概率论与数理统计第八次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 4 月 21 日

1 3.3.6

(1)
因为 $x, y > 0$，所以当 $z \leq 0$ 时，$F_Z(z) = 0$。当 $z > 0$ 时，有下式：

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq 2z) = \int_0^{2x} \int_0^{2z-x} e^{-(x+y)} dydx = 1 - e^{-2x} - 2ze^{-2x}$$

所以，当 $z \leq 0$ 时，有 $p_Z(z) = 0$，当 $z > 0$ 时，有 $p_Z(z) = 4ze^{-2z}$。
(2)
当 $z \leq 0$ 时，

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X - Y \leq z) = \int_0^{+\infty} \int_{y-z}^{+\infty} e^{-(x+y)} dydx = 0.5e^{z}$$
$$p_Z(z) = 0.5e^{z}$$

当 $z > 0$ 时，

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X - Y \leq z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{x+z} e^{-(x+y)} dydx = 0.5e^{-z}$$
$$p_Z(z) = 0.5e^{-z}$$

2 3.3.9

首先可以得到：

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx$$

(1)

$$p_Z(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z dx = z, & 0 \leq z < 1, \\ \displaystyle\int_{z-1}^1 dx = 2 - z, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{1}$$

(2) 在 $\{0 \le x \le 1\}$ 与 $\{z - x \ge 0\}$ 的交集区域中求得密度函数:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z e^{-(z-x)}dx = 1 - e^{-z}, & 0 \le z < 1, \\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e-1), & z > 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{2}$$

3 3.3.10

(1) 因为当 $0 < x < 1$ 时，$p_X(x) = 1$, 且当 $y > 0$ 时，$p_Y(y) = e^{-y}$。所以 $Z = X/Y$ 的密度函数可以通过如下计算获得:

$$p_Z(z) = \int_0^{1/z} e^{-y}ydy = 1 - (1 + \frac{1}{z})e^{-1/z}$$

(2) 与问题 (1) 方法类似，只是密度函数和积分区间不同。

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 zy} e^{-\lambda_2 y} ydy = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}$$

4 3.3.11

记 $X_(3) = max\{X_1, X_2, X_3\}, X_{(1)} = min\{X_1, X_2, X_3\}, X_{(2)} = X_1, X_2, X_3$ 三者中取值处于中间的。

$$p_{(X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)})}(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = 6, \quad 0 < x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)} < 1$$

因此所求概率为

$$P(X_{(3)} \ge X_{(1)} + X_{(2)}) = 6\int_0^1 \int_0^{x_{(3)}} \int_0^{min|x_{(3)}-x_{(2)},x_{(2)}|} dx_{(1)}dx_{(2)}dx_{(3)}$$

$$= 6\int_0^1 \int_0^{x_{(3)}} \frac{x_{(3)} - |x_{(3)} - 2x_{(2)}|}{2} dx_{(2)}dx_{(3)}$$

$$= 6\int_0^1 \frac{1}{8}x_{(3)}^2 dx_{(3)} + 6\int_0^1 \frac{1}{8}x_{(3)}^2 dx_{(3)} = 0.5$$

5 3.3.15

(X,Y) 的联合分布函数为:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{3}$$

$$P_{R,\theta}(r, \theta) = P_{X,Y}(x(r,\theta).y(r,\theta))|\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}| = \frac{r}{\pi}$$

$$0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi$$

6 3.3.16

(1) 首先求出反函数变换的雅可比行列式：

$$J = -uv - u(1-v) = -u$$

当 (U,V) 取值在 $\{u > 0, 0 < v < 1\}$ 内有：

$$P_{U,V}(u,v) = p_X(uv)p_Y(u(1-v))|-u| = e^{-uv}e^{-u(1-v)} = ue^{-u}$$

(2)

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{U,V}(u,v)dv = \int_0^1 ue^{-u}dv = ue^{-u}, \quad u > 0$$

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{U,V}(u,v)du = \int_0^1 ue^{-u}du = 1, \quad 0 < v < 1$$

因为 $p_{U,V}(u,v) = p_U(u)p_V(v)$，因此 U 和 V 独立。

7 3.4.4

n 个点把区间（0，1）区间分成 n+1 段，他们的长度依次记为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$。因为 n 点随机取得，所以 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$ 具有相同的分布，从而具有相同的数学期望，此外，$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n+1} = 1$，因此：

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \cdots = E(Y_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

而距离最远的亮点间距离为 $Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n$，因此所求期望为：

$$E(Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n) = \frac{n-1}{n+1}$$

8 3.4.9

$$\begin{aligned} E|X-Y| =& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j-1}^{m}|i-j|\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{i}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{m}(j-i)) \\ =& \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(i^2 - i - mi = \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2}) \\ =& \frac{(m-1)(m+1)}{3m} \end{aligned} \tag{4}$$

9 3.4.24

$$Var(U) = Var(2X+Y) = 4Var(X) + Var(Y) = 5\lambda$$

$$Var(V) = Var(2X-Y) = 4Var(X) + Var(Y) = 5\lambda$$

所以

$$Cov(U,V) = Cov(2X+Y, 2X-Y) = 4Var(X) - Var(Y) = 3\lambda$$

由此得出:

$$Corr(U,V) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}} = \frac{3}{5}$$

10 3.4.27

$$E(X) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} xdydx = \frac{2}{3}$$
$$E(Y) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} ydydx = 0$$
$$E(XY) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} xydydx = 0$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

由下列式子可以知道 XY 不独立，故协方差为 0.

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & others \end{cases} \tag{5}$$

$$p(y) = \begin{cases} 1+y, & -1 < y < 0, \\ 1-y, & 0 < y < 1, \\ 0, & others \end{cases} \tag{6}$$

11 3.4.32

(1)

$$E[max\{X,Y\}] = E[\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)] = \frac{1}{2}E|X-Y|$$

因为 $X-Y \sim N(0, 2(1-\rho))$，所以:

$$E[max\{X,Y\}] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1-\rho)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| exp\{-\frac{x^2}{4(1-\rho)}\} dx = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

(2)

$$Cov(X-Y, XY) = Cov(X, XY) - Cov(Y, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) - E(Y^2X) + E(Y)E(XY)$$

因为 $E(X) = E(Y) = 0$，所以:

$$Cov(X-Y, XY) = E(X^2Y) - E(XY^2)$$

因为对称性，所以 $E(X^2Y) = E(XY^2)$，因此：

$$Cov(X-Y, XY) = 0, \quad Corr(X-Y, XY) = 0$$

这说明，当 $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$ 时，$X - Y$ 与 XY 不相关。

12 3.4.35

(X, Y) 的联合密度函数为：

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in G, \\ 0, & others \end{cases} \tag{7}$$

$$P(U = 0) = \int_0^1 dy \int_0^y \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}$$

$$P(U = 1) = 1 - P(U = 0) = \frac{3}{4}$$

$$P(V = 0) = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

$$P(V = 1) = 1 - P(V = 0) = \frac{1}{2}$$

$$Var(U) = \frac{3}{4}(1 - \frac{3}{4}) = \frac{3}{16}$$

$$Var(V) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$E(UV) = P(UV = 1) = P(U = 1, V = 1) = P(X > Y, X > 2Y) = P(X > 2Y) = \frac{1}{2}$$

$$Cov(U, V) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

所以相关系数计算为：

$$Corr(U, V) = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5774$$