概率论与数理统计第三次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 3 月 17 日

1 2.1.1

从 5 个球中任取 3 个，共有 10 种等可能取法。X 的分布列为：

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

分布函数为：

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ 0.1, & 3 \le x < 4, \\ 0.4, & 4 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5 \end{cases} \tag{1}$$

F(x) 的图形为：

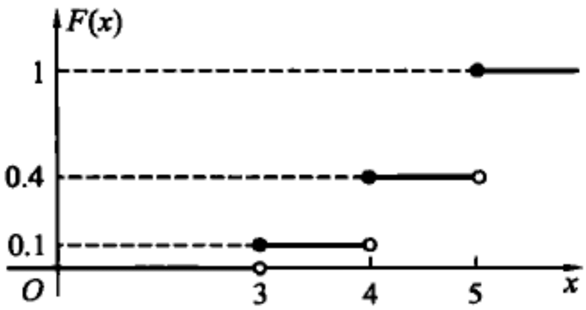

图 1: F(x)

2 2.1.7

X 的分布列为：

$$P(X = i) = \frac{C_{10}^{i} * C_{90}^{5-i}}{C_{100}^{5}}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

当需要进行逐个检验时，意味着出现了至少一个不合格品，概率为：

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 0.416$$

3 2.1.9

$$P(X<2)=F(2)=ln2=0.693$$

$$P(0<X\leq 3)=F(3)-F(0)=1$$

$$P(2<X\leq 2.5)=F(2.5)-F(2)=ln(2.5)-ln(2)=0.223$$

4 2.1.11

分布列为:

X	2	3	4
P	0.3	0.4	0.3

分布函数为:

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ 0.3, & 2\leq x<3,\\ 0.7, & 3\leq x<4,\\ 1, & x\geq 4\end{cases} \tag{2}$$

$$P(X<2)=F(2)=0$$

$$P(X>4)=1-F(4)=0$$

5 2.1.12

密度函数在整个定义域上分为四段，因此分布函数也要分四段描述，根据定义对密度函数进行积分，得到分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{x^2}{2}+x+0.5, & -1\leq x<0,\\ -\frac{x^2}{2}+x+0.5, & 0\leq x<1,\\ 1, & x\geq 1\end{cases} \tag{3}$$

6 2.1.19

因为 p(x) 为偶函数，所以有:

$$p(-x)=p(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=2\int_{0}^{+\infty}p(x)dx=1$$

(1) 变量替换

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}p(x)dx=\int_{+\infty}^{a}p(t)d(-t)=\int_{a}^{+\infty}p(t)dt=1-F(a)$$

$$F(-a)=\int_a^{+\infty}p(t)dt=\int_0^{+\infty}p(t)dt-\int_0^a p(t)dt=0.5-\int_0^a p(x)dx$$

(2)

$$P(|X|<a)=P(-a<X<a)=F(a)-F(-a)=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1$$

(3)

$$\begin{aligned}P(|X|>a)&=P(X<-a)+P(X>a)\\&=F(-a)+1-F(a)\\&=1-F(a)+1-F(a)\\&=2[1-F(a)]\end{aligned}$$

7 补充题

父亲要孩子们去后院整理杂物，于是他的 3 个孩子就用每人同时抛一个硬币来决定谁去整理，他们规定，谁抛出的面与另外两人的不同就谁去整理，若三人抛出的面相同则需重抛，直到选出为止，假设硬币出现正面的概率为 p，出反面为 q，求：

1. 他们抛了不到 n 轮就能选出人的概率；

2. 若 p=0.5，最少要抛多少轮，才能以 0.95 以上的概率可以选出人来。

解：

前提：p+q=1

设事件 A 为“三次抛硬币面相同”，则有：

$$P(A)=p^3+q^3$$

设事件 B_n 为“抛了 n 轮没有选出人”，则有：

$$P(B_n)=P(A)^n,\quad n=1,2,3,...$$

因此他们抛了不到 n 轮就能选出人的概率为：

$$P=1-P(B_{n-1})=1-(p^3+q^3)^{n-1},\quad n=2,3,4,...$$

因为 $p=0.5=q$, 因此 $P(A)=0.25$, 若以 0.95 以上的概率选出人来，需要 $P(A)^n<1-0.95=0.05$。当 n=2 时，$P(A)^n=0.0625$；当 n=3 时，$P(A)^n=0.015625$。连续抛硬币 3 轮仍然没有选中人的概率为 $(0.25)^3=0.015625$，因此最少抛 3 轮才能以 0.95 以上的概率选出人来。