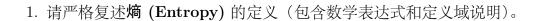
信息论复习问题集

基本定义复述



2. 请严格复述**联合熵 (Joint Entropy)** 的定义(包含数学表达式)。

3. 请严格复述**条件熵 (Conditional Entropy)** 的定义(包含两种等价表达式)。

4. 请严格复述**相对熵 (Kullback-Leibler Divergence)** 的定义(包含数学表达式和非负性说明)。

5. 请严格复述**互信息 (Mutual Information)** 的定义(包含三种等价表达式)。

定理证明

- 6. 链式法则 (Chain Rules)
 - (a) 请证明**熵的链式法则**:

$$H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i|X_1, \dots, X_{i-1})$$

(b) 请证明**互信息的链式法则**:

$$I(X_1, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_1, \dots, X_{i-1})$$

7. **琴生不等式 (Jensen's Inequality)**:请证明对于凸函数 f 和随机变量 X:

$$\mathbb{E}[f(X)] \ge f(\mathbb{E}[X])$$

(需说明凸函数的定义和证明中使用的关键不等式)

- 8. 马尔科夫链 (Markov Chain):
 - (a) 请给出 $X \to Y \to Z$ 构成马尔科夫链的**严格概率定义**

(b) 请证明马尔科夫链的等价条件: I(X; Z|Y) = 0

9. **数据处理不等式 (Data Processing Inequality)**: 若 $X \to Y \to Z$ 形成马 尔科夫链,请证明:

$$I(X;Y) \ge I(X;Z)$$

- 10. 法诺不等式 (Fano's Inequality):
 - (a) 请写出完整的法诺不等式表达式
 - (b) 请解释 P_e 、 $H(P_e)$ 、 $H(X|\hat{X})$ 和 H(X|Y) 的含义

- (c) 请说明马尔科夫链条件 $X \to Y \to \hat{X}$ 的重要性
- 11. **条件作用使熵减少**:请证明对于任意随机变量 X 和 Y:

$$H(X|Y) \le H(X)$$

(需说明等号成立的条件)

12. **熵的独立界放缩**:请证明若随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立,则:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i)$$