

普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 微分几何

彭家贵 陈 卿 编著

高等教育出版社

内容提要

本书共 10 章,第 1 章~第 5 章为第一部分,系统讲述了三维欧氏空间中曲线、曲面的局部几何理论和曲面的内蕴几何学,这部分内容可作为数学专业本科生微分几何必修课教材;第 6 章~第 10 章为第二部分,介绍有关曲面整体理论的一些基本结果,是整体微分几何一些经典问题选讲,它涉及数学的其它领域,可作为高年级本科生的专业课教材或课外阅读材料。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/彭家贵,陈卿编著. —北京:高等教育出版社,2002.7 (2010 重印)  
ISBN 978-7-04-011025-8

I. 微… II. ①彭…②陈… III. 微分几何-高等学校-教材 IV. 0186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 015545 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a> <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a> <a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
印 刷	河北新华印刷一厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2002 年 7 月第 1 版
印 张	16.25	印 次	2010 年 10 月第 8 次印刷
字 数	290 000	定 价	24.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 11025-00

# 序 言

本书要讨论的内容是欧几里得微分几何学，即欧几里得空间中曲线和曲面的几何性质，并研究它们的内蕴几何性质。人们自然要问，什么是欧几里得几何？所谓的几何性质又是什么？读者也许从初等几何中对这些问题已有了大概的了解，但由于这些问题带有本质性，因此，仍有必要多说几句。

几何的观念最初来源于人们对自然空间的直观感受和经验。古希腊时期的几何学家欧几里得（约公元前 330 — 前 275？）首先给出了直观几何的条理化结构，他所编写的《几何原本》对几何学原理作了系统的阐述，并开创了公理化的数学研究方法。长期以来，关于欧几里得几何公理体系的完备性、无矛盾性引起了很多数学家的兴趣，特别是关于平行公理的研究更导致了非欧几何学的诞生，其中决定性的工作应归功于 J. Bolyai（匈牙利）和 N. I. Lobachevsky（俄国）。Hilbert 在其名著《几何基础》中所规定的公理体系也许是最严密和最精练的。

欧几里得空间曲线和曲面几何的研究始于微积分在几何的应用，Euler 和 Monge 对微分几何的早期发展作出了重要的贡献。Gauss 关于曲面的理论，建立了基于曲面第一基本形式的几何，并把欧几里得几何推广到曲面上“弯曲”的几何，使微分几何真正成为一个独立的学科。Riemann 在 1854 年的有名演讲“Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen<sup>1</sup>”，把 Gauss 的理论推广到高维的空间，Riemann 几何就此诞生。Riemann 的思想引起了许多工作来处理和发展他的新几何。经过 Christoffel、Beltrami 以及随后的 Bianchi、Ricci 和 Levi Civita 等人的努力，微分几何在 19 世纪末已成为蓬勃发展的学科。

与上述想法不同，F. Klein 在 1872 年发表了后人称之为“爱尔朗根纲领（Erlangen Program）”的著名演讲“最新几何研究的比较评论”。他的基本思想是把几何看作某个变换群作用下的不变量。根据 Klein 的思想，有一个变换群就有一个几何与之对应，欧几里得几何就是研究几何图形在欧几里得变换群下不变的性质和量。

Elie Cartan 融合了上述两种观点，以联络为主要几何观念，创立了外微

---

<sup>1</sup> 英译文见 M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol. 2. pp135–148

分法,使几何不变量得以更充分的显示.外微分与活动标架法相结合,使得整体微分几何有了突飞猛进的发展.陈省身将 Elie Cartan 的方法发扬光大,他关于纤维丛和示性类的理论,建立了微分几何与拓扑的联系,是一个光辉的里程碑.

本书讲述的主要是三维欧氏空间中曲线和曲面的几何理论和曲面的内蕴几何学,它历史悠久、内容丰富.为适应课程改革和微分几何学发展的需要,我们力求简明,在书中主要介绍微分几何的基本观点和基本方法,着重介绍了如何利用自然标架和正交标架研究曲面的几何.为兼顾微分几何局部理论和整体理论的关系,我们把本书的内容分为两部分:第一部分系统讲述了曲线和曲面的局部几何理论和曲面的内蕴几何学;第二部分介绍了有关曲面整体理论的一些基本结果.为使本书能在有限的课时内完成讲授,我们在不影响全书结构的前提下,把部分局部理论的内容放入习题.因此,本书的习题是正文内容的一个补充.我们将在可微分的范畴内讨论曲线和曲面的几何,因此,如不特别声明,本书所涉及的映射、函数、变换等均是任意次可微的.

本书是基于 20 世纪 80 年代初期写的微分几何讲义,结合多年来在中国科学技术大学的教学实践编写而成.本书的第一部分可以作为本科生微分几何必修课的教材,其中第五章加星号的两节也可以作为课外阅读材料.本书的第二部分是整体微分几何一些经典问题的选讲,它涉及到数学的其它领域,可作为高年级本科生的专业课教材或课外阅读材料.

作者感谢高等教育出版社文小西先生对本书出版的大力帮助.由于作者水平有限,书中不妥或错误之处,敬请读者指正.

作者

# 目 录

## 第一部分 曲线与曲面的局部微分几何

第一章 欧氏空间 .....	3
§ 1.1 向量空间 .....	3
§ 1.2 欧氏空间 .....	6
第二章 曲线的局部理论 .....	14
§ 2.1 曲线的概念 .....	14
§ 2.2 平面曲线 .....	15
§ 2.3 $E^3$ 的曲线 .....	19
§ 2.4 曲线论基本定理 .....	24
第三章 曲面的局部理论 .....	31
§ 3.1 曲面的概念 .....	31
§ 3.2 曲面的第一基本形式 .....	38
§ 3.3 曲面的第二基本形式 .....	43
§ 3.4 法曲率与 Weingarten 变换 .....	47
§ 3.5 主曲率与 Gauss 曲率 .....	54
§ 3.6 曲面的一些例子 .....	59
第四章 标架与曲面论基本定理 .....	71
§ 4.1 活动标架 .....	71
§ 4.2 自然标架的运动方程 .....	74
§ 4.3 曲面的结构方程 .....	79
§ 4.4 曲面的存在惟一性定理 .....	82
§ 4.5 正交活动标架 .....	85
§ 4.6 曲面的结构方程(外微分法) .....	92
第五章 曲面的内蕴几何学 .....	105
§ 5.1 曲面的等距变换 .....	105
§ 5.2 曲面的协变微分 .....	110
§ 5.3 测地曲率与测地线 .....	115

§ 5.4	测地坐标系 .....	121
§ 5.5	Gauss-Bonnet 公式 .....	129
§ 5.6	曲面的 Laplace 算子* .....	133
§ 5.7	Riemann 度量* .....	141

## 第二部分 整体微分几何选讲

第六章	平面曲线的整体性质 .....	155
-----	-----------------	-----

§ 6.1	平面的闭曲线 .....	155
§ 6.2	平面的凸曲线 .....	160

第七章	曲面的若干整体性质 .....	165
-----	-----------------	-----

§ 7.1	曲面的整体描述 .....	165
§ 7.2	整体的 Gauss-Bonnet 公式 .....	169
§ 7.3	紧致曲面的 Gauss 映射 .....	176
§ 7.4	凸曲面 .....	181
§ 7.5	曲面的完备性 .....	191

第八章	常 Gauss 曲率曲面 .....	197
-----	--------------------	-----

§ 8.1	常正 Gauss 曲率曲面 .....	197
§ 8.2	常负 Gauss 曲率曲面与 Sine-Gordon 方程 .....	199
§ 8.3	Hilbert 定理 .....	201
§ 8.4	Bäcklund 变换 .....	204

第九章	常平均曲率曲面 .....	209
-----	---------------	-----

§ 9.1	Hopf 微分与 Hopf 定理 .....	209
§ 9.2	Alexsandrov 惟一性定理 .....	214
§ 9.3	附录:常平均曲率环面 .....	219

第十章	极小曲面 .....	222
-----	------------	-----

§ 10.1	极小图 .....	222
§ 10.2	极小曲面的 Weierstrass 表示 .....	229
§ 10.3	极小曲面的 Gauss 映射 .....	234
§ 10.4	面积的变分与稳定极小曲面 .....	241

索引	.....	248
----	-------	-----

# 第一部分

## 曲线与曲面的局部 微分几何





# 第一章 欧氏空间

## §1.1 向量空间

### 1. 向量空间

我们首先回顾有关向量空间的一些基本概念. 我们的讨论都是基于实数域  $\mathbf{R}$  的.

一个集合  $V$  称为实数域  $\mathbf{R}$  上的向量空间是指在  $V$  上定义了加法运算与数乘运算, 它们满足:

- (1)  $(xy)v = x(yv), \quad 1v = v;$
- (2)  $x(v + w) = xv + xw, \quad (x + y)v = xv + yv;$

这里  $x, y \in \mathbf{R}, \quad v, w \in V$ .

向量空间  $V$  如果有一组向量  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 使得  $V$  中的任何向量都可以表示为它们的线性组合且表示惟一, 则称  $V$  是  $n$  维向量空间,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  称为  $V$  的一组基.

一个简单的例子是  $n$  维数组空间

$$\mathbf{R}^n = \{v = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mid x^i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

它的加法和数乘运算分别为相应的分量运算. 任意一个  $n$  维向量空间  $V$ , 给定了一组基  $v_1, v_2, \dots, v_n$  后, 有对应

$$V \ni v = \sum_{i=1}^n x^i v_i \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n, \quad (1.1)$$

这个对应将  $V$  与  $\mathbf{R}^n$  等同.

