自测题答案

注：下列各题为自测题，供参考。考试题目不从下列各题出。

1，设在时间区间$[0,t]$内到商店的顾客数 $N(t)$是强度为 λ 的泊松过程，每个顾客购买货物的概率为 p，不购买货物的概率为 1-p，且他们是否购买货物是相互独立的。令 $Y(t)$为$(0,t)$内购买货物的顾客数，证明：$\{Y(t),\ t\geq 0\}$是强度为 λp 的泊松过程。

证明：显然 $Y(0)=0$, $Y(t)$是独立增量过程和平稳增量过程。

$$
\begin{aligned}
P(Y(t)=k\} &= \sum_{i=k}^{\infty} P\{N(t)=i\} P\{Y(t)=k \mid N(t)=i\} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda} \lambda^{i-k}}{i!} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \\
&= \sum_{i-k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda} p^k}{k!} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{[\lambda(1-p)]} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}
\end{aligned}
$$

由上述可知，$\{Y(t),\ t\geq 0\}$是强度为 λp 的泊松过程。

也可以这样证明：对任一 t，有

$$
\begin{aligned}
P\{Y(t)=k\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{Y(t)=k \mid N(t)=k+n\} P\{N(t)=k+n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_{k+n}^k p(1-p)^n \frac{(\lambda t)^{k+n}}{(k+n)!} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda p t)^k [\lambda(1-p)t]^n}{k!n!} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)t]^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)t} = e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

所以，$\{Y(t),\ t\geq 0\}$是强度为 λp 的泊松过程。

2 设 X(t)是参数为 λ 的泊松过程，证明，X(t)的特征函数为$\varphi(v)=E[e^{jvX(t)}]$ $=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}$；对 t2>t1 及两个整数 m 和 n，有

$$P\{X(t_1)=m,X(t_2)=m+n\}=e^{-\lambda t_2}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n t_1^{\,m}}{m!n!}$$

证明：因为$P\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2,...,$

所以

$$\begin{aligned}\varphi(v)=E[e^{jvX(t)}]&=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\\&=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{jv}\lambda t)^k}{k!}\\&=e^{-\lambda t}e^{\lambda te^{jv}}=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}\end{aligned}$$

由于泊松过程是独立增量过程，故

$$\begin{aligned}&P\{X(t_1)=m,X(t_2)=m+n\}\\&=P\{X(t_1)=m,X(t_2)-X(t_1)=n\}\\&=P\{X(t_1)=m\}P\{X(t_2)-X(t_1)=n\}\\&=e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}=e^{-\lambda t_2}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n}{m!n!}t_1^{\,m}\end{aligned}$$

3 设 $X_1(t)$与 $X_2(t)$是两个参数分别为λ_1与λ_2的泊松过程，证明 $X(t)=X_1(t)+X_2(t)$是参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程，$X(t)=X_1(t)-X_2(t)$不是泊松过程。

证明：因为

$$\varphi_{X_1}(v)=E[e^{jvX_1(t)}]=\mathrm{e}^{\lambda_1 t(e^{jv}-1)}$$
$$\varphi_{X_2}(v)=E[e^{jvX_2(t)}]=\mathrm{e}^{\lambda_2 t(e^{jv}-1)}$$

而 $X_1(t)$与 $X_2(t)$相互独立，所以

$$\varphi_X(v)=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(v)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^{jv}-1)}$$

从而知 X(t)服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。

对于 $X(t)=X_1(t)-X_2(t)$，有

$$\begin{aligned}\varphi_X(v)&=E[e^{jvX(t)}]=E[e^{jv[X_1(t)-X_2(t)]}]\\&=E[e^{jvX_1(t)}]E[e^{-jvX_2(t)}]=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(-v)\\&=e^{\lambda_1 t(e^{jv}-1)}e^{\lambda_2 t(e^{jv}-1)}\\&=e^{\lambda_1 te^{jv}+\lambda_2 te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t}\end{aligned}$$

故$\varphi_X(v)$不是泊松过程的特征函数，及$X(t)$不是泊松过程。

4，设有独立重复试验序列$\{X_n, n\geq 1\}$，以$X_n=1$记第n次试验时事件A发生，且$P\{X_n=1\}=p$；以$X_n=0$记第n次试验时事件A，且$P\{X_n=0\}=q=1-p$。若令$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, n\geq 1$，证明：$\{Y_n, n\geq 1\}$是齐次马尔可夫链，并求二步转移概率矩阵。

证明：因为$Y_1=X_1=i_i, Y_2=X_1+X_2, ..., Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k=i_n$，$Y_{n+1}=Y_n+X_{n+1}=i_{n+1}$，所以，$X_{n+1}=Y_{n+1}-Y_n=i_{n+1}-i_n$。由于$X_{n+1}$与$Y_1, Y_2, ..., Y_n$相互独立，因此

$$\begin{aligned}
&P\{Y_{n+1}=i_{n+1} \mid Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1}, ..., Y_1=i_1\} \\
&=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n \mid Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1}, ..., Y_1=i_1\} \\
&=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}
\end{aligned}$$

同理 $P\{Y_{n+1}=i_{n+1} \mid Y_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}$

所以，$\{Y_n, n\geq 1\}$是马尔可夫链。由于$\{X_n, n\geq 1\}$是齐次马尔可夫链，故$\{Y_n, n\geq 1\}$也是齐次马尔可夫链。

$$\begin{aligned}
p_{ij}&=P\{Y_{m+1}=j \mid Y_m=i\}=P\{X_{m+1}=j-i\} \\
&=\begin{cases} q, & j=i \\ p, & j=i+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}$$

