

分类号_____

密级_____

U D C_____

编号_____

北 京 大 学

博 士 后 研 究 工 作 报 告

横观各向同性弹性层的渐近理论与接触问题研究

李居曜

工作完成日期 2023 年 7 月-2025 年 10 月

报告提交日期 2025 年 10 月

北 京 大 学 （北京）

2025 年 10 月

北京大学博士后研究报告原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的博士后研究报告，是本人在合作导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

报告作者签名：李居曜

日期： 2025 年 10 月 15 日

博士后研究报告使用授权说明

(必须装订在提交学校图书馆的印刷本中)

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用博士后研究报告的规定，即：

- 按照学校要求提交博士后研究报告的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存博士后研究报告的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存博士后研究报告；
- 因特殊原因需要延迟发布博士后研究报告电子版，授权学校 ☐ 一年 / ☐ 两年 / ☒ 三年以后，在校园网上全文发布。

(涉密报告在解密后遵守此规定。)

报告作者签名：李居曜

合作导师签名：戴昭贤

日期： 2025 年 10 月 15 日

横观各向同性弹性层的渐近理论与接触问题研究

Asymptotic Theory and Contact Problems of Transversely Isotropic Elastic Layers

博 士 后 姓 名：李居曜

流动站（一级学科）名称：北京大学力学

专 业（二级学科）名称：固体力学

研究工作起始时间：2023 年 7 月 04 日

研究工作期满时间：2025 年 10 月 15 日

北京大学工学院（北京）

2025 年 10 月

摘要

薄弹性层的变形问题广泛存在于各领域，从轨道交通、柔性电子器件、微机电系统到生物医疗等，尺寸从宏观到微观。探索复杂载荷下，薄弹性层的力学响应，对解决上述科学、工程问题具有重要的理论指导意义。本文以横观各向同性薄弹性层结构为研究对象开展研究，建立相应的力学模型，揭示其变形机理。沿着这一思路，本文取得以下创新性成果：

- 1) 探讨了由刚性基底支撑的薄横观各向同性弹性层上粘结的弹性板的压痕响应。利用积分变换方法，在 Hankel 空间中推导了有限厚度横观各向同性弹性层的线性法向力 - 位移关系。虽然该方法限制了问题为轴对称情况，但我们能给出半空间与可压缩薄层的 Hankel 空间 Green 函数，在将材料常数取为各向同性时，这些结果可退化为经典的各向同性半空间和各向同性薄弹性层的 Green 函数。进一步推导了弹性板-横观各向同性弹性层体系在小半径压头与大半径压头两种极限情况下的压痕力 - 位移关系，给出了压头尺寸对压头刚度的影响，并讨论了解的适用性。
- 2) 建立了统一描述可压缩、不可压缩薄弹性层变形问题的理论模型。采用摄动法，针对横观各向同性薄弹性层建立约化变形理论。该约化变形理论能准确刻画薄弹性层从可压缩到不可压缩变形的转变过程。
- 3) 研究了刚性球与薄弹性基底之间的无摩擦接触、黏附问题。前一部分的理论结果很大程度上简化了该问题的求解过程。在拉脱过程，考虑黏附作用的影响，将此过程中临界接触区假设为裂纹尖端，裂纹扩展所需能量通过 J 积分得到，详细讨论了采用不同边界条件求解对最大拉脱力的影响。

关键词：薄弹性层，横观各向同性，黏附，J 积分

ABSTRACT

The deformation of thin elastic layers is widely encountered in various fields, ranging from rail transportation, flexible electronic devices, micro-electromechanical systems (MEMS), to biomedicine, with dimensions spanning from macro to micro scales. Investigating the mechanical response of thin elastic layers under complex loading conditions holds significant theoretical and practical implications for solving these scientific and engineering problems. This study focuses on the deformation behavior of transversely isotropic thin elastic layers, developing corresponding mechanical models to reveal their deformation mechanisms. Following this approach, the study achieves the following innovative results:

The indentation response of an elastic plate bonded to a thin transversely isotropic elastic layer supported by a rigid substrate is investigated. By utilizing the method of integral transforms, a linear normal force–displacement relationship for a finite-thickness transversely isotropic elastic layer is derived in Hankel space. Although this method limits the problem to axisymmetric cases, we discuss the Hankel space Green’s function for both half-spaces and compressible thin layers. It is shown that, when the material constants are isotropic, these results degenerate into the classic Green’s function for isotropic half-spaces and isotropic thin elastic layers. Furthermore, the indentation force–displacement relationship for the elastic plate–transversely isotropic elastic layer system is derived under the limits of small and large radius indenters. The effect of indenter size on the indenter stiffness is examined, and the applicability of the derived solution is discussed.

A unified theoretical model is established to describe the deformation behavior of both compressible and incompressible thin elastic layers. A perturbation method is applied to establish a reduced deformation theory for transversely isotropic thin elastic layers. This reduced deformation theory accurately captures the transition process of thin elastic layers from compressible to incompressible deformation.

The frictionless contact and adhesion problem between a rigid sphere and a thin elastic substrate are studied. The theoretical results from the previous section significantly simplify the solution process for this problem. During the pull off process, the effect of adhesion is considered, and the critical contact zone is assumed to behave like a crack tip. The energy required for crack propagation is obtained using the J-integral, and a detailed discussion is provided on the influence of different boundary conditions on the pull off force.

Keywords: Thin elastic layer, transversely isotropic, adhesion, J-integral

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景和意义	1
1.2 研究现状	2
1.2.1 地基模型（Winkler 及其扩展模型）	2
1.2.2 接触、黏附理论	5
1.3 本文主要研究内容	8
第 2 章 横观各向同性薄弹性层上板的压痕问题	11
2.1 引言	11
2.2 模型和问题描述	12
2.3 横观各向同性弹性薄层基底	13
2.4 极限情况	17
2.5 结果与讨论	19
2.5.1 压痕问题	19
2.5.2 解析解	20
2.5.3 理论与数值结果的对比	21
2.5.4 近似解的适用范围	23
2.6 本章小结	25
第 3 章 薄横观各向同性弹性层的接触、黏附问题	27
3.1 引言	27
3.2 薄弹性层分析	28
3.3 结果与讨论	32
3.3.1 无黏附的压痕问题	33
3.3.2 考虑黏附影响的压痕问题	38
3.4 本章小结	44
第 4 章 总结	45
4.1 全文总结	45
4.2 讨论与展望	46
参考文献	47
致 谢	53
博士生期间的学术成果	55
博士后期间的学术成果	57
个人简历	59

层、生物医疗等。

自 20 世纪中叶起，Winkler 模型逐渐被引入黏附力学（adhesion mechanics）[12]。在粘接问题中，粘结层通常厚度很小、力学性质与基底差异显著，因此将其等效为弹性地基是一种自然且有效的处理方式。在软物质研究中，Winkler 模型同样展现出重要作用。例如，在研究弹性层的剥离、起泡（blistering）、指状失稳（fingering instability）等问题时[13]–[16]，粘接层常被视为弹性或粘弹性地基，模型预测结果与实验现象高度吻合。此外，在生物黏附（如树蛙趾垫、昆虫足部黏附）和仿生材料研究中，Winkler 模型也被用来解释界面应力分布与剥离行为[17]。

进入 21 世纪，随着微纳制造、柔性电子和仿生材料的发展，Winkler 模型再次焕发新生。其应用领域主要包括：1、柔性电子器件，在可拉伸显示器、可穿戴传感器中，电极与基底间常存在柔软粘结层，Winkler 模型为其界面稳定性与失效机理提供理论支持。2、微机电系统（MEMS），在微尺度下，界面黏附与脱粘是影响器件可靠性的关键因素，Winkler 地基模型在模拟压痕、剥离与脱粘中被频繁采用。3、仿生黏附与生物力学，昆虫、壁虎和树蛙的足部黏附现象常涉及薄层与基底的相互作用，地基模型能够有效解释其宏观表现与微观结构优势。4、地质与材料科学，如岩层中的岩浆鼓泡、薄膜涂层的起皱与剥离，均可借助改进后的 Winkler 模型进行刻画。

由此可见，薄弹性层的变形理论不仅是结构力学与界面力学的重要工具，更在现代工程与材料科学中展现出广阔的应用潜力。通过对其在弹性薄层黏附问题中的系统研究，本文旨在丰富现有理论体系，并为柔性结构与新型功能材料的设计提供理论依据。

1.2 研究现状

1.2.1 地基模型（Winkler 及其扩展模型）

如前文介绍，Winkler 模型最初提出是为了研究地基的变形问题，因此也称为“Winkler 地基模型”（Winkler Foundation Model）。该模型将地基假设为许多独立的弹簧，地基的变形与外载荷成正比关系：

$$p(x,y) = kw(x,y), \quad (1.1)$$

其中， $p(x,y)$ 为外载荷， $w(x,y)$ 为地基表面变形， k 为弹性系数。Winkler 地基模型通常用于描述简单的结构，如梁、板等在弹性地基上的行为[18]：

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + kw(x) = p(x), \quad (1.2)$$

其中， E 为梁的弹性模量， I 为梁的截面惯性矩。Winkler 地基模型在科学与工程问题中具有重要的应用价值，这其中一部分原因归因于模型的简单性，但是该模型仍有明显的缺陷。具体来说，该模型将地基简化为一系列独立的弹簧，模型中忽略了相邻弹簧（或介质）之间的相互作用导致其不连续；此外，该模型无法描述不可压缩弹性薄层的变形问题。为了上述问题，后面的研究学者在 Winkler 模型的基础上进行了补充。

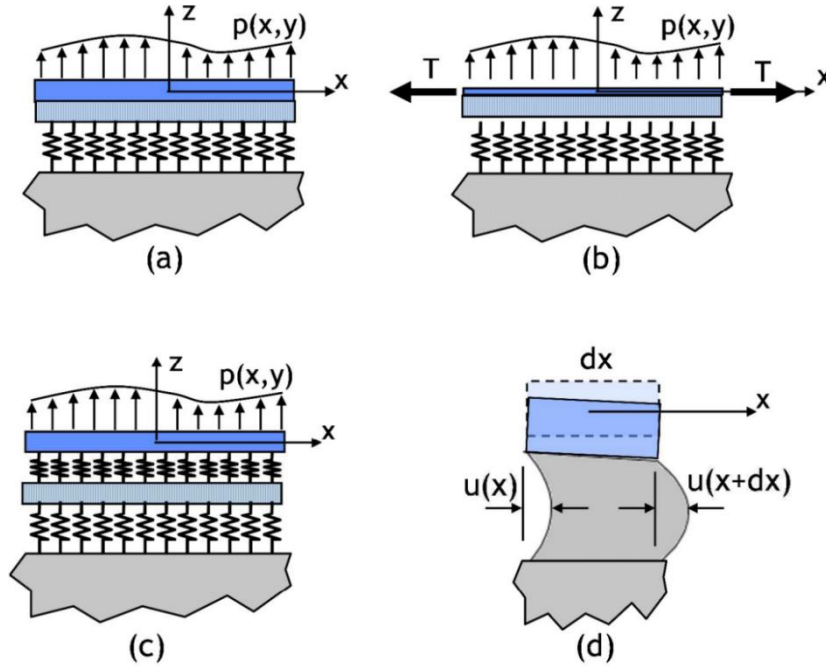


图 1.2 各扩展 Winkler 地基模型示意图[19]。

Filonenko-Borodich 地基模型假设 Winkler 模型中的弹簧之间通过均匀拉伸的线性弹簧连接，或者认为是 Winkler 地基上有一层有预应力的薄膜，给出载荷与变形之间的关系[20]：

$$p(x,y) = kw(x,y) - T\nabla^2 w(x,y). \quad (1.3)$$

其中， T 为描述横向弹簧张力的弹性系数， ∇^2 为拉普拉斯微分算子。

Pasternak 模型通过引入剪切参数 G ，进一步考虑了地基弹簧之间的剪切相互作用[5]:

$$p(x,y) = kw(x,y) - G\nabla^2 w(x,y). \quad (1.4)$$

其中， G 为描述剪切作用的弹性系数。

Hetenyi 模型假设 Winkler 弹性地基上有一层板[4]:

$$p(x,y) = kw(x,y) - D\nabla^4 w(x,y) \quad (1.5)$$

其中， D 为板的抗弯刚度系数。

Kerr 回顾了包括通过添加虚拟预应力膜的 Filonenko-Borodich 地基模型、Pasternak 模型以及添加虚拟板的 Hetenyi 模型等多个地基模型，这些模型通过对 Winkler 地基模型的修正，有助于更好地描述地基中剪切作用的影响（如图 1.2 所示）[21], [22]。对于粘接在 Pasternak 地基上的 Kirchhoff-love 板，Kerr 给出了该体系的控制方程：

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right)p(x,y) - \frac{G}{c}\nabla^2 p(x,y) = kw(x,y) - G\nabla^2 w(x,y) \quad (1.6)$$

其中， c 为常数。然而，不能通过上述方程推导出不可压缩地基体系的控制方程。

对于不可压缩弹性地基，其变形主要通过剪切变形实现的，这也是 Winkler 地基模型没有考虑的问题。Dillard 在 Gent、Meinecke 的基础上，给出了一维完全不可压缩涂层的理论模型，界面的变形与压力的二阶导数成正比[23], [24]:

$$w(x) = \frac{1}{k_I} \frac{d^2 p(x)}{dx^2}, \quad (1.7)$$

其中，不可压缩模量 $k_I \propto G/d^3$ ， G 为剪切模量， d 为不可压涂层厚度（这里的弹性系数取决于准确的边界条件）。

总结以上研究可以看出，Winkler 地基模型能够很大程度上简化薄弹性层的变形问题，从而被广泛应用于各类科学问题和工程问题。但该模型具有明显的缺陷，即不连续性以及无法描述不可压缩弹性薄层问题。后面的研究人员通过添加各种假设条件，给出扩展模型解决了不连续性、不可压缩的问题。这类扩展模型具有一定的经验性，其弹性系数难以通过理论推导定量给出，而是通过大量实验反推得到，这使得这类模型通用性降低，使用成本增加。

1.2.2 接触、黏附理论

从前文描述，我们知道 Winkler 地基模型以及其扩展模型能够一定程度上描述薄弹性层的变形，因此这些模型被广泛应用于各种科学问题以及工程问题。本文主要针对 Winkler 地基模型及其扩展模型在接触、黏附问题中的应用展开研究。

固体之间的接触、黏附相互作用在许多工程领域和日常生活中都具有重要影响。在日常生活中，宏观尺度下的物体通常不会黏附在一起，主要是由于不可避免地表面粗糙度，导致表面接触面积的比例相对较小，进而黏附力相对小。然而，这一规律在小尺度下并不完全成立。在该尺度下，黏附力相对于体积力比例增加，因而不能被忽略。近些年，随着纳米技术的不断发展，先进涂层等薄层结构广泛应用于航空航天、生物医疗、微电机机械系统（MEMS）、柔性电子等领域。此外，通过表面设计实现最佳黏附性能也是工业界的热门话题，典型的例子就是仿生结构设计，如壁虎、章鱼等。因此，研究薄弹性层的接触、黏附力学问题，能对以上工业问题提供理论指导。

对于接触问题，Hertz 理论研究了两无摩擦、黏附的弹性球之间的接触变形问题[25]，该理论为后续的接触问题奠定了重要理论基础，尤其是半空间接触问题。Kendall、Roberts 在实验中发现，接触面积在接触压力较小时明显大于 Hertz 理论给出的结果，尤其是接触力接近零时。这一实验结果表明，小尺寸下的黏附作用不可被忽略。1971 年，Johnson 结合 Kendall、Roberts 的实验结果[26]，在