向量空间  $V$  上的内积是一个双线性函数  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足:

- (1)  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle;$
- (2)  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , 且  $\langle v, v \rangle = 0$  当且仅当  $v = 0$ .

定义了内积的有限维向量空间称为欧氏向量空间, 记为  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $n$  维欧氏向量空间  $V$  的任意一组基, 可以经过 Schmidt 正交化, 得到一组标准正交基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 它满足

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$n$  维数组空间  $\mathbf{R}^n$  上, 可以定义内积如下: 对  $\mathbf{v} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $\mathbf{w} = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ ,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n.$$

在这个内积下  $\mathbf{R}^n$  是  $n$  维内积空间, 这时  $\mathbf{R}^n$  的 (自然的) 一组标准正交基为  $\{\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) : i = 1, 2, \dots, n\}$ .

显然, 类似 (1.1), 我们可以建立  $n$  维欧氏向量空间与  $\mathbf{R}^n$  间的等同.

下面我们只在  $\mathbf{R}^3$  中讨论. 为此记  $\mathbf{R}^3$  的标准正交基为

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

$\mathbf{R}^3$  的向量间除了加法、数乘、内积运算外, 还有外积运算. 对  $\mathbf{v} = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $\mathbf{w} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  的外积定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= (x^2 y^3 - x^3 y^2, -x^1 y^3 + x^3 y^1, x^1 y^2 - x^2 y^1) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

两个向量的外积仍是一个向量, 外积运算满足反交换律, 但不满足结合律<sup>1</sup>.

$\mathbf{R}^3$  的三个向量  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , 可以定义混合积

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 \rangle. \quad (1.3)$$

混合积的几何意义是三个向量张成的平行六面体的有向体积.

**性质 1.1** 设  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  是  $\mathbf{R}^3$  的四个向量,

$$(1) \quad \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_3;$$

(2) Lagrange 恒等式:

$$\langle \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_4 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \rangle - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle;$$

$$(3) \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

## 2. 向量分析

以后我们需要研究依赖于参数变化的向量, 对它们求微分是常用的办法.

<sup>1</sup> 为了与微分几何的发展相一致, 我们采用  $\langle \rangle$  和  $\wedge$  表示向量的内积和外积运算.

设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  均依赖于单参数  $t$ ，写成分量形式有

$$\mathbf{a}(t) = (a^1(t), a^2(t), a^3(t)), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{b}(t) = (b^1(t), b^2(t), b^3(t)), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{c}(t) = (c^1(t), c^2(t), c^3(t)). \quad (1.6)$$

向量值函数  $\mathbf{a}(t)$  的微商为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(t) = \left( \frac{da^1}{dt}, \frac{da^2}{dt}, \frac{da^3}{dt} \right). \quad (1.7)$$

设  $\lambda = \lambda(t)$  是数值函数，利用性质 1.1，读者可以立即验证以下诸微分公式：

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{a}) = \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{a} + \lambda\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right\rangle + \left\langle \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right\rangle, \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \right) + \left( \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \mathbf{c} \right) + \left( \mathbf{a}, \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right). \quad (1.11)$$

当向量值函数依赖于多个变量时，同样可以作偏导数或微分运算，也满足上述公式。

定义在  $\mathbf{R}^3$ （或它的一个区域）上的一个向量值函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

通常称为  $\mathbf{R}^3$  上的一个向量场， $\mathbf{R}^3$  上的函数有时也称作  $\mathbf{R}^3$  上的数量场。函数  $f$  的梯度是一个向量场

$$\mathbf{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

引进 Nabla 算子  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ，则函数的梯度可记为  $\mathbf{grad} f = \nabla f$ 。

向量场  $\mathbf{F}$  的散度定义为

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

向量场  $\mathbf{F}$  的旋度定义为

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

利用 Nabla 算子  $\nabla$ ，向量场的散度和旋度可以记为

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \langle \nabla, \mathbf{F} \rangle, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}.$$

关于旋度和散度的运算有如下公式:

1.  $\langle \nabla, (f\mathbf{F}_1 + g\mathbf{F}_2) \rangle = \langle \nabla, (f\mathbf{F}_1) \rangle + \langle \nabla, (g\mathbf{F}_2) \rangle$   
 $= f\langle \nabla, \mathbf{F}_1 \rangle + \langle \nabla f, \mathbf{F}_1 \rangle + g\langle \nabla, \mathbf{F}_2 \rangle + \langle \nabla g, \mathbf{F}_2 \rangle;$
2.  $\nabla \wedge (f\mathbf{F}_1 + g\mathbf{F}_2) = \nabla \wedge (f\mathbf{F}_1) + \nabla \wedge (g\mathbf{F}_2)$   
 $= \nabla f \wedge \mathbf{F}_1 + f\nabla \wedge \mathbf{F}_1 + \nabla g \wedge \mathbf{F}_2 + g\nabla \wedge \mathbf{F}_2.$

这里  $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$  是向量场， $f$ 、 $g$  是函数.

下述性质是容易验证的:

### 性质 1.2

- (1)  $\nabla \wedge (\nabla f) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$ ,
- (2)  $\langle \nabla, \nabla \wedge \mathbf{F} \rangle = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0.$

与向量场和 Nabla 算子相对应的概念是外微分形式和外微分算子，将在以后介绍.

## §1.2 欧氏空间

解析几何的基本思想是将欧氏空间的几何结构代数化，向量是实现这一目标的基本工具.

经典的三维欧氏空间  $E^3$  是由点、线、面组成的，它们满足欧氏几何的公理假设. 向量是空间中既有长度又有方向的量，一个直观的办法是用有向线段来表示向量. 例如  $P$ 、 $Q$  是空间的两个点， $\overrightarrow{PQ}$  表示从点  $P$  指向点  $Q$  的有向线段，其中  $P$  称为起点、 $Q$  称为终点，线段  $\overline{PQ}$  的长度为向量  $\overrightarrow{PQ}$  的长度. 如果另一个向量的表示为  $\overrightarrow{P'Q'}$ ，称它与向量  $\overrightarrow{PQ}$  相等是指：经过平行移动线段  $\overline{P'Q'}$ ，当点  $P'$  与点  $P$  重合时点  $Q'$  也与点  $Q$  重合. 显然，“向量相等”是一个等价关系. 因此我们只考虑向量的方向和长度，而不考虑向量的起点. 为方便起见我们也用  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  等表示向量，用  $|\mathbf{a}|$  表示向量的长度，其中长度为零的向量称为零向量，记为  $\mathbf{0}$ .

有向线段可以平移反映了欧氏空间的均齐性，正是有了平移，我们才可以不用考虑向量的起点而只考虑向量的方向和长度，可以定义向量间的各种运算<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> 今后，我们要把平移的概念推广到一般的曲面上. 另外，在第五章 §6 中我们也将讨论不同起点向量的不同含义.

下面我们简要回顾向量间的各种运算. 可以发现, 定义了诸运算后, 向量全体构成一个三维欧氏向量空间.

### 1. 向量的运算

#### 1) 向量的加法

给定向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和定义为: 任取代表向量  $\mathbf{a}$  的有向线段  $\overrightarrow{PQ}$ , 以  $\overrightarrow{PQ}$  的终点  $Q$  为起点, 取代表向量  $\mathbf{b}$  的有向线段  $\overrightarrow{QR}$ , 向量  $\overrightarrow{PR}$  表示向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和, 记为  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

上述法则称为向量加法的三角形法则. 向量加法具有性质

- (a) 交换律:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;
- (b) 结合律:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

#### 2) 向量的数乘

向量  $\mathbf{a}$  和实数  $\lambda$  相乘后仍然是一个向量, 记为  $\lambda\mathbf{a}$ , 其长度为  $\mathbf{a}$  长度的  $|\lambda|$  倍, 其指向当  $\lambda > 0$  时与  $\mathbf{a}$  相同, 当  $\lambda < 0$  时指向与  $\mathbf{a}$  相反, 当  $\lambda = 0$  规定  $\lambda\mathbf{a}$  是零向量.

向量的数乘满足

- (a) 结合律:  $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ ;
- (b) 分配律:  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ .

#### 3) 向量的内积

两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的内积是一个数, 记为  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ , 它定义为

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2).$$

由三角形的余弦定律可知

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

其中  $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$  表示向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角.

向量的内积满足

- (a) 交换律:  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ ;
- (b) 分配律:  $\langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \mu\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ .

读者可以自行验证, 定义了以上三种运算后, 向量全体构成一个三维欧氏向量空间.

#### 4) 向量的外积

以上我们通过用有向线段表示向量来定义向量间的运算, 一个自然的问题是: 两个向量张成平行四边形的有向面积如何表示?

如所知,  $E^3$  的两个不平行向量确定了一个平面, 而平面又可以由它的法向量来确定 (至多相差一个平移). 因此, 与有向线段的概念相类似, 我们可以用法向量来表示两个向量张成的平行四边形的有向面积, 这就是向量的外积.

两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的外积为一个新的向量, 记为  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ . 向量  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  的长度等于  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  张成平行四边形的面积,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  的指向规定为:  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  与  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  均垂直, 并且  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  构成右手系.

外积具有如下性质:

- (a) 反交换律:  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ ;
- (b) 分配律:  $\mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mu \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ .

以上我们回顾了  $E^3$  中向量的各种运算. 解析几何的手法就是在向量空间  $E^3$  引进坐标系, 用数组来表示向量, 以便更有效地进行向量间的各种运算.

## 2. 坐标和坐标变换

在欧氏空间  $E^3$  中取定一点  $O$  为原点, 并以  $O$  为起始点, 取三个线性无关的向量  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ,  $\{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  称为  $E^3$  (以  $O$  为原点) 的一个 (一般) 标架; 当  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  是相互正交的单位向量时,  $\{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  称为  $E^3$  的一个正交标架.

