概率论与数理统计第九次作业

ZhaohengLi 2017050025

2020 年 4 月 28 日

1 3.4.2

设 X_i 为第 i 颗骰子出现的点数，$i=1,2,\cdots,n$，那么 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，其分布列为：

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

所以有：

$$E(X_i)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$
$$Var(X_i)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-\frac{1}{6}*\frac{7}{2}=\frac{35}{12}$$

由此可知：

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{7}{2}n$$
$$Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\frac{35}{12}n$$

2 3.4.20

设：

$$X_i=\begin{cases}1, & condition(1,i),\\ 0, & others.\end{cases} \tag{1}$$

$$Y_i=\begin{cases}1, & condition(6,i),\\ 0, & others.\end{cases} \tag{2}$$

$condition(1,i)$ 和 $condition(6,i)$ 分别代表第 i 次投掷出现 1 点和 6 点。
则有：

$$E(X)=E(Y)=\frac{n}{6}$$

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{5n}{36}$$

$$XY = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i + 2\sum_{i<j} X_i Y_j$$

根据实际意义可知，某次投掷时，不可能出现 1 点同时出现 6 点，因此有：

$$P(X_i Y_i = 1) = 0$$

$$P(X_i Y_i = 0) = 1 - P(X_i Y_i = 1) = 1$$

$$E(X_i Y_i) = 0$$

当 i, j 不相等时，因为 X_i, Y_j 独立，因此 $E(X_i Y_j) = E(X_i)E(Y_j) = \frac{1}{36}$, 综上可得：

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2\sum_{i<j} E(X_i Y_j) - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = -\frac{1}{5}$$

3 3.4.44

(1)

由全概率公式可得：

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(XY \leq z) \\ &= P(Y=1)P(XY \leq z|Y=1) + P(Y=-1)P(XY \leq z|Y=-1) \\ &= 0.5\Phi(z) + 0.5(1 - \Phi(-z)) \\ &= \Phi(z) \end{aligned} \tag{3}$$

因此 $Z \sim N(0,1)$。

(2)

因为 $E(X) = 0, E(Y) = 0$ 且 X 与 Y 相互独立，所以有：

$$Cov(X,Z) = E(X^2)E(Y) - E(X)E(XY) = 0$$

因此 X 与 Z 不相关。

根据全概率公式有：

$$\begin{aligned} &P(X \leq 1, XY \geq 1) \\ &= P(Y=1)P(X \leq 1, XY \geq 1|Y=1) + P(Y=-1)P(X \leq 1, XY \geq 1|Y=-1) \\ &= 0.5P(X \leq 1, X \geq 1) + 0.5P(X \leq 1, -X \geq 1) \\ &= 0.5(1 - \Phi(1)) \end{aligned} \tag{4}$$

因为 $Z = XY \sim N(0,1)$，所以：

$$P(X \leq 1)P(XY \geq 1) = \Phi(1)(1 - \Phi(1))$$

因为 $\Phi(1) \neq 0.5$，所以 $P(X \leq 1, XY \geq 1) \neq P(X \leq 1)P(XY \geq 1)$，即 X 与 Z 不独立。

4 4.2.5

特征函数为：

$$\phi(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$$

$$E(X) = \frac{\phi'(0)}{i} = \mu$$
$$E(X^2) = \frac{\phi''(0)}{i^2} = \mu^2 + \sigma^2$$
$$E(X^3) = \frac{\phi'''(0)}{i^3} = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$
$$E(X^4) = \frac{\phi''''(0)}{i^4} = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$$

3 阶中心矩和 4 阶中心矩分别为：

$$E(X - E(X))^3 = E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 3E(X)\mu^2 - \mu^3 = 0$$
$$E(X - E(X))^4 = E(X^4) - 4E(X^3)\mu + 6E(X^2)\mu^2 - 4E(X)\mu^3 + \mu^4 = 3\sigma^4$$

5 4.2.7

因为：

$$\phi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it-1})}, \quad \phi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it-1})}$$

所以由独立性可以得到：

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it-1})}$$

这是泊松分布 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$ 的特征函数，由唯一性定理可以知道：

$$X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

6 4.2.10

因为：

$$\phi_{X_i}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$$

所以由独立性可以得到：

$$\phi_{Y_n}(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-n}$$

这是伽马分布 $Ga(n, lambda)$ 的特征函数，由唯一性定理可以知道：

$$Y_n \sim Ga(n, \lambda)$$

7 4.2.13

因为 X_j 的特征函数为：

$$\phi_j(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$$

所以由独立性可以得到：

$$\phi_{\overline{X}}(t) = [\phi_i(t/n)]^n = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/(2n)}$$

这是正态分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ 的特征函数，由唯一性定理可以知道：

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$