Hertz 接触理论的基础上通过能量法给出考虑黏附作用的接触理论模型，即 JKR（Johnson-Kendall-Roberts）模型。该模型只考虑接触区内的黏附力影响而忽略了接触区外的黏附力，并且该模型采用了接触区边界处的应力奇异性假设。JKR 理论给出无摩擦刚性球与半空间弹性体之间的最大拉脱力为：

$$F_{\max} = \frac{3}{2} \pi R \Delta \gamma. \quad (1.8)$$

其中， R 为刚性球半径， $\Delta \gamma$ 为界面能。值得注意的是，早在 1932 年 Bradley 基于 L-J（Lennard-Jones）作用势[27]，研究了两个刚性球之间的相互作用，并给出最大拉脱力为：

$$F_{\max} = 2\pi R \Delta \gamma. \quad (1.9)$$

1975 年，Derjaguin 等人在 Hertz 理论模型的基础上进行修正[28]，他们认为黏附力作用不影响 Hertz 模型给出的变形，只会减小接触应力，进而给出了另一著名的接触黏附模型 DMT（Derjaguin-Muller-Toporov）理论模型。该模型给出的无摩擦刚性球和半空间弹性体之间的最大的拉脱力为 $2\pi R \Delta \gamma$ ，这与 Bradley 模型给出的结果一致。这一理论模型在黏附问题中应用非常广泛，但其存在一些争议。其中一点就是 DMT 模型中，接触面变形与载荷之间不满足协调条件；另外，在最大拉脱力方面，DMT 模型给出的结果与 JKR 模型存在较大差异。双方就这一分歧展开激烈争辩，同时也引起很多学者的关注。直到 1977 年，无量纲数 Tabor 数的提出对以上两种黏附模型提供合理的解释，该无量纲数的形式为[29]：

$$\mu = \left(\frac{R \Delta \gamma^2}{E^{*2} \varepsilon^3} \right)^{1/3}. \quad (1.10)$$

其中， $E^* = E/(1 - \nu^2)$ 为等效弹性模量， ε 为原子间平衡间距；该无量纲参数的物理含义为由黏附导致的弹性变形与原子间平衡间距之比。当 Tabor 参数很小，即 $\mu < 0.1$ 时，Bradley 和 DMT 理论给出的最大拉脱力与实际情况相符，当 Tabor 参数较大，即 $\mu > 5$ 时，JKR 理论给出的最大拉脱力与实际更相符。也可以理解

为 DMT 理论适用于低黏附、硬基底体系，而 JKR 理论适用于强黏附、软基底体系。

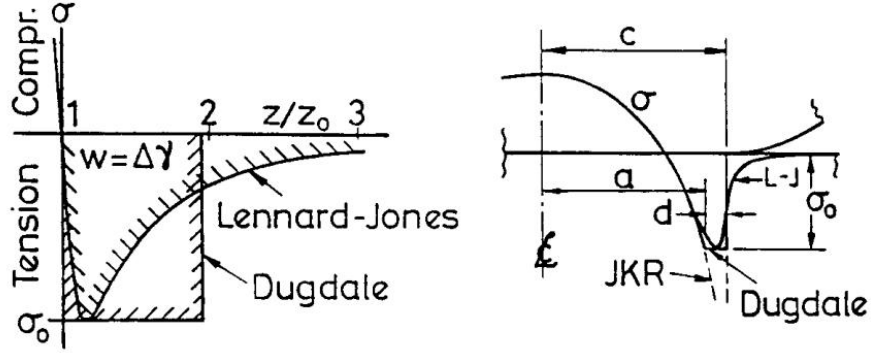


图 1.3 (a) Lennard-Jones 作用势、Dugdale 内聚力模型示意图。(b) 接触区边缘的应力分布示意。

同时，Tabor 注意到 DMT 理论不满足接触力学的变形协调条件，为后续自洽模型的提出提供了基础。比较典型的是 1992 年 Maugis 在 Dugdale 内聚力模型的基础上[30]，建立了半解析的黏附接触模型如图 1.3，即 M-D (Maugis-Dugdale) 模型，指出了 JKR 模型和 DMT 模型的转变关系，提出转变系数 Maugis 数：

$$\lambda = \sigma_0 \left(\frac{9R}{2\pi\Delta\gamma E^{*2}} \right)^{1/3}, \quad (1.11)$$

其中，为了和 L-J 势匹配，Dugdale 模型中的最大应力取为 $\sigma_0 = 16\Delta\gamma/(9\sqrt{3}\varepsilon)$ ，

此时 Maugis 数和 Tabor 数之间的关系为 $\lambda = 1.16\mu$ 。Johnson 和 Greenwood 于 1997 年[31]，在 M-D 理论的基础上给出了无量纲载荷与 Tabor 数、Maugis 数关系的黏附图谱，分析了各个理论模型的适用范围，其中包括 Hertz、Bradley、JKR、DMT 以及 M-D 模型（如图 1.4）。

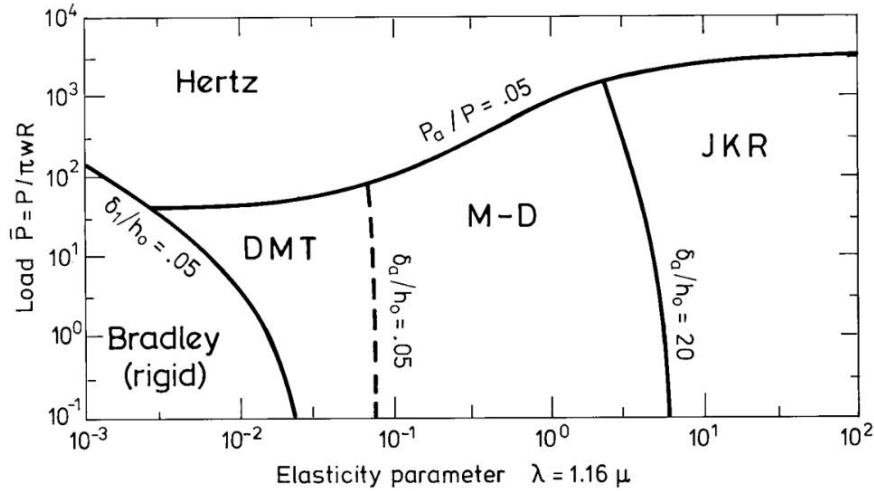


图 1.4 黏附图谱。

以上为经典的黏附理论模型，主要应用于半无限大体系的接触、黏附问题。但在很多实际应用中，尤其是微观体系中（如图 1 中的先进涂层电子材料、生物组织等），通常是有限厚度或者薄层结构。针对薄层结构的接触、黏附问题的研究也有很多，比较著名的有 Aleksandrov 等人通过渐近法求解可压缩弹性薄层的变形[32], [33]。Jaffar 在此基础上研究了不可压缩薄弹性层的压痕问题[34]。Matthewson 和 Chadwick 分别采用渐近匹配的方法研究了不可压缩弹性薄层的变形[35], [36]。Borodich 和 Yang 等人分别采用渐近理论针对可压缩、不可压缩薄弹性层的接触、黏附问题展开一系列研究[37]–[41]。Argatov 等人针对横观各向同性薄弹性基底的黏附问题开展研究[42], [43]。Ru 等人基于 Kerr 地基模型研究了各向同性薄弹性层的接触、黏附问题[44], [45]。

1.3 本文主要研究内容

随着微纳技术的不断进步，薄弹性层的接触、黏附理论在微电子机械系统、柔性电子器件、生物医疗等领域具有重要应用价值。以上应用场景中，薄弹性层往往表现为各向异性。此外，通过对前人研究成果的梳理，我们发现仍存在以下两个主要问题亟需解决：

- 1、Winkler 地基模型虽然应用广泛，但该模型忽略了薄弹性层之间的相互作用，并且该模型不可描述不可压缩弹性层。后续的扩展地基模型（如 Pasternak 模型、Kerr 模型等），采用较强的假设，模型中的弹性系数往往需要大量实验结

果反演得到。因此，需要建立更普适的地基扩展模型，为工程应用提供理论指导。

2、现有的薄弹性层的接触、黏附理论主要针对可压缩材料和不可压缩材料两种极限情况，缺乏对两种极限情况之间的理解，需要建立对可压和不可压薄弹性层变形统一描述的理论模型。本文围绕以上两个主要问题，针对实际应用中常见的横观各向同性薄弹性基底（如岩土、生物组织、先进功能涂层等）开展以下研究：

第二章研究了弹性板在薄横观各向同性弹性层上的压痕响应，薄弹性层由刚性基底支撑。我们通过积分变换方法建立了一个近似模型来描述薄横观各向同性弹性层的变形问题，并且所得理论解能退化到经典的 **Winkler** 地基模型。此外，通过有限元结果验证了该近似理论的正确性，并讨论了极大、极小两种极端压头情况的压痕刚度解析解。这些结果为具有横观各向同性的先进电子涂层材料在实际工程应用中提供一定的理论指导。

第三章主要研究了薄横观各向同性弹性层的接触、黏附问题。第二章通过积分变换方法给出薄横观各向同性弹性层的 **Winkler** 形式的解答，而这一结果和现有理论均不能描述可压缩到不可压缩薄弹性层变形模式的转变。这一章节，通过摄动理论提出一个薄横观各向同性弹性层的约化变形理论，该理论能对可压、不可压缩薄弹性层的变形进行统一描述。在以上理论基础上，研究了刚性球-薄弹性层的接触、黏附问题，并将理论与有限元结果进行对比，验证了理论模型的合理性。

第四章是对全文研究内容的总结归纳，以及介绍了本文所取得的主要研究结果与重要结论，最后是对后续相关工作的规划与展望。

第 2 章 横观各向同性薄弹性层上板的压痕问题

2.1 引言

在小尺度实验力学中，施加点状压痕载荷并测量材料在该载荷下的力学响应，是揭示纳米尺度材料弹性性质的最有效方法之一。这类材料包括超薄膜、纳米板、纳米带以及纳米线等[46]–[50]。

然而，材料在压痕下的响应在很大程度上取决于其支撑方式。通常有两种典型情形[10], [51]。其一是已被广泛研究的情况：细长纳米材料悬挂在沟槽或空腔之上，并由接触基底的边缘部分夹持[52]。在这种情况下，材料通过拉伸和弯曲（本质上是中性轴的拉伸与压缩）来响应外加压痕力[52]，从而可以测量其面内弹性属性[53]–[55]。

若要测量纳米材料的面外性能，例如石墨纳米片的 c 轴模量[56]，则采用第二种情形，即细长纳米材料完全由相对刚性的基底支撑。特别是在压阻测试或电子器件应用中，为了保证界面良好的导电性，往往在这类受支撑的纳米材料上再覆盖一层高导电性的板（见图 2.1a）[57], [58]。本文关注的正是第二种情形，具体而言，是研究覆盖在刚性基底支撑纳米材料上的弹性板的压痕响应（见图 1b）。在这种情况下，被夹在中间的细长纳米材料表现为一层薄的弹性层。因此，本文所研究的问题可追溯到经典的 Winkler 地基问题，即在弹性地基上受横向力作用的板弯曲问题[19]。该问题的关键在于确定弹性层的有效地基刚度。

关于各向同性弹性层的力学行为，已有大量研究。从经典的半空间 Boussinesq 模型到用于极薄层的 Winkler 地基模型，相关讨论十分广泛。特别是，对于可压缩[59]、不可压缩[24]以及近似不可压缩[60]–[62]的薄层，已有大量研究。然而，我们的研究不同之处在于聚焦于各向异性（具体为横观各向同性）的弹性层，例如石墨纳米片。横观各向同性弹性层的面外性能与其面内性能存在显著差异[63]，因此必须通过这种压痕测试来揭示其完整的弹性张量分量。值得注意的是，这种“弹性板-横观各向同性弹性层”体系不仅存在于纳米尺度的电子器件，也广泛出现于自然与工程系统中，例如张紧细胞皮质在类地基细胞质上的响应[64]，以及海床上弯曲的冰盖[11]。

长期以来，许多学者致力于研究横观各向同性弹性层的力学响应。例如，Elliott 研究了任意轴对称压头作用下横观各向同性半空间的压痕问题[65]；Fabrikant 则采用积分变换方法[66]，将三类势函数表示为半空间问题势函数的线性组合，从而给出了横观各向同性弹性层接触问题的基本解。在此基础上，滑动接触问题的解亦被获得[67]。Ding 和 Xu 基于应力函数方法推导了横观各向同性体中轴对称问题的一般解[68]。Yu 等人提出了横观各向同性弹性层中点力的 Green 函数，并应用于压痕问题求解[69], [70]。Ning 等人通过简化运动学方程，发展了薄横观各向同性弹性层在刚性基底上的近似解[71]。更近期，Argatov 和 Mishuris 则推导了薄可压缩与不可压缩横观各向同性弹性层接触问题的渐近解[72]。尽管已有上述进展，据我们所知，关于“弹性板-横观各向同性弹性层”的压痕耦合响应仍未见报道。

在本研究中，我们利用变换方法探讨了一层由刚性基底支撑的薄横观各向同性弹性层上粘结的弹性板的压痕响应。具体而言，本文首次在 Hankel 空间中推导了有限厚度横观各向同性弹性层的线性法向力-位移关系。虽然该方法限制了问题为轴对称情况，但我们能够讨论半空间与可压缩薄层的 Hankel 空间 Green 函数，并验证在将材料常数取为各向同性时，这些结果可退化为经典的各向同性半空间和各向同性薄弹性层的 Green 函数。基于此，我们进一步推导了弹性板-横观各向同性弹性层体系在小半径压头与大半径压头两种极限情况下的压痕力-位移关系。解析解与有限元数值结果吻合良好。同时，我们还讨论了理论解的适用性和局限性。总体而言，本研究结果为理解横观各向同性半导体材料在细长几何构型及导电功能层应用中的力学行为提供了定量理论指导。

2.2 模型和问题描述

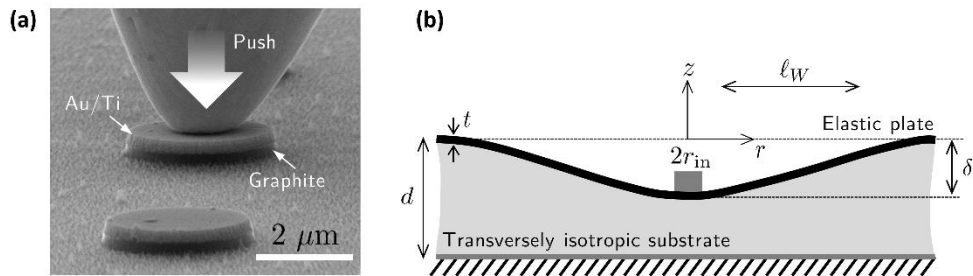


图 2.1 板与薄弹性层系统的压痕问题。（a）石墨烯层与金属板结构压痕实验的

SEM 图。(b) 横观各向同性薄层与板结构的压痕示意图。

本节讨论一薄横观各向同性弹性层上承载弹性板的压痕问题。弹性板厚度为 t ，弯曲刚度为 B ，下方为刚性基底支撑。我们假设体系为轴对称，并且板与弹性层之间、弹性层与刚性基底之间均为完美粘结。另假设在 $r < r_m$ 的区域内，板受到一个恒定的位移边界条件 δ ，等价于一个半径为 r_m 的刚性圆柱形压头压入弹性板（见图 2.1b）。

在压痕过程中，系统出现一个横向特征长度 ℓ_w ，在该尺度上，压入位移逐渐衰减（见图 2.1b）。确定这一长度需要理解板与基底的弹性响应。在典型的压阻实验中，压痕深度 δ 远小于板厚度 t 。因此，我们采用线性 Kirchhoff-Love 板理论来描述板的力学响应。我们将展示，板与基底之间的面内剪切作用以及板自身的剪切变形在主阶上可以忽略（即 $t, d \ll \ell_w$ ）。此时，板的控制方程为：

$$B \nabla_H^4 \zeta(r) = q(r) + p(r) \quad (2.1)$$

其中， $\zeta(r)$ 表示板的挠曲形状； $\nabla_H^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (1/r) \partial / \partial r$ 为二维轴对称 Laplace 算子； $p(r)$ 为压头施加的载荷，用以保证位移边界条件； $q(r)$ 为薄弹性层的反力（向上为正）。为了明确这一反力，下一小节中将讨论横观各向同性弹性层的力学响应。