设  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是一个正交标架, 依定义可以知道

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

这里  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 符号.

任意向量  $\mathbf{a}$  关于上述标架有分解

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad (2.2)$$

其中  $a^i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 称为向量  $\mathbf{a}$  的坐标.

如果  $P$  是三维欧氏空间  $E^3$  中的一个点, 向量  $\overrightarrow{OP}$  的坐标是  $(x^1, x^2, x^3)$ , 即  $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i$ , 则我们把数组  $(x^1, x^2, x^3)$  称为点  $P$  的坐标, 向量  $\overrightarrow{OP}$  称为点  $P$  的位置向量. 显然取定坐标系后, 三维欧氏空间  $E^3$  与三维欧氏向量空间  $\mathbf{R}^3$  之间有一个一一对应, 将点  $P$  对应到它的坐标  $(x^1, x^2, x^3)$ . 在这个意义下, 有序数组  $(x^1, x^2, x^3)$  即表示了点  $P$ , 亦可看作它表示了位置向量  $\overrightarrow{OP}$ .



或者说, 取定正交标架后的三维欧氏空间  $E^3$  与三维欧氏向量空间  $\mathbf{R}^3$  等同. 而且, 在这个等同下,  $E^3$  中向量的加法、数乘、内积和外积运算的坐标表示就是  $\mathbf{R}^3$  相应的运算, 如上节所述.

现考虑  $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  是  $E^3$  的另一个正交标架, 它与原来的标架有如下关系:

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^3 c^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 t^j_i \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

记矩阵  $\mathbf{T} = (t^j_i)_{1 \leq i, j \leq 3}$ , 因为  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  与  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  均为正交标架, 所以  $\mathbf{T}$  是正交阵,  $\det \mathbf{T} = \pm 1$ . 这两个标架相差原点间的一个平移  $\overrightarrow{OO'}$  以及矩阵  $\mathbf{T}$  诱导的正交变换.

欧氏空间给了一个正交标架, 称为给了欧氏空间一个定向. 两个标架称为定向相同, 若它们间相差的正交变换的行列式为 1, 否则称它们定向相反. 显然, 定向相同是一个等价关系, 因此欧氏空间有且仅有两个定向. 例如:  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  和  $\{O; \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$  为同一定向,  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  和  $\{O; -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  定向相反. 通常, 将  $\mathbf{R}^3$  中由  $\{i, j, k\}$  决定的定向称为自然定向 (右手定向).

有了标架的变换关系后, 容易推出欧氏空间同一点在不同标架下的坐标间的变换关系. 设  $P \in E^3$ , 在新老两个坐标系的坐标分别为  $(y^1, y^2, y^3)$  与  $(x^1, x^2, x^3)$ , 即

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^3 y^i \mathbf{e}'_i, \quad (2.4)$$

那么由 (2.3) 式有

$$x^i = c^i + \sum_{j=1}^3 t^i_j y^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

### 3. 合同变换

在以后的章节中, 我们始终在  $E^3$  中固定一个正交标架, 使它成为 3 维欧氏向量空间.

$E^3$  中两点  $P = (x^1, x^2, x^3)$  与  $Q = (y^1, y^2, y^3)$  之间的距离定义为

$$d(P, Q) = \left\{ \sum_{i=1}^3 (y^i - x^i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

显然,  $P$ 、 $Q$  两点的距离等于向量  $\overrightarrow{PQ}$  的长度, 即

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

空间中点之间一对一的对应称为变换. 变换  $\mathcal{T}$  如果保持空间中任意两点的距离, 即对任意两点  $P$  和  $Q$ ,  $d(P, Q) = d(\mathcal{T}(P), \mathcal{T}(Q))$ , 则称  $\mathcal{T}$  为  $E^3$  中的合同变换, 或欧氏变换.

以下我们将求合同变换的一般表达式. 设

$$O(3) = \{ \mathbf{T} \text{ 是 } 3 \times 3 \text{ 实矩阵} \mid \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}_3 \} \quad (2.7)$$

是 3 阶正交矩阵全体, 对  $\mathbf{T} \in O(3)$  及  $P_0 \in E^3$ , 下述变换

$$\mathcal{T}(P) = P\mathbf{T} + P_0, \quad \forall P \in E^3 \quad (2.8)$$

是平移  $P_0$  与正交变换  $\mathbf{T}$  的复合, 容易证明这类变换是合同变换.

**定理 2.1** 设  $\mathcal{T}$  是  $E^3$  合同变换, 则存在  $\mathbf{T} \in O(3)$  以及  $P \in E^3$  使得

$$\mathcal{T}(X) = X\mathbf{T} + P, \quad \forall X = (x^1, x^2, x^3) \in E^3.$$

**证明** 经过一个适当的平移我们不妨设变换保持原点不动, 即  $\mathcal{T}(O) = O$ .

取  $X \neq O \in E^3$ ,  $t \in (0, 1)$ , 依合同变换的定义有

$$d(O, tX) = d(\mathcal{T}(O), \mathcal{T}(tX)) = d(O, \mathcal{T}(tX)), \quad (2.9)$$

$$d(tX, X) = d(\mathcal{T}(tX), \mathcal{T}(X)), \quad (2.10)$$

上两式相加, 有

$$\begin{aligned} d(O, \mathcal{T}(X)) &= d(O, X) = d(O, tX) + d(tX, X) \\ &= d(O, \mathcal{T}(tX)) + d(\mathcal{T}(tX), \mathcal{T}(X)), \end{aligned}$$

所以由三角不等式知  $\mathcal{T}(tX)$  位于  $O$  和  $\mathcal{T}(X)$  的连线之上. 因此存在  $s \in (0, 1)$  使得  $\mathcal{T}(tX) = s\mathcal{T}(X)$ . 但由

$$\begin{aligned} td(O, X) &= d(O, tX) = d(O, \mathcal{T}(tX)) = d(O, s\mathcal{T}(X)) \\ &= sd(O, \mathcal{T}(X)) = sd(O, X), \end{aligned}$$



可知  $s = t$ .

记  $\mathcal{T}(X) = (t^1(X), t^2(X), t^3(X))$ , 对  $\mathcal{T}(tX) = t\mathcal{T}(X)$  的  $t$  求微商有

$$t^i(X) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial t^i}{\partial x^j}(tX) x^j. \quad i = 1, 2, 3.$$

令  $t \rightarrow 0$ , 就得到

$$t^i(X) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0) x^j, \quad (2.11)$$

即

$$\mathcal{T}(X) = X\mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \left( \frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0) \right). \quad (2.12)$$

因此  $\mathcal{T}$  是一个线性变换. 由于  $\mathcal{T}$  保持距离,  $\mathcal{T}$  亦保持向量的内积, 所以  $\mathbf{T} \in O(3)$ . 证毕.

为使读者对微分几何的基本手法有一个初步的了解, 我们亦给出如下第二个证明, 它要求变换  $\mathcal{T}$  是  $C^2$  的.

**证明二** 设合同变换  $\mathcal{T}$  将点  $(x^1, x^2, x^3)$  变为点  $(y^1, y^2, y^3)$ , 其中  $y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). 由  $\mathcal{T}$  保持距离, 我们知道

$$\sum_{i=1}^3 (y^i - \bar{y}^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i - \bar{x}^i)^2. \quad (2.13)$$

将  $\{\bar{x}^i\}$  固定, 上式两边对  $x^j$  求偏导数, 有

$$\sum_{i=1}^3 (y^i - \bar{y}^i) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = (x^j - \bar{x}^j). \quad (2.14)$$

再对  $x^k$  求导, 就有

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^3 (y^i - \bar{y}^i) \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} = \delta_{jk}. \quad (2.15)$$

在 (2.15) 式中令  $x^i = \bar{x}^i$ , 则有  $y^i = \bar{y}^i$   $i = 1, 2, 3$ . (2.15) 式就成为

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \delta_{jk}. \quad (2.16)$$

由上式可知变换  $\mathcal{T}$  的 Jacobi 矩阵非退化. 为证明  $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$  均为常数, (2.16) 式再对  $x^l$  求导一次, 有

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} + \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^l} \right) = 0. \quad (2.17)$$

将上式的指标  $(j, k, l)$  轮换, 相应得到

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^l \partial x^j} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} + \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} \right) = 0, \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l} + \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^l \partial x^k} \right) = 0. \quad (2.19)$$

(2.18) 与 (2.19) 两式相加, 再减去 (2.17) 式, 即得

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^l} = 0.$$

由于矩阵  $\left( \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \right)$  非退化, 所以,

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

这说明  $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$  是常数, 不妨记为  $\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = t_j^i$ . 由此得到变换  $\mathcal{T}$  的一般表达式为

$$y^i = \sum_{j=1}^3 t_j^i x^j + b^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

而且由 (2.16) 式可知  $\mathbf{T} = (t_j^i)$  是正交阵, 这就完成了定理证明.

从几何的角度来看, 欧氏变换是将欧氏空间的点做下述三种变换: 平移、旋转、镜面反射.

可以验证, 合同变换

$$X \rightarrow X\mathbf{T} + P, \quad \mathbf{T} \in O(3), \quad P \in E^3 \quad (2.21)$$

的全体构成一个群, 称为三维合同变换群或三维欧氏变换群. 当  $\det \mathbf{T} = 1$  时, 对应的合同变换称为  $E^3$  的一个刚体运动; 当  $\det \mathbf{T} = -1$  时, 对应的变换称为反向刚体运动. 直观地讲, 刚体运动排除了反射变换的情形, 或者说刚体运动是平移和旋转的复合.

