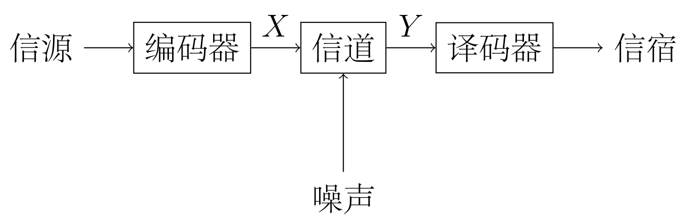
信息论第四单元复习答案：信道编码

基本概念与模型

答案：

1. 

组件：信源、编码器、信道（含噪声）、译码器、信宿

答案：

2. (a) **无记忆性**：当前输出仅依赖当前输入

$$p(y_n|x^n, y^{n-1}) = p(y_n|x_n)$$

(b) **无反馈性**：当前输入不依赖过去输出

$$p(x_n|x^{n-1}, y^{n-1}) = p(x_n|x^{n-1})$$

转移概率：

$$p(y^n|x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_i)$$

3. **推导**：

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\sum_{x'} p(y|x')p(x')}$$

信道容量

4. **答案**：

   (a) **操作性定义**：$C = \log |\{\text{可区分输入}\}|$

   (b) **信息论定义**：$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$

   关系：$I(X;Y)$ 最大值等于可区分输入数的对数

计算：

5. (a) **二进制无噪声**：$C = \log 2 = 1$ bit/use

$$X = 0 \to Y = 0,\ X = 1 \to Y = 1$$

(b) **非重叠输出**：

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{1, 2, \cdots, m\} \\ \mathcal{Y} &= \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\} \\ C &= \log m \end{aligned}$$

（每个输入对应唯一不相交的输出集）

(c) **打字机模型**：字母表大小 26，每个输入可错至相邻字母

$$C = \log 13 \quad \text{(可区分的输入数)}$$

(d) **二进制对称信道 (BSC)**：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - H(p) \\ &\leq 1 - H(p) \end{aligned}$$

当 $p(x)$ 均匀时取等：$C = 1 - H(p)$

(e) **二进制擦除信道 (BEC)**：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - H(\alpha) \\ &\leq 1 - \alpha \end{aligned}$$

当 $p(x)$ 均匀时取等：$C = 1 - \alpha$

证明：

6. (a) $I(X;Y) \geq 0$，故 $C \geq 0$

   (b) 由 $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \leq H(X) \leq \log|\mathcal{X}|$
   同理 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \leq H(Y) \leq \log|\mathcal{Y}|$

   (c) $I(X;Y)$ 是 $p(x)$ 的连续函数，最大值存在且连续

信道编码定理

答案：

7. - (M,n) **码**：包含 M 个码字，每个码字长度 n
   - **码率**：$R = \frac{\log M}{n}$ bits/channel use

答案：(x^n, y^n) 是 ε-联合典型的当且仅当：

8. (a) $\left|-\frac{1}{n}\log p(x^n) - H(X)\right| < \varepsilon$

   (b) $\left|-\frac{1}{n}\log p(y^n) - H(Y)\right| < \varepsilon$

   (c) $\left|-\frac{1}{n}\log p(x^n, y^n) - H(X,Y)\right| < \varepsilon$

信道编码定理：对离散无记忆信道 (DMC)，其容量 C 满足：

$$\forall R < C,\ \exists\{(M_n, n)\} \text{ 码序列},\ \lim_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 0$$

其中 $R = \lim_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n}$。反之，

$$\forall R > C,\ \forall\{(M_n, n)\} \text{ 码序列},\ \liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} > 0$$

9.

逆定理证明：

10. (a) **假设**：存在码率序列 $R_n > C$ 且 $\lim_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 0$

(b) **数据预处理不等式**：$I(W;\hat{W}) \le I(X^n;Y^n)$

(c) **Fano 不等式**：

$$H(W|\hat{W}) \le H(P_e) + P_e \log(M-1)$$

(d) **互信息分解**：

$$\begin{aligned} I(W;\hat{W}) &= H(W) - H(W|\hat{W}) \\ &\ge \log M - H(P_e) - P_e \log(M-1) \\ &> \log M - 1 \quad (\text{当}n\text{ 大时}) \end{aligned}$$

(e) **信道互信息界**：

$$I(X^n;Y^n) \le nC$$

(f) **矛盾**：

$$nC \ge I(X^n;Y^n) \ge I(W;\hat{W}) > \log M - 1 = nR_n - 1$$

当 $R_n > C$ 时：

$$C \ge R_n - \frac{1}{n} \to R_n > C$$

矛盾。 □

工程意义：

11.
- **正向定理**：码率 $R < C$ 时，存在可靠通信方案
- **逆定理**：码率 $R > C$ 时，不存在可靠通信方案
- **结论**：信道容量 C 是可靠通信的极限速率