2.3 横观各向同性弹性薄层基底

考虑三个位移分量： u_r 、 u_θ 、 u_z 与六个应变分量： ε_r 、 ε_θ 、 ε_z 、 $\gamma_{r\theta}$ 、 γ_{rz} 、 $\gamma_{\theta z}$ 的线下运动学关系。材料在面内表现为各向同性，而沿 z 轴方向与面内的材料属性不同，即呈现横观各向同性。在这种情况下，弹性张量有 5 个独立参数（由完全各向异性材料的 21 个常数简化而来）。其胡克定律可写为：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \\
\varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \\
\varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + a_{33}\sigma_z, \\
\gamma_{\theta z} &= a_{44}\tau_{\theta z}, \\
\gamma_{rz} &= a_{44}\tau_{rz}, \\
\gamma_{r\theta} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{r\theta}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中, $a_{11}=1/E$, $a_{12}=-\nu/E$, $a_{33}=1/E'$, $a_{13}=-\nu'/E'$, $a_{44}=1/G'$ 。这里 E , E' 分别为面内和法相方向的杨氏模量; ν , ν' 分别为面内和法向的泊松比; G' 为法向平面的剪切模量。

在轴对称条件下, $u_\theta=0$, 因此 $\gamma_{\theta z}$, $\gamma_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ 均为零。借鉴 Sneddon 在各向同性材料体系中的处理方法[73], 非零位移分量可以表示为[74]:

$$u_r = -\frac{(a_{11} - a_{12})(-2a_{13}^2 - a_{44}a_{13} + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{33})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \tag{2.3}$$

以及

$$u_z = \left[a_{44} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + a_{44} \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{(-a_{33}a_{11}^2 + 2a_{11}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - 2a_{12}a_{13}^2)}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi, \tag{2.4}$$

此处 Φ 是一个任意函数。由此结合公式 (2.2) 的本构关系, 可以得到用函数 Φ 表达的非零应力分量:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{b}{r} \frac{\partial}{\partial r} + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi, \\
\sigma_\theta &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(b \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi, \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(c \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} + e \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi, \\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

此处,

$$\begin{aligned}
a &= (a_{11}a_{13} - a_{12}a_{13})/(a_{11}a_{33} - a_{13}^2), \\
b &= (a_{13}^2 + a_{13}a_{44} - a_{12}a_{33})/(a_{11}a_{33} - a_{13}^2), \\
c &= (a_{11}a_{13} - a_{12}a_{33} + a_{11}a_{44})/(a_{11}a_{33} - a_{13}^2), \\
e &= (a_{11}^2 - a_{12}^2)/(a_{11}a_{33} - a_{13}^2).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

可以验证，以这种方式构造的应力分量能够自动满足平衡方程。此外，当任意函数 Φ 满足修正的双调和方程时，相容条件也能满足：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{s_1^2 \partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{s_2^2 \partial z^2} \right) \Phi = 0, \tag{2.7}$$

其中，

$$s_1^2 = \frac{a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4e}}{2e} \quad \text{and} \quad s_2^2 = \frac{a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4e}}{2e} \tag{2.8}$$

需要指出的是，Lekhnitskii 等人在文献[74]中证明了 s_1 和 s_2 都不是纯虚数。

延续 Sneddon 求解各向同性压痕问题的方法[73]，我们在 Hankel 空间下求解这一横观各向同性材料的压痕问题。具体地，我们定义 $G(\xi, z)$ 为零阶 Hankel 变换，即：

$$G(\xi, z) = \int_0^\infty r \Phi J_0(\xi r) dr, \tag{2.9}$$

其中 $J_n(x)$ 是 n 阶第一类 Bessel 函数。将公式 (2.7) 两边乘以 $r J_0(\xi r)$ 并在 r 的定义域上积分，可以得到关于 z 的常微分方程：

$$\left(\frac{d^2}{s_1^2 dz^2} - \xi^2 \right) \left(\frac{d^2}{s_2^2 dz^2} - \xi^2 \right) G(\xi, z) = 0. \tag{2.10}$$

这里，我们仅考虑弹性层的横向尺寸无限大或者相对足够大（相比于任何纵向特征尺度，包括压头尺寸和后续讨论的 Winkler 特征长度）。当 $s_1 \neq s_2$ 时，对公式 (2.10) 积分，可以得到通解：

$$G(\xi, z) = C_1 \cosh(s_1 \xi z) + C_2 \cosh(s_2 \xi z) + C_3 \sinh(s_1 \xi z) + C_4 \sinh(s_2 \xi z), \quad (2.11)$$

此处, C_1, C_2, C_3, C_4 均为积分常数, 需要通过合适的边界条件来确定。对于图 2.1 所描述的问题, 边界条件可表述为:

$$\begin{aligned} [u_z]_{z=d} &= 0, \\ [u_r]_{z=d} &= 0, \\ [u_r]_{z=0} &= 0, \\ \left[\int_0^\infty r \sigma_z J_0(\xi r) dr \right]_{z=0} &= -\tilde{q}(\xi), \end{aligned} \quad (2.12)$$

上式中前三个条件对应于弹性层上、下表面的无滑移边界条件, 第四个条件是上表面受板的压应力 $q(r)$ (此处 $\tilde{q}(\xi)$ 是 $q(r)$ 的零阶 Hankel 变换, 即 $\tilde{q}(\xi) = \int_0^\infty r q J_0(\xi r) dr$)。使用这些边界条件时, 需要进行相应的反 Hankel 变换, 包括:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{(a_{11} - a_{12})(-2a_{13}^2 - a_{44}a_{13} + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{33})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} \int_0^\infty \xi^2 \frac{dG}{dz} J_1(\xi r) d\xi, \\ u_z &= \int_0^\infty \xi \left[-\frac{(-a_{33}a_{11}^2 + 2a_{11}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - 2a_{12}a_{13}^2)}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} \frac{d^2 G}{dz^2} - a_{44}\xi^2 G \right] J_0(\xi r) d\xi, \\ \sigma_z &= \int_0^\infty \xi \left(\frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} \frac{d^3 G}{dz^3} - \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} \xi^2 \frac{dG}{dz} \right) J_0(\xi r) d\xi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

虽然完整解出应力于位移场会涉及非常繁琐的推导, 但是横观各向同性弹性薄层的力学响应可以简化为 Hankel 空间下的“弹簧”关系:

$$\tilde{\varsigma}(\xi) = -K(\xi)\tilde{q}(\xi), \quad (2.14)$$

其中, $\tilde{\varsigma}$ 是竖向位移 $u_z(z=0, r)$ 或者 $\varsigma(r)$ 的零阶 Hankel 变换, $K(\xi)$ 为 Hankel 空间下的 Green 函数。特别地, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
K(\xi) &= \frac{1}{\xi} \frac{1}{(s_1^2 - s_2^2)} \\
&\times \left[\frac{a_{44}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left(\frac{\alpha_1}{s_1\alpha_0} + \frac{\alpha_2}{s_2\alpha_0} \right) + \frac{(2a_{13}^2 - a_{11}a_{33} - a_{12}a_{33})}{(a_{11} + a_{12})} \left(\frac{s_1\alpha_1}{\alpha_0} + \frac{s_2\alpha_2}{\alpha_0} \right) \right], \\
(2.15)
\end{aligned}$$

上式中,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \beta_1 \sinh(d\xi s_1) \cosh(d\xi s_2) - \beta_2 \sinh(d\xi s_2) \cosh(d\xi s_1), \\
\alpha_1 &= \beta_1 + \beta_2 \sinh(d\xi s_1) \sinh(d\xi s_2) - \beta_1 \cosh(d\xi s_1) \cosh(d\xi s_2), \\
\alpha_2 &= \beta_2 + \beta_1 \sinh(d\xi s_1) \sinh(d\xi s_2) - \beta_2 \cosh(d\xi s_1) \cosh(d\xi s_2), \\
\beta_1 &= a_{44}(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})s_1 - (a_{11} - a_{12})(2a_{13}^2 - a_{11}a_{33} - a_{12}a_{33})s_1s_2^2, \\
\beta_2 &= a_{44}(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})s_2 - (a_{11} - a_{12})(2a_{13}^2 - a_{11}a_{33} - a_{12}a_{33})s_1^2s_2.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

在各向同性弹性层情况下, $s_1 = s_2 = 1$, 此时公式(2.10)的解为:

$G_{\text{iso}}(\xi, z) = (D_1 + D_2 z) \cosh(\xi z) + (D_3 + D_4 z) \sinh(\xi z)$ 。因此, 公式(2.14)所描述的弹性薄层的“弹簧”响应关系仍然成立, 不过其函数形式为:

$$K_{\text{iso}}(\xi) = \frac{-(d\xi)^2 + (9 - 24\nu + 16\nu^2) \sinh^2(d\xi)}{2G\xi(1 - \nu) [2d\xi + (3 - 4\nu) \sinh(2d\xi)]}. \tag{2.17}$$

上式中的这一结果在文献[75]中已有报道, 该文献中使用的边界条件略有不同(即上表面的剪切应力为零)。其二维平面应变或平面应力问题在文献[76]中也有讨论。而本文给出的公式(2.15), 尽管形式较为冗长, 但根据文献调研, 尚未发现相关报道。

2.4 极限情况

当弹性层足够厚, 可以被视为半空间问题(即 $\xi d \gg 1$) 时, 公式(2.15)可以大幅简化为:

$$K(\xi d \rightarrow \infty) = \frac{G' s_1 s_2 [E'(\nu - 1) + 4G\nu'^2 + 4G\nu\nu'^2] + 2G[2G\nu'^2 - E' + 2G\nu\nu'^2]}{E'^2 G' s_1 s_2 (s_1 + s_2)(\nu - 1)} \frac{1}{|\xi|}, \quad (2.18)$$

此时，如果是各向同性材料情况，上式将进一步简化为：

$$K_{\text{iso}}(\xi d \rightarrow \infty) = \frac{3 - 4\nu}{4G(1 - \nu)} \frac{1}{|\xi|}. \quad (2.19)$$

这一表达式也可以直接通过将公式（2.17）中，令 $\xi d \rightarrow \infty$ 得到。值得注意的是，公式（2.19）与 Sneddon 在文献 [73] 中给出的经典结果 $K_{\text{iso}}(\xi d \rightarrow \infty) = (1 - \nu)/(G\xi)$ 是不同的。后者是基于上表面无剪切应力的假设。但当 $\nu = 1/2$ 时，两者结果是一致的。然而，本文研究主要关注的是弹性层相对较薄的情况（即 $\xi d \ll 1$ ）。在这一极限情况下，公式（2.15）在主阶上与 ξ 无关：

$$K(\xi d \rightarrow 0) = \frac{d[E'(\nu - 1) + 4G\nu'^2(\nu + 1)]}{E'^2(\nu - 1)}, \quad (2.20)$$

进一步地，通过 Hankel 反变换，上式结果可以简化为：

$$q(r) = -\frac{C_{33}}{d} \xi(r), \quad (2.21)$$

上式中， $C_{33} = E'(1 - \nu)/(1 - \nu - 2E\nu'^2/E')$ 是一个弹性常数[77]。显然，本文研究的方法不局限于较薄的弹性层， $\xi d \ll 1$ ，因为公式（2.15）给出了适用于任意厚度弹性层的一般形式（包括 $|\xi d| \gg 1$ 的情况，如公式（2.18）中所讨论）。另外值得注意的是，在各向同性材料情况下，上式退化为：
 $K_{\text{iso}}(\xi d \rightarrow 0) = (1 - 2\nu)d/[2(1 - \nu)G]$ ，这一结果已经由 Skotheim 和 Mahadevan[59] 给出，并被 Chandler 和 Vella[60] 进一步推广至近似不可压缩材料情形，被 Dillard[24] 推广至不可压缩材料情形。

2.5 结果与讨论

2.5.1 压痕问题

根据前文的分析，下文具体讨论这样一个压痕问题：一个刚性圆柱形压头作用在薄横观各向同性弹性层上方的弹性板上（如图 2.1b）。此时，将板的控制方程（2.1）与薄弹性层的近似关系（2.21）联立，可以得到：

$$B\nabla_{\text{H}}^4\zeta(r) + k\zeta(r) = -\frac{F\delta_D(r-r_{\text{in}})}{2\pi r_{\text{in}}}, \quad (2.22)$$

其中， $k = C_{33}/d$ ， $\delta_D(r)$ 为 Dirac 函数， F 为压入深度 δ 时压头合力。为了求解公式（2.22），可采用以下四个自然边界条件：

$$\begin{aligned} \zeta(r_{\text{in}}) &= -\delta, \quad \left. \frac{d\zeta}{dr} \right|_{r=r_{\text{in}}} = 0, \\ \text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } \zeta \text{ 和 } \frac{d\zeta}{dr} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

公式（2.22）实际上是经典的“板/梁-弹性地基”（BOEF）问题或 Winkler 地基问题[78]。其横向特征长度即 Winkler 特征长度：

$$\ell_W = (B/k)^{1/4} = (Bd/C_{33})^{1/4}. \quad (2.24)$$

采用线性板理论（忽略剪切变形修正）以及薄弹性层近似的合理性，可由条件 $t, d \ll \ell_W$ 证明。然后引入以下无量纲变量来分析上述压痕问题：

$$\rho = \frac{r}{\ell_W}, \quad \rho_{\text{in}} = \frac{r_{\text{in}}}{\ell_W}, \quad Z(\rho) = \frac{\zeta(r)}{\delta}, \quad \mathcal{F} = \frac{F}{k\ell_W\delta}. \quad (2.25)$$

由此，上述压痕问题转换为：

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} + Z = - \frac{\mathcal{F}\delta_D(\rho - \rho_{in})}{2\pi\rho_{in}}, \quad (2.26)$$

满足以下边界条件：

$$Z(\rho = \rho_{in}) = -1, \quad \left. \frac{dZ}{d\rho} \right|_{\rho = \rho_{in}} = 0, \quad Z(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \left. \frac{dZ}{d\rho} \right|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

2.5.2 解析解

公式 (2.26)、(2.27) 所描述问题的解，可以通过 $\nabla_{\mathbf{h}}^2 Z = \pm iZ$ 求得，其中 i 是虚数单位。在此，我们不展开一般形式的解，而是讨论两种极限情况：压头半径很小 ($\rho_{in} \ll 1$) 与压头半径很大 ($\rho_{in} \gg 1$)。对于小压头半径极限情况下，板的挠曲变形为：

$$Z(\rho) = \frac{2i}{\pi} [K_0(e^{\pi i/4} \rho) - K_0(e^{-\pi i/4} \rho)] \quad (2.28)$$

其中， K_0 为零阶第二类修正 Bessel 函数。其有量纲形式为：

$$\zeta(r) = \frac{2i}{\pi} [K_0(e^{\pi i/4} r/\ell_w) - K_0(e^{-\pi i/4} r/\ell_w)] \delta. \quad (2.29)$$

压头压痕合力可以通过局部剪切平衡（在 $r = r_{in}$ 处）来计算，也可以通过对弹性层所承受的应力积分求得：

$$F = -2\pi \int_0^\infty k\zeta(r)r dr = 8B\delta/\ell_w^2, \quad (2.30)$$

这一结果表明，压头合力 F 与压入深度 δ 呈线性关系，其中系数由板与薄层的材料、几何性质共同决定。由此可以定义压痕刚度为：

$$\kappa_s(\rho_{\text{in}} \rightarrow 0) = \frac{F}{\delta} = 8 \left(\frac{BC_{33}}{d} \right)^{1/2}. \quad (2.31)$$

对于无限大半径的压头情况（ $\rho_{\text{in}} \gg 1$ ），板的弯曲变形影响可以忽略。此时，压头合力可以直接通过在压头范围内（即， $r < r_{\text{in}}$ ），对弹性层在均匀压缩位移 δ 情况下所承受的压应力积分得到： $F = \pi r_{\text{in}}^2 \cdot k\delta = \pi C_{33} r_{\text{in}}^2 \delta / d$ 。这种情况下的压痕刚度为：

$$\kappa_s(\rho_{\text{in}} \rightarrow \infty) = \pi C_{33} r_{\text{in}}^2 / d. \quad (2.32)$$

