概率论与数理统计第七次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 4 月 14 日

1 3.1.7

(1)

$$P(0 < X < 0.5, 0.25 < Y < 1) = 4\int_0^{0.5} xdx \int_{0.25}^1 ydy = \frac{15}{64}$$

(2)

$$P(X = Y) = 0$$

(3)

$$P(X < Y) = 4\int_0^1 \int_0^y xydxdy = 4\int_0^1 \frac{1}{2}y^3dy = 0.5$$

(4)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad or \quad y < 0, \\ x^2y^2, & 0 \le x < 1, 0 \le y < 1, \\ x^2, & 0 \le x < 1, 1 \le y, \\ y^2, & 1 \le x, 0 \le y < 1, \\ 1, & x \ge 1, y \ge 1. \end{cases} \tag{1}$$

2 3.1.8

设 $D = (x,y)| - 1 \le x, y \le 1, G = (x,y)|x^2 + y^2 \le 1$。因为二维随机变量服从 D 上的均匀分布，且 D 的面积 S_D 为 4，G 的面积 S_G 为 π，所以：

$$P(X^2 + Y^2 \le 1) = \frac{S_G}{S_D} = \frac{\pi}{4}$$

3 3.1.10

解决此类问题的首先步骤是画出图像，找出重叠部分面积，在根据面积确定积分区域，积分上下限，由于 LATEX 画图十分繁琐，在此处便不在将草稿图呈现，望助教谅解。(1)

$$P(X > 0.5, Y > 0.5) = 6\int_{0.5}^1 \int_{0.5}^y (1-y)dxdy = \frac{1}{8}$$

(2)

$$P(X<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_x^1(1-y)dydx=\frac{7}{8}$$

$$P(Y<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_x^{0.5}(1-y)dydx=\frac{1}{2}$$

(3)

$$P(X+Y<1)=6\int_0^{0.5}\int_x^{1-x}(1-y)dydx=\frac{3}{4}$$

4 3.1.13

解决此类问题的首先步骤是画出图像，找出重叠部分面积，在根据面积确定积分区域，积分上下限，由于 LATEX 画图十分繁琐，在此处便不在将草稿图呈现，望助教谅解。

$$P(X+Y\leq 1)=\int_0^{0.5}\int_x^{1-x}e^{-y}dydx=1+e^{-1}-2e^{-0.5}=0.1548$$

5 3.2.5

(1)

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{2}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{y}e^{-y}dy=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{3}$$

(2) 该分布区域为曲线与 x 轴包围的拱形区域，

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)dy=\frac{5}{8}(1-x^4), & -1<x<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{4}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}(x^2+y)dx=\frac{5}{6}\sqrt{1-y}(1+2y), & 0<y<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{5}$$

(3)

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x}\frac{1}{x}dy=1, & 0<x<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{6}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_y^{1}\frac{1}{x}dx=-lny, & 0<y<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{7}$$

6 3.2.13

(1) 该分布区域为 X 轴上方的倒三角区域，由于 LATEX 画图十分繁琐，在此处便不在将草稿图呈现，望助教谅解。

对 x 分区间讨论，

当 $-1 < x < 0$ 时，有 $p_X(x) = \int_{-x}^{1} dy = 1 + x$，当 $0 < x < 1$ 时，有 $p_X(x) = \int_{x}^{1} dy = 1 - x$，因此有：

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 < x < 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{8}$$

当 $0 < y < 1$ 时，有：

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-y}^{y} dx = 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{9}$$

(2) 因为 $p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$，所以 XY 不独立。

7 3.3.1

$$P(U = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = 0.12$$

$$P(U = 2) = P(X = 2, Y = 1) + \sum_{i=0}^{2} P(X = i, Y = 2) = 0.37$$

$$P(U = 3) = \sum_{i=0}^{3} P(X = i, Y = 3) = 0.51$$

U	1	2	3
P	0.12	0.37	0.51

$$P(V = 0) = \sum_{i=0}^{3} P(X = 0, Y = i) = 0.40$$

$$P(V = 1) = P(X = 2, Y = 1) + \sum_{i=0}^{3} P(X = 1, Y = i) = 0.44$$

$$P(V = 2) = P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) = 0.16$$

V	0	1	2
P	0.40	0.44	0.16

8 3.3.4

(1)

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=0.5*0.5=0.25$$

$$P(Z=1)=1-P(Z=0)=0.75$$

(2)

$$P(X\le i)=\sum_{j=i}^{i}(1-p)^{j-1}p=p\frac{1-(1-p)^i}{1-(1-p)}=1-(1-p)^i,\quad i=1,2,\cdots.$$

$$P(Z=i)=P(Z\le i)-P(Z\le i-1)=P(X\le i)P(Y\le i)-P(X\le i-1)P(Y\le i-1)$$

$$P(Z=i)=(1-p)^{i-1}p[2-(1-p)^{i-1}-(1-p)^i],\quad i=1,2\cdots.$$

9 3.3.7

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=\int_0^z\int_0^x 3xdydx+\int_z^1\int_{x-z}^x 3xdydx$$

$$F_Z(z)=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3$$

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{3}{2}(1-z^2),\quad 0<z<1$$

另外在区间 (0,1) 外的 z 有 $p_Z(z)=0$。

10 3.3.12

$$Z=max\{X_1,X_2\}-min\{X_1,X_2\}=\frac{X_1+X_2+|X_1-X_2|}{2}-\frac{X_1+X_2-|X_1-X_2|}{2}$$

$$Z=max\{X_1,X_2\}-min\{X_1,X_2\}=|X_1-X_2|$$

设 $U=X_1-X_2,V=X_2$，则当 $0<u+v<1,0<v<1$ 时，有下式：

$$P_{U,V}(u,v)=p_{X_1}(u+v)p_{X_2}(v)=2(u+v)*2v$$

因此得到密度函数为

$$p_U(u)=\begin{cases}\int_{-u}^1 4(u+v)vdv=-\frac{2}{3}u^3+2u+\frac{4}{3}, & -1<u<0,\\ \int_0^{1-u}4(u+v)vdv=\frac{2}{3}u^3-2u+\frac{4}{3}, & 0<u<1,\\ 0, & others.\end{cases}\tag{10}$$

因为当 $0 < z < 1$ 时，$Z = |U|$ 的分布函数为：

$$F_Z(z) = P(|U| \le z) = P(-z \le U \le z) = F_U(z) - F_U(-z)$$

所以 Z 的密度函数为：

$$p_Z(z) = p_U(z) + p_U(-z) = \frac{4}{3}z^3 - 4z + \frac{8}{3}, \quad 0 < z < 1.$$