#### 4. 正交标架与合同变换群

三维欧氏空间  $E^3$  的一个正交标架  $\{X; e_1, e_2, e_3\}$  是指以  $E^3$  的一个点  $X$  为原点以及以点  $X$  为起点的三个两两正交单位向量  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ . 我们以  $\mathcal{F}$  表示  $E^3$  的正交标架的全体.

对  $E^3$  的一个正交标架做合同变换, 就得到了  $E^3$  的另一个正交标架. 反之, 给定  $E^3$  的两个正交标架  $\{X; e_1, e_2, e_3\}$  和  $\{\bar{X}; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ , 我们首先可以通过平移将  $X$  点移到  $\bar{X}$  点, 然后通过适当的旋转或反射使  $e_1, e_2, e_3$  分别与  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  重合. 也就是说, 我们可以通过一个  $E^3$  的运动将标架  $\{X; e_1, e_2, e_3\}$  变为  $\{\bar{X}; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ . 显然, 这样的运动是惟一的.

由此, 我们得到一个重要结论:  $E^3$  的标架全体  $\mathcal{F}$  与  $E^3$  的欧氏变换群一一对应.

#### 习 题 一

1. 设  $U$  是  $E^3$  的开集,  $\mathcal{T}$  是  $U \rightarrow U$  保持距离的变换, 证明  $\mathcal{T}$  是合同变换.
2. 设  $\mathbf{a}(t)$  是向量值函数, 证明:
  - (1)  $|\mathbf{a}| = \text{常数}$  当且仅当  $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{a}'(t) \rangle = 0$ ;
  - (2)  $\mathbf{a}(t)$  的方向不变当且仅当  $\mathbf{a}(t) \wedge \mathbf{a}'(t) = 0$ .
3. 验证性质 1.1 和性质 1.2.
4. 设  $\{O; e_1, e_2, e_3\}$  是一个正交标架,  $\sigma$  是  $\{1, 2, 3\}$  的一个置换, 证明:
  - (1)  $\{O; e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\}$  是一个正交标架;
  - (2)  $\{O; e_1, e_2, e_3\}$  与  $\{O; e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\}$  定向相同当且仅当  $\sigma$  是偶置换.
5. 设  $\mathcal{T}$  是  $E^3$  的一个合同变换,  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{w}$  是  $E^3$  的两个向量, 求  $(\mathcal{T}\mathbf{v}) \wedge (\mathcal{T}\mathbf{w})$  与  $\mathcal{T}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$  的关系.

## 第二章 曲线的局部理论

### §2.1 曲线的概念

对函数  $y = f(x)$  而言, 它的图形  $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}$  就是在欧氏平面  $E^2$  上曲线的简单例子. 更一般些, 方程  $F(x, y) = 0$  可以决定  $xy$  平面的一条曲线. 例如方程  $x^2 + y^2 = r^2$  所决定的是半径为  $r$  的圆, 它可以写成简单的形式  $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ , 分别表示上下两个半圆. 但方程  $F(x, y) = 0$  一般来说不容易化成显式表示  $y = f(x)$ .

依照运动学的观点, 将平面曲线理解为一个质点  $P$  在平面上的运动. 在时刻  $t$ , 质点的位置是  $(x(t), y(t))$ , 这样我们可以定义映射

$$t \left( t \in (a, b) \subset \mathbf{R} \right) \rightarrow (x(t), y(t)) \in E^2 \quad (1.1)$$

为平面的一条曲线, 记为向量形式

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in (a, b), \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中,  $\mathbf{i} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)$  是  $E^2$  的自然标架. 同样, 三维欧氏空间  $E^3$  的曲线为映射

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in (a, b). \end{aligned} \quad (1.3)$$

如果对映射  $\mathbf{r}$  的分量不加限制, 或者仅加上连续的条件, 其映射像  $\mathbf{r}(t)$  可能非常复杂, 也不具备很好的性质. 为了保证曲线有良好的性质, 我们一般要求曲线具有正则性.

**定义 1.1** 曲线  $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow E^2$  ( $E^3$ ) 称为正则曲线, 如果:

(1) 曲线的每一个分量都是  $C^\infty$  函数,

(2)  $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| > 0$ ,  $\forall t \in (a, b)$  成立.

**例 1.2** 函数  $y = f(x)$  表示的曲线可以写成参数形式  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$  , 其中  $f$  是  $C^\infty$  函数, 这是一条正则曲线.

**例 1.3** 设  $C = \{(x, y) \in E^2 : F(x, y) = 0\}$  ,  $P = (x_0, y_0) \in C$  且  $F_y(P) \neq 0$  , 由隐函数定理, 在  $P$  的一个小邻域内,  $F(x, y) = 0$  有显式表示  $y = f(x)$ . 所以在  $P$  的小邻域内  $C$  是一条曲线, 它有参数表示  $(t, f(t))$ .

**例 1.4** 曲线  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $t \in (0, 4\pi)$  和曲线  $\mathbf{r}(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t)$ ,  $t \in (0, 4\pi)$  , 尽管在平面上的像是一样的, 但它们不是同一条曲线, 因为它们的长度不同.

## §2.2 平面曲线

考虑平面正则曲线

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in (a, b). \quad (2.1)$$

对映射  $\mathbf{r}$  求导, 就有  $\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (x'(t), y'(t))$ ,  $\mathbf{r}'(t)$  是曲线的速度向量, 称为曲线  $\mathbf{r}$  的切向量. 由曲线的正则性条件可知  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  , 它指向  $t$  的增加方向. 切向量的长度  $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} > 0$ .

现在我们来计算曲线的长度——弧长. 设  $[c, d] \subset (a, b)$  , 曲线  $\mathbf{r}(t)$  ( $c < t < d$ ) 的弧长为

$$\int_c^d |\mathbf{r}'(t)| dt, \quad (2.2)$$

它是动点在时间间隔  $t = c$  到  $t = d$  之间移动的距离. 固定初始时间  $c$  , 以时间  $t$  代替  $d$  , 我们就得到从  $c$  到  $t$  动点移动的距离

$$s(t) = \int_c^t |\mathbf{r}'(u)| du. \quad (2.3)$$

$s(t)$  是  $t$  的函数. 反之, 我们考虑能否将  $t$  表示成  $s$  的函数. 从直观理解, 当动点中途不停顿时, 距离  $s$  可以决定时间  $t$ . 实际上, 由于  $\mathbf{r}$  是正则曲线, 对所有的  $t$  ,  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  , 由 (2.3) 式,  $\frac{ds}{dt}(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0$  , 所以  $s$  是  $t$  的严格单调增函数. 这时  $t$  可以表为  $s$  的函数  $t = t(s)$ . 代入 (2.1) 式就有曲线  $\mathbf{r}$  关于新参数  $s$  的表示

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(x(s), y(s)) = \mathbf{r}(x(t(s)), y(t(s))). \quad (2.4)$$

通常人们将  $s$  称为曲线的弧长参数. 对于正则曲线  $\mathbf{r}$ , 我们总可以取它的弧长作为参数来表示. 在弧长参数下, 我们有

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = 1, \quad (2.5)$$

即曲线  $\mathbf{r}(s)$  的切向量长度为常值 1. 我们用 “ $\cdot$ ” 表示对参数  $s$  求导, 比如

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)). \quad (2.6)$$

将单位向量  $\dot{\mathbf{r}}(s)$  记为  $\mathbf{t}(s)$ . 从几何学的角度来讲,  $\mathbf{t}(s_0)$  是曲线  $\mathbf{r}(s)$  在点  $s = s_0$  的单位切向量. 曲线  $\mathbf{r}(s)$  在一点的切线方程为

$$\begin{cases} x(u) = x(s_0) + \dot{x}(s_0)(u - s_0), \\ y(u) = y(s_0) + \dot{y}(s_0)(u - s_0). \end{cases} \quad (2.7)$$

如果在 (2.7) 中将参数  $u$  换成  $s$ , 切线方程 (2.7) 所确定的直线就是曲线  $\mathbf{r}$  在  $s = s_0$  点的一阶近似.

注意到  $\mathbf{t}(s)$  是以  $(x(s), y(s))$  为起点的一个单位向量, 且与曲线  $\mathbf{r}$  相切. 与  $\mathbf{t}(s)$  垂直的向量称为曲线  $\mathbf{r}$  在点  $(x(s), y(s))$  的法向量. 选取一个单位法向量  $\mathbf{n}(s)$  与  $\mathbf{t}(s)$  垂直,  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  构成正交坐标系, 且  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  与  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  定向相同 (即  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  是右手系). 我们称  $\mathbf{n}(s)$  是曲线  $\mathbf{r}(s)$  在点  $(x(s), y(s))$  的单位正法向量, 它由  $\mathbf{t}(s)$  惟一确定.

**例 2.1** 研究半径为  $a$  的圆  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ .

因为

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du = at, \quad (2.8)$$

所以曲线的弧长参数表示为

$$\mathbf{r}(s) = \left( a \cos \frac{s}{a}, a \sin \frac{s}{a} \right). \quad (2.9)$$

因此曲线的单位切向量和单位正法向量为

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s) = \left( -\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a} \right), \\ \mathbf{n}(s) = \left( -\cos \frac{s}{a}, -\sin \frac{s}{a} \right). \end{cases} \quad (2.10)$$



对  $\mathbf{t}(s)$  和  $\mathbf{n}(s)$  求导, 我们有如下关系

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{1}{a}\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -\frac{1}{a}\mathbf{t}(s). \end{cases} \quad (2.11)$$

一般地, 沿曲线  $\mathbf{r}(s)$ , 有单位切向量  $\mathbf{t}(s)$  和单位法向量  $\mathbf{n}(s)$ .  $\{\mathbf{r}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  是一个以  $\mathbf{r}(s)$  为原点的正交标架. 这时候曲线  $\mathbf{r}(s)$  上任何一点都有一个这样的标架, 我们称  $\{\mathbf{r}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  为沿曲线  $\mathbf{r}$  的 Frenet 标架, 见图 2.1.