以上结果即为本章节的解析推导结论。尤其是，利用公示 (2.14) 中薄横观各向同性弹性层的近似理论，可以得到任意轴对称压头（不同形状和大小）的解析解。不过在本小节中，我们仅展示了小压头和大压头两种极限情形。

2.5.3 理论与数值结果的对比

表1 横向各向同性弹性层与板的几何和力学参数。

	t (μm)	E_c	ν	d (μm)	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}
		(GPa)			(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
Case 1	5	124	0.3	15	8.8617	3.0924	1.315	2.7893	1.1261
Case 2	5	79	0.3	15	0.0683	0.0221	0.01	0.0422	0.018
Case 3	10	79	0.3	20	0.0683	0.0221	0.01	0.0422	0.018

下文将采用有限元方法（FEM）来验证所建立的近似理论在“板-横观各向同性薄弹性层”压痕响应中的适用性。根据上一节中模型的描述（如图 2.1b），薄弹性层的底面位移被完全约束，在板的上表面 $r < r_{\text{in}}$ 区域内施加向下的均匀位移，以模拟一个无摩擦刚性圆柱压头的作用。并且假设板与薄弹性层之间完全粘接。为了确保计算结果收敛，在模型中，将 $r = r_{\text{in}}$ 附近采用了加密网格。数值计算中采用了三组材料参数，具体列于表格 1。其中，算例 1 中板和弹性层的材料参数近似对应于铜（Cu）和聚二甲基硅氧烷（PDMS）；算例 2 和算例 3 则近似对应

于金 (Au) 覆盖在 Ecoflex 上, 不同之处在于板和弹性层的厚度设置有所差异。需要注意的是, 在所有算例中, 弹性层均被设定为横观各向同性材料。

压痕的力-位移关系以及弹性板的挠曲线是非常直观的数据也是较容易获得的。图 2.2 给出了在点载荷作用下 (即 $r_{in} \rightarrow 0$), 有量纲和无量纲的压痕力-位移关系, 以及板的挠曲线。图中点代表有限元 (FEA) 计算结果, 实线代表前文中解析解的结果, 即公式 (2.29) 和公式 (2.30), 所用材料参数见表格 1。

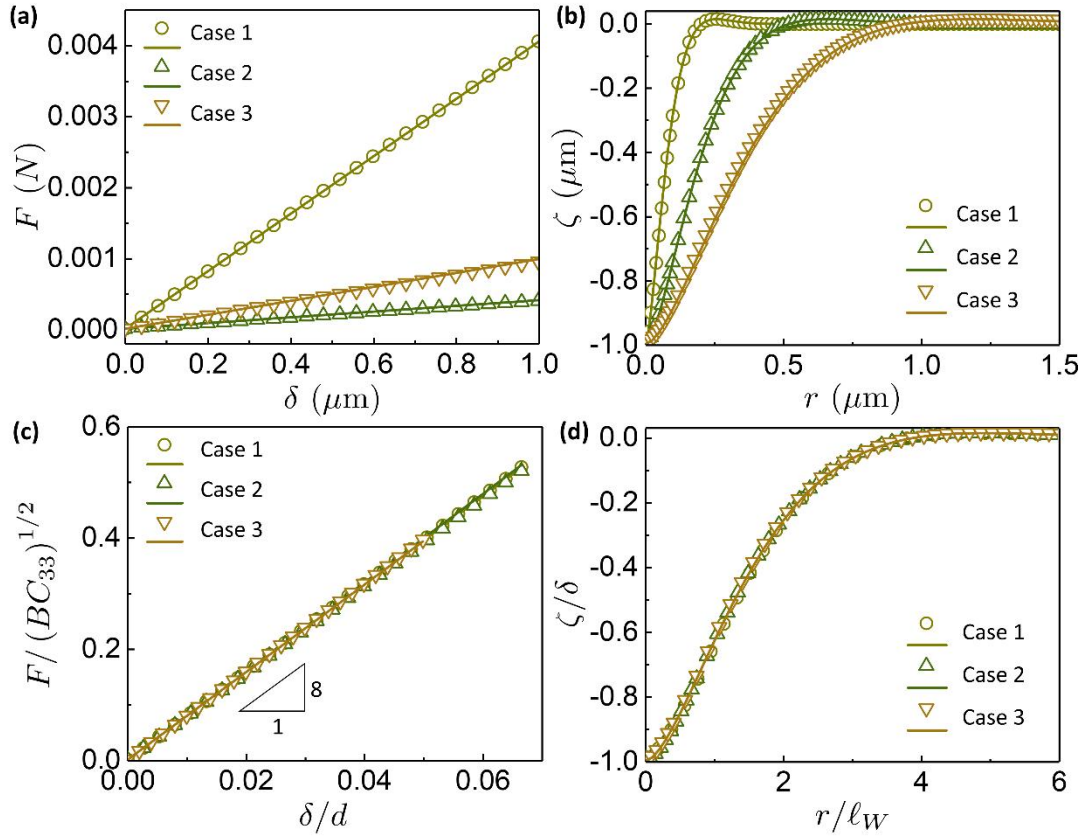


图 2.2 点荷载作用下板在横观各向同性弹性层上的力学响应。(a)、(b) 分别是不同材料参数下 (见表 1), 载荷-位移关系和板的挠曲变形。(c)、(d) 分别是不同材料参数下, 无量纲载荷-位移关系和无量纲板的挠曲变形。实线为理论结果, 点为有限元计算结果。

从图中可以看出, 基于线弹性板理论和薄弹性层近似理论得到的解析解与数值结果吻合得很好。特别是, 将公式 (2.30) 中的力和压入深度分别按 $F/(BC_{33}d)^{1/2}$ 和 δ/d 无量纲化之后, 不同材料、几何参数不同体系的力-位移关系结果 (见图 2.2a) 可以归一到同一条主曲线上 (见图 2.2c)。同样地, 在不同参数的体系下, 板的

挠曲线也能够通过用特征长度 ℓ_w 进行归一化,从而重合到一条曲线上(见图2.2d)。

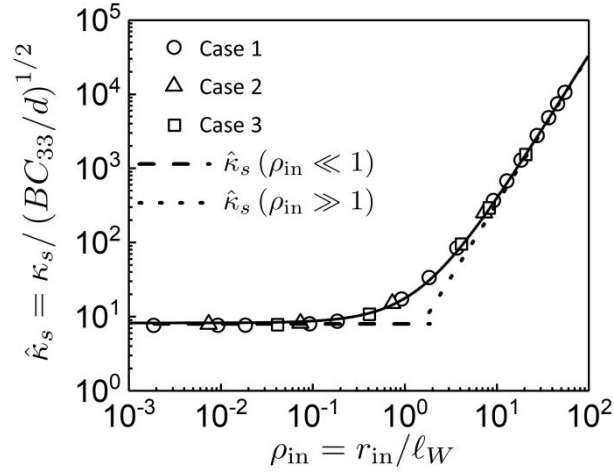


图 2.3 无量纲压痕刚度与压头半径的关系。

进一步地,我们研究了压头尺寸对压头刚度(由 F/δ 来定义)的影响(如图2.3所示)。特别地,我们将极小压头和极大压头两种极限下的无量纲压痕刚度写为:

$$\hat{\kappa}_s = \frac{\kappa_s}{(BC_{33}/d)^{1/2}} = \begin{cases} 8, & r_{in}/\ell_w \ll 1 \\ \pi(r_{in}/\ell_w)^2, & r_{in}/\ell_w \gg 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

图2.3给出了两个极限情况下的解(分别用虚线和点画线表示),以及基于表1中材料参数的FEA结果(点符号表示)。可以看到,在极小压头和极大压头两种极限下,公式(2.33)与数值结果吻合良好。有趣的是,通过对两个极限解进行非线性组合,可以得到任意压头半径下的近似解:

$$\hat{\kappa}_s = [8^{3/5} + (\pi^2 r_{in}/\ell_w)^{3/5}]^{5/3}, \quad (2.34)$$

上式的近似误差在10%以内。

2.5.4 近似解的适用范围

这部分讨论上文推导的近似解在压痕问题中的有效性。首先,板的厚度足够小,满足 $t \ll \ell_w$ 的条件,在先进电子功能材料的压阻实验测试中通常满足这一条件。此外,公式(2.21)中简化形式的推导依赖于假设 $\xi d \ll 1$,这一假设仅在满

足 $d \ll \max(r_{in}, \ell_w)$ 时才成立，即

$$d \ll \max\{r_{in}, (Bd/C_{33})^{1/4}\}. \quad (2.35)$$

因此，当弹性层足够薄，刚性压头半径相对较大，弹性层刚度较小，或者板的弯曲刚度较大时，薄弹性层的近似理论才适用。

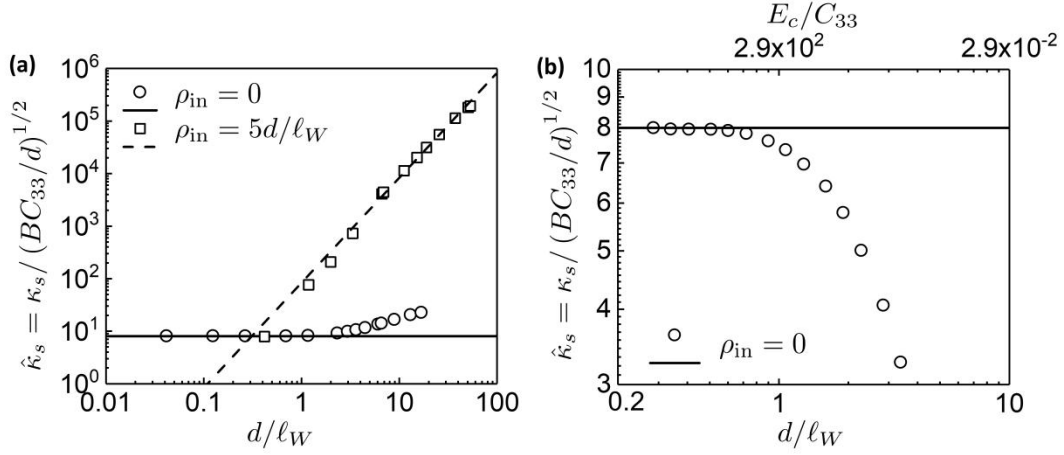


图 2.4 弹性层厚度对压痕刚度的影响。

为了进一步验证这一结论，我们使用表 1 中算例 1 的材料参数，并通过 FEA 计算不同弹性层厚度对压痕刚度的影响，结果见图 2.4a。图中使用了两种不同的压头尺寸： $\rho_{in} = 0$ ，即点压头（结果为图中圆圈标记）和 $\rho_{in} = 5d/\ell_w$ （方框标记），实线和虚线分别对应公式 (2.33) 中的理论结果。可以发现，对于点压头 ($\rho_{in} = 0$)，解析解在 $d/\ell_w \approx 1$ 附近会出现失准；而对于较大压头 ($\rho_{in} \gg 1$)，即使弹性层的厚度不再远小于 ℓ_w ，解析解依然能够保持准确。这是因为公式 (2.35) 中的 $d \ll r_{in}$ 条件得到近似满足。

另外一种调整 d/ℓ_w 的方法是保持 d 不变，通过改变板的弹性模量 E_c ，进而改变其弯曲刚度 $B = E_c t^3 / [12(1 - \nu^2)]$ ，其中 t 是板的厚度， ν 为板的泊松比。图 2.4b 给出了点载荷 ($\rho_{in} = 0$) 作用情况的有限元结果与解析结的对比。在这种情况下，解析解 ($\kappa_s = 8$) 与 FEA 结果的偏差出现在 d/ℓ_w 较大的情况下，且偏差表现为解析解高估了压痕刚度，而在图 2.4a 中表现为解析解低估了压痕刚度。这主要由

于在板的弹性模量较小时，板自身的变形会变得更加显著且不可忽略，而本文模型中并未考虑这一因素[79]。

2.6 本章小结

在本章节研究中，我们通过积分变换的方法，讨论了薄横观各向同性弹性层上粘接弹性板的压痕响应问题。本章研究结果包括建立了 **Hankel** 空间下有限厚度的横观各向同性弹性层的线性力-变形关系，然后利用这一结果研究了横观各向同性弹性层-板体系的压痕问题，给出了压头合力与压入深度的关系。对于极大、极小压头两种极限情况下的解析解，并与有限元计算结果对比。两种计算结果表明，在系统足够细长且板的刚度足够大的情况下，解析解与有限元计算结果吻合很好。这些结果为许多横向各向同性半导体材料的力学行为提供了重要的定量分析，它们通常是细长的几何形状，并广泛应用于各类电子器件中。

第 3 章 薄横观各向同性弹性层的接触、黏附问题

3.1 引言

薄弹性层（如薄膜、先进涂层和薄板材料）被广泛应用于柔性电子器件、微电子机械系统（MEMS）、微纳米技术以及生物医疗等众多领域。其在实际应用中的接触和黏附问题对于保证器件的性能和可靠性至关重要。随着技术的发展，尤其是微型化技术的进步，薄弹性层在各类结构和功能器件中的应用愈发重要。如在微电子器件制造过程中，薄膜的粘附性直接影响到电路的稳定性与耐用性；在生物医药领域，薄膜材料的接触力学和黏附行为对于生物传感器、人工器官等设备至关重要。研究薄弹性层的接触和黏附行为不仅有助于推动理论的发展，还有助于提升工业应用中的设计水平。

对于接触、黏附问题的研究历史悠久，早在 1882 年，Hertz 研究了两个无摩擦弹性球之间的接触问题[25]，该模型没考虑弹性球之间的黏附作用。1932 年，Bradley 基于 L-J (Lennard-Jones) 作用势研究了两个刚性球之间的相互作用[27]。Kendall、Roberts 在实验中发现，接触面积在接触压力较小时明显大于 Hertz 理论给出的结果，尤其是接触力接近零时。1971 年，Johnson 结合 Kendall、Roberts 的实验结果[26]，基于 Hertz 接触理论，通过能量法给出考虑黏附作用的接触理论模型，JKR (Johnson-Kendall-Roberts) 黏附模型。1975 年，Derjaguin 等人在 Hertz 理论模型的基础上进行修正[28]，给出了另一著名的接触黏附模型 DMT (Derjaguin-Muller-Toporov) 理论模型，该模型在黏附问题中应用广泛，但其不满足接触区变形与载荷之间的协调关系。另外，在最大拉脱力方面，DMT 模型给出的结果与 JKR 模型存在较大差异。双方就这一分歧展开激烈争辩，同时也引起很多学者的关注。直到 1977 年[29]，无量纲数 Tabor 数的提出对以上两种黏附模型提供合理的解释。1992 年，Maugis 在 Dugdale 内聚力模型的基础上[30]，建立了半解析的黏附接触模型，即 M-D (Maugis-Dugdale) 模型，并指出了 JKR 模型和 DMT 模型的转变关系。1997 年，Johnson 和 Greenwood 在 M-D 理论的基础上给出了无量纲载荷与 Tabor 数、Maugis 数关系的黏附图谱[31]，分析了各个理论模型的适用范围。对于弹性薄层的接触、黏附问题通常基于以上经典接触黏

附理论展开研究，最常用的研究方法就是采用渐近理论。如 Aleksandrov 等人通过渐近法求解可压缩弹性薄层的变形[32], [32], [33], [80]。Jaffar 在此基础上研究了不可压缩薄弹性层的压痕问题[34]。Matthewson 和 Chadwick 分别采用渐近匹配的方法研究了不可压缩弹性薄层的变形[35], [36]。Borodich 和 Yang 等人分别采用渐近理论针对可压缩、不可压缩薄弹性层的接触、黏附问题展开一系列研究[37]–[40]。Argatov 等人针对横观各向同性薄弹性基底的黏附问题开展一系列研究[43], [77], [81]。Ru 等人基于 Kerr 地基模型研究了各向同性薄弹性层的接触、黏附问题[44], [45]。

