概率论与数理统计第六次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 4 月 7 日

1 2.6.1

Y	0	1	4	9
P	1/5	7/30	1/5	11/30

Z	0	1	3	3
P	1/5	7/30	1/5	11/30

2 2.6.5

X 的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/\pi, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & others \end{cases} \tag{1}$$

按照定义进行分析计算，由于函数的对称性可得到：

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\pi/2}^{-arccosy} \frac{1}{\pi}dx + \int_{arccosy}^{\pi/2} \frac{1}{\pi}dx$$

对上式求导可以得到：

$$p_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \quad 0 < y < 1$$

整理可得：

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & others \end{cases} \tag{2}$$

3 2.6.11

(1)

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(\frac{y}{3})|\frac{1}{3}|, & -3 < y < 3 \\ 0, & others \end{cases} = \begin{cases} \frac{y^2}{18}, & -3 < y < 3 \\ 0, & others \end{cases} \tag{3}$$

(2)

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(3-y)|-1|, & 2 < y < 4 \\ 0, & others \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}(3-y)^2, & 2 < y < 4 \\ 0, & others \end{cases} \tag{4}$$

(3)

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(\sqrt{-y})\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & others \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & others \end{cases} \tag{5}$$

4 2.6.16

因为 X 的密度函数为:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & others \end{cases} \tag{6}$$

又因为 Y_1 的取值范围为 $(0,1)$，且 $y_1 = e^{-2x}$ 是严格单调减函数，所以有:

$$p_{Y_1}(y) = \begin{cases} p_X(-0.5lny_1)|\frac{-0.5}{y_1}|, & 0 < y_1 < 1 \\ 0, & others \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y_1 < 1 \\ 0, & others \end{cases} \tag{7}$$

即 $Y_1 \sim U(0,1)$。
设 $Y_2 = 1 - e^{-2X} = 1 - Y_1$，

$$p_{Y_2}(y) = \begin{cases} p_{Y_1}(1-y_2)|-1|, & 0 < y_2 < 1 \\ 0, & others \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y_2 < 1 \\ 0, & others \end{cases} \tag{8}$$

因此可以得到 $Y_2 \sim U(0,1)$，结论得证。

5 2.7.2

$$C_v(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{a^2/12}}{a/2} = 0.5774$$

6 2.7.5

首先求得矩母函数为:

$$E(X^k) = \lambda \int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k}$$

根据矩母函数求的各阶原点矩为:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\mu_3 = E(X^3) = \frac{6}{\lambda^3}$$
$$\mu_4 = E(X^4) = \frac{24}{\lambda^4}$$

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$v_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu^3 = \frac{2}{\lambda^3}$$
$$v_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4 = \frac{9}{\lambda^4}$$

根据上述信息计算变异系数、偏度系数以及峰度系数：

$$C_v(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{1/\lambda^2}}{1/\lambda} = 1$$
$$\beta_s = \frac{v_3}{v_2^{3/2}} = \frac{2/\lambda^3}{(1/\lambda)^{3/2}} = 2$$
$$\beta_k = \frac{v_4}{v_2^2} - 3 = \frac{9/\lambda^4}{1/\lambda^4} - 3 = 6$$

7 2.7.7

根据分位数的定义，可以得到：

$$1 - exp\{-(\frac{x}{\eta})^m\} = p$$

解得：

$$x_p = \eta[-ln(1-p)]^{1/m}$$

当 $m = 1.5, \eta = 1000$ 时，

$$x_{0.1} = 1000[-ln(1-0.1)]^{1/1.5} = 223.08$$
$$x_{0.5} = 1000[-ln(1-0.5)]^{1/1.5} = 783.22$$
$$x_{0.8} = 1000[-ln(1-0.8)]^{1/1.5} = 1373.36$$

8 2.7.10

设 $E(Y) = E[a+bX] = a + bE(X)$，

$$\frac{E[Y-E(Y)]^3}{\{E[Y-E(Y)]^2\}^{3/2}} = \frac{E[a+bX-a-bE(X)]^3}{\{E[a+bX-a-bE(X)]^2\}^{3/2}} = \frac{E[X-E(X)]^3}{\{E[X-E(X)]^2\}^{3/2}}$$
$$\frac{E[Y-E(Y)]^4}{\{E[Y-E(Y)]^2\}^2} = \frac{E[a+bX-a-bE(X)]^4}{\{E[a+bX-a-bE(X)]^2\}^2} = \frac{E[X-E(X)]^4}{\{E[X-E(X)]^2\}^2}$$

