性实验评估中的应用方法。

建立平面条件下任意泊松比薄粘接层的力学模型，并推导相应的脱粘条件，通过解析解、内聚区模型和实验相结合的方法，系统比较不同边界条件的计算结果，并深入分析粘接层的等效可压缩性对于脱粘行为的影响。最后，总结本研究的主要发现及其工程应用价值。

探讨薄弹性基底和长程界面力对粘附条件及行为的影响机制及其适用边界。建立基于 Griffith 型和 Dugdale 型理论的薄板脱粘模型；通过定义脱粘区与接触区特征长度的比值作为过渡参数，成功建立弹性/刚性基底结果的统一关联。最后重点讨论 Dugdale 模型及相应的过渡参数。

5.2 本文创新点

本文的主要创新点如下：

(1) 实现高效评估不同变形模式下界面粘附。考虑板弯曲变形，向挠度引发的薄板拉伸效应以及板内初始残余预应力的耦合作用，构建了考虑此三种机制的协同作用的理论模型，给出不同极限情形下的简化解答，可在不同应用场景下对薄板的粘附行为进行有效预测。

(2) 描述弹性基底对于界面脱粘的影响。弹性体粘接剂广泛应用于各类工程系统中，其粘接层通常位于两个柔性或刚性基材之间。受限粘接层的力学参数（包括厚度、弹性模量和泊松比）对粘接性能的影响与表面化学性质同等重要。已有研究多在完全可压缩或完全不可压缩的假设下讨论该构型，但实际弹性体粘接层很少呈现这两种理想状态。亟须定量刻画材料可压缩性对于脱粘行为的影响，以及探究脱粘前沿边界条件的普适性和有效性。为航空航天、柔性电子等领域的粘接界面优化设计提供了理论

依据。

(3) 描述界面粘附作用的尺度效应和材料力学行为的尺度效应。发展合适的理论框架探究微纳尺度下基底弹性与界面长程作用力的耦合作用下薄板的脱粘特性，揭示材料力学行为的尺度效应对脱粘行为的影响。可为微纳机电系统中柔性粘接层设计、微流控芯片界面可靠性评估及可穿戴电子器件跨尺度粘附分析等工程领域提供理论指导，为涉及软粘接层或微纳尺度结构的系统优化提供普适性理论工具。

5.3 展望

对于薄板粘附行为的研究而言，本文仅关注了几何非线性、弹性基底和长程作用力对粘附行为的影响。关于相关方面尚有诸多问题尚待解决，具体如下：

(1) 尽管本研究聚焦于刚性基底上的薄板粘附行为，柔性电子和微纳机电系统(M/NEMS)领域日益广泛应用的软基底提出了一个核心科学问题：基底弹性如何影响粘附特性。解决弹性基底效应的挑战主要体现在两方面：一是求解非线性控制方程，二是确定临界粘附条件。鉴于几何非线性特性，可借鉴 Rayleigh 近似等方法，通过位移场近似获得解析解。该方法已在等近期研究中得到成功应用，但针对不同参数区域构建适宜的基底-薄板位移场简化模型仍具挑战性。此外，临界粘附条件会因基底变形发生本质改变。虽然基于 Griffith 断裂力学和 JKR 粘附理论的总能量最小化方法仍适用，但探索相应的局部粘附条件将具有重要理论价值。

(2) 本研究所采用的相对简化的一维线性模型，使我们能够探讨一些此前未被充分认识的粘附问题中的关键特征。然而，该模型忽略了多个重要因素。例如，在实际实验中，脱粘前沿可能会发生不稳定，呈现波纹状形变或界面空穴等现象，从而使本文所得结论失效。本研究所聚焦的实验主要涉及 PDMS 胶粘剂，其粘附能相对较低；而在粘附能较高的情况下，剥离过程中往往激发显著的几何或材料非线性，这些在本研究中尚未考虑。此外，本文讨论的为准静态剥离问题；而在动态剥离情形下，胶粘层的速率依赖性会显著影响界面强度。这种速率效应通常通过对粘附能进行经验性修正或引入粘弹性本构模型来描述脱粘过程中的响应行为，但这也会在理论建模中引入额外复杂性。本工作所讨论的是以弯曲主导的一维模型；而在轴对称构型下，随着剥离过程的推进，薄膜的膜状拉伸效应将变得尤为重要，并可能伴随起皱不稳定性或屈曲驱动的脱粘行为。这些局限性表明，未来的研究应进一步引入非线性效应、动态响应及不稳定机制，以更深入地理解自然与工程系统中复杂的粘附行为本质。