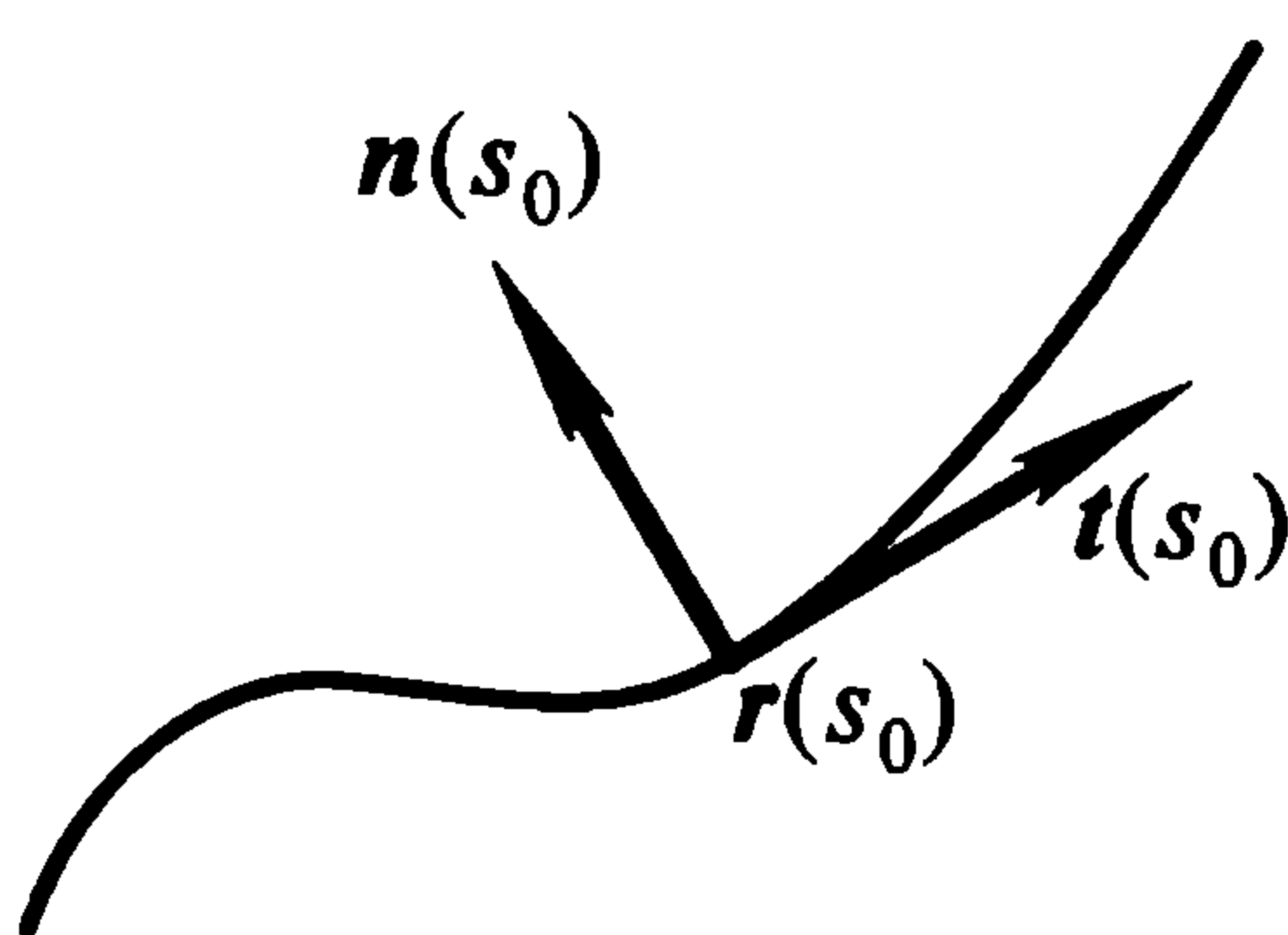


图 2.1

标架随参数  $s$  的变化能否反映曲线的弯曲情况呢? 我们类似例 2.1, 有如下推导:

由于  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ ,  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ ,  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ . 将  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$  对  $s$  求导就有  $\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle = 0$ , 即  $\dot{\mathbf{t}} \parallel \mathbf{n}$ . 设  $\dot{\mathbf{t}}(s)$  是  $\mathbf{n}(s)$  的  $\kappa(s)$  倍, 即  $\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ . 同样我们有  $\dot{\mathbf{n}}(s) \parallel \mathbf{t}(s)$ . 对  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$  求导就有  $\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}} \rangle = 0$ , 将  $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$  代入就得到  $\dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$ . 所以

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \end{cases} \quad (2.12)$$

或者记为

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

由上式确定的一个函数  $\kappa(s)$  称为曲线  $\mathbf{r}(s)$  的曲率.

下面我们先看一些简单的例子.

**例 2.2** 曲率为常数的曲线:

(1)  $\kappa(s) \equiv 0 \iff \mathbf{r}(s)$  是直线;

(2)  $\kappa(s) \equiv \text{常数 } a \neq 0 \iff \mathbf{r}(s)$  是半径为  $\left|\frac{1}{a}\right|$  的圆.

**证明** (1) 由 (2.12) 式,  $\kappa(s) \equiv 0$  等价于单位切向量  $\mathbf{t}$  是常向量, 对  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$  积分就知道  $\kappa(s) \equiv 0$  等价于  $\mathbf{r}$  是直线.

(2) 由例 2.1 知圆的曲率是常数. 反之, 因为半径为  $\frac{1}{a}$  的圆有如下性质:  $\mathbf{r}(s) + \frac{1}{a}\mathbf{n}(s)$  是圆心. 因此在假设条件下对  $\mathbf{p}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{a}\mathbf{n}(s)$  求导立即知道  $\mathbf{p}$  是常向量  $\mathbf{p}_0$ , 所以  $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}_0|^2 = \left|\frac{1}{a}\right|^2$ , 这意味着  $\mathbf{r}$  是以  $\mathbf{p}_0$  为圆心、半径为  $\left|\frac{1}{a}\right|$  的圆.

从以上例子可以看出, 曲率反映了曲线的弯曲程度. 更详细一点, 将曲线在一点  $s = s_0$  做 Taylor 展开

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0) + \dot{\mathbf{r}}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(s_0)(s - s_0)^2 + \cdots,$$

将 (2.12) 式代入, 有

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0) + \mathbf{t}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0)(s - s_0)^2 + \cdots. \quad (2.14)$$

可以发现曲率  $\kappa$  出现在曲线的二阶近似项中.

曲率  $\kappa(s)$  的几何意义可以按如下方式进一步理解. 在曲线  $\mathbf{r}$  的任一点  $\mathbf{r}(s)$ , 有一个单位法向量  $\mathbf{n}(s)$ , 将  $\mathbf{n}(s)$  的起点平移到平面的原点,  $\mathbf{n}(s)$  的终点就落到单位圆周  $S^1$  上, 这样就定义了一个映射 ( Gauss 映射):

$$\begin{aligned} g: \mathbf{r} &\longrightarrow S^1 \\ s &\longrightarrow \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

现在我们来考察  $s$  变到  $s + \Delta s$  时 Gauss 映射的变化. 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s + \Delta s) &= \mathbf{n}(s) + \dot{\mathbf{n}}(s)\Delta s + \cdots \\ &= \mathbf{n}(s) - \kappa(s)\mathbf{t}(s)\Delta s + \cdots, \end{aligned}$$

所以, 当  $s$  变化时,  $\mathbf{r}(s)$  的速度是  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$ , 而  $\mathbf{n}(s)$  在  $S^1$  上转动的速度是  $|\kappa(s)|$ , 且当  $\kappa < 0$  时  $\mathbf{n}(s)$  沿顺时针方向转动,  $\kappa > 0$  时  $\mathbf{n}(s)$  沿逆时针方向转动, 见图 2.2.



