概率论与数理统计第七次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 4 月 21 日

1 3.1.7

(1)

$$P(0<X<0.5, 0.25<Y<1)=4\int_0^{0.5} xdx\int_{0.25}^{1} ydy=\frac{15}{64}$$

(2)

$$P(X=Y)=0$$

(3)

$$P(X<Y)=4\int_0^1\int_0^y xydxdy=4\int_0^1\frac{1}{2}y^3dy=0.5$$

(4)

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \quad or \quad y<0,\\ x^2y^2, & 0\le x<1, 0\le y<1,\\ x^2, & 0\le x<1, 1\le y,\\ y^2, & 1\le x, 0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1.\end{cases} \tag{1}$$

2 3.1.8

设 $D=(x,y)|-1\le x,y\le 1, G=(x,y)|x^2+y^2\le 1$。因为二维随机变量服从 D 上的均匀分布，且 D 的面积 S_D 为 4，G 的面积 S_G 为 π，所以：

$$P(X^2+Y^2\le 1)=\frac{S_G}{S_D}=\frac{\pi}{4}$$

3 3.1.10

解决此类问题的首先步骤是画出图像，找出重叠部分面积，在根据面积确定积分区域，积分上下限，由于 LATEX 画图十分繁琐，在此处便不在将草稿图呈现，望助教谅解。(1)

$$P(X>0.5, Y>0.5)=6\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{y}(1-y)dxdy=\frac{1}{8}$$

(2)

$$P(X<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_x^1(1-y)dydx=\frac{7}{8}$$

$$P(Y<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_x^{0.5}(1-y)dydx=\frac{1}{2}$$

(3)

$$P(X+Y<1)=6\int_0^{0.5}\int_x^{1-x}(1-y)dydx=\frac{3}{4}$$

4 3.1.13

解决此类问题的首先步骤是画出图像，找出重叠部分面积，在根据面积确定积分区域，积分上下限，由于 LATEX 画图十分繁琐，在此处便不在将草稿图呈现，望助教谅解。

$$P(X+Y\leq 1)=\int_0^{0.5}\int_x^{1-x}e^{-y}dydx=1+e^{-1}-2e^{-0.5}=0.1548$$

5 3.2.5

(1)

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{2}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{y}e^{-y}dy=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{3}$$

(2) 该分布区域为曲线与 x 轴包围的拱形区域，

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)dy=\frac{5}{8}(1-x^4), & -1<x<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{4}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}(x^2+y)dx=\frac{5}{6}\sqrt{1-y}(1+2y), & 0<y<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{5}$$

(3)

$$p_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x}\frac{1}{x}dy=1, & 0<x<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{6}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_y^{1}\frac{1}{x}dx=-lny, & 0<y<1,\\ 0, & others.\end{cases} \tag{7}$$

6 3.2.13

(1) 该分布区域为 X 轴上方的倒三角区域，由于 LATEX 画图十分繁琐，在此处便不在将草稿图呈现，望助教谅解。

对 x 分区间讨论，

当 $-1 < x < 0$ 时，有 $p_X(x) = \int_{-x}^{1} dy = 1 + x$，当 $0 < x < 1$ 时，有 $p_X(x) = \int_{x}^{1} dy = 1 - x$，因此有：

$$p_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{8}$$

当 $0 < y < 1$ 时，有：

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_{-y}^{y} dx = 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{9}$$

(2) 因为 $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$，所以 XY 不独立。

7 3.5.1

X 的边际分布列为

$$P(X=n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^n - m}{m!(n-m)!} = \frac{14^n}{n!}e^{-14}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

所以 X 服从参数为 14 的泊松分布，由此可以得到：

$$P(Y=m|X=n) = \frac{P(X=n, Y=n)}{P(X=n)} = C_n^m(\frac{7.14}{14})^m(\frac{6.86}{14})^{n-m}, \quad m = 0, 1, \cdots, n$$

8 3.5.4

(1)

因为 X+Y 服从负二项分布 Nb(2,p)，所以 $P(X+Y=m) = (m-1)(1-p)^{m-2}p^2$，由此可得，当 $m = 2, 3, \cdots, k = 1, 2, \cdots, m-1$ 时，有：

$$P(X=k|X+Y=m) = \frac{P(X=k, Y=m-k)}{P(X+Y=m)} = \frac{1}{m-1}$$

(2)

因为 $X+Y \sim b(2n, p)$，所以有：

$$P(X=k|X+Y=m) = \frac{P(X=k, Y=m-k)}{P(X+Y=m)} = \frac{C_n^k * C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, 2n, k = 0, 1, 2, \cdots, min\{n, m\}$$

9 3.5.7

画出图像可以看到，$p(x,y)$ 的非零区域为 x 轴上方类似于半圆型的区域，由于 Latex 画图比较繁琐，不在此处作出图像。

所以当 $-1 < x < 1$ 时：

$$p_X(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4)$$

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_x(x)} = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4}, & 0 < y < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{10}$$

$$p(y|x = 0.5) = \frac{32y}{15}$$

由此得到：

$$P\{Y \geq 0.75 | X = 0.5\} = \int_{0.75}^{1} \frac{32y}{15} = \frac{7}{15}$$

10 3.5.12

先求出条件密度函数

$$p(x|y = 0.5) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dx = x + 0.5, & 0 < x < 1, \\ 0, & others. \end{cases} \tag{11}$$

由此得到：

$$E(X|Y = 0.5) = \int_0^1 x(x + 0.5)dx = \frac{7}{12}$$