(3) 本研究所采用的 Griffith 型和 Dugdale 型模型框架较为简洁，有助于揭示弹性基底微梁脱粘的若干关键特征。然而，我们的分析未涵盖实际脱粘过程中可能出现

的多种失效机制。例如，脱粘过程中可能发生复杂的三维失效模式，如指状不稳定性、内部脱粘及不稳定裂纹扩展等。此外，粘合层及微梁材料在裂纹尖端附近可能表现出塑性、孔隙弹性及粘弹性行为，这些均会显著影响脱粘准则，而这些因素无法通过本研究所用的简化模型加以描述。

参考文献

- [1] A. Smith, F. Niklaus, A. Paussa, S. Vaziri, A.C. Fischer, M. Sterner, F. Forsberg, A. Delin, D. Esseni, P. Palestri, Electromechanical piezoresistive sensing in suspended graphene membranes, *Nano letters*, 13 (2013) 3237-3242.
- [2] R.J. Dolleman, D. Davidovikj, S.J. Cartamil-Bueno, H.S. van der Zant, P.G. Steeneken, Graphene squeeze-film pressure sensors, *Nano letters*, 16 (2016) 568-571.
- [3] X. Wang, Y. Ma, Y. Xue, H. Luan, M. Pharr, X. Feng, J.A. Rogers, Y. Huang, Collapse of liquid-overfilled strain-isolation substrates in wearable electronics, *International Journal of Solids and Structures*, 117 (2017) 137-142.
- [4] J. Liu, S. Lin, X. Liu, Z. Qin, Y. Yang, J. Zang, X. Zhao, Fatigue-resistant adhesion of hydrogels, *Nature communications*, 11 (2020) 1071.
- [5] Q. Yang, P. Sun, L. Fumagalli, Y. Stebunov, S. Haigh, Z. Zhou, I. Grigorieva, F. Wang, A. Geim, Capillary condensation under atomic-scale confinement, *Nature*, 588 (2020) 250-253.
- [6] Y. Gong, S. Li, J. Liu, Peeling of an extensible soft microbeam to solid: large deformation analysis, *International Journal of Applied Mechanics*, 10 (2018) 1850065.
- [7] Z. Peng, C. Wang, L. Chen, S. Chen, Peeling behavior of a viscoelastic thin-film on a rigid substrate, *International Journal of Solids and Structures*, 51 (2014) 4596-4603.
- [8] Z. Peng, H. Yin, Y. Yao, S. Chen, Effect of thin-film length on the peeling behavior of film-substrate interfaces, *Physical Review E*, 100 (2019) 032804.
- [9] E.E. Jones, M.R. Begley, K.D. Murphy, Adhesion of micro-cantilevers subjected to mechanical point loading: modeling and experiments, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 (2003) 1601-1622.
- [10] C. Mastrangelo, C. Hsu, Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces. II. Experiments, *Journal of Microelectromechanical systems*, 2 (1993) 44-55.
- [11] C. Mastrangelo, C. Hsu, Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces-Part I: basic theory, *J. Microelectromech. Syst.*, 2 (1993) 33-43.
- [12] C. Mastrangelo, Adhesion-related failure mechanisms in micromechanical devices, *Tribology Letters*, 3 (1997) 223-238.
- [13] M. De Boer, T. Michalske, Accurate method for determining adhesion of cantilever beams, *Journal of applied physics*, 86 (1999) 817-827.
- [14] Fang, Wenqiang, Mok, Joyce, Kesari, Haneesh, Effects of geometric nonlinearity in an

