概率论与数理统计第一次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 3 月 10 日

1 第 5 题

由题意可知 $\Omega = \{(B,C)|B,C = 1,2...,6\}$, 当 $B^2 - 4C >= 0$ 时方程有实根，当 $B^2 - 4C = 0$ 时方程有重根。
$p = P(B^2 >= 4C) = \frac{19}{36}$
$q = P(B^2 = 4C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

2 第 6 题

(1)$P = \frac{C_{13}^4}{C_{52}^4} = 0.0026$
(2)$P = \frac{4*C_{13}^4}{C_{52}^4} = 0.0105$
(3)$P = \frac{13^4}{C_{52}^4} = 0.1054$
(4)$P = \frac{2*C_{26}^4}{C_{52}^4} = 0.1104$

3 第 9 题

$P = \frac{5*4+3*6}{8*10} = \frac{19}{40}$

4 第 10 题

$P = \frac{2*C_{k-1}^1*C_{n-k}^1}{C_n^2}$

5 第 21 题

$P = \frac{C_{12}^3 * 3^9}{3^{12}} = 0.212$

6 第 22 题

利用插棍思想，将盒子抽象为两个木棍之间的空间，使用 N+1 根木棍组成 N 个盒子，放入问题即变为排列问题。
利用 01 序列来表示各种情况，例如“1001011”表示第 1 个盒子有 2 个球，第 2 个盒子有 1 个球，第 3 个盒子没有球。
样本总量为

$$C_{N-1+n}^n \tag{1}$$

(1) 此时不妨假设指定的盒子为第 1 个盒子，问题化简为 n-k 个球放入 N-1 个盒子里

$$P = \frac{C_{N-2-k+n}^{n-k}}{C_{N-1+n}^n} \quad (0 <= k <= n) \tag{2}$$

(2) 首先从 N 个盒子中选出 m 个盒子作为空盒，再将 n 个球放入剩余的 N-m 个盒子中，为保证每个盒子中至少有一个球。我们可以排列球在球与球之间插入木棍。

$$P = \frac{C_N^m * C_{n-1}^{N-m-1}}{C_{N-1+n}^n} \quad (N-n <= m <= N-1) \tag{3}$$

(3) 将整体分为两部分分析，得到如下

$$P = \frac{C_{m+j-1}^{m-1} * C_{N+n-m-j-1}^{n-j}}{C_{N-1+n}^n} \quad (1 <= m <= N, 0 <= j <= n) \tag{4}$$

7 第 16 题

$$P(AB) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \tag{5}$$

因为 $P(A) = p$ 所以 $P(B) = 1 - p$。

8 第 19 题

(1)$P(A) >= P(A(B\cup C)) = P(AB\cup AC) = P(AB)+P(AC)-P(ABC) >= P(A)+P(B)-P(BC)$
(2) 因为 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC) <= 1$,
所以 $P(A)+P(B)+P(C)-1$
$<= P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)$
$<= P(AB)+P(BC)+P(AC)$

9 第 21 题

因为 $P(ABC)=P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$
$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)$
$=P(AB)+P(BC)+P(AC)-\frac{1}{2}-P(ABC)$
所以原式成立。