故 $$P=\begin{bmatrix} q & p & & & \\ & q & p & & \\ & & q & p & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P^{(2)}=PP=\begin{bmatrix} q^2 & 2pq & p^2 & & & \\ & q^2 & 2pq & p^2 & & \\ & & q^2 & 2pq & p^2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

5，设 I ＝{1,2,3,4}，其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

试对其状态进行分类，确定哪些状态是常返态，并确定其周期。

解：状态传递图（略）

因为对一切$n\geq 1$，$f_{44}^{(n)}=0$，所以$f_{44}=0<1$，从而知状态 4 是非常返态。又

$$f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3}, f_{33}^{(n)}=0 \ \ (n\geq 2)$$

所以$f_{33}=\frac{2}{3}<1$，从而知状态 3 也是非常返态。

而$f_{11}=f_{11}^{(1)}+f_{11}^{(2)}=1/2+1/2=1$，$f_{22}=f_{22}^{(1)}+f_{22}^{(2)}+\cdots=0+1/2+1/2^2+...=1$

所以状态 1 和状态 2 是常返态。又知

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1*\frac{1}{2}+2*\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<+\infty$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=1*0+2*\frac{1}{2}+3*\frac{1}{2^2}+...=3<+\infty$$

而其周期均为 1，故状态 1 与状态 2 是正常返，且为遍历态。

6 设马尔可夫链的状态空间为 I={1,2,3,4}，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

讨论$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}$。

解：状态 1 和 2 都是吸收态，都是正常返非周期的基本常返闭集，而 N={3,4}是非常返集，有

$$p_{11}^{(n)}=1, p_{21}^{(n)}=0, p_{31}^{(n)}=1/3$$

$$p_{41}^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}f_{41}^{(l)}*p_{11}^{(n-l)}=\sum_{i=1}^{n}f_{41}^{(l)}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}*\frac{1}{4}+\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}*\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

说明$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i1}^{(n)}$存在，但与$i$有关。

7 设有齐次马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

讨论此马尔可夫链的遍历性，并求平稳分布。

解：马尔可夫链的状态空间为 I={1,2}，都是吸收态，状态空间可以分解为两个闭集之和，及 I={1}+{2}，故不死不可约的马尔可夫链。

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=PP...P=P^n=P^{(n)}$$

所以状态 1 和状态 2 都是非周期的，且有

$$\lim_{n\to\infty}p_{11}^{(n)}=1\neq\lim_{n\to\infty}p_{21}^{(n)}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}=0\neq\lim_{n\to\infty}p_{22}^{(n)}=1$$

故不是遍历链，但由$\pi=\pi P$，得

$$\pi=(\pi_1,\pi_2)，\quad \pi_1+\pi_2=1$$

故有$\begin{cases}\pi_1=\pi_1,\\ \pi_2=\pi_2,\end{cases}\quad \pi_1+\pi_2=1$

可见平稳分布是存在的，且有无穷多个。

$$\{p,q\},0\le p,0\le q,p+q=1$$

都是平稳分布。说明此齐次马尔可夫链不满足遍历链条件，但存在平稳分布，只是平稳分布不唯一。

8，证明马尔可夫过程$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$的转移概率矩阵$P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in I)$,满足

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(s+t),\ s,t\geq 0$$

证明：任取$i,j\in I$，有

$$
\begin{aligned}
&p_{ij}(s+t)=P\{X(s+t)=j\mid X(0)=i\}\\
&=\frac{P\{X(s+t)=j,X(0)=i\}}{P\{X(0)=i\}}\\
&=\sum_{k:P\{X(s)=k,X(0)=i\}>0}\frac{P\{X(s+t)=j,X(0)=i\}}{P\{X(0)=i\}}\times\frac{P\{X(s+t)=j,X(s)=k,X(0)=i\}}{P\{X(s+t)=j,X(0)=i\}}\\
&=\sum_{k:P\{X(s)=k,X(0)=i\}>0}\frac{P\{X(s+t)=j\mid X(s)=k,X(0)=i\}}{P\{X(s)=k\mid X(0)=i\}}\\
&=\sum_{k\in I}p_{ik}(s)p_{kj}(t)
\end{aligned}
$$

即 $\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(s+t)$

9，设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是以 I={0,1}为状态空间的马尔可夫过程，转移概率矩阵 $P(t)=\{p_{ij}(t),i,j\in I\}$ 为标准阵，且

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-p_{00}(t))=q_0=\lambda,\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-p_{11}(t))=q_1=\mu$$

求(1) $\mathbf{P}(t)$, 在 $p_0=P(X(0)=0),0<p_0<1$时

(2) E[X(t)], D[X(t)]

解：（1）设 P(t)的密度矩阵是 Q。由于 I 有限，知 Q 是保守阵，即

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{bmatrix}$$

因为 P'(t)=P(t)Q, 即有方程组

$$\begin{cases}p'_{i0}(t)=-(\lambda+\mu)p_{i0}(t)+\mu\\ p'_{i1}(t)=-(\lambda+\mu)p_{i1}(t)+\lambda\end{cases}\quad i=0,1$$

解方程组可得

$$P(t)=\begin{bmatrix}\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\end{bmatrix}$$

且

$$
\begin{aligned}
E[X(t)]&=P(X(t)=1)\\
&=p_0p_{01}(t)+(1-p_0)p_{11}(t)\\
&=p_0[p_{01}(t)-p_{11}(t)]+p_{11}(t)\\
&=-p_0e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}
$$

$$E[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = E[X(t)](1 - E[X(t)])$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} - p_0 e^{-(\lambda+\mu)t}\right] \times \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + p_0 e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$