概率论与数理统计第十二次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 5 月 19 日

1 5.3.26

总体的分布函数为：

$$F(x) = \int_0^x 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3 = x^2(3-2x), 0 \le x \le 1$$

$$1 - F(x) = (1-x)^2(2x+1), 0 \le x \le 1$$

因此样本中位数 $m_{0.5} = x_{(5)}$

$$p_{m_{0.5}}(x) = 3780x^9(1-x)^9(3-2x)^4(2x+1)^4$$

通过近似计算可以得到：

$$p(x_{0.5}) = 6 * 0.5 * (1 - 0.5) = 1.5$$

当 $n = 9$ 时，$m_{0.5}$ 的渐进分布为：

$$m_{0.5} \sim N(x_{0.5}, \frac{1}{4np^2(x_{0.5})}) = N(0.5, \frac{1}{81})$$

最终得出：

$$P(m_{0.5} < 0.7) \approx \Phi(1.8) = 0.9641$$

2 5.3.29

(1)

$$E\{F(x_{(6)}\} = \frac{6}{11}$$

$$Var\{F(x_{(6)}\} = \frac{6(10+1-6)}{(10+1)^2(10+2)} = \frac{5}{242}$$

(2)

因为 $F(x_{(6)}) \sim Be(6, 5)$, 所以 $F(x_{(6)}$ 在 $x = 0.15$ 处的分布函数值为：

$$betacdf(0.15, 6, 5) = 0.0014$$

3 5.3.31

令 $y_i = \frac{x_i-\mu}{\sigma}(1)$，那么 $y_{(1)},\cdots,y_{(n)}$ 的联合密度为：

$$p(y_1,\cdots,y_n) = n!exp\{-\sum_{i=1}^{n} y_i\}$$

通过变换求得联合密度为 $f(t_1,\cdots,t_n) = exp\{-\sum_{i=1}^{n} t_i\}$，由联合密度可以知道 $T_1,\cdots,T_n$ 是独立同分布的随机变量，且 $T_i \sim Exp(1)$，因此有：

$$P((n-i-1)\frac{2}{\sigma}(x_{(i)} - x_{(i-1)}) \leq x) = P(2(n-i-1)(y_{(i)} - y_{(i-1)}) \leq x)$$

$$= P(2T_i \leq x) = P(T_i \leq \frac{x}{2}) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

这是指数分布的 $Exp(\frac{1}{2})$ 的分布函数，原始得证。

4 5.4.2

$$P(|\overline{x} - \mu| < 1) = P(|\frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{16/n}}| < \frac{1}{\sqrt{16/n}}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - 1 \geq 0.95$$

解得 $n \geq 61.47$，因此 n 至少为 62 时，上述不等式成立。

5 5.4.3

$$P(|\overline{x} - \overline{y}| > 0.2) = P(\frac{|\overline{x}-\overline{y}|}{\sqrt{7/15}} > \frac{0.2}{\sqrt{7/15}}) = 2(1-\Phi(0.29)) = 0.7718$$

6 5.4.8

X 的密度函数为：

$$p_x(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})(\frac{n}{m})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{n}{2}-1}(1+\frac{n}{m}x)^{-\frac{m+n}{2}}$$

因为 z 在 $(0,+\infty)$ 上单调增, 其反函数为：

$$x = \frac{mz}{n(1-z)}, \frac{dx}{dz} = \frac{m}{n(1-z)^2}$$

Z 的密度函数为：

$$p_Z(z) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} z^{\frac{n}{2}-1}(1-z)^{\frac{m}{2}-1}, \quad 0 < z < 1$$

因此 Z 服从 $Be(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$，两个参数分为为 F 分布两个自由度的一半。

7 5.4.11

根据题意有：

$$c(\overline{x}-\mu_1)\sim N(0,\frac{c^2\sigma^2}{n}),\quad d(\overline{y}-\mu_2)\sim N(0,\frac{d^2\sigma^2}{m})$$

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1),\quad \frac{(m-1)s_y^2}{\sigma^2}\sim X^2(m-1)$$

且 $\overline{x},\overline{y},s_x^2,s_y^2$ 相互独立，故：

$$c(\overline{x}-\mu_1)+d(\overline{y}-\mu_2)\sim N(0,\frac{c^2\sigma^2}{n}+\frac{d^2n^2}{m})$$

$$\frac{(n+m-2)s_w^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2}+\frac{(m-1)s_y^2}{\sigma^2}\sim X^2(n+m-2)$$

因此：

$$t=\frac{c(\overline{x}-\mu_1)+d(\overline{y}-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}}=\frac{[c(\overline{x}-\mu_1)+d(\overline{y}-\mu_2)]/\sqrt{\frac{c^2\sigma^2}{n}+\frac{d^2\sigma^2}{m}}}{\sqrt{\frac{(n+m-2)s_w^2}{\sigma^2}/(n+m-2)}}$$

即：

$$t\sim t(n+m-2)$$

8 5.4.14

$$\frac{1}{\sigma^2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)\sim X^2(10)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}(x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{15}^2)\sim X^2(5)$$

因为两者独立，因此：

$$y=\frac{\frac{1}{\sigma^2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)/10}{\frac{1}{\sigma^2}(x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{15}^2)/5}=F(10,5)$$