数学实验实验报告

ZhaohengLi 2017050025
cainetatum@foxmail.com
15801206130

2020 年 5 月 19 日

1 实验目的

- 掌握概率统计的基本概念;
- 练习使用 MATLAB 解决实际概率问题。

2 CH11-T5 炮弹问题

2.1 算法设计

设目标中心为 $x = 0, y = 0$，记 $a = 100$，则圆形区域表示为:

$$\Omega : x^2 + y^2 \leq a^2$$

根据题目给出的炮弹落点的概率分布，可以得到:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} exp(-\frac{1}{2(1-r^2)}(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}))$$

其中，$\sigma_x = 80, \sigma_y = 50, r = 0.4$，则炮弹命中圆形区域的概率是二重积分:

$$P = \int\int_\Omega p(x, y)dxdy$$

实际计算的时候，去两个随机数 X，Y 均匀分布在 $[-a, a]$ 上，则最终的数值计算公式为:

$$P = \int\int_\Omega p(x, y)dxdy \approx \frac{a^2}{n}\sum_{k=1}^{m} p(x_k, y_k)$$

其中 m 为 n 个随机点中落在 Ω_1 中的点数。产生均匀分布的随机数可以采用 MATLAB 中的 unifrnd 函数实现。

2.2 算法实现

MATLAB 代码实现如下:

```
%% Global Variables
a = 100; sx = 80; sy = 60; r = 0.4; n = 10000;

%% Calculation
m = 0; z = 0;
x = unifrnd(-a, a, 1, n);
y = unifrnd(-a, a, 1, n);
for i = 1:n
    if x(i)^2 + y(i)^2 ≤ a^2
        u = 1 / (2 * pi * sx * sy * sqrt(1 - r^2)) * ...
            exp(-1 / (2 * (1- r^2)) * (x(i) * x(i) / (sx^2))- ...
            2 * r * x(i) * y(i) / sx / sy + y(i) * y(i) / (sy^2));
        z = z + u;
        m = m + 1;
    end
end

%% Ans
P=a*a*z/n
```

2.3 计算结果与分析

通过使用不同的 n 值多次求解，得到如下计算结果:

	1	**2**	**3**	**4**	**平均数**	**方差**
$n = 10^4$	0.7102	0.7015	0.7041	0.7000	0.7040	2.0230e-05
$n = 10^5$	0.7048	0.6999	0.6996	0.7047	0.7023	8.3500e-06
$n = 10^6$	0.7025	0.7030	0.7010	0.7032	0.7024	9.8917e-07

首行的 1，2，3，4 分别为第 1，2，3，4 次计算的结果。

首先可以看出，随着 n 的增长，最终求得结果的方差不断减小，代表采样精度越高，得到的结果精确度也就相应地增加，符合辛钦定理内容和蒙特卡洛法相关结论。

另外可以看出最终结果都在 0.7 附近。

2.4 结论

根据计算精度进行估计，可以得出炮弹命中圆形区域的概率大概为 0.7。

3 CH11-T7 报童问题

3.1 模型建立

每天报纸的需求量为随机变量，记每天需求量为 r 的概率为 $f(r), r = 0, 1, \cdots$.。设报童每天购进报纸份数为 n，根据课本问题 1 的建模思路，可以得到报童每天的平均利润为:

$$V(n)=\sum_{r=0}^{n-1}[(b-a)r-(a-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n}^{\infty}[(b-a)n]f(r)$$

将 n 和 r 看成连续变量，又有 $a=a(n)=A(1-\frac{n}{K})$，对 $V(n)$ 求导可以得到：

$$V'(n)=\int_0^n[c-(a'(n)n+a(n))]p(x)dx+\int_n^{\infty}[b-(a'(n)n+a(n))]p(x)dx$$

带入 $a'(n)n+a(n)=A(1-\frac{2n}{K})$，令 $V'(n)=0$，则：

$$0=\int_0^n[c-A(1-\frac{2n}{K})]p(x)dx+\int_n^{\infty}[b-A(1-\frac{2n}{K})]p(x)dx$$

由题目数据可以知道，当均值比标准差大得多时，有：

$$\int_0^n p(x)dx\approx\int_{-\infty}^n p(x)dx$$

因此可以化简上式为：

$$\int_{-\infty}^n p(x)dx=\frac{b-A(1-\frac{2n}{K})}{b-c}$$

可以证明 $V''(n)<0$, 可以得到的 n 即为每天平均利润最大的最佳购进量。

3.2 算法实现

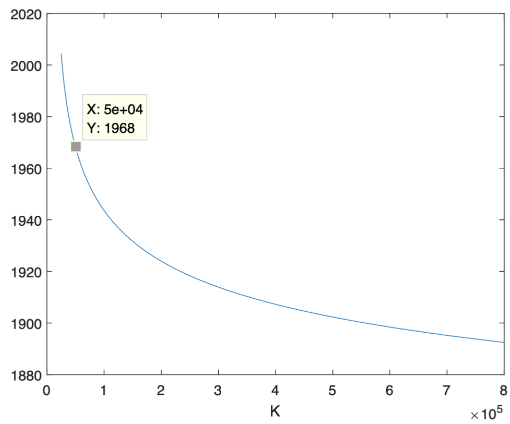
实际上，模型最终的式子是一个关于 n 的方程，不存在显式解，因此需要求解方程得到最终的最优值。计算正态分布的时候可以采用 MATLAB 的 norminv 函数，而求解方程组可以采用 fzero 函数。

```matlab
global K;
K = 50000;
kset = 25000:1000:800000;
vset = [];
for K = kset
    vset = [vset fzero(@news, [100, 3000])];
end
plot(kset, vset)


function [ y ] = news( x )
    mu = 2000;
    sigma = 50;
    A = 0.5;
    b = 0.5;
    c = 0.35;
    global K;
    target = (b - A * (1 - 2 * x / K)) / (b - c); y = norminv(target, mu, sigma) - x;
end
```