本章节内容采用摄动理论，建立横观各向同性薄弹性层的约化变形理论。该约化变形理论能够实现对可压缩、不可压缩薄弹性层变形的统一描述。在该理论模型的基础上，本章节研究了无摩擦刚性球与薄弹性层体系的接触、黏附问题，在压入接触时忽略黏附力的影响，在拉脱的过程中考虑黏附力的影响。并将理论与有限元结果进行对比，验证了理论模型的合理性。

3.2 薄弹性层分析

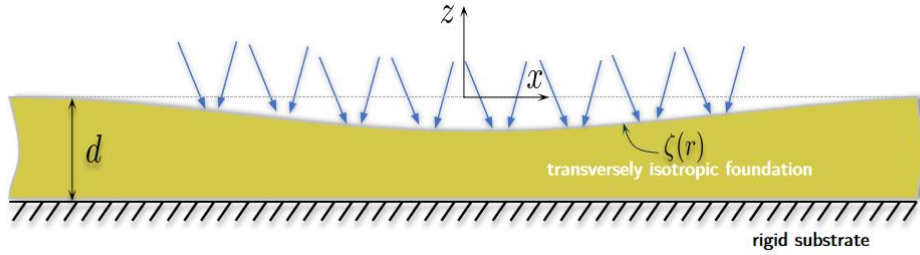


图 3.1 横观各向同性薄弹性层外载作用下变形示意图

对于粘接在刚性基底上的薄的横观各向同性弹性层（其截面如图 3.1 所示）。其厚度为 d ， $x-y$ 面内的杨氏模量和泊松比分别为 E , ν ； z 方向的杨氏模量和泊松比分别为 E' , ν' 。上述弹性薄层的本构关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

由于对称性，刚度矩阵中的弹性系数共有五个独立参数，分别为

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{(EE' - E^2\nu'^2)}{E'(1 - \nu^2) - 2E\nu'^2(1 + \nu)}, \\ C_{12} &= \frac{(EE'\nu + E^2\nu'^2)}{E'(1 - \nu^2) - 2E\nu'^2(1 + \nu)}, \\ C_{13} &= \frac{EE'\nu'}{E'(1 - \nu) - 2E\nu'^2}, \\ C_{33} &= \frac{E'^2(1 - \nu)}{E'(1 - \nu) - 2E\nu'^2}, \\ C_{44} &= \frac{E'}{2(1 + \nu')}, \\ C_{66} &= G = (C_{11} - C_{12})/2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

如果退化为各向同性材料，上述系数为

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{33} &= \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ C_{12} = C_{13} &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ C_{44} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

如图 3.1 所展示的模型中，薄弹性层下表面与刚性基底完全粘接，上表面承受外载，分解为法向压应力载荷 p 和切向载荷 \mathbf{t} 。在上述外载作用下，本章节假设薄弹性层的变形均为小变形。因此，其控制方程为

$$\begin{aligned} (C_{11} - C_{66})\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + C_{66}\nabla^2 \mathbf{u} + C_{44}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44})\frac{\partial}{\partial z}\nabla w &= 0, \\ C_{44}\nabla^2 w + C_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{13} + C_{44})\frac{\partial}{\partial z}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中， \mathbf{u} 为薄弹性层面内位移， w 为法向位移。在弹性层底面与刚性基地完全粘

接，这与大部分实验一致，因此下表面的边界条件为：

$$u = v = w = 0, \text{ on } z = -1. \quad (3.5)$$

然而，假设顶部表面是自由的，因此我们应用法向和切向应力平衡

$$\sigma_z = -p(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{t}(\mathbf{x}), \text{ on } z = 0; \quad (3.6)$$

$\mathbf{t}(\mathbf{x})$ 为二维向量，表示弹性层上表面内所受剪切载荷。在上述边界条件下，直接求解方程（1.49）是困难的。当然，对于二维或者轴对称情况也可以通过积分变形方法进行求解，如上一章节研究内容。我们注意到在很多应用场景中，薄弹性层的变形问题中存在一个小量： $\epsilon = d/\ell \ll 1$ 。这里的 ℓ 为薄弹性层上表面的变形特征长度。因此，上述问题可以通过摄动理论进行求解。由于面内的位移、应力均比法向位移、应力小，我们假设 $\mathbf{u} \sim \epsilon[w]$ ， $\mathbf{t} \sim \epsilon[p]$ 。在此基础上进行无量纲化

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}}{\ell} = \frac{\epsilon \mathbf{x}}{d}, \quad Z = \frac{z}{d}, \quad \mathbf{U} = \frac{\mathbf{u}}{\epsilon[w]}, \quad W = \frac{w}{[w]}; \quad (3.7)$$

无量纲载荷

$$P(\mathbf{X}) = \frac{d}{[w]} \frac{p(\mathbf{x})}{C_{33}}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \frac{d}{\epsilon[w]} \frac{\mathbf{t}(\mathbf{x})}{C_{44}}. \quad (3.8)$$

将以上无量纲变量带入上述控制方程和边界条件可得无量纲化控制方程

$$\begin{aligned} C_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial Z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial}{\partial Z} \nabla W &= -\epsilon^2 [(C_{11} - C_{66}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} + C_{66} \nabla^2 \mathbf{U}], \\ C_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} &= -\epsilon^2 \left[(C_{13} + C_{44}) \frac{\partial}{\partial Z} \nabla \cdot \mathbf{U} + C_{44} \nabla^2 W \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

无量纲边界条件，其中上表面($Z=0$):

$$\begin{aligned}
C_{33} \frac{\partial W}{\partial Z} + \epsilon^2 C_{13} \nabla \cdot \mathbf{U} &= -C_{33} \cdot P(\mathbf{X}), \\
\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} &= T(X), \quad \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z} = T(Y).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

下表面($Z = -1$):

$$U = V = W = 0. \tag{3.11}$$

注意到无量纲后的控制方程和边界条件中只含有小量 ϵ 的偶次方项，因此我们假设：

$$\begin{aligned}
U &= U^{(0)} + \epsilon^2 U^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
V &= V^{(0)} + \epsilon^2 V^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
W &= W^{(0)} + \epsilon^2 W^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^4)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

我们根据 ϵ 的阶次来依次求解。

对 ϵ^0 ，由 **Lame** 方程和边界条件， $W^{(0)}$, $U^{(0)}$, $V^{(0)}$ 分别满足以下条件：

$$\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial Z^2} = 0, \quad C_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(0)}}{\partial Z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \mathbf{X} \partial Z} = 0, \tag{3.13}$$

以及

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z} &= -P, \quad \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial Z} = \mathbf{T}(\mathbf{X}), \quad \text{on } Z = 0; \\
U^{(0)} &= V^{(0)} = W^{(0)} = 0, \quad \text{on } Z = 1
\end{aligned} \tag{3.14}$$

通过积分后求解上述方程，可得

$$\begin{aligned}
W^{(0)} &= -P(\mathbf{X})(Z+1), \\
\mathbf{U}^{(0)} &= \frac{C_{13} + C_{44}}{2C_{44}} \nabla P(X, Y)(Z^2 - 1) - \nabla P(X, Y)(Z+1) + \mathbf{T}(\mathbf{X})(Z+1)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

很多应用中，我们更关注上表面的变形，即 $Z = 0$ ，此时上式简化为

$$\begin{aligned} W^{(0)}(Z=0) &= -P(\mathbf{X}), \\ \mathbf{U}^{(0)}(Z=0) &= \mathbf{T}(\mathbf{X}) - \frac{3C_{44} + C_{13}}{2C_{44}} \nabla P(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

上式中的第一个公式与前一章中结果一致，可退化为传统 Winkler 地基模型。而第二个公式可退化为经典的剪滞模型（Shear lag model）。

同样地，对 ϵ^2 项，需要满足

$$\begin{aligned} C_{33} \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial Z^2} &= - \left[(C_{13} + C_{44}) \frac{\partial}{\partial Z} \nabla \cdot \mathbf{U}^{(0)} + C_{44} \nabla^2 W^{(0)} \right], \\ C_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{(1)}}{\partial Z^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial}{\partial Z} \nabla W^{(1)} &= - \left[(C_{11} - C_{66}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}^{(0)} + C_{66} \nabla^2 \mathbf{U}^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

边界上，

$$\begin{aligned} C_{33} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Z} + C_{13} \nabla \cdot \mathbf{U}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial W^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial Z} &= 0, \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Y} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial Z} = 0, \quad \text{on } Z=0, \\ U^{(1)} = V^{(1)} = W^{(1)} &= 0, \quad \text{on } Z=-1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

可得上表面法向位移的高阶项：

$$W^{(1)}(Z=0) = \frac{C_{13}^2 - 4C_{13}C_{44}}{3C_{33}C_{44}} \nabla^2 P + \frac{C_{44} + 3C_{13}}{2C_{33}} \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (3.19)$$

3.3 结果与讨论

结合上述横观各向同性薄弹性层的变形约化理论，我们可以解决一系列实际的问题。下文我们针对无摩擦刚性球与薄弹性基底体系的接触与黏附问题展开详细的讨论。

3.3.1 无黏附的压痕问题

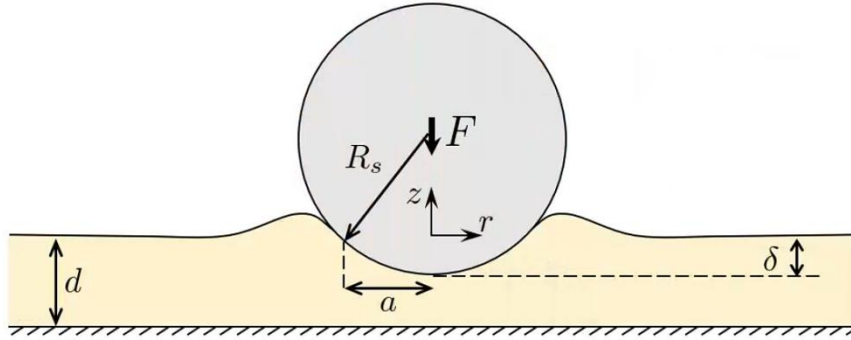


图 3.2 无摩擦刚性球与薄弹性层系统压痕问题示意图

如图 3.2 所描述的是一个压痕问题，横观各项同性薄弹性层下表面与刚性基底完好粘接，上表面受无摩擦刚性球压缩。该过程不考虑刚性球与弹性层之间的黏附作用。其中，刚性球半径为 R_s ，弹性层厚度为 d ，压入深度为 δ ，接触半径为 a 。为了满足薄层理论的假设，需要 $a \gg d$ 。在以上条件基础上，我们可以利用 3.2 节的结果直接计算该压痕问题。由于是无摩擦接触，即上表面剪切力为零，结合公式 (3.16)、(3.19) 可以得到薄弹性层上表面的变形与载荷之间的关系：

$$w(z=0) = \frac{1}{k_W} p(r) - \frac{1}{k_I} \nabla^2 p(r), \quad (3.20)$$

其中弹性系数分别为 $k_W = C_{33}/d$, $k_I = 3C_{33}^2 C_{44} / [C_{13}(C_{13} - C_{44})d^3]$ ，在轴对称情况下，微分算子 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + \partial / (r \partial r)$ 。薄弹性层上表面接触区的法相位移为

$$w(z=0) = -\delta + R_s - \sqrt{R_s^2 - r^2}. \quad (3.21)$$

由于是薄弹性层，压头半径远大于弹性层厚度， $R_s \gg d$ ，接触区半径 $a \ll R_s$ ，在接触区内有近似关系 $\sqrt{1 - (r/R_s)^2} \approx 1 - r^2 / 2R_s^2$ 。因此，公式 (3.21) 所描述的接触区法向位移可近似为

$$w(z=0) = -\delta + \frac{r^2}{2R_s}. \quad (3.22)$$

在接触区边界上有

$$p(a) = 0, \quad p'(a) = 0, \quad (3.23)$$

上式中 $p'(a) = 0$ 并不是一个严谨的边界条件，但为了简化问题又不影响对该问题整体的理解，我们暂取这一边界条件，这一点在后续的理论有限元计算结果的对比中也可看出来。为了便于求解上述问题，下面通过尺度分析对各变量进行无量纲化

$$W = \frac{w}{d}, \quad \Delta = \frac{\delta}{d}, \quad R = \frac{r}{\sqrt{R_s d}}, \quad P = \frac{p}{C_{33}}, \quad \mathcal{F} = \frac{F}{\pi C_{33} R_s d}. \quad (3.24)$$

将上式中的无量纲变量代入公式（3.20）可得无量化的控制方程

$$W(R) = P(R) - \frac{1}{\alpha^2} \nabla^2 P(R), \quad (3.25)$$

上式中仅有一个无量纲参数

$$\alpha = \left[\frac{3C_{33}C_{44}}{C_{13}(C_{13} - C_{44})} \frac{R_s}{d} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

该无量纲系数由薄弹性层的材料属性和几何属性共同决定，它可以一定程度上反应弹性层的可压缩性， α 越大弹性层越可压，公式（3.25）中压应力的项对系统影响越小，结果退化为上一章节中的 Winkler 模型结果。同样地，如果刚性球压头半径相对弹性层的厚度 R_s/d 越大，也能达到相同的效果。反之，弹性层越接近不可压、 R_s/d 越小， α 的值越小，压应力的项影响越大，不能被忽略。无量纲后接触区的变形为

$$W(R) = -\Delta + \frac{R^2}{2}. \quad (3.27)$$

无量纲边界条件

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}) &= 0, \quad P'(\tilde{a}) = 0, \\ P(0) &= \text{finite value}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

上式中, $\tilde{a} = a/\sqrt{R_s d}$ 为无量纲接触半径。根据上述边界条件求解方程 (3.25) 可得接触区内的无量纲应力分布

$$P(R) = -\Delta + \frac{R^2}{2} - \frac{\tilde{a} I_0(\alpha R)}{\alpha I_1(\alpha \tilde{a})} + \frac{2}{\alpha^2}. \quad (3.29)$$

上式中, I_0, I_1 分别为 0、1 阶第一类修正贝塞尔函数。上式中前两项为 Winkler 地基模型的解答, 若 α 很大, 后面两项的影响可以忽略, 同样上述结果可以退化为 Winkler 地基模型结果。对公式 (3.29) 得到的压应力在接触半径范围内积分可得刚性球压头的无量纲合压力

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -2 \int_0^{\tilde{a}} R \cdot P(R) dR \\ &= -\frac{\tilde{a}^4}{4} + \tilde{a}^2 \Delta \end{aligned} \quad (3.30)$$

其中, 无量纲压入深度与无量纲接触半径的关系为

$$\Delta = \frac{\tilde{a}^2}{2} - \frac{\tilde{a}I_0(\alpha\tilde{a})}{\alpha I_1(\alpha\tilde{a})} + \frac{2}{\alpha^2}. \quad (3.31)$$

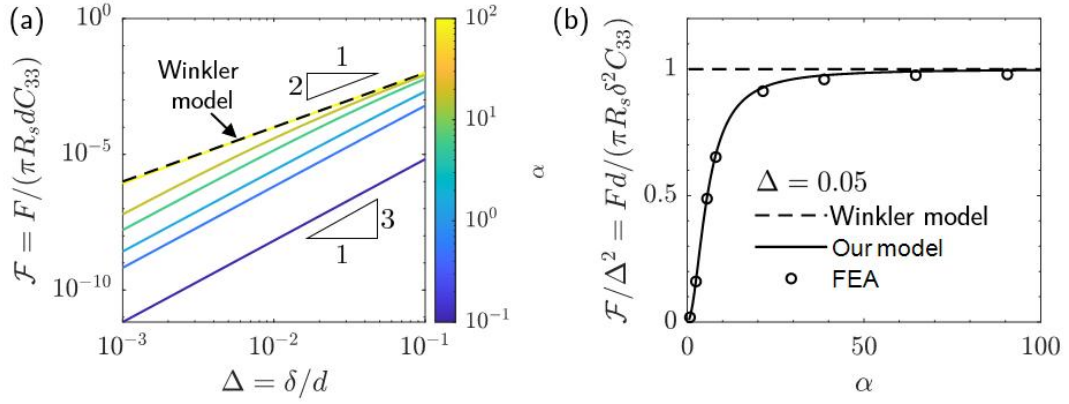


图 3.3 无量纲载荷-位移关系。(a) 不同 α 值（不同压缩性）下，载荷-位移关系，(b) 归一化后的无量纲载荷随 α 的变化，虚线为 Winkler 地基模型结果，实线是本文理论结果，圆圈是有限元结果。

