信息论公理系统推导问题集

与六条原理

1. 默写出六条公理:

请证明以下六条原理:

(a) 当 X, Y 独立时，$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$

(b) 推论：若 X,Y 独立，则 $H(X|Y) = H(X)$

(c) 推论：若 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 相互独立，则 $H(X_1, \ldots, X_k) = kH(X)$

(d) 若 X 是确定性随机变量（唯一取值），则 $H(X) = 0$

(e) 若 X 在 A 上均匀分布,Y 在 B 上均匀分布,且 $A \subseteq B$,则 $H(X) \leq H(Y)$

(f) 单调性原理：若 $|A| < |B|$，$A \subseteq B$，X 在 A 上均匀分布，Y 在 B 上均匀分布，则 $H(X) < H(Y)$

构造与性质

2. 考虑构造 1.4：

- X 在有限集 A 上取值，$P(X = a) = \frac{m_a}{n}$
- U 在 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上均匀分布
- $\{V_a\}$ 是 $[n]$ 的划分，满足 $|V_a| = m_a$
- 定义 X'：$X' = a$ 当且仅当 $U \in V_a$

请分析：

(a) U 和 X' 的相互决定关系

(b) 如何利用此构造证明”条件作用使熵减少”：$H(Y) \leq H(X)$（其中 $Y = f(X)$）

3. 证明：对任意随机变量 X 取值于有限集 A，有 $H(X) \geq 0$

4. 证明：复合运算使熵减少，即若 $Y = f(X)$，则 $H(Y) \leq H(X)$

5. 使用公理系统零证明链式法则：

$$H(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1})$$

（提示：使用可加性原理递推或数学归纳法）

6. 证明：若 X 在有限集 A 上均匀分布，则 $H(X) = \log |A|$