概率论与数理统计第五次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 3 月 31 日

1 2.5.6

设 X 为圆盘的直径，则圆盘的面积为 $Y = \pi\frac{X^2}{4}$，所以平均面积计算如下。

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 p(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$
$$E(Y) = \frac{\pi}{4}E(X^2) = \frac{\pi}{12}(a^2 + b^2 + ab)$$

2 2.5.10

设设备在一年内损坏的概率为 p，则：

$$p = P(X \leq 1) = \int_0^1 0.25e^{-0.25x}dx = 0.2212$$

设每台设备的利润为 Y，那么：

$$E(Y) = 100 - 300p = 33.64$$

因此每台设备的平均利润为 33.64 元。

3 2.5.11

因为每次来到银行发生的事情是独立的，因此 $Y \sim B(5, p)$，其中 $p = P(X > 10) = e^{-2}$。因此有：

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1-p)^5 = 1 - (1 - e^{-2})^5 = 0.5167$$

4 2.5.17

（1）由题目可以得到：

$$P(X \leq 70) = 0.5 = \Phi(\frac{70-\mu}{\sigma})$$
$$P(X \leq 60) = 0.25 = \Phi(\frac{60-\mu}{\sigma})$$

查表解得 $\mu = 70, \sigma = 14.81$

（2）设 Y 为 5 名男子中体重超过 65kg 的男子数量，则 $Y \sim B(5, p)$，其中；

$$p = P(X \geq 65) = 1 - P(X < 65) = 1 - \Phi(\frac{65 - 70}{14.81}) = \Phi(0.3376) = 0.6324$$

则有:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1-p)^5 - 5 * p * (1-p)^4 = 0.94$$

5 2.5.19

由题意可得:

$$P(X > 96) = 0.023 = 1 - \Phi(\frac{96 - \mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{96 - 72}{\sigma})$$

通过反查表可得到:

$$\frac{96 - 72}{\sigma} = 2$$

解得 $\sigma = 12$，从而得到 $X \sim N(72, 12^2)$。

$$P(60 < X < 84) = \Phi(\frac{84 - 72}{12}) - \Phi(\frac{60 - 72}{12}) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

6 2.5.30

$$E|X - \mu| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

利用 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，化简为:

$$E|X - \mu| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d(\frac{t^2}{2}) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

7 2.5.32

$$P(X < 4) = 0.25 * \int_0^4 \frac{0.25}{\Gamma(2)} x e^{-\frac{x}{2}} dx = 0.25 * \int_0^4 0.25 * x e^{-\frac{x}{2}} dx = 0.5940$$

8 补充

几何分布的分布列函数为:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

其矩母函数函数为:

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p e^{tk} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

三阶矩为:

$$E(X^3) = M'''(0) = \frac{1}{p} - \frac{6}{p^2} + \frac{6}{p^3}$$

标准正态分布的密度函数为:

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad -\infty < u < +\infty$$

其矩母函数函数为:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{tu} du = e^{\frac{t^2}{2}}$$

三阶矩为:

$$M'''(t) = \left(t^3 + 3\,t\right)\, e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$E(X^3) = M'''(0) = 0$$