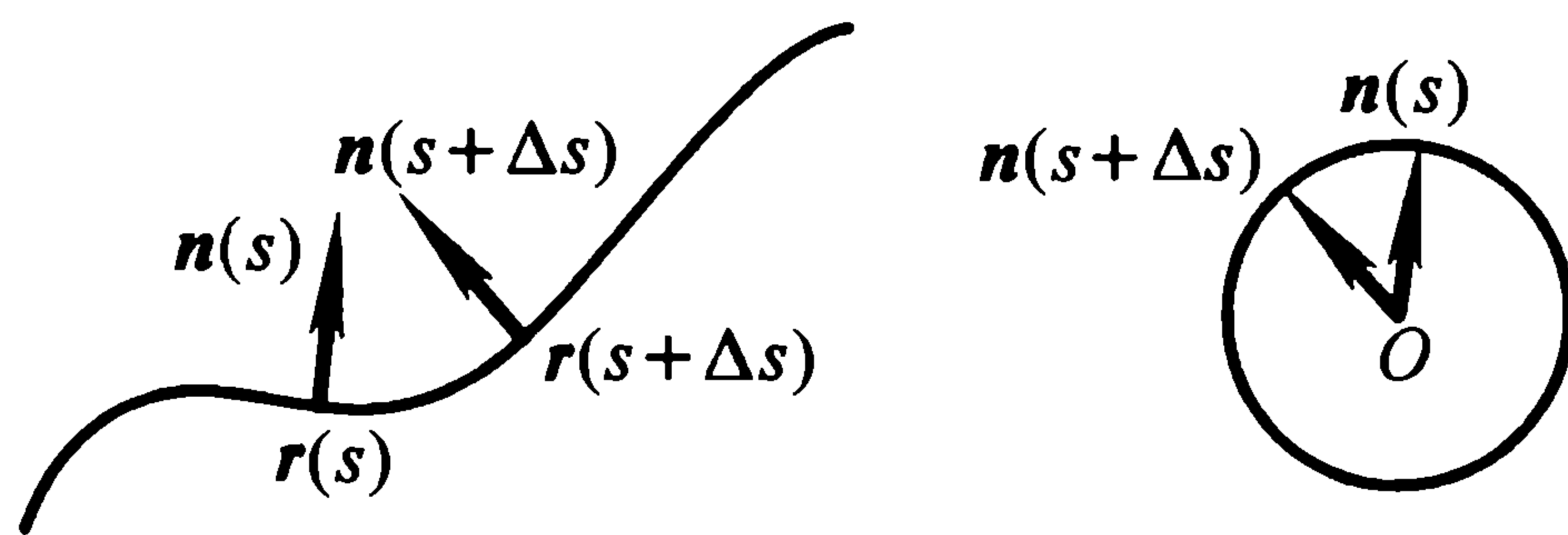


图 2.2

对曲率  $k$  的符号有迷惑的读者, 可以观察圆  $\mathbf{r}(s) = (\cos(-s), \sin(-s))$ , 它的弧长参数  $s$  指向顺时针方向, 它的曲率为  $-1$ ; 或者考查下述例子中曲率的符号.

**例 2.3** 计算曲线  $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$  的曲率.

此时有

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \cos^2 t}.$$

因此

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = (1 + \cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} (1, \cos t).$$

$\mathbf{n}$  为  $\mathbf{t}$  逆时针转  $90^\circ$ , 即

$$\mathbf{n} = (1 + \cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} (-\cos t, 1).$$

代入  $\kappa \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds}$ , 计算可得

$$\kappa(t) = -\sin t (1 + \cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}.$$

## §2.3 $E^3$ 的曲线

设  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in (a, b)$  是三维欧氏空间  $E^3$  的一条正则曲线. 由于  $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ , 可取  $\mathbf{r}$  的弧长参数  $s$ ,

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du,$$

将  $\mathbf{r}$  表示为弧长参数曲线

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad (3.1)$$

此时  $\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$  是  $\mathbf{r}$  的单位切向量. 与  $\mathbf{t}(s)$  垂直的向量称为曲线在该点的法向量.

容易发现, 空间曲线  $\mathbf{r}$  在一点的法向量很多, 实际上, 法向量全体构成过这点并与  $\mathbf{t}$  垂直的平面 (称为曲线  $\mathbf{r}$  在该点的法平面), 与平面曲线的情形有所不同. 这时对  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$  求导知  $\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle = 0$ , 即当  $\dot{\mathbf{t}}(s) \neq \mathbf{0}$  时它是  $\mathbf{r}$  的一个法向量. 我们称  $\dot{\mathbf{t}}(s)$  为曲线  $\mathbf{r}(s)$  的曲率向量. 记

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (3.2)$$

我们称它为曲线  $\mathbf{r}$  的曲率. 当  $\kappa(s) > 0$  时, 由  $\dot{\mathbf{t}}(s)$  决定的一个单位向量

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \dot{\mathbf{t}}(s) \quad (3.3)$$

与  $\dot{\mathbf{t}}$  同向. 注意当  $\kappa(s) = 0$  时  $\mathbf{n}(s)$  无法惟一确定.

下面我们设  $\kappa(s) > 0$ . 这时称  $\mathbf{n}$  是曲线  $\mathbf{r}$  的主法向量.  $\mathbf{t}(s)$  和  $\mathbf{n}(s)$  是以  $\mathbf{r}(s)$  为起点的相互正交的单位向量, 令

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s), \quad (3.4)$$

$\mathbf{b}(s)$  称为曲线  $\mathbf{r}$  的副法向量. 这样, 沿曲线  $\mathbf{r}$  就有一个正交标架

$$\{\mathbf{r}(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}, \quad (3.5)$$

称为曲线的 Frenet 标架, 它与  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  定向相同. 我们把 Frenet 标架的三根坐标轴分别称为曲线的切线、主法线和副法线. 三个坐标平面分别称为曲线在该点的法平面 (以  $\mathbf{t}$  为法向量)、密切平面 (以  $\mathbf{b}$  为法向量) 和从切平面 (以  $\mathbf{n}$  为法向量).

下面我们来求 Frenet 标架随弧长参数  $s$  的变化规律, 即 Frenet 标架的运动方程. 已知  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  都是单位向量, 所以  $\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \rangle = \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{b} \rangle = 0$ , 且  $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$ . 对  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$  求导, 有

$$\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle = -\langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n} \rangle = -\kappa. \quad (3.6)$$

设

$$\tau = \langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle, \quad (3.7)$$

由于  $\{t, n, b\}$  是以  $r$  为原点的一个正交标架, 由 (3.6), (3.7) 以及  $\langle \dot{n}, n \rangle = 0$  知

$$\dot{n} = -\kappa t + \tau b. \quad (3.8)$$

而由  $b = t \wedge n$  可以得到

$$\dot{b} = \dot{t} \wedge n + t \wedge \dot{n} = t \wedge (-\kappa t + \tau b) = -\tau n. \quad (3.9)$$

这样我们便得到如下 Frenet 公式

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = \kappa(s)n(s), \\ \dot{n}(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s), \\ \dot{b}(s) = -\tau(s)n(s). \end{cases} \quad (3.10)$$

或者写成矩阵形式

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

其中函数  $\tau$  称为曲线  $r$  的 挠率.

同平面曲线一样, 空间曲线的曲率  $\kappa$  反映了曲线的弯曲程度. 为理解挠率  $\tau$  的意义, 我们考虑一种特殊情形, 曲线  $r$  落在  $E^3$  的一张平面  $\Pi$  上.

设  $a$  是  $\Pi$  的单位法向量, 则  $r$  满足方程 ( $s_0$  固定)

$$\langle r(s) - r(s_0), a \rangle = 0. \quad (3.12)$$

对上述方程求导就有  $\langle t, a \rangle = 0$ , 继续求导得到  $\langle \kappa n, a \rangle = 0$ . 假设  $\kappa(s) \neq 0$ , 就有  $\langle n, a \rangle = 0$ . 再求导一次就得到

$$\langle -\kappa t + \tau b, a \rangle = 0, \quad (3.13)$$

因此  $\tau \langle b, a \rangle = 0$ . 由  $a$  和  $t$ 、 $n$  垂直知  $a$  与  $b$  平行, 即  $b$  是常向量. 所以  $\tau \equiv 0$ .

反之, 若  $\tau \equiv 0$ , 由 Frenet 公式 (3.10),  $\dot{\mathbf{b}} \equiv 0$ , 即  $\mathbf{b}$  是常向量. 由  $\frac{d}{ds}\langle \mathbf{r}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = 0$  知  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{b} \rangle = \text{常数}$ . 因此 (3.12) 成立. 综上所述, 我们有

**定理 3.1** 设空间曲线  $\mathbf{r}$  的曲率  $\kappa > 0$ , 则  $\mathbf{r}$  落在某个平面上的充要条件是  $\tau \equiv 0$ .

我们亦可从以下简单的例子中看出挠率  $\tau$  的意义.

**例 3.2** 求圆柱螺旋线  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) (a > 0)$  的曲率和挠率.

曲线的速度  $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , 因此

$$s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

记  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , 曲线的弧长参数表示为

$$\mathbf{r}(s) = \left( a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c} s \right).$$

直接计算, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \left( -\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right), \\ \dot{\mathbf{t}}(s) &= \left( -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right), \\ \kappa(s) &= |\dot{\mathbf{t}}(s)| = \frac{a}{c^2}, \\ \mathbf{n}(s) &= \left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right), \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \left( \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right), \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= \left( \frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

所以

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

由此我们知道, 圆柱螺旋线的曲率和挠率都是常数, 它的形状见图 2.3.

