概率论与数理统计第四次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 3 月 24 日

1 2.2.8

当回答顺序为 1，2 时，X 分布列为：

X	0	200	300
P	0.4	0.6*0.2	0.6*0.8

$E(X) = 168$
当回答顺序为 2，1 时，X 分布列为：

X	0	100	300
P	0.2	0.8*0.4	0.8*0.6

$E(X) = 176$
因此应该先回答问题 2。

2 2.2.10

设 X 为保险公司的收益，则 X 的分布列为：

X	-a	ka
P	p	1-p

所以保险公司的期望收益为 $E(X) = -ap+ka(1-p)$，由 $E(X) \leq 0.1a$，可得到 $-ap+ka(1-p) \leq 0.1a$，解得：

$$k \leq \frac{0.1+p}{1-p}$$

一些具体的数值可查下表：

X	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
P	0.1111	0.11579	0.2222	0.3750	0.5714	.8333	1.2000

3 2.2.14

由分布函数可得到密度函数为:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5e^x, & x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 1, \\ 0.25e^{-0.5(x-1)}, & x \le 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} 0.5xe^x dx + \int_{1}^{+\infty} 0.25xe^{-0.5(x-1)} dx = 1$$

4 2.2.17

$$p = P(X > \pi/3) = \int_{\pi/3}^{\pi} 0.5cos(0.5x)dx = 1 - sin(\pi/6) = 0.5$$

$$P(Y = k) = C_4^k * 0.5^k 0.5^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$E(Y^2) = \sum_{k=0}^{4} k^2 C_4^k 0.5^4 = 80 * 0.5^4 = 5$$

5 2.2.20

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xp(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} xp(x)dx &= -\int_{-\infty}^{0} (\int_{x}^{0} dy)p(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{y} p(x)dxdy \\ &= -\int_{-\infty}^{0} F(y)dy \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{+\infty} xp(x)dx &= \int_{0}^{+\infty} (\int_{0}^{x} dy)p(x)dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} (\int_{y}^{+\infty} p(x)dx)dy \\ &= \int_{0}^{+\infty} [1 - F(y)]dy \end{aligned} \tag{3}$$

两式相加即可得到要证明的等式。

6 2.3.7

由题意可得:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = a/2 + b/3$$

$$0.5 = E(X) = \int_0^1 x(ax + bx^2)dx = a/3 + b/4$$

解上述两式可得到 $a = 6, b = -6$。

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(6x - 6x^2)dx = 0.3$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.05$$

7 2.3.11

$$Var(X) \le E(X - \frac{x_1 + x_n}{2})^2 \le E(x_n - \frac{x_1 + x_n}{2})^2 = (\frac{x_n - x_1}{2})^2$$

8 2.3.12

$$\begin{aligned} P(X > \epsilon) &= \int_\epsilon^{+\infty} p(x)dx \\ &\le \int_\epsilon^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\epsilon)} p(x)dx \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\epsilon)} p(x)dx \\ &= \frac{E(g(X))}{g(\epsilon)} \end{aligned} \tag{4}$$

9 2.4.3

$$P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 * 0.7^2 * 0.3 + 0.7^3 = 0.784$$

10 2.4.10

设事件 A 为“服用此药后，一年感冒两次”，事件 B 为“服用此药后有效”。根据题意有：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$P(B|A) = \frac{0.75 * \frac{3^2}{2!} e^{-3}}{0.75 * \frac{3^2}{2!} e^{-3} + 0.25 * \frac{5^2}{2!} e^{-5}} = 0.889$$