- adhered microbeam for measuring the work of adhesion, *Proceedings of the Royal Society Mathematical Physical & Engineering Sciences*, (2018).
- [15] N. Glassmaker, C. Hui, Elastica solution for a nanotube formed by self-adhesion of a folded thin film, *Journal of Applied Physics*, 96 (2004) 3429-3434.
- [16] C. Majidi, Remarks on formulating an adhesion problem using Euler's elastica (draft), *Mechanics Research Communications*, 34 (2007) 85-90.
- [17] C. Majidi, G.G. Adams, A simplified formulation of adhesion problems with elastic plates, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465 (2009) 2217-2230.
- [18] D.O. Okegbu, G.A. Kardomateas, Large deflection effects on the energy release rate and mode partitioning of the single cantilever beam sandwich debond configuration, *Journal of Applied Mechanics*, 91 (2024) 011001.
- [19] M.H. Nguyen, G.A. Kardomateas, Elastic Foundation Solution for the End-Notched Flexure Mode II Sandwich Configuration, *Journal of Applied Mechanics*, 91 (2024).
- [20] J.L. Liu, Theoretical analysis on capillary adhesion of microsized plates with a substrate, *Acta Mechanica Sinica*, 26 (2010) 217-223.
- [21] Y. Sun, X. Wang, X. Guo, Y. Mei, Adhesion behavior of an extensible soft thin film-substrate system based on finite deformation theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 85 (2021) 104115.
- [22] Y. Xue, D. Kang, Y. Ma, X. Feng, J.A. Rogers, Y. Huang, Collapse of microfluidic channels/reservoirs in thin, soft epidermal devices, *Extreme Mechanics Letters*, 11 (2017) 18-23.
- [23] Y. Gong, Y. Mei, J. Liu, Capillary adhesion of a circular plate to solid: Large deformation and movable boundary condition, *International Journal of Mechanical Sciences*, 126 (2017) 222-228.
- [24] J. Williams, Energy release rates for the peeling of flexible membranes and the analysis of blister tests, *International Journal of Fracture*, 87 (1997) 265-288.
- [25] K.-T. Wan, Adherence of an axisymmetric flat punch on a thin flexible membrane, *The Journal of Adhesion*, 75 (2001) 369-380.
- [26] D. Xu, K.M. Liechti, Analytical and experimental study of a circular membrane in adhesive contact with a rigid substrate, *International journal of solids and structures*, 48 (2011) 2965-2976.
- [27] J.R. Barber, *Contact mechanics*, Springer, 2018.
- [28] A. Ghatak, L. Mahadevan, M.K. Chaudhury, Measuring the work of adhesion between a

- soft confined film and a flexible plate, *Langmuir*, 21 (2005) 1277-1281.
- [29] S. Hao, R. Huang, G.J. Rodin, Approximate analytical solutions for the energy release rate of planar cracks in constrained elastic thin layers, *International Journal of Fracture*, 250 (2025) 1-23.
- [30] D.H. Kaelble, Peel adhesion: micro - fracture mechanics of interfacial unbonding of polymers, *Transactions of the Society of Rheology*, 9 (1965) 135-163.
- [31] H. Long, Y. Liu, H. Yin, Y. Zhang, Q. Yang, Y. Wei, 90-degree peeling of elastic thin films from elastic soft substrates: Theoretical solutions and experimental verification, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 193 (2024) 105855.
- [32] D.A. Dillard, B. Mukherjee, P. Karnal, R.C. Batra, J. Frechette, A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications, *Soft matter*, 14 (2018) 3669-3683.
- [33] J.M. Skotheim, L. Mahadevan, Soft lubrication, *Physical review letters*, 92 (2004) 245509.
- [34] I. Argatov, G. Mishuris, V. Popov, Asymptotic modelling of the JKR adhesion contact for a thin elastic layer, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 69 (2016) 161-179.
- [35] H. Li, Z. Dai, Adhesion of elastic microbeams on thin deformable substrates, *Engineering Fracture Mechanics*, 313 (2025) 110634.
- [36] R.H. Plaut, D. Hwang, C. Lee, M.D. Bartlett, D.A. Dillard, Peeling of finite-length elastica on Winkler foundation until complete detachment, *International Journal of Solids and Structures*, 256 (2022) 111944.
- [37] F. Yang, Asymptotic solution to axisymmetric indentation of a compressible elastic thin film, *Thin solid films*, 515 (2006) 2274-2283.
- [38] Y. Zhang, Y.-p. Zhao, A precise model for the shape of an adhered microcantilever, *Sensors and Actuators A: Physical*, 171 (2011) 381-390.
- [39] T.G.J. Chandler, D. Vella, Validity of Winkler's mattress model for thin elastomeric layers: Beyond Poisson's ratio, *Proceedings of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, (2020).
- [40] Dillard, A. D., Bending of Plates on Thin Elastomeric Foundations, *Journal of Applied Mechanics*, 56 (1989) 382-386.
- [41] A. Ghatak, M.K. Chaudhury, Adhesion-Induced Instability Patterns in Thin Confined Elastic Film, *Langmuir*, 19 (2003) 2621-2631.
- [42] Z. Dai, D. Vella, Droplets on Lubricated Surfaces: The slow dynamics of skirt formation, (2021).