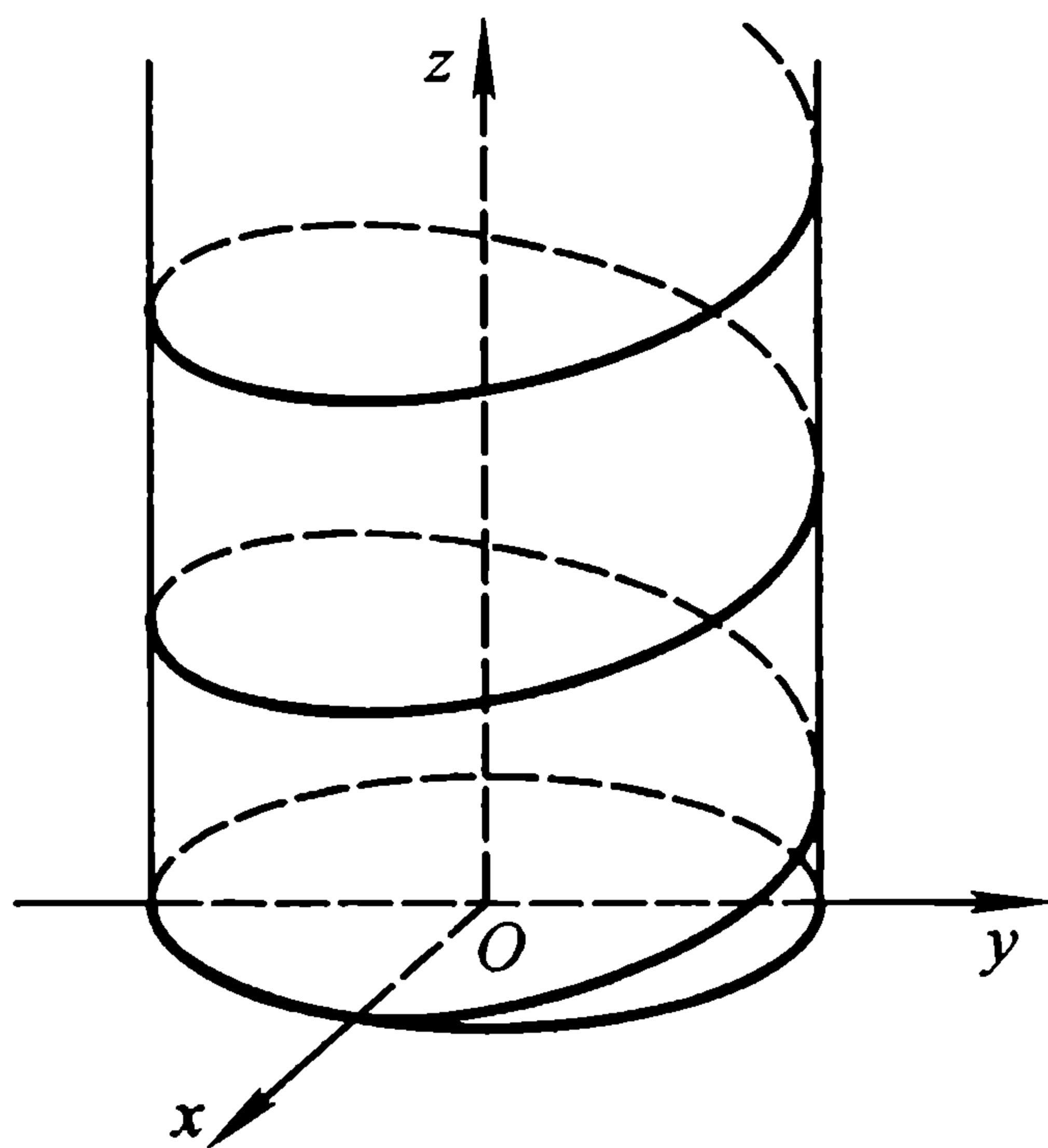


图 2.3

最后我们从曲线在一点的渐近展开, 了解曲线曲率、挠率与曲线几何的关系.

设  $\mathbf{r}(s_0)$  是弧长参数曲线  $\mathbf{r}$  上的一点, 不妨取  $s_0 = 0$ . 在该点处曲线有三阶渐近展开

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + s\dot{\mathbf{r}}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{\mathbf{r}}(0) + \frac{s^3}{6}\dddot{\mathbf{r}}(0) + \boldsymbol{\varepsilon}(s), \quad (3.14)$$

这里  $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$  是比  $s^3$  更高阶的无穷小量. 利用 Frenet 公式, 有

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{t}(0), \quad \ddot{\mathbf{r}}(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0),$$

$$\dddot{\mathbf{r}}(0) = \frac{d}{ds}(\kappa\mathbf{n})(0) = (\dot{\kappa}\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} + \kappa\tau\mathbf{b})(0).$$

所以

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\dot{\kappa} s^3}{6}\right)\mathbf{n} + \frac{\kappa\tau s^3}{6}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}(s). \quad (3.15)$$

将 Frenet 标架  $\{\mathbf{r}; \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}(0)$  取为  $E^3$  的标准正交标架  $\{\mathbf{o}; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , 则  $\mathbf{r}(s)$  的分量分别为

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + \varepsilon_x, \\ y(s) &= \frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\dot{\kappa}}{6}s^3 + \varepsilon_y, \\ z(s) &= \frac{\kappa\tau}{6}s^3 + \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (3.16)$$

这里  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  是  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的分量. 图 2.4 是当  $s$  充分小时, 曲线  $\mathbf{r}(s)$  在三个坐标平面的投影.

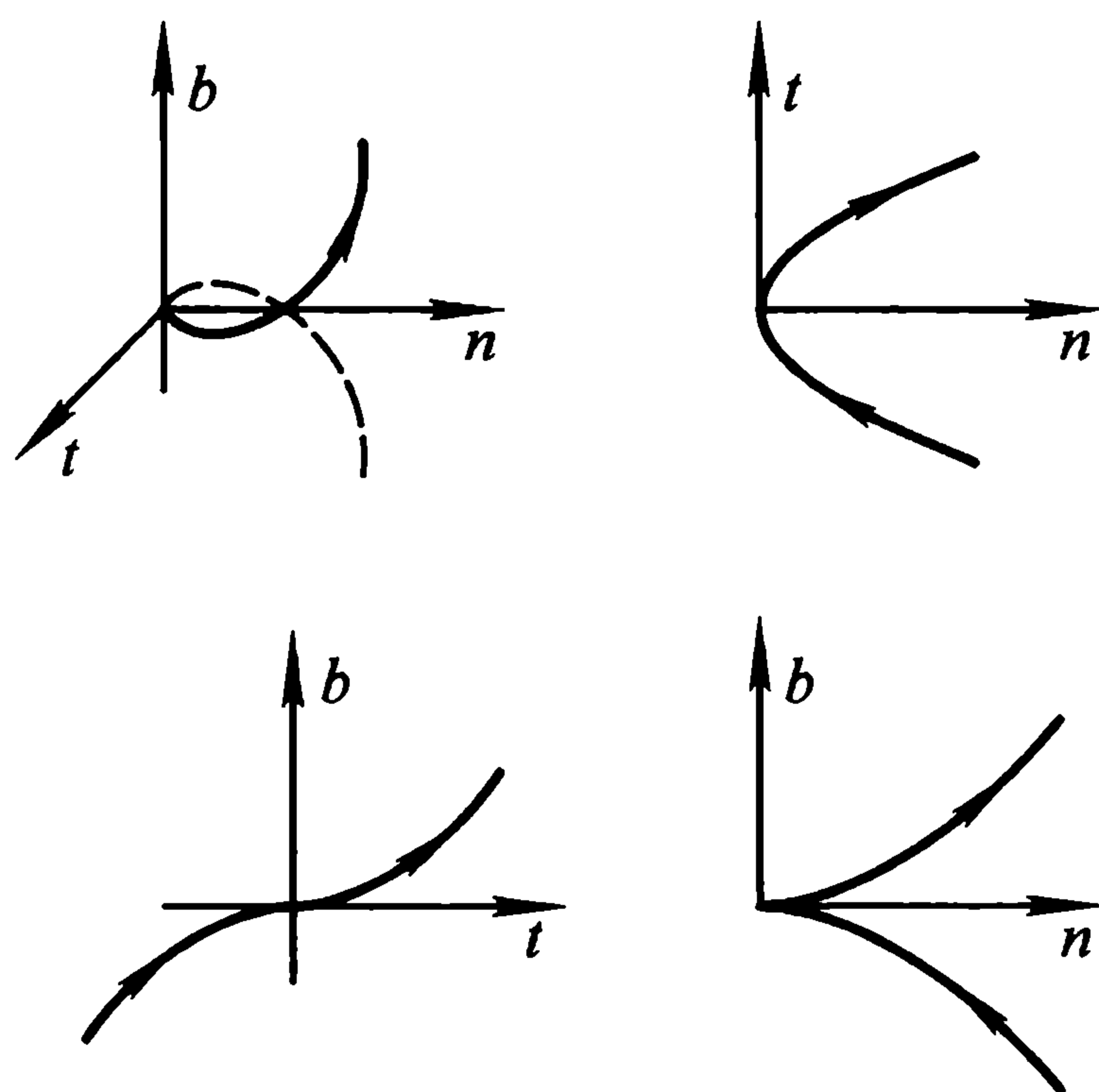


图 2.4

可以看出, 当  $\tau(0) > 0$  时,  $z$  随着  $s$  的增加而增加, 曲线沿正向穿越  $r(0)$  点的密切平面; 当  $\tau(0) < 0$  时,  $z$  随着  $s$  的增加而减少, 曲线沿反向穿越  $r(0)$  点的密切平面.

## §2.4 曲线论基本定理

设  $r(t), t \in (a, b)$  是  $E^3$  的一条正则曲线,  $t = t(u), u \in (\alpha, \beta)$  是参数变换,  $\frac{dt}{du} \neq 0$ . 当  $\frac{dt}{du} > 0$  时, 我们称参数变换  $t = t(u)$  是保持定向的, 或者称  $u$  与  $t$  是曲线  $r$  的同定向参数, 而且自然地把曲线  $r(t)$  和  $r(u) = r(t(u))$  看成同一条曲线. 容易发现, 在曲线  $r$  的所有同定向参数中, 使曲线速度为 1 的参数是惟一的, 即弧长参数  $s$  (至多相差一个曲线上的位移). 因此由上一节可以看出, 曲线的曲率和挠率都是曲线自身决定的, 而与容许参数选取无关. 同样,  $E^3$  的刚体运动不改变曲线的弧长、曲率和挠率.

**性质 4.1** 曲线的弧长、曲率和挠率在刚体运动下不变.

**证明** 设  $\mathcal{T}(P) = PT + P_0$  ( $T \in O(3)$ ,  $P_0 \in E^3$ ) 是  $E^3$  的一个刚体运动,  $\det T = 1$ .  $r(s)$  是一条弧长参数曲线,  $\tilde{r}(s) = \mathcal{T} \circ r$ .