图 3.3a 给出了无量纲压头合力与无量纲压入深度的关系以及无量纲系数 α 对其影响。当 α 很大，如接近 100 时，表示弹性层可压缩、弹性层很薄，此时结果退化为 Winkler 模型结果（虚线结果），无量纲的压头合力与无量纲压入深度呈二次方关系。随着 α 的逐渐减小，公式（3.30）的结果逐渐偏离 Winkler 模型结果，并且压头合力与压入深度的关系由二次方关系逐渐转变为三次方关系，这与前人对不可压缩横观各项同性薄弹性层压痕问题的研究结果一致[43]。为了进一步验证理论结果的正确性，我们还进行了有限元计算，并将理论和有限元结果对比（如图 3.3b）。这里我们选择无量纲压入深度 $\Delta = 0.05$ 时的结果进行对比，主要原因有两个：1)在该压入深度下，满足薄层理论的基本假设，即接触半径和弹性层厚度的关系满足 $a \gg d$ ；2)在该压入深度下，结构没有进入大变形，仍满足小变形假设。图中结果对无量纲压头合力做了归一化处理，给出了无量纲系数对压头合力的影响。具体表现为，Winkler 地基模型结果不随 α 的变化而变化，也就是 Winkler 地基模型不能描述弹性层的压缩性以及几何参数对结果的影响。而我们的高阶模型能够很好描述材料参数和几何参数的影响，在 α 较大时能够退化

到 Winkler 地基模型的结果，并且和有限元计算结果吻合很好，从而验证了高阶模型的正确性。

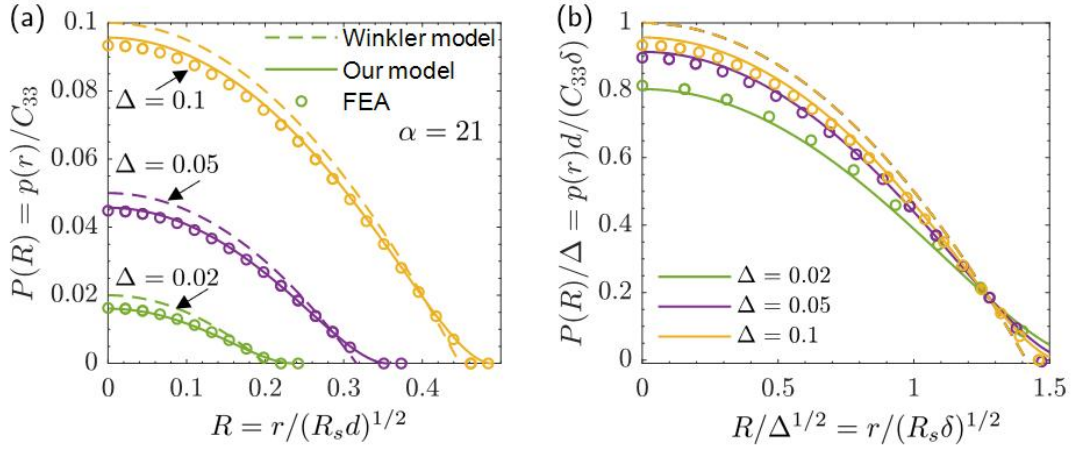


图 3.4 不同压入深度下，接触区的无量纲接触应力分布，虚线为 Winkler 地基模型结果，实线是本文理论结果，圆圈是有限元结果。

进一步地，我们给出了接触区的应力分布（如图 3.4）。图 3.4a 展示了不同压入深度下的接触区应力分布，其中圆点为有限元计算结果，虚线为横观各向同性 Winkler 地基模型结果，实线为本文得到的高阶理论结果。此处取 $\alpha = 21$ ，为可压缩横观各向同性薄弹性层。从图中结果可以看出，对于不同压入深度情况（ $\Delta = 0.02, 0.05, 0.1$ ），相较 Winkler 地基模型结果，我们的高阶理论结果与有限元结果吻合更好。值得注意的是，在压入深度比较大时， $\Delta = 0.1$ ，高阶理论结果开始出现轻微偏离有限元结果的现象，我们初步推测这主要由于大变形导致的，这部分问题将在后续研究中深入探索。因此，即使对于可压缩薄弹性层，我们的高阶理论比 Winkler 地基理论更能准确描述该压痕问题。图 3.4b 中，我们对数据进行了简单的处理，给出了 $P(R)/\Delta - R/\Delta^{1/2}$ 之间的关系。可以看出 Winkler 地基模型结果不随不同无量纲压入深度的改变而改变，但我们的理论模型可以刻画压入深度的影响，并且高阶理论结果与有限元结果符合很好，进一步验证了本文高阶模型的准确性。

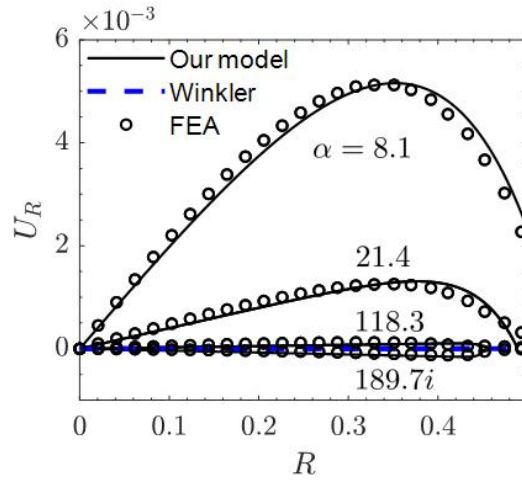


图 3.5 不同 α 情况下，无量纲径向位移分布，虚线为 Winkler 地基模型结果，实线是本文理论结果，圆圈是有限元结果。

在以往的研究中，为了简化问题通常假设接触区上表面的径向位移为 0， $U_R=0$ 。本文给出的理论结果中的公式 (3.16) 和 (3.29)，可以给出接触区上表面的径向位移如图 3.5 所示， α 值越小、基底越不可压时，径向位移越大越不能被忽略。当 α 的值为复数时，可以看出径向位移为负值。对于各向同性弹性基底，分界的泊松比为 $\nu=0.25$ ，此时径向位移为 0。 $\nu>0.25$ 时径向位移为正， $\nu<0.25$ 时径向位移为负。

3.3.2 考虑黏附影响的压痕问题

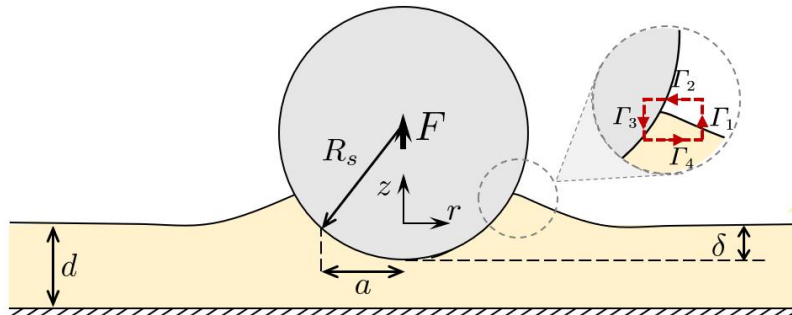


图 3.6 拉脱过程中的示意图

在微尺度下，一些聚合物或生物组织的压痕实验中，黏附作用的影响不能被

忽略尤其是拉脱过程中。在下文关于刚性球与薄弹性层拉脱过程的研究中，我们考虑黏附力的影响（如图 3.6 所示）。该系统中，薄弹性层上表面的控制方程和上一节中公式（3.20）所描述的一致，拉脱过程中临界接触区假设为裂纹尖端，对于线弹性小变形问题中裂纹的扩展所需要的能量，我们可以通过 J 积分（J integral）来得到，对于上述无摩擦、轴对称模型问题，其 J 积分形式为

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_r - \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial r} n_z \right) ds. \quad (3.32)$$

其中， $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ ，为裂纹尖端闭合的积分路径（如图 3.6 中右上角的插图）。 W 为应变能密度， n_r, n_z 分别为路径在 r, z 方向的外法线分量，对于路径 Γ_1, Γ_3 外法线分量分别为 $n_r = \pm 1, n_z = 0$ ，对于路径 Γ_2, Γ_4 外法线分量分别为 $n_r = 0, n_z = \pm 1$ 。并且，路径 Γ_1, Γ_3 的各分量相互抵消相加为 0，路径 Γ_2 上的各分量为 0。因此，上式 J 积分的表达式为

$$\begin{aligned} J &= \int_{a^-}^{a^+} p(r) \frac{\partial w(r)}{\partial r} dr \\ &= p(a)w(a) - \frac{p^2(a)}{2k_W} + \frac{p'^2(a)}{2k_I} = \gamma \end{aligned} \quad (3.33)$$

上式中， γ 为界面黏附能。对于上一节中接触边界条件公式（3.23），我们在这里只需要取其中一个 $p(a) = 0$ 或 $p'(a) = 0$ ，这两个边界条件具体取哪个更合适，仍存在争议，在下文中将具体讨论。

首先，我们需要通过标度率（Scaling law）分析，确定适用于无量纲化的参数。其中，界面能为 $U_s \sim a^2 \gamma$ ，弹性基地的变形能约为 $U_{sub} \sim k_W \delta_*^2 a^2$ ，系统总能量最小化可得由黏附力导致的基底纵向变形约为 $\delta_* \sim (2\gamma/k_W)^{1/2}$ ，横向变形长度约为 $a_* \sim \sqrt{R_s \delta_*} = (2\gamma R_s^2/k_W)^{1/4}$ 。利用这两个参数进行无量纲化，得到各无量纲变量为

$$W(R) = \frac{w(r)}{\delta_*}, R = \frac{r}{a_*}, P(R) = \frac{p(r)}{C_{33}} \frac{d}{\delta_*}, \mathcal{F} = \frac{F}{2\pi\gamma R_s}. \quad (3.34)$$

无量纲后的控制方程为

$$W(R) = P(R) - \frac{1}{\beta^2} \nabla^2 P(R). \quad (3.35)$$

上式中， $W(R) = -\Delta + R^2/2$ 。可见该系统仍只有一个无量纲参数控制，即

$$\beta = \left[\frac{3C_{33}C_{44}}{C_{13}(C_{13} - C_{44})} \frac{a_*^2}{d^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.36)$$

无量纲后的边界

$$P(\tilde{a}) = 0 \text{ or } P'(\tilde{a}) = 0, \quad (3.37)$$

其中， \tilde{a} 为无量纲接触半径。下文将针对上式中两个边界情况分开讨论。无量纲后的 J 积分

$$2P(\tilde{a})W(\tilde{a}) - P^2(\tilde{a}) + \frac{1}{\beta^2} P'^2(\tilde{a}) = 1. \quad (3.38)$$

若采用公式（3.37）的边界， $P'(\tilde{a}) = 0$ ，结合公式（3.38）的 J 积分条件，式（3.35）中方程的解为

$$P(R) = -\frac{\tilde{a}I_0(\beta R)}{\beta I_1(\beta \tilde{a})} + \frac{R^2}{2} - \Delta + \frac{2}{\beta^2}. \quad (3.39)$$

对上式中无量纲接触应力在接触区内积分可得无量纲压头合力为

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -2 \int_0^{\tilde{a}} R \cdot P(R) dR \\ &= -\frac{\tilde{a}^4}{4} + \tilde{a}^2 \Delta\end{aligned}\quad (3.40)$$

其中，无量纲接触半径和压入深度之间的关系为

$$\Delta = \frac{a^2}{2} - \sqrt{\left[-\frac{\tilde{a} I_0(\beta \tilde{a})}{\beta I_1(\beta \tilde{a})} + \frac{2}{\beta^2} \right]^2 + 1}. \quad (3.41)$$

若采用公式（3.37）中的另外一个边界， $P(\tilde{a}) = 0$ ，结合公式（3.38）的 J 积分条件，接触区无量纲应力为

$$P(R) = c_1 I_0(\beta R) + \frac{R^2}{2} - \Delta + \frac{2}{\beta^2}. \quad (3.42)$$

其中，系数 $c_1 = \left(\Delta - \frac{2}{\beta^2} - \frac{\tilde{a}^2}{2} \right) / I_0(\beta \tilde{a})$ 。对上式中无量纲接触应力在接触区内积分可得无量纲压头合力为

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -2 \int_0^{\tilde{a}} R \cdot P(R) dR \\ &= -\frac{\tilde{a}^4}{4} + \tilde{a}^2 \Delta + \frac{2\tilde{a}}{\beta}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

无量纲接触半径和压入深度之间的关系为

$$\Delta = \frac{\tilde{a}^2}{2} - \frac{I_0(\beta\tilde{a})}{\beta I_1(\beta\tilde{a})}(\beta + \tilde{a}) + \frac{2}{\beta^2}. \quad (3.44)$$

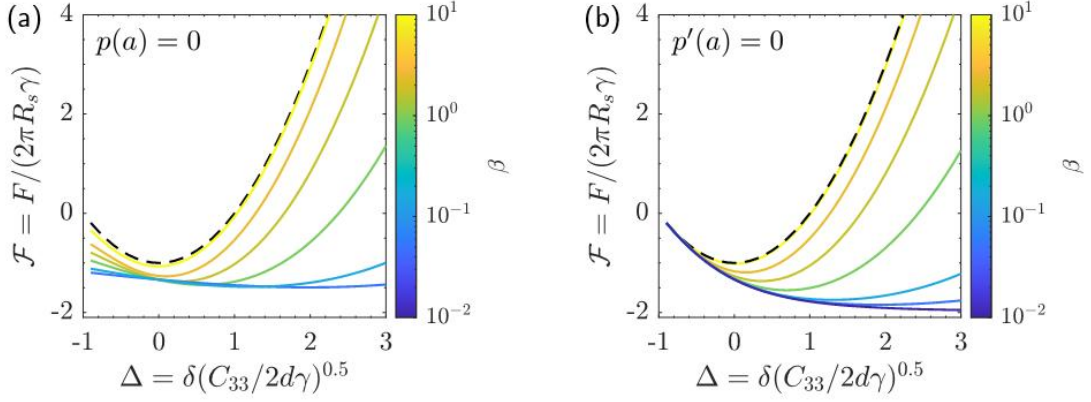


图 3.7 不同 β 系数下，无量纲载荷-位移关系，（a）边界条件取 $p(a) = 0$ ，（b）边界条件取 $p'(a) = 0$ 。

根据公式（3.40）、（3.43）的解析解，图 3.7 给出两种边界条件下的无量纲压头合力与无量纲压入深度的关系，以及无量纲此参数的影响。图 3.7a 展示了边界条件取 $p(a) = 0$ 的结果，可以看出 β 较大时，本文给出基于高阶理论的结果退化到 Winkler 地基模型的结果，随着 β 值的减小，载荷位移关系逐渐偏离 Winkler 地基模型结果。其中值得注意的是，对于可压缩弹性薄层 β 值较大，弹性层越不可压 β 值越小。随着 β 值的逐渐减小，也就是薄弹性层越不可压，最大拉脱力由 $F_p = 2\pi R_s \gamma$ 逐渐转变为 $F_p = 3\pi R_s \gamma$ ，这两种极限情况下的最大拉脱力与已有文献结果一致。若边界条件取接触区边缘应力一阶导数为 0，即 $p'(a) = 0$ ，此时的载荷位移关系与前一种情况类似，薄弹性层可压缩时退化为 Winkler 地基模型结果，最大拉脱力仍为 $F_p = 2\pi R_s \gamma$ 。薄弹性层越不可压，结果逐渐偏离 Winkler 地基结果，不同的是最大拉脱力逐渐趋于 $F_p = 4\pi R_s \gamma$ 。