- [43] Z. Liu, J.Z. Liu, Y. Cheng, Z. Li, L. Wang, Q. Zheng, Interlayer binding energy of graphite: A mesoscopic determination from deformation, *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 85 (2012) 205418.
- [44] T.J. Wagner, D. Vella, Switch on, switch off: stiction in nanoelectromechanical switches, *Nanotechnology*, 24 (2013) 275501.
- [45] S. Guo, Y. He, J. Lei, Z. Li, D. Liu, Individual strain gradient effect on torsional strength of electropolished microscale copper wires, *Scripta Materialia*, 130 (2017) 124-127.
- [46] D. Liu, Y. He, D.J. Dunstan, B. Zhang, Z. Gan, P. Hu, H. Ding, Toward a further understanding of size effects in the torsion of thin metal wires: an experimental and theoretical assessment, *International Journal of Plasticity*, 41 (2013) 30-52.
- [47] M.J. Cordill, A. Taylor, J. Schalko, G. Dehm, Fracture and delamination of chromium thin films on polymer substrates, *Metallurgical and Materials Transactions A*, 41 (2010) 870-875.
- [48] J. Bico, É. Reyssat, B. Roman, Elastocapillarity: when surface tension deforms elastic solids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50 (2018) 629-659.
- [49] K.L. Johnson, *Contact mechanics*, Cambridge university press, 1987.
- [50] B. Audoly, Y. Pomeau, Elasticity and geometry, in: Peyresq lectures on nonlinear phenomena, World Scientific, 2000, pp. 1-35.
- [51] E.H. Mansfield, *The bending and stretching of plates*, 1989.
- [52] Z. Dai, L. Liu, Z. Zhang, Strain engineering of 2D materials: issues and opportunities at the interface, *Advanced Materials*, 31 (2019) 1805417.
- [53] K. Johnson, J. Greenwood, An adhesion map for the contact of elastic spheres, *Journal of colloid and interface science*, 192 (1997) 326-333.
- [54] Y. Rao, E. Kim, Z. Dai, J. He, Y. Li, N. Lu, Size-dependent shape characteristics of 2D crystal blisters, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 175 (2023) 105286.
- [55] Z. Dai, N. Lu, K.M. Liechti, R. Huang, Mechanics at the interfaces of 2D materials: Challenges and opportunities, *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 24 (2020) 100837.
- [56] M.-f. Wong, G. Duan, K.-t. Wan, Adhesion–delamination mechanics of a prestressed circular film adhered onto a rigid substrate, *The Journal of Adhesion*, 83 (2007) 67-83.
- [57] G. Li, K.-t. Wan, Adhesion map for thin membranes, *Journal of Applied Mechanics*, 81 (2014) 021018.
- [58] K.-T. Wan, D.A. Dillard, Adhesion of a flat punch adhered to a thin pre-stressed membrane, *The Journal of Adhesion*, 79 (2003) 123-140.

- [59] K.-t. Wan, L. Kogut, The coupling effect of interfacial adhesion and tensile residual stress on a thin membrane adhered to a flat punch, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15 (2005) 778.
- [60] S. Wang, X. Li, The coupling effect of punch shape and residual stress on measuring adhesion work of membrane by pull-off test, *Thin solid films*, 518 (2010) 6036-6039.
- [61] T. Zhu, G. Li, S. Müftü, K.-t. Wan, Revisiting the constrained blister test to measure thin film adhesion, *Journal of Applied Mechanics*, 84 (2017) 071005.
- [62] C. Jin, Theoretical study of mechanical behavior of thin circular film adhered to a flat punch, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51 (2009) 481-489.
- [63] E. Chen, Z. Dai, Axisymmetric peeling of thin elastic films: A perturbation solution, *Journal of Applied Mechanics*, 90 (2023).
- [64] D. Vella, B. Davidovitch, Indentation metrology of clamped, ultra-thin elastic sheets, *Soft Matter*, 13 (2017) 2264-2278.
- [65] Y. Ma, M. Pharr, L. Wang, J. Kim, Y. Liu, Y. Xue, R. Ning, X. Wang, H.U. Chung, X. Feng, Soft elastomers with ionic liquid - filled cavities as strain isolating substrates for wearable electronics, *small*, 13 (2017) 1602954.
- [66] B. Radha, A. Esfandiar, F. Wang, A. Rooney, K. Gopinadhan, A. Keerthi, A. Mishchenko, A. Janardanan, P. Blake, L. Fumagalli, Molecular transport through capillaries made with atomic-scale precision, *Nature*, 538 (2016) 222-225.
- [67] A. Esfandiar, B. Radha, F. Wang, Q. Yang, S. Hu, S. Garaj, R.R. Nair, A. Geim, K. Gopinadhan, Size effect in ion transport through angstrom-scale slits, *Science*, 358 (2017) 511-513.
- [68] N. Ronceray, M. Spina, V.H.Y. Chou, C. Teck Lim, A.K. Geim, S. Garaj, Programmable 2D nano-switches and nano-capsules enclosing zeptoliter liquid volumes, *arXiv e-prints*, (2023) arXiv: 2311.08748.
- [69] S.J. Cartamil-Bueno, A. Centeno, A. Zurutuza, P.G. Steeneken, H.S.J. Van Der Zant, S. Houri, Very large scale characterization of graphene mechanical devices using a colorimetry technique, *Nanoscale*, 9 (2017) 7559-7564.
- [70] P. Sun, Q. Yang, W. Kuang, Y. Stebunov, W. Xiong, J. Yu, R.R. Nair, M. Katsnelson, S. Yuan, I. Grigorieva, Limits on gas impermeability of graphene, *Nature*, 579 (2020) 229-232.
- [71] D. Davidovikj, P.H. Scheepers, H.S. Van Der Zant, P.G. Steeneken, Static capacitive pressure sensing using a single graphene drum, *ACS applied materials & interfaces*, 9 (2017) 43205-43210.
- [72] M. Lee, D. Davidovikj, B. Sajadi, M. Šiškins, F. Alijani, H.S. Van Der Zant, P.G.

