概率论与数理统计第十次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 5 月 5 日

1 4.1.5

充分性证明:

令 $f(x)=\frac{x}{1+x}, x>0$，则有 $f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0, x>0$，故 $f(x)$ 是 x 的严格单调增函数，因而对任意的 $\epsilon>0$，有:

$$\{|X_n-X|>\epsilon\}\subset\{\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|}>\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\}$$

于是对于任意的 $\epsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，有:

$$P\{|X_n-X|>\epsilon\}\leq P\{\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|}>\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\}\leq\frac{1+\epsilon}{\epsilon}(\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|})\to 0$$

必要性证明:

对于任意的 $\epsilon>0$，令 $A_\epsilon=\{|X_n-X|>\epsilon\}$，因为 $X_n\to X$，故存在充分大的 N，使得当 $n\geq N$ 时，有 $P(A_\epsilon)<\epsilon$, 于是有:

$$E(\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|})=E(\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|}I_{A_\epsilon})+E(\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|}I_{\overline{A_\epsilon}})$$

$$E(\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|})\leq P(A_\epsilon)+\epsilon<2\epsilon$$

当 $n\to\infty$ 时，有:

$$E(\frac{|X_n-X|}{1+|X_N-X|})\to 0$$

2 4.1.9

$$P(X_n+Y_n\leq z)=P(X_n+Y_n\ leqz-a+\epsilon)+lim_{n\to\infty}P(|Y-a|>\epsilon)$$

$$P(X_n+Y_n\leq z)\leq P(X_n\leq z-a+\epsilon)+P(|Y_n-a|>\epsilon)$$

因此

$$lim_{n\to\infty}P(X_n+Y_n\leq z)\leq lim_{n\to\infty}P(X_n\leq z-a+\epsilon)+lim_{n\to\infty}P(|Y_n-a|>\epsilon)$$

$$lim_{n\to\infty}P(X_n+Y_n\le z)=F(z-a+\epsilon)$$

因为:

$$P(X_n+Y_n\le z)\ge P(X_n\le z-a+\epsilon)+P(|Y_n-a|>\epsilon)$$

所以有:

$$lim_{n\to\infty}P(X_n+Y_n\le z)\ge P(X\le z-a-\epsilon)=F(z-a-\epsilon)$$

由上述两个关系式，可以得出:

$$lim_{n\to\infty}P(X_n+Y_n\le z)=F(z-a)$$

3 4.1.13

当 $x<0$ 时，有 $P(Y_n\le x)=0$。
当 $x<\beta$ 时，有 $P(Y_n\le x)=1$。
当 $0\le x<\beta$ 时，有:

$$P(Y_n\le x)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le x)=\prod_{i=1}^{n}\int_0^x\frac{1}{\beta}dx=(\frac{x}{\beta})^n$$

所以，对于任意的 $\epsilon>0(\epsilon<\beta)$，当 $n\to\infty$ 时，有:

$$P(|Y_n-\beta|\ge\epsilon)=P(Y_n\le\beta-\epsilon)=(\frac{\beta-\epsilon}{\beta})^n\to 0$$

因此结论得证。

4 4.1.15

$$LnY_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$E(lnX_i)=\int_0^i lnxdx=-1$$

$$E(lnX_i)^2=\int_0^1(lnx)^2dx=2$$

$$Var(lnX_i)=1$$

由切比雪夫不等式可以得到:
对任意的 $\epsilon>0$，有:

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}lnX_i-1(-1)|\ge\epsilon)\le\frac{1}{n\epsilon^2}\to 0$$

因此 $lnY_n\to-1$, 故 $Y_n=(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\frac{1}{n}}\to^{-1}$，即 $c=e^{-1}$。

5　4.1.19

假设 $E(X_n)=0$，σ^2, S_n^2 保持不变。
有:

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X}_n)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2-(\overline{X}_n)^2$$

因为:

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\to\sigma^2$$

因此有:

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2-(\overline{X}_n)^2\to\sigma^2$$

6　4.3.3

因为随机变量相互独立，而且有 $E(X_n)=0, Var(X_n)=2, n=2,3,\cdots.$，因此有马尔可夫条件:

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=2}^{n}X_i)=\frac{2(n-1)}{n^2}\to 0,\quad (n\to\infty)$$

由马尔可夫大数定律可以知道 X_n 服从大数定律。

7　4.3.5

因为 $E(X_n)=p_n, Var(X_n)=p_n(1-p_n)\leq\frac{1}{4}$，所以由变量的独立性可以得到:

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=2}^{n}X_k)=\frac{1}{4n}\to 0,\quad (n\to\infty)$$

由马尔可夫大数定律可以知道 X_n 服从大数定律。

8　4.3.9

因为:

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{n\sqrt{n}}{n^2}\to 0,\quad (n\to\infty)$$

由马尔可夫大数定律可以知道 X_n 服从大数定律。

9 4.3.13

充分性证明:

对于任意的 $\epsilon > 0$，当 $t > 0$ 时，$f(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ 是增函数。

因此当 $|y - a_n| \geq \epsilon$ 时，有:

$$\frac{|y-a_n|^2}{1+|y-a_n|^2} \geq \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2}$$

$$\frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^2}\frac{|y-a_n|^2}{1+|y-a_n|^2} \geq 1$$

因此有:

$$P(|Y_n - a_n| \geq \epsilon) = \int_{|y-a_n|\geq\epsilon} dF_{Y_n}(y) \leq \frac{1+\epsilon^2}{\epsilon^2}E[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}]$$

所以当 $lim_{n\to+\infty}E[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}] = 0$ 时，有 $lim_{n\to+\infty}P(|Y_n - a_n| \geq \epsilon) = 0$，因此服从大数定律。

必要性证明:

设 X_n 服从大数定律，即 $lim_{n\to+\infty}P(|Y_n - a_n| \geq \epsilon) = 0$，那么对于 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，有:

$$P(|Y_n - a_n| \geq \epsilon) \leq \epsilon$$

因为函数 $f(t)$ 为增函数，且 $0 < f(t) < 1$，那么:

$$0 \leq E[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}] \leq \epsilon^2 + \epsilon$$

因此可以得到:

$$lim_{n\to\infty}E[\frac{(Y_n-a_n)^2}{1+(Y_n-a_n)^2}] = 0$$