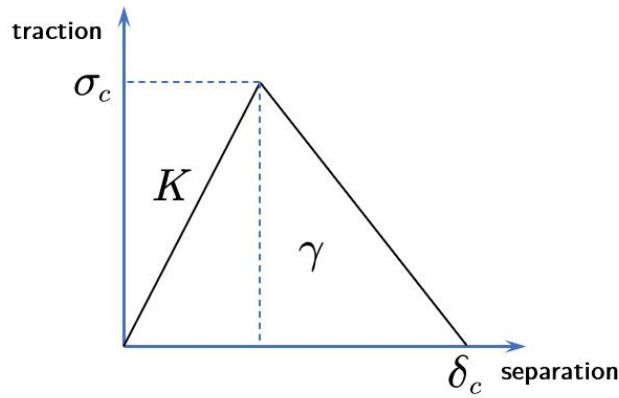


图 3.8 双线性内聚力模型示意图

为了进一步验证上述理论模型，本文还进行了有限元计算模拟。模型中界面设置为内聚力接触，采用双线性内聚力模型（如图 3.8 所示）。为了简化计算，该部分计算中，我们采用各向同性弹性基底。刚性球半径为1 mm，薄弹性层厚度为0.001 mm。弹性层杨氏模量 $E = E' = 10, 30, 50$ MPa（分别对应 Tabor 系数为 0.86, 1.2, 2.5），泊松比 $\nu = \nu'$ 取值范围在 0.26~0.4999 之间，实现对 β 值的调节。双线性内聚力模型中，界面黏附能 $\gamma \sim 40$ mJ/m²（在不同 β 值时保持 Tabor 系数不变，需要对界面能 γ 做微小调整），临界分离位移 $\delta_c = 9.6 \times 10^{-5}$ mm。图 3.9 给出了不同 β 值下的最大拉脱力变化，其中包括不同边界条件下的理论结果和有限元计算结果。从图中可以看出，当薄弹性层的可压时（即泊松比较小， $\beta \gg 1$ ），边界条件无论取 $p(a) = 0$ 还是 $p'(a) = 0$ ，理论结果与有限元结果都比较吻合。当薄弹性层接近不可压时（ $\beta \ll 1$ ），两种边界条件对应的理论结果均与有限元结果有较大偏差，且有限元结果在这两种情况理论结果之间。为了确保有限元结果的准确性，我们给出了不同 Tabor 系数（0.86, 1.2, 2.5）下的有限元结果，可以看出计算结果不依赖于 Tabor 系数。以上结果也说明理论中所取的两两种边界条件都不是完全准确，如何选取边界条件或者提出更合适的理论模型实现对该接触、黏附问题准确描述，需要进一步探索。

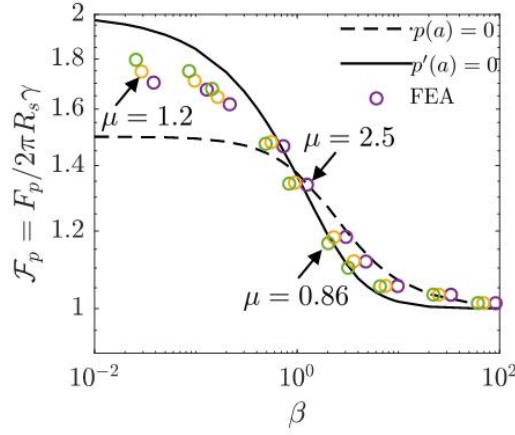


图 3.9 不同 β 系数对最大拉脱力的影响，虚线是 $p(a) = 0$ 情况的理论结果，实线是 $p'(a) = 0$ 情况的理论结果，圆圈是不同 Tabor 系数下有限元计算结果。

3.4 本章小结

本章节研究中，我们通过摄动理论，研究了横观各向同性薄弹性层在复杂载荷下的力学响应问题。针对可压缩和不可压缩薄弹性层，本研究建立了统一描述其变形的力学模型。该模型能够有效描述薄弹性层的压缩性对其变形的影响，并且这一模型能够用于解决压痕、黏附、撕脱等一系列力学问题。本文以刚性球与横观各向同性薄弹性层体系的接触、黏附问题为例展开研究。得益于上述约化理论的结果，可以直接给出接触区的载荷-位移关系，从而很大程度上简化了问题的求解过程。在压入过程，不考虑黏附作用影响，本文的理论结果与有限元结果吻合较好。在拉脱过程，考虑黏附作用的影响，理论模型中两种不同边界条件下，得到的最大拉脱力不同，通过有限元结果分析了两种情况的适用性。本章节所得的研究结果对研究各类薄层结构在复杂载荷下的变形问题具有重要的理论指导意义。

第 4 章 总结

4.1 全文总结

本文针对横观各向同性薄弹性层的变形问题进行了深入探索。首先，通过积分变换方法对横观各向同性薄层结构的变形展开初步探索，并在此基础上讨论了刚性基底支撑的薄层与弹性板体系的压痕响应。然后，通过摄动法，建立了横观各向同性薄层的约化变形理论，在此理论模型基础上研究了刚性球与薄弹性层体系的压痕问题。全文得到的主要创新性成果如下：

1) 针对薄弹性层变形理论的研究已较为广泛，但是关于“弹性板-横观各向同性弹性层”的压痕耦合响应仍未见报道。在本研究中，我们利用积分变换方法，探讨了由刚性基底支撑的薄横观各向同性弹性层上粘结的弹性板的压痕响应。具体而言，本研究首次在 Hankel 空间中推导了有限厚度横观各向同性弹性层的线性法向力 - 位移关系。虽然该方法限制了问题为轴对称情况，但我们能够讨论半空间与可压缩薄层的 Hankel 空间 Green 函数，并验证在将材料常数取为各向同性时，这些结果可退化为经典的各向同性半空间和各向同性薄弹性层的 Green 函数。

2) 基于上述结果，我们进一步推导了弹性板-横观各向同性弹性层体系在小半径压头与大半径压头两种极限情况下的压痕力 - 位移关系并给出了压头尺寸对压头刚度的影响，解析解与有限元数值结果吻合良好。同时，我们还讨论了解的适用性。具体表现为，当弹性层足够薄，刚性压头半径相对较大，弹性层刚度较小，或者板的弯曲刚度较大时，薄弹性层的近似理论才适用。总体而言，本研究结果为理解横观各向同性半导体材料在细长几何构型导电功能层应用中的力学行为提供了定量理论指导。

3) 现有的薄弹性层变形理论，主要解决了可压缩和不可压缩这两种极端情况的薄弹性层的变形问题。目前，尚未有研究结果能够有效描述薄弹性的可压缩变形到不可压缩变形的转变。本研究工作采用摄动法，针对横观各向同性薄弹性层建立约化变形理论。该约化变形理论能够刻画薄弹性层可压缩到不可压缩的转变过程，实现对可压缩和不可压缩薄弹性层变形的统一描述。

4) 根据上述理论结果, 我们还研究了刚性球与薄弹性基底之间的无摩擦接触、黏附问题。我们的理论解能直接给出接触区的载荷-位移关系, 从而很大程度上简化了该问题的求解过程。该理论模型能够刻画不同压缩性薄弹性层的接触问题, 并且与有限元计算结果吻合很好。在拉脱过程, 我们考虑黏附作用的影响, 并将此过程中临界接触区假设为裂纹尖端, 裂纹扩展所需能量通过 J 积分得到。详细讨论了采用不同边界条件求解对最大拉脱力的影响。如果采用接触边界处接触应力为零, 则最大拉脱力为 $3\pi R_s \Delta\gamma$ (R_s 为刚性球半径, $\Delta\gamma$ 界面黏附能); 如果采用接触边界处接触应力的一阶导数为零, 则最大拉脱力为 $4\pi R_s \Delta\gamma$ 。为了进一步验证边界条件的合理性, 本研究还进行了有限元计算。从理论与有限元结果的对比中可以看出, 当薄弹性层为可压缩基底时, 两种边界条件下的理论结果与有限元结果差别不大; 当薄弹性层为不可压缩基底时, 两种边界条件下的理论结果与有限元结果均有明显区别, 且有限元结果在以上两理论结果之间, 这表明以上两种边界条件均不准确。

4.2 讨论与展望

本文针对横观各向同性薄层的变形问题展开研究, 并取得一系列创新性结果, 但仍存在值得继续深入探索的问题:

1) 本文在求解刚性球与薄弹性层的压痕问题时, 在接触边界处, 无论是取接触应力为零, 还是应力的一阶导数为零, 两种结果均与有限元结果存在偏差。如何选取合适的边界条件得到更准确的结果值得进一步研究。

2) 本文第三章中针对薄弹性层变形得到的理论解, 在法线方向的载荷-位移关系可以退化为 Winkler 地基模型。从理论与有限元计算结果可以看出, 本文得到的高阶理论解答比 Winkler 模型更准确, 可以认为是扩展的 Winkler 地基模型。而切向的载荷位移关系可以退化为剪滞模型 (Shear lag model), 高阶的理论解答是否可以修正经典的剪滞模型需要进一步探索。

3) 薄弹性层结构存在各领域, 从轨道交通、柔性电子器件到生物组织, 其尺寸从宏观到微观。其中尺寸效应的影响不容被忽视, 需要建立合适的跨尺度模型来深入讨论。

参考文献

- [1] E. Winkler, *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit*. 1987.
- [2] I. B. Teodoru and V. Muşat, "The modified Vlasov foundation model: An attractive approach for beams resting on elastic supports," *Electron. J. Geotech. Eng.*, vol. 15 C, no. January 2010, pp. 1–13, 2010.
- [3] H. Tanahashi, "Pasternak Model Formulation of Elastic Displacements in the Case of a Rigid Circular Foundation," *J. Asian Archit. Build. Eng.*, vol. 6, no. 1, pp. 167–173, 2007, doi: 10.3130/jaabe.6.167.
- [4] M. (Miklós) Hetényi 1906-, *Beams on elastic foundation; theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. Michigan, United States: Ann Arbor, The University of Michigan press; London, G. Cumberlege, Oxford university press, 1946. [Online]. Available: <https://searchworks.stanford.edu/view/1169507>
- [5] P. L. Pasternak, "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants," 1954. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124773833>
- [6] F. Zhaohua and R. D. Cook, "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations," *J. Eng. Mech.*, vol. 109, no. 6, pp. 1390–1402, 1983, doi: 10.1061/(asce)0733-9399(1983)109:6(1390).
- [7] V. In and P. Systems, "Vibrations Due To the Passage of a Railway Vehicle," no. January 2008, 2008.
- [8] F. Box, C. Jacquemot, M. Adda-Bedia, and D. Vella, "Cloaking by coating: How effectively does a thin, stiff coating hide a soft substrate?," *Soft Matter*, vol. 16, no. 19, pp. 4574–4583, 2020, doi: 10.1039/c9sm02511a.
- [9] M. C. Lampi and C. A. Reinhart-King, "Targeting extracellular matrix stiffness to attenuate disease: From molecular mechanisms to clinical trials," *Sci. Transl. Med.*, vol. 10, no. 422, pp. 1–14, 2018, doi: 10.1126/scitranslmed.aao0475.
- [10] B. Wang *et al.*, "Large and Pressure-Dependent c-Axis Piezoresistivity of Highly Oriented Pyrolytic Graphite near Zero Pressure," *Nano Lett.*, 2024, doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00687.
- [11] G. H. Gudmundsson, F. S. Paolo, S. Adusumilli, and H. A. Fricker, "Instantaneous Antarctic ice sheet mass loss driven by thinning ice shelves," *Geophys. Res. Lett.*, vol. 46, no. 23, pp. 13903–13909, 2019, doi: 10.1029/2019GL085027.
- [12] M. Goland and E. Reissner, "The Stresses in Cemented Joints," *J. Appl. Mech.*, vol. 11, no. 1, pp. A17–A27, Mar. 2021, doi: 10.1115/1.4009336.
- [13] J. R. Lister, G. G. Peng, and J. A. Neufeld, "Viscous control of peeling an elastic sheet by bending and pulling," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 15, pp. 1–5, 2013, doi: 10.1103/PhysRevLett.111.154501.
- [14] R. Villey *et al.*, "Rate-dependent elastic hysteresis during the peeling of pressure sensitive adhesives," *Soft Matter*, vol. 11, no. 17, pp. 3480–3491, 2015, doi: 10.1039/C5SM00260E.
- [15] J. M. Piau, C. Ravilly, and C. Verdier, "Peeling of polydimethylsiloxane adhesives at low velocities: Cohesive failure," *J. Polym. Sci. Part B Polym. Phys.*, vol. 43, no. 2, pp. 145–157, 2005, doi: 10.1002/polb.20318.
- [16] Z. Gu, S. Li, F. Zhang, and S. Wang, "Understanding surface adhesion in nature: A peeling model," *Adv. Sci.*, vol. 3, no. 7, pp. 1–13, 2016, doi: 10.1002/advs.201500327.

- [17] D. Labonte *et al.*, "Extreme positive allometry of animal adhesive pads and the size limits of adhesion-based climbing," *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 113, no. 5, pp. 1297–1302, 2016, doi: 10.1073/pnas.1519459113.
- [18] F. B. SEELY and J. O. SMITH, *Advanced Mechanics of Materials*. [By] F.B. Seely ... James O. Smith ... Second Edition. New York; Chapman & Hall, London, 1952. [Online]. Available: <https://books.google.com/books?id=-7cNMwEACAAJ>
- [19] D. A. Dillard, B. Mukherjee, P. Karnal, R. C. Batra, and J. Frechette, "A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications," *Soft Matter*, vol. 14, no. 19, pp. 3669–3683, 2018, doi: 10.1039/c7sm02062g.
- [20] N. Toyoaki and O. M. W., "Beam on Generalized Two-Parameter Foundation," *J. Eng. Mech.*, vol. 111, no. 5, pp. 664–679, May 1985, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1985)111:5(664).
- [21] A. D. Kerr, "A study of a new foundation model," *Acta Mech.*, vol. 1, no. 2, pp. 135–147, 1965, doi: 10.1007/BF01174308.
- [22] A. D. Kerr, "On the formal development of elastic foundation models," vol. 54, pp. 455–464, 1984.
- [23] A. N. GENT and E. A. MEINECKE, "Compression, Bending, and Shear of Bonded Rubber Blocks," vol. 10, no. 1, 1970.
- [24] D. A. Dillard, "Bending of Plates on Thin Elastomeric Foundations," *J. Appl. Mech.*, vol. 56, no. 2, pp. 382–386, Jun. 1989, doi: 10.1115/1.3176093.
- [25] H. Hertz, "ON THE CONTACT OF ELASTIC SOLIDS (Journalfur die reine und angewandte," vol. i, pp. 156–171, 1881.
- [26] K. Kendall and A. D. Roberts, "Surface energy and the contact of elastic solids," *Proc. R. Soc. London. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313, 1971, doi: 10.1098/rspa.1971.0141.
- [27] R. S. Bradley, "The Cohesive Force Between Solid Surfaces and the Surface Energy of Solids," *The London*, vol. Edinburgh, pp. 853–862, Apr. 1932, doi: 10.1080/14786449209461990.
- [28] V. M. M. P. T. B. V. DERJAGUIN, "Effect of Contact Deformations on the Adhesion of Particles I-," *J. Colloid Interface Sci.*, vol. 53, no. 2, 1975.
- [29] D. Tabor, "Surface Forces and Surface Interaction," *J. Colloid Interface Sci.*, vol. 58, pp. 2–13, Dec. 1977, doi: 10.1016/0021-9797(77)90366-6.
- [30] D. Maugis, "Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a dugdale model," *J. Colloid Interface Sci.*, vol. 150, no. 1, pp. 243–269, 1992, doi: 10.1016/0021-9797(92)90285-T.
- [31] K. L. Johnson and J. A. Greenwood, "An Adhesion Map for the Contact of Elastic Spheres," *J. Colloid Interface Sci.*, vol. 333, no. 192, pp. 326–333, 1997.
- [32] ALEKSANDROV V.M, "Asymptotic Methods in Contact Problems of Elasticity Theory," *Prikl. Mat. i Mekhanika*, vol. 32, no. 4, pp. 672–683, 1968, doi: 10.1016/0021-8928(68)90099-3.
- [33] V. M. Aleksandrov, "Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer. PMM vol. 33, no. 1, 1969, pp. 61-73," *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 33, no. 1, pp. 49–63, 1969, doi: 10.1016/0021-8928(69)90113-0.
- [34] M. J. Jaffar, "Asymptotic behaviour of thin elastic layers bonded and unbonded to a rigid foundation," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 31, no. 3, pp. 229–235, 1989, doi: 10.1016/0020-7403(89)90113-6.
- [35] R. S. Chadwick, "Axisymmetric indentation of a thin incompressible elastic layer," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 62, no. 5, pp. 1520–1530, 2002, doi: 10.1137/S0036139901388222.

