信息论公理系统—复习答案

公理系统

公理系统一：

1. (a) **连续性**：$H(p_1, \ldots, p_n)$ 是关于概率分布 $(p_1, \ldots, p_n)$ 的连续函数

   (b) **等概率极大性**：在固定 n 时，当所有概率相等 $p_i = \frac{1}{n}$，熵取最大值

   (c) **组合性**：系统熵 = 子系统划分熵 + 各子系统熵的加权平均
   即：$H(p_1, \ldots, p_n) = H(Q_1, \ldots, Q_m) + \sum_{i=1}^{m} Q_i H\left(\frac{p_{i1}}{Q_i}, \ldots, \frac{p_{ik_i}}{Q_i}\right)$
   其中 $Q_i = \sum_{j \in S_i} p_j$

柯西方程证明：

2. (a) **整数**：$f(1) = k$，$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = nf(1) = nk$

   (b) **有理数**：设 $q = \frac{m}{n}$，则 $f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1) = kq$

   (c) **无理数**：设 $x \in \mathbb{R}$，取有理序列 $\{q_n\} \to x$
   由连续性：$f(x) = \lim f(q_n) = \lim kq_n = kx$
   或由单调性：若存在 x 使 $f(x) \neq kx$，则破坏单调性
   $\therefore f(x) = kx$ 是唯一解 □

熵的性质证明

连续性证明：

3. (a) 设 $\{p^{(n)}\} \to p$，需证 $H(p^{(n)}) \to H(p)$

   (b) 对任意 $\varepsilon > 0$，找足够细的有理划分：
   设 $q_i = \lceil 2^N p_i \rceil / 2^N$ 满足 $|q_i - p_i| < \frac{\varepsilon}{2N \log N}$

   (c) 由熵定义：

$$|H(p) - H(q)| \leq \sum |p_i \log p_i - q_i \log q_i|$$

   (d) 分析函数 $f(x) = x \log x$ 在 $[0, 1]$ 一致连续
   当 $|p_i - q_i| < \delta$ 时 $|f(p_i) - f(q_i)| < \frac{\varepsilon}{2N}$

   (e) 则：

$$|H(p) - H(q)| \leq \sum |f(p_i) - f(q_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   (f) 同理 $|H(p^{(n)}) - H(q^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{2}$

   (g) 对足够大 $n > N$，$|q_i^{(n)} - q_i| < \delta$，故 $|H(q^{(n)}) - H(q)| < \frac{\varepsilon}{2}$

   (h) 综合得 $|H(p^{(n)}) - H(p)| < \varepsilon \quad \square$

4. **单调性证明：**

$$H_n = \log n$$
$$H_{n+1} = \log(n+1)$$
$$H_{n+1} - H_n = \log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

$\because \frac{n+1}{n} > 1$，故 $\log(1+\frac{1}{n}) > 0$
$\therefore H_{n+1} > H_n \quad \square$

5. **组合原理：** 设 X 取值空间划分为 m 个子集 $S_1, \ldots, S_m$，令：

$$Q_i = \sum_{x \in S_i} p(x), \quad p_i(x) = \frac{p(x)}{Q_i} \ (x \in S_i)$$

则：

$$H(X) = H(Q_1, \ldots, Q_m) + \sum_{i=1}^{m} Q_i H(X|S_i)$$

其中 $H(X|S_i)$ 是条件分布 $p_i(x)$ 的熵。

6. **组合原理证明：**

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_{x} p(x) \log p(x) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \sum_{x \in S_i} p(x) \log p(x) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} Q_i \sum_{x \in S_i} \frac{p(x)}{Q_i} \log(Q_i \cdot \frac{p(x)}{Q_i}) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} Q_i \left[\sum_{x \in S_i} \frac{p(x)}{Q_i} \log Q_i + \sum_{x \in S_i} \frac{p(x)}{Q_i} \log \frac{p(x)}{Q_i} \right] \\
&= -\sum_{i=1}^{m} Q_i \left[\log Q_i + H(X|S_i) \right] \\
&= -\sum_{i=1}^{m} Q_i \log Q_i + \sum_{i=1}^{m} Q_i H(X|S_i) \\
&= H(Q_1, \ldots, Q_m) + \sum_{i=1}^{m} Q_i H(X|S_i) \quad \square
\end{aligned}
$$