3.3 计算结果与分析

计算结果为：1968.2。

报童利润和参数 K 的曲线关系如下图所示，可以看出该参数越大，批发价下降得慢，导致获得最大利润时卖出得报纸数目减少。



另外考虑题目中给出得公式，显然在这种设定下购买的报纸越多，批发价就越便宜，且线性关系带来的一个问题就是当 n 无限增大的时候，批发价会是负值，这个时候报童的期望利润实际可以达到无穷，而这种情况是无法简单通过 $V''(n) = 0$ 以及 $V''(n) < 0$ 捕获的。

3.4 结论

当报童每天卖出 1968 份报纸的时候，能够获得的期望利润最大。

4 CH11-T9 轧钢问题

4.1 模型建立

首先对问题进行简要的定性分析: 如果轧钢设备所设定的平均长度过大，则精轧时切割的长度也就越大，造成的浪费很多; 而相反如果平均长度过小，则报废的可能性也增加，但相应符合要求的那部份钢材会被精轧切割的长度也就越小，二者为相互制约的关系。因此对于浪费问题需要权衡这里的参数 m，使得两种意义上的浪费最少。

设粗轧得到的钢材长度为随机变量 L，根据题意 $L \sim N(m, \sigma)$，其中 m 为可以控制的均值，而 σ 为不可控制的误差。

设 L 的概率密度函数为 $p(x)$，每粗轧一根钢材的期望浪费为 W_1，根据题意可以得到:

$$W_1 = \int_1^{\infty} (x - l)p(x)dx + \int_{-\infty}^{l} xp(x)dx$$

上式由两部分组成，一部分为整根报废的浪费量，另一部分为精轧时的浪费量。进一步化简为:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - l\int_1^{\infty} p(x)dx = m - l\int_1^{\infty} p(x)dx = m - lP$$

其中 $P = \int_1^{\infty} p(x)dx$，意义是粗轧钢材长度大于 l 的概率，同时也代表了最终能够得到 l 规定长度钢材 (而不是整根报废) 的概率。

因此，最终需要优化的值即为:

当目标函数为每粗轧一根钢材浪费最小时，目标函数即为 $W_1 = m - lP$。

当目标函数为每得到一根规定长度钢材浪费最小时，目标函数为 $W_2 = \frac{W_1}{P} = \frac{m}{P} - l$。

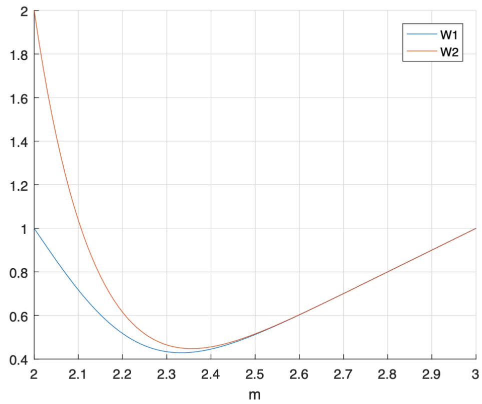
4.2 算法实现

MATLAB 代码实现:

```
global sigma;
global l;
sigma = 0.2;
l = 2;

fminbnd(@w1, 2, 3)

fminbnd(@w2, 2, 3)

function [ y ] = w1( m )
    global l;
    global sigma;
    P = (1 - normcdf(l, m, sigma)); y = m - l * P;
end

function [ y ] = w2( m )
    global l;
    global sigma;
    P = (1 - normcdf(l, m, sigma)); y = m ./ P - l;
end
```

4.3 计算结果与分析

MATLAB 的输出依次为 2.3327 和 2.3562。此外，可以绘制出函数 W_1 和 W_2 随 m 变化如下图所示。



从图中能够看出，当 m 减小时，两种浪费均增加，这体现在报废钢管数目的增加上; 当 m 增大时，

浪费也增加，这体现在精轧过程中的截取更多。但是对比 W_1 和 W_2，当 m 减小的时候，W_2 增加的更加显著，这是因为规定长度钢材的总数目越来越少，合格率越来越低，如果这个代价分摊到所有合格的钢管上，平均浪费显然会更高一些。另外，随着 m 的增高，报废率越来越少，两种浪费的计量数值也会越来越接近。

4.4 结论

当目标函数为每粗轧一根钢材的浪费最小时，$\mathrm{m} = 2.33\mathrm{m}$;

当目标函数为每得到一根规定长度钢材浪费最小时，$\mathrm{m} = 2.36\mathrm{m}$。

5 实验总结

通过这次的实验，我学会了使用 MATLAB 求解统计问题的一般方法，并对概率论与数理统计的知识有了更深的理解。希望在之后的课堂上老师能够当堂进行相关的技巧演示并给出题目的分步解答。