因此 Y 与 X 有着相同的偏度系数和峰度系数。

9 3.1.1

(1) 设取出的 5 件产品中有 i 件一等品，j 件二等品。

当 $i=0,1,\cdots,5.j=0,1,\cdots,5.i+j\le 5$ 时，有分布列函数：

$$P(X=i,Y=j)=\frac{C_{50}^{i}*C_{30}^{j}*C_{20}^{5-i-j}}{C_{200}^{5}}$$

X \ Y	0	1	2	3	4	5	行和
0	0.00021	0.00193	0.00659	0.01024	0.00728	0.00189	0.02814
1	0.00322	0.02271	0.05489	0.05393	0.01820	0.00000	0.15295
2	0.01855	0.09274	0.14156	0.06606	0.00000	0.00000	0.31891
3	0.04946	0.15620	0.11325	0.00000	0.00000	0.00000	0.31891
4	0.06118	0.09177	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.15295
5	0.02814	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02814
列和	0.16076	0.36535	0.31629	0.13023	0.02548	0.00189	1.00000

(2) 设取出的 5 件产品中有 i 件一等品，j 件二等品。

当 $i=0,1,\cdots,5.j=0,1,\cdots,5.i+j\le 5$ 时，有分布列函数：

$$P(X=i,Y=j)=\frac{5!}{i!j!(5-i-j)!}(0.5)^{i}(0.3)^{j}(0.2)^{5-i-j}$$

X \ Y	0	1	2	3	4	5	行和
0	0.00032	0.00240	0.00720	0.01080	0.00810	0.00243	0.03125
1	0.00400	0.02400	0.05400	0.05400	0.02025	0.00000	0.15625
2	0.02000	0.09000	0.13500	0.06750	0.00000	0.00000	0.31250
3	0.05000	0.15000	0.11250	0.00000	0.00000	0.00000	0.31250
4	0.06250	0.09375	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.15625
5	0.03125	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03125
列和	0.16807	0.36015	0.30870	0.13230	0.02835	0.00243	1.00000

10 3.1.4

设 X_1,X_2 的分布列为：

X_2 \ X_1	-1	0	1
-1	p11	p12	p13
0	p21	p22	p23
1	p31	p32	p33

由 $P(X_1X_2=0)=1$ 可以得到 $p12+p21+p22+p23+p32=1, p11=p13=p31=p33=0$

由 $P(X_1=-1)=0.25=P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=-1,X_2=0)+P(X_1=-1,X_2=1)=p11+p12+p13=p12$

类似低可以得到 $p32=p21=p23=0.25$

由分布列的正则性可以得到 $p22=0$，因此分布列为:

X_2 \ X_1	-1	0	1
-1	0	0.25	0
0	0.25	0	0.25
1	0	0.25	0

11 3.1.11

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\le 1,Y\le 2)=P(Y\le 1)=1-e^{-1}=0.63212$$

$$P(X_1=0,X_2=1)=P(Y\le 1,Y>2)=0$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=P(Y>1,Y\le 2)=e^{-1}-e^{-2}=0.23254$$

$$P(X_1=1,X_2=1)=P(Y>1,Y>2)=e^{-2}=0.13534$$

分布列为:

X_2 \ X_1	0	1
0	0.63212	0
1	0.23254	0.13534

12 3.2.9

根据题意还可以得到分布列函数为:

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)=C_2^i*0.2^i*0.8^{2-i}*C_2^j*0.5^i*0.5^{2-j}$$

分布列为:

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.32	0.16
1	0.08	0.16	0.08
2	0.01	0.02	0.01

$P(X \leq Y) = 0.16 + 0.32 + 0.16 + 0.16 + 0.08 + 0.01 = 0.89$

13 3.2.10

根据分布列可以得出：

$$P(X = x_1) = a + c + 1/9$$

$$P(X = x_2) = b + 4/9$$

$$P(Y = y_1) = a + 1/9$$

$$P(Y = y_2) = b + 1/9$$

$$P(Y = y_3) = c + 1/3$$

根据 X 和 Y 的独立性可以得出：

$$b = (b + 4/9)(b + 1/9)$$

$$1/9 = (b + 4/9)(a + 1/9)$$

$$a + b + c = 4/9$$

解得 $a = 1/18, b = 2/9, c = 1/6$。