- [36] M. J. Matthewson, "Axi-symmetric contact on thin compliant coatings," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 29, no. 2, pp. 89–113, 1981, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(81\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(81)90018-1).
- [37] F. Yang, "Thickness effect on the indentation of an elastic layer," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 358, no. 1–2, pp. 226–232, 2003, doi: [10.1016/S0921-5093\(03\)00289-2](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00289-2).
- [38] F. Yang, "Indentation of an incompressible elastic film," *Mech. Mater.*, vol. 30, no. 4, pp. 275–286, 1998, doi: [10.1016/S0167-6636\(98\)00035-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(98)00035-0).
- [39] F. Yang, "Adhesive contact between a rigid axisymmetric indenter and an incompressible elastic thin film," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 35, pp. 2614–2620, 2002, doi: [10.1080/01694243.2024.2331480](https://doi.org/10.1080/01694243.2024.2331480).
- [40] F. M. Borodich, B. A. Galanov, L. M. Keer, and M. M. Suarez-Alvarez, "The JKR-type adhesive contact problems for transversely isotropic elastic solids," *Mech. Mater.*, vol. 75, pp. 34–44, 2014, doi: [10.1016/j.mechmat.2014.03.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.03.011).
- [41] B. Erbaş, Y. E. Aydın, and F. M. Borodich, "Indentation of thin elastic films glued to rigid substrate: Asymptotic solutions and effects of adhesion," *Thin Solid Films*, vol. 683, no. May, pp. 135–143, 2019, doi: [10.1016/j.tsf.2019.05.038](https://doi.org/10.1016/j.tsf.2019.05.038).
- [42] I. Argatov, X. Jin, and G. Mishuris, "Atomic force microscopy-based indentation of cells: Modelling the effect of a pericellular coat," *J. R. Soc. Interface*, vol. 20, no. 199, pp. 0–9, 2023, doi: [10.1098/rsif.2022.0857](https://doi.org/10.1098/rsif.2022.0857).
- [43] I. I. Argatov, G. S. Mishuris, and V. L. Popov, "Asymptotic modelling of the JKR adhesion contact for a thin elastic layer," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 69, no. 2, pp. 161–179, 2016, doi: [10.1093/qjmam/hbw002](https://doi.org/10.1093/qjmam/hbw002).
- [44] J. Wu and C. Q. Ru, "Spherical indentation of an elastic layer on a rigid substrate revisited," *Thin Solid Films*, vol. 669, no. September 2018, pp. 500–508, 2019, doi: [10.1016/j.tsf.2018.11.034](https://doi.org/10.1016/j.tsf.2018.11.034).
- [45] L. Zhang and C. Q. Ru, "An extended JKR model for adhesion of a rigid sphere on a supported compressible elastic thin layer," *Zeitschrift für Angew. Math. und Phys.*, vol. 71, no. 1, 2020, doi: [10.1007/s00033-020-1258-0](https://doi.org/10.1007/s00033-020-1258-0).
- [46] G. Peng, Y. Liu, F. Xu, H. Jiang, W. Jiang, and T. Zhang, "On determination of elastic modulus and indentation hardness by instrumented spherical indentation: influence of surface roughness and correction method," *Mater. Res. Express*, vol. 10, no. 8, 2023, doi: [10.1088/2053-1591/acebbb](https://doi.org/10.1088/2053-1591/acebbb).
- [47] L. Liu, H. Liu, Y. He, and D. Liu, "Mechanics and topology of twisted hyperelastic filaments under prescribed elongations: Experiment, theory, and simulation," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 182, no. February 2023, p. 105478, 2024, doi: [10.1016/j.jmps.2023.105478](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2023.105478).
- [48] M. Liu and X. Li, "Mechanical properties measurement of materials and devices at micro- and nano-scale by optical methods: A review," *Opt. Lasers Eng.*, vol. 150, no. June 2021, p. 106853, 2022, doi: [10.1016/j.optlaseng.2021.106853](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106853).
- [49] D. Akinwande *et al.*, "A review on mechanics and mechanical properties of 2D materials—Graphene and beyond," *Extrem. Mech. Lett.*, vol. 13, pp. 42–77, 2017, doi: [10.1016/j.eml.2017.01.008](https://doi.org/10.1016/j.eml.2017.01.008).
- [50] Z. Dai, L. Liu, and Z. Zhang, "Strain Engineering of 2D Materials: Issues and Opportunities at the Interface," *Adv. Mater.*, vol. 31, no. 45, pp. 1–11, 2019, doi: [10.1002/adma.201805417](https://doi.org/10.1002/adma.201805417).
- [51] E. Chen and Z. Dai, "Axisymmetric Peeling of Thin Elastic Films: A Perturbation Solution," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 90, no. 10, pp. 1–9, 2023, doi: [10.1115/1.4062831](https://doi.org/10.1115/1.4062831).

- [52] L. Yang *et al.*, "Suppressed thermal transport in silicon nanoribbons by inhomogeneous strain," *Nature*, vol. 629, no. 8014, pp. 1021–1026, 2024, doi: 10.1038/s41586-024-07390-4.
- [53] E. Han *et al.*, "Ultrasoft slip-mediated bending in few-layer graphene," *Nat. Mater.*, vol. 19, no. 3, pp. 305–309, 2020, doi: 10.1038/s41563-019-0529-7.
- [54] Z. Dai and N. Lu, "Poking and bulging of suspended thin sheets: Slippage, instabilities, and metrology," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 149, no. August 2020, p. 104320, 2021, doi: 10.1016/j.jmps.2021.104320.
- [55] C. Androulidakis, K. Zhang, M. Robertson, and S. Tawfick, "Tailoring the mechanical properties of 2D materials and heterostructures," *2D Mater.*, vol. 5, no. 3, pp. 0–69, 2018, doi: 10.1088/2053-1583/aac764.
- [56] S. Kim *et al.*, "Elastic coupling between layers in two-dimensional materials To cite this version : HAL Id : hal-01784922 Elastic coupling between layers in two-dimensional materials," 2018.
- [57] D. Akinwande, N. Petrone, and J. Hone, "Two-dimensional flexible nanoelectronics," *Nat. Commun.*, vol. 5, 2014, doi: 10.1038/ncomms6678.
- [58] Z. Dai, N. Lu, K. M. Liechti, and R. Huang, "Mechanics at the interfaces of 2D materials: Challenges and opportunities," *Curr. Opin. Solid State Mater. Sci.*, vol. 24, no. 4, 2020, doi: 10.1016/j.cossms.2020.100837.
- [59] J. M. Skotheim and L. Mahadevan, "Soft lubrication," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, no. 24, pp. 1–10, 2004, doi: 10.1103/PhysRevLett.92.245509.
- [60] T. G. J. Chandler and D. Vella, "Validity of Winkler's mattress model for thin elastomeric layers," *Source Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 476, no. 2242, pp. 1–27, 2020.
- [61] A. B. Movchan, K. R. Rebrov, and G. J. Rodin, "Axisymmetric deformation of compressible, nearly incompressible, and incompressible thin layers between two rigid surfaces," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 214–215, pp. 61–73, 2021, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.12.002.
- [62] A. B. Movchan, N. V. Movchan, and G. J. Rodin, "Asymptotic analysis of thin linear elastic layers constrained by two rigid plates," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 285, pp. 1–48, 2023, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2023.112561.
- [63] H. Ding, W. Chen, and L. Zhang, *Elasticity of transversely isotropic materials*, vol. 126. 2006. doi: 10.1007/1-4020-4034-2.
- [64] O. S. Nicola Mandriota¹, Claudia Friedsam, John A. Jones-Molina¹, Kathleen V. Tatem¹, Donald E. Ingber, "Cellular nanoscale stiffness patterns governed by intracellular forces," *Nat Mater.*, vol. 18, no. 10, pp. 1071–1077, 2019, doi: 10.1016/j.physbeh.2017.03.040.
- [65] H. A. Elliott, "Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. the problem of the plane and related problems," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 45, no. 4, pp. 621–630, 1949, doi: 10.1017/S0305004100025305.
- [66] V. I. Fabrikant, "Elastic Field Around A Circular Punch," *J. Appl. Mech.*, vol. 55, no. 3, pp. 604–610, Sep. 1988, doi: 10.1115/1.3125836.
- [67] M. T. Hanson, "The Elastic Field for Conical Indentation Including Sliding Friction for Transverse Isotropy," *J. Appl. Mech.*, vol. 59, no. 2S, pp. S123–S130, Jun. 1992, doi: 10.1115/1.2899476.
- [68] X. B. Ding Hao-jiang, "GENERAL SOLUTIONS OF AXISYMMETRIC PROBLEMS," *Appl. Math. Mech.*, vol. 9, no. 2, pp. 143–151, 1988.
- [69] A. H. Y. Yu, S. C. Sanday, B. B. Rath, and C. I. Chang, "Elastic fields due to defects in

- transversely isotropic bimetals,” *Proc. R. Soc. London. Ser. A Math. Phys. Sci.*, vol. 449, no. 1935, pp. 1–30, 1995, doi: 10.1098/rspa.1995.0029.
- [70] H. Y. Yu, “Concise treatment of indentation problems in transversely isotropic half-spaces,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, no. 10–13, pp. 2213–2232, 2001, doi: 10.1016/S0020-7683(00)00163-3.
- [71] X. Ning, M. Lovell, and W. S. Slaughter, “Asymptotic solutions for axisymmetric contact of a thin, transversely isotropic elastic layer,” *Wear*, vol. 260, no. 7–8, pp. 693–698, 2006, doi: 10.1016/j.wear.2005.03.024.
- [72] I. Argatov and G. Mishuris, *Contact Mechanics of Articular Cartilage Layers*. 2015.
- [73] I. N. Sneddon, *FOURIER TRANSFORMS*. 1995.
- [74] S. G. Lekhnitskiĭ, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. in Holden-Day series in mathematical physics. San Francisco: Holden-Day, 1963.
- [75] Z. Y. Ai, Z. Q. Yue, L. G. Tham, and M. Yang, “Extended Sneddon and Muki solutions for multilayered elastic materials,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 40, no. 13, pp. 1453–1483, 2002, doi: 10.1016/S0020-7225(02)00022-8.
- [76] M. HANNAH, “CONTACT STRESS AND DEFORMATION IN A THIN ELASTIC LAYER,” *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 94–105, Jan. 1951, doi: 10.1093/qjmam/4.1.94.
- [77] I. Argatov and G. Mishuris, *Indentation Testing of Biological Materials*, vol. 91. 2018. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-78533-2>
- [78] Y. H. Wang, L. G. Tham, and Y. K. Cheung, “Beams and plates on elastic foundations: A review,” *Prog. Struct. Eng. Mater.*, vol. 7, no. 4, pp. 174–182, 2005, doi: 10.1002/pse.202.
- [79] F. Box, C. Jacquemot, M. Adda-Bedia, and D. Vella, “Cloaking by coating: How effectively does a thin, stiff coating hide a soft substrate?,” *Soft Matter*, vol. 16, no. 19, pp. 4574–4583, 2020, doi: 10.1039/c9sm02511a.
- [80] B. A. V. Aleksandrov V.M., “Asymptotic solution of a class of integral equations encountered in the investigation of mixed problems of the mathematical physics for regions with cylindrical boundaries,” *J. Appl. Math. Mech.*, 1968.
- [81] I. I. Argatov, G. S. Mishuris, and M. V. Paukshto, “Cylindrical lateral depth-sensing indentation testing of thin anisotropic elastic films,” *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 49, pp. 299–307, 2015, doi: 10.1016/j.euromechsol.2014.07.009.

致 谢

两年的时光转瞬即逝，这两年的时间里我学习到了很多知识，同时也得到了很多老师、同学的帮助！

首先，感谢我的合作导师戴兆贺研究员的细心指导！戴老师在力学理论方面的功底十分深厚，常在我遇到问题不得其解时，给出正确的引导。在日常生活与工作中，戴老师也会尽自己所能对我提供各种帮助与支持！

感谢魏悦广老师一直以来的支持与关照！感谢韦小丁老师在我博后期间，为我提供近半年的办公场地！感谢工学院冯帆老师、丁陈森老师、陈默涵老师、陈帜老师、张寅老师、毛晟老师的关照！感谢李晓蓉老师、赵妮老师的帮助！感谢课题组秘书张婷老师、覃汝庆老师、汪静老师的帮助！

感谢李航、龙浩、刘雁韦、陈建豪、伏培林、王文祥、丛超男、于川立、郑婉莹、陈尔腾、曹嘉聪、张国政、曾维嘉、陆煌、岑昶等同事、师弟、师妹的帮助与关照！

最后，感谢家人的理解与支持！

博士期间的学术成果

读博期间发表的学术论文情况：

Li J., Wu X., Su Y.*. An overstretch strategy to double the designed elastic stretchability of stretchable electronics [J]. Advanced Materials, 2023, 2300340.

Li J., Li S., Su Y.*. Stretchable Strain Sensors based on Deterministic-Contact-Resistance Braided Structures with High Performance and Capability of Continuous Production [J]. Advanced Functional Materials, 2022, 32, 2208216.

Zhang, L.#; Jiang, X.#; Jiang, W.; Li, S.; Chi, Y.; Liu, H.; Zhang, M.; **Li, J.**; Fang, M.; Pan, B.; Chen, Y.; Shen, C.; Guo, X.; Li, R.*; Guo, L.*; Su, Y.*, Infrared Skin - Like Active Stretchable Electronics Based on Organic - Inorganic Composite Structures for Promotion of Cutaneous Wound Healing[J]. Advanced Materials Technologies, 2019, 1900150.

已获得授权的发明专利：

苏业旺，**李居曜**. 一种编织可拉伸导线及其制备方法：中国，ZL202111085406.0.

苏业旺，**李居曜**. 一种高灵敏度编织应变传感器及其制备方法：中国，ZL202111656409.5.

博士后期间的学术成果

博士后期间发表的学术论文情况：

Li J., Zhang G., Wang L. and Dai Z.*. Indentation of a plate on a thin transversely isotropic elastic layer [J]. Acta Mechanica Solida Sinica , 2024.

Wang B., **Li J.**, Fang Z., Jiang Y., Li S., Zhan F., Dai Z., Chen Q.*, Wei X.*. Large and pressure-dependent c-axis piezoresistivity of highly oriented pyrolytic graphite near zero pressure [J]. Nano Letters, 2024.

主持科研项目：

中国博士后科学基金第 75 批面上项目，2024~2025，8 万 ；

中国博士后科学基金会 2024 年度国家资助博士后研究人员计划（C 档），2023~2025，24 万.

个人简历

教育经历:

2011 年 9 月——2015 年 6 月，在吉林大学工程力学系攻读学士学位。

2015 年 9 月——2023 年 6 月，在中国科学院力学研究所攻读博士学位。

工作经历:

2023 年 7 月——2025 年 10 月，在北京大学工学院开展博士后工作。

邮箱地址:

lijuyao@pku.edu.cn