- Steeneken, Sealing graphene nanodrums, *Nano letters*, 19 (2019) 5313-5318.
- [73] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notched and cracks, (1968).
- [74] A. Juel, D. Pihler-Puzović, M. Heil, Instabilities in blistering, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50 (2018) 691-714.
- [75] Y. Sun, R. Chen, W. Wang, J. Zhang, W. Qiu, X. Liu, S. Yu, E. Li, L. He, Y. Ni, Rate-dependent pattern evolution in peeling adhesive tape driven by cohesive failure, *Langmuir*, 38 (2022) 12785-12794.
- [76] D. Li, M. Chen, Q. Zong, Z. Zhang, Floating-gate manipulated graphene-black phosphorus heterojunction for nonvolatile ambipolar Schottky junction memories, memory inverter circuits, and logic rectifiers, *Nano letters*, 17 (2017) 6353-6359.
- [77] L. Liu, L. Kong, Q. Li, C. He, L. Ren, Q. Tao, X. Yang, J. Lin, B. Zhao, Z. Li, Transferred van der Waals metal electrodes for sub-1-nm MoS₂ vertical transistors, *Nature Electronics*, 4 (2021) 342-347.
- [78] H. Long, Y. Liu, Y. Wei, Debonding characterization of stiff film/compliant substrate systems based on the bilinear cohesive zone model, *Engineering Fracture Mechanics*, 265 (2022) 108363.
- [79] H. Perrin, A. Eddi, S. Karpitschka, J.H. Snoeijer, B. Andreotti, Peeling an elastic film from a soft viscoelastic adhesive: experiments and scaling laws, *Soft matter*, 15 (2019) 770-778.
- [80] G. Cricri, A general approach for modelling the peeling of a flexible tape from an elastic substrate, *International Journal of Solids and Structures*, 273 (2023) 112277.
- [81] X. Yuan, P. Zhao, Q. Fan, The peeling behavior of compliant nano-films in adhesive contact with a planar rigid substrate: Insights from molecular dynamics and continuum mechanics, *Thin-Walled Structures*, 204 (2024) 112272.
- [82] H.B. Casimir, D. Polder, The influence of retardation on the London-van der Waals forces, *Physical Review*, 73 (1948) 360.
- [83] E. Han, J. Yu, E. Annevelink, J. Son, D.A. Kang, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Ertekin, P.Y. Huang, A.M. van der Zande, Ultrasoft slip-mediated bending in few-layer graphene, *Nature materials*, 19 (2020) 305-309.

个人简历、博士后期间发表的论文与其他相关成果

个人简历

教育经历

2011 年 09 月—2015 年 07 月，在西南交通大学获得力学学士学位。

2015 年 09 月—2021 年 10 月，在西南交通大学获得力学博士学位。

工作经历

2022 年 06 月—2025 年 6 月，在北京大学力学流动站从事博士后研究。

发表论文

- [1] Li, H., Yu, C., & Dai, Z. (2024). Regimes in the axisymmetric stiction of thin elastic plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 284, 109740.
- [2] Li, H., & Dai, Z. (2025). Adhesion of elastic microbeams on thin deformable substrates. *Engineering Fracture Mechanics*, 313, 110634.
- [3] Li, H., & Dai, Z. (2025). Peeling from elastomeric layers: Does material compressibility matter? *International Journal of Mechanical Sciences*.

其他相关成果

项目经历

- [1] 国家自然科学青年基金项目，国家自然科学基金委员会，2024-2026，主持。