

信息论复习问题集

基本定义复述

1. 请严格复述**熵 (Entropy)** 的定义（包含数学表达式和定义域说明）。
2. 请严格复述**联合熵 (Joint Entropy)** 的定义（包含数学表达式）。
3. 请严格复述**条件熵 (Conditional Entropy)** 的定义（包含两种等价表达式）。

4. 请严格复述**相对熵 (Kullback-Leibler Divergence)** 的定义（包含数学表达式和非负性说明）。

5. 请严格复述**互信息 (Mutual Information)** 的定义（包含三种等价表达式）。

定理证明

6. **链式法则 (Chain Rules)**

(a) 请证明**熵的链式法则**：

$$H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$$

(b) 请证明 **互信息的链式法则**：

$$I(X_1, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_1, \dots, X_{i-1})$$

7. **琴生不等式 (Jensen's Inequality)**：请证明对于凸函数 f 和随机变量 X ：

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$$

(需说明凸函数的定义和证明中使用的关键不等式)

8. **马尔科夫链 (Markov Chain)**：

(a) 请给出 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 构成马尔科夫链的**严格概率定义**

(b) 请证明马尔科夫链的等价条件： $I(X; Z|Y) = 0$

9. **数据处理不等式 (Data Processing Inequality)**: 若 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 形成马尔科夫链, 请证明:

$$I(X; Y) \geq I(X; Z)$$

10. **法诺不等式 (Fano's Inequality)**:

(a) 请写出完整的法诺不等式表达式

(b) 请解释 P_e 、 $H(P_e)$ 、 $H(X|\hat{X})$ 和 $H(X|Y)$ 的含义

(c) 请说明马尔科夫链条件 $X \rightarrow Y \rightarrow \hat{X}$ 的重要性

11. **条件作用使熵减少**: 请证明对于任意随机变量 X 和 Y :

$$H(X|Y) \leq H(X)$$

(需说明等号成立的条件)

12. **熵的独立界放缩**: 请证明若随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 则:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i)$$