概率论与数理统计第十四次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 6 月 2 日

1 6.4.1

$$MSE(\hat{g}) = E(\hat{g}-\theta)^2 = E(\hat{g}-\overline{g})^2 + MSE(\overline{g}) + 2E[(\hat{g}-\overline{g})(\overline{g}-\theta)]$$

因为：

$$\overline{g} = E(\hat{g}|T)$$

所以有：

$$E[(\hat{g}-\overline{g})|T] = 0$$

$$E[(\hat{g}-\overline{g})(\overline{g}-\theta)] = 0$$

因此：

$$MSE(\hat{g}) = E(\hat{g}-\overline{g})^2 + MSE(\overline{g}) \geq MSE(\overline{g})$$

2 6.4.2

由题意可以知道：

$$E(aT_1 + bT_2) = a\theta_1 + b\theta_2$$

$$Cov(aT_1 + bT_2, \phi) = aCov(T_1, \phi) + bCov(T_2, \phi) = 0$$

因此 $aT_1 + bT_2$ 是 $a\theta_1 + b\theta_2$ 的 UMVUE。

3 6.4.7

因为：

$$lnp(x:\theta) = ln2 + ln\theta - 3lnx - \theta/x^2$$

所以有:

$$\frac{\partial lnp(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{x^2},\frac{\partial^2 lnp(x;\theta)}{\partial^2\theta}=\frac{1}{\theta^2}$$

由此得到:

$$I(\theta)=-E(\frac{\partial^2 lnp(x;\theta)}{\partial^2\theta})=\frac{1}{\theta^2}$$

4 6.4.14

(1)

x_1 的密度函数表示为:

$$p(x,\theta)=(\frac{1-\theta}{2})^{\frac{1}{2}(x^2-x)}(\frac{1}{2})^{1-x^2}(\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}(x^2+x)}$$

因此相应的对数似然函数解得:

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

所以:

$$\sum_{i=2}^n x_i^2\sim b(n-1,\frac{1}{2})$$

$$E\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}+\frac{n}{2}E(\frac{x_1}{x_1^2+\sum_{i=2}^n x_i^2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\theta-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2^n})$$

因为:

$$n\frac{1}{2^n}(\frac{1}{1}(C_{n-1}^0)+\frac{1}{2}(c_{n-1}^1)+\cdots+\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n-1}))=1-\frac{1}{2^n}$$

所以 $\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}+\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 不是 θ 的无偏估计。

5 6.6.2

由已知条件得到 μ 的 0.95 置信区间为:

$$[\overline{x}-u_{1-\alpha/2}\alpha/\sqrt{n},\overline{x}+u_{1-\alpha/2}\alpha/\sqrt{n}]$$

解:

$$n\geq(2/k)^2\sigma^2u_{1-\alpha/2}^2$$

得到 n 至少为 $(\frac{3.92\sigma}{k})^2$，才能保证题目要求。

6 6.6.3

(1)

Y=lnX 的样本值为

$$-0.6931, 0.2231, -0.23231, 0.6931$$

置信区间为：

$$[\overline{x} - u_{1-\alpha/2}\alpha/\sqrt{n}, \overline{x} + u_{1-\alpha/2}\alpha/\sqrt{n}] = [-0.9800, 0.9800]$$

(2) 因为是严格增函数，因此可以利用（1）的结果：

$$[e^{-0.98+0.5}, e^{0.98+0.5}] = [0.6188, 4.3929]$$

7 6.6.7

由中心极限定理可以知道，当 n 较大时，样本均值 $\overline{x} \sim N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$，因而 $u = \frac{\overline{x}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \sim N(0,1)$，因此有：

$$P(|\frac{\overline{x}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}}| \leq u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

因为括号里面的事件相当于 $(\overline{x}-\lambda)^2 \leq u_{1-\alpha/2}^2\lambda/n$，因而得到：

$$\lambda^2 - (2\overline{x} + \frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2)\lambda + \overline{x}^2 \leq 0$$

二次曲线与 λ 轴有两个交点，记为 $\lambda_L, \lambda_U, (\lambda_L < \lambda_U)$，则有 $P(\lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_U) = 1-\alpha$，其中 λ_L, λ_U 可以表示为：

$$\frac{2\overline{x} + \frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2 \pm \sqrt{(2\overline{x} + \frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2)^2 - 4\overline{x}^2}}{2}$$

因此题目得证。

8 6.6.9

(1)

$$[\overline{x} - \overline{y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \overline{x} - \overline{y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}]$$

计算得到：

$$[-0.939, 12.0939]$$

(2)

$$[\overline{x}-\overline{y}-\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}s_w t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\overline{x}-\overline{y}+\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}s_w t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)]$$

计算得到:

$$[-0.2063, 12.2063]$$

(3)

$$[\overline{x}-\overline{y}-s_0t_{1-\alpha/2}(l),\overline{x}-\overline{y}+s_0t_{1-\alpha/2}(l)]$$

$$s_0^2=\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}$$

计算可得:

$$[-0.3288, 12.3288]$$

(4)

$$[\frac{s_x^2}{s_y^2}*\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{s_x^2}{s_y^2}*\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}]$$

计算可得:

$$[0.3359, 4.0973]$$

9 6.6.10

(1)

$$[\frac{s_x^2}{s_y^2}*\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)},\frac{s_x^2}{s_y^2}*\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}]$$

计算可得:

$$[0.0620, 1.0075]$$

(2)

$$s_w^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}=0.1$$

查表得到 $t_{0.975}(18)=2.1009$
计算得到

$$[-0.2771, 0.3171]$$

10 6.6.11

由指数分布和伽马分布的关系可以得到 $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Ga(n, \lambda)$，根据伽马分布的性质，有：

$$s\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Ga(n, \frac{1}{2}) = X^2(2n)$$

因此有：

$$p(X^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n) \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \leq X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)) = 1 - \alpha$$

因此置信区间为

$$[\frac{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\overline{x}}, \frac{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\overline{x}}]$$