概率论与数理统计第十一次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 5 月 12 日

1 4.4.4

由题意可以知道：

$$E(X_i) = 3.5, \quad Var(X_i) = \frac{35}{12}, \quad E(\overline{X}) = 3.5, \quad Var(\overline{X}) = \frac{7}{240}$$

根据林德伯格-莱维中心极限定理可以知道：

$$P(3 \le \overline{X} \le 4) \approx \Phi(\frac{4-3.5}{\sqrt{7/240}}) - \Phi(\frac{3-3.5}{\sqrt{7/240}}) = 0.9966$$

2 4.4.9

设 X_i 为第 i 位顾客的消费额，那么 $X_i \sim U(20, 100)$，因此 $E(X_i) = 60, Var(X_i) = \frac{1600}{3}$。设餐厅的每天营业额为 $Y = \sum_{i=1}^{400} X_i$。

(1)

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{400} E(X_i) = 24000$$

(2) 根据林德伯格-莱维中心极限定理可以知道：

$$P(-760 < Y - 2000 < 760) \approx 2\Phi(\frac{760}{\sqrt{400 * 1600/3}}) - 1 = 0.9$$

3 4.4.19

设：

$$X_i = \begin{cases} 1, & room \quad i \quad is \quad taken, \\ 0, & room \quad i \quad is \quad not \quad taken. \end{cases} \tag{1}$$

因此有 $X_i \sim b(1, 0.8), Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{500} \sim b(500, 0.8)$。

$$P(2Y \le k) = P(Y \le \frac{k}{2}) \ge 0.99$$

$$\Phi(\frac{k/2 + 0.5 - 500 * 0.8}{\sqrt{500 * 0.8 * 0.2}}) \ge 0.99$$

因此，查表可知，$k > 840.68$，即每天需要 841 千瓦电力才能满足要求。

4 4.4.26

$$E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\alpha_2$$
$$Var(Y_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i^2)=\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$$

5 5.3.3

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(3x_i-4)=3\overline{x}-4$$
$$s_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}9(x_i-\overline{x})^2=9s_x^2$$

6 5.3.5

因为:

$$\overline{x}_1=\frac{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}}{n},\overline{x}_2=\frac{x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m}}{m}$$

所以:

$$\overline{x}=\frac{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2m}}{n+m}=\frac{n\overline{x}_1+\overline{x}_2}{n+m}$$

因为:

$$s_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x}_1)^2,s_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_{2i}-\overline{x}_2)^2$$

所以:

$$s^2=\frac{1}{n+m-1}[\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(x_{2i}-\overline{x})^2]$$
$$=\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-1}+\frac{n(\overline{x}_1-\frac{n\overline{x}_1+m\overline{x}_2}{n+m})^2+m(\overline{x}_2-\frac{n\overline{x}_1+m\overline{x}_2}{n+m})^2}{n+m-1}$$
$$=\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-1}+\frac{nm(\overline{x}_1-\overline{x}_2)^2}{(n+m)(n+m-1)}$$

7 5.3.9

设总体方差为 σ^2，那么有:

$$Corr(x_i-\overline{x},x_j-\overline{x})=\frac{Cov(x_i-\overline{x},x_j-\overline{x})}{\sqrt{Var(x_i-\overline{x})}\sqrt{Var(x_j-\overline{x})}}$$

$$Cov(x_i - \overline{x}, x_j - \overline{x}) = -\frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var(x_i - \overline{x}) = Var(x_j - \overline{x}) = Var(x_1 - \overline{x}) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$$

$$Corr(x_i - \overline{x}, x_j - \overline{x}) = -(n-1)^{-1}$$

8 5.3.10

$$\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

$$(\sum_{i=1}^{n})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

因此有:

$$\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

9 5.3.23

首先可以得到:

$$P(x_{(n)} \le k) = P(x_1 \le k, \cdots, x_n \le k) = (1 - q^k)^n, k = 1, 2, \cdots$$

$$P(x_{(n)} \le k - 1) = (1 - q^{k-1})^n, k = 1, 2, \cdots$$

$$P(x_{(n)} \le 0) = 0$$

$$P(x_{(n)} = k) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n, k = 1, 2, \cdots$$

其满足非负性和正则性。

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(x_{(n)} = k) = lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}[(1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n] = lim_{m\to+\infty}(1 - q^m)^n = 1$$

$$P(x_{(1)} \ge k) = (P(x_1 \ge k))^n = q^{n(k-1)}, k = 1, 2, \cdots$$

$$P(x_{(1)} \ge k + 1) = q^{nk}, k = 1, 2, \cdots$$

最终求得分布列为:

$$P(x_{(1)=k} = P(x_{(1)} \ge k) - P(x_{(1)} \ge k + 1) = q^{n(k-1)}(1 - q^n), k = 1, 2, \cdots$$

经验证，上述分布列满足非负性和正则性。

10 5.3.24

(1)

$$P(x_{(16)} > 10) = 1 - P(x_{(16)} \leq 10) = 1 - (P(x_1 \leq 10))^{16} = 0.937$$

(2)

$$P(x_{(1)} > 5) = (P(x_i > 5))^{16} = (1 - \Phi(\frac{5-8}{2}))^{16} = 0.3308$$