由于  $\mathcal{T}$  保持距离,  $s$  也是  $\tilde{r}$  的弧长参数. 关于曲线  $\tilde{r}$  的 Frenet 标架我们有

$$\tilde{t} = \frac{d}{ds} \tilde{r} = \frac{dr}{ds} T = tT, \quad \frac{d\tilde{t}}{ds} = \frac{dt}{ds} T.$$

因此  $\tilde{t} = tT$ 、 $\tilde{n} = nT$ 、 $\tilde{\kappa} = \kappa$ . 由于  $\det T = 1$ ,

$$\tilde{b} = \tilde{t} \wedge \tilde{n} = (tT) \wedge (nT) = (t \wedge n)T,$$

所以  $\tilde{b} = bT$ . 由此容易推出  $\tilde{\tau} = \tau$ . 证毕.

性质 4.1 是说, 曲线的曲率和挠率是欧氏运动的不变量; 下面两个定理表明, 在相差一个刚体运动下, 这两个欧氏不变量完全决定曲线.

**定理 4.2** 设  $r_1(s)$  和  $r_2(s)$  是  $E^3$  的两条弧长参数曲线, 定义在同一个参数区间  $(a, b)$  上. 设  $\kappa_1(s) = \kappa_2(s) > 0$ ,  $\tau_1(s) = \tau_2(s), \forall s \in (a, b)$ . 则存在  $E^3$  的一个刚体运动  $\mathcal{T}$  把曲线  $r_2$  变为  $r_1$ , 即  $r_1 = \mathcal{T} \circ r_2$ .

**定理 4.3** 设  $\kappa = \kappa(s)$  和  $\tau = \tau(s)$  是定义在区间  $(a, b)$  上的两个连续可微函数且  $\kappa(s) > 0$ . 存在  $E^3$  的弧长参数曲线  $r(s), s \in (a, b)$ , 它以  $s$  为弧长参数, 以  $\kappa$  和  $\tau$  为曲率和挠率.

由于曲率和挠率反应了 Frenet 标架的运动规律, 我们将利用 Frenet 公式 (3.10) 来证明上述定理.

#### 定理 4.2 的证明

设  $0 \in (a, b)$ , 考虑两条曲线在  $s = 0$  处的 Frenet 标架

$$\{r_1(0); t_1(0), n_1(0), b_1(0)\} \text{ 和 } \{r_2(0); t_2(0), n_2(0), b_2(0)\}.$$

存在  $E^3$  的一个刚体运动  $\mathcal{T}$  把第二个标架变为第一个标架, 即  $r_1$  和  $\mathcal{T} \circ r_2$  在  $s = 0$  处的 Frenet 标架重合. 因此我们只须证明当曲线  $r_1$  和  $r_2$  在  $s = 0$  的 Frenet 标架重合时  $r_1 = r_2$ .

曲线 Frenet 标架的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dr}{ds} = t(s), \\ \frac{dt}{ds} = \kappa(s)n(s), \\ \frac{dn}{ds} = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s), \\ \frac{db}{ds} = -\tau(s)n(s). \end{cases} \quad (4.1)$$

这是一个关于向量值函数  $r, t, n, b$  的常微分方程. 曲线  $r_1(s)$  的 Frenet 标架和曲线  $r_2(s)$  的 Frenet 标架是方程 (4.1) 的两组解, 它们在  $s = 0$  时重合意味着这两组解在  $s = 0$  的初值相等, 由解对初值的惟一性定理立得  $r_1 = r_2$ . 定理得证.



## 定理 4.3 的证明

与定理 4.2 证明的出发点一样, 我们考虑关于四个未知向量函数  $\mathbf{r}(s)$ 、 $\mathbf{e}_1(s)$ 、 $\mathbf{e}_2(s)$ 、 $\mathbf{e}_3(s)$  的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_1(s), \\ \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s), \\ \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s), \\ \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\tau(s)\mathbf{e}_2(s). \end{cases} \quad (4.2)$$

由常微分方程理论, 给定初值  $\mathbf{r}^0, \mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$ , 其中  $\{\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0\}$  是一个与  $E^3$  的自然定向同向的正交标架, 以及  $s_0 \in (a, b)$ , 方程组 (4.2) 有惟一一组解满足

$$\{\mathbf{r}(s); \mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}|_{s=s_0} = \{\mathbf{r}^0; \mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0\}. \quad (4.3)$$

若  $\mathbf{r}$  是所求的曲线, 则  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  必须是它的 Frenet 标架. 因此我们首先证明

$$\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}, \quad \forall s \in (a, b)$$

均是与自然定向同向的正交标架.

将方程 (4.2) 改写为

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

其中

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

是一个反对称矩阵, 即  $a_{ij} + a_{ji} = 0$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ). 令

$$g_{ij}(s) = \langle \mathbf{e}_i(s), \mathbf{e}_j(s) \rangle (= g_{ji}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$



对 (4.5) 式求导, 利用 (4.4) 式有

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}g_{ij} &= \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i}{ds}, \mathbf{e}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{e}_i, \frac{d\mathbf{e}_j}{ds} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^3 a_{ik}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{e}_i, \sum_{k=1}^3 a_{jk}\mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^3 (a_{ik}g_{kj} + a_{jk}g_{ki}), \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{4.6}$$

上式表明  $(g_{ij})$  满足一个齐次线性常微分方程组, 在给定初值条件下这个方程组的解是惟一的. 不难验证  $g_{ij} = \delta_{ij}$  满足方程 (4.6), 但由初值条件 (4.3) 知  $g_{ij}(s_0) = \delta_{ij}$ , 所以  $g_{ij}(s) \equiv \delta_{ij}$ , 即  $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$  是正交标架. 并且连续性保证

$$(\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)) = (\mathbf{e}_1(s_0), \mathbf{e}_2(s_0), \mathbf{e}_3(s_0)) = 1,$$

即  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  的定向与自然定向相同.

现在由 (4.2) 的第一式有

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = |\mathbf{e}_1(s)| = 1,$$

因而  $s$  是曲线  $\mathbf{r}$  的弧长参数且  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{e}_1(s)$ . 由 (4.2) 的第二式知  $\kappa(s) = |\dot{\mathbf{e}}_1(s)|$  是  $\mathbf{r}$  的曲率,  $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2$  是  $\mathbf{r}$  的主法向量. 同样容易推出  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$  且  $\tau(s)$  是  $\mathbf{r}$  的挠率. 证毕.

对平面曲线而言, 可以建立类似于定理 4.2、定理 4.3 的结论. 我们给出下述定理, 证明留作练习.

**定理 4.4** 设  $\kappa(s)$  是连续可微函数, 则

- (1) 存在平面  $E^2$  的曲线  $\mathbf{r}(s)$ , 它以  $s$  为弧长参数,  $\kappa(s)$  为曲率;
- (2) 上述曲线在相差平面的一个刚体运动的意义下是惟一的.

**例 4.5** 讨论  $E^3$  中曲率、挠率均为常数的曲线的分类.

设  $\mathbf{r}$  是  $E^3$  的曲线, 它的挠率  $\tau$  和曲率  $\kappa$  是常数.

- (1)  $\kappa = 0$ , 这时  $\mathbf{r}$  是直线;
- (2)  $\kappa > 0$ ,  $\tau = 0$  时,  $\mathbf{r}$  是半径为  $\left| \frac{1}{\kappa} \right|$  的圆;
- (3)  $\kappa > 0$ ,  $\tau \neq 0$ , 由定理 4.2 及例 3.2 知  $\mathbf{r}$  是圆柱螺旋线.

## 习 题 二

1. 求下列曲线的弧长与曲率:

(1)  $y = ax^2$ ;

(2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

(3)  $\mathbf{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ ;

(4)  $\mathbf{r}(t) = (t, a \cosh \frac{t}{a})$  ( $a > 0$ ).

2. 设曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , 证明它的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\{(x')^2 + (y')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

3. 设曲线  $C$  在极坐标  $(r, \theta)$  下的表示为  $r = f(\theta)$ , 证明曲线  $C$  的曲率表达式为

$$\kappa(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 - f(\theta)\frac{d^2f}{d\theta^2}}{\left\{f^2(\theta) + \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

4. 求下列曲线的曲率和挠率:

(1)  $\mathbf{r}(t) = (a \cosh t, a \sinh t, bt)$  ( $a > 0$ );

(2)  $\mathbf{r}(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$ ;

(3)  $\mathbf{r}(t) = (a(1 - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$  ( $a > 0$ );

(4)  $\mathbf{r}(t) = (at, \sqrt{2}a \ln t, \frac{a}{t})$  ( $a > 0$ ).

5. 证明:  $E^3$  的正则曲线  $\mathbf{r}(t)$  的曲率和挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''|^2}.$$

6. 证明: 曲线

$$\mathbf{r}(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \quad (-1 < s < 1)$$

以  $s$  为弧长参数, 并求它的曲率、挠率和 Frenet 标架.

7. 设曲线

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (e^{-\frac{1}{t^2}}, t, 0), & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (0, t, e^{-\frac{1}{t^2}}), & t > 0, \end{cases}$$

(1) 证明:  $\mathbf{r}(t)$  是一条正则曲线, 且在  $t=0$  处曲率  $\kappa=0$ ;

(2) 求  $\mathbf{r}(t)$  ( $t \neq 0$ ) 时的 Frenet 标架, 并讨论  $t \rightarrow 0$  时 Frenet 标架的极限.

8. 设平面正则曲线  $C: \mathbf{r}(t)$  不过  $P_0$  点,  $\mathbf{r}(t_0)$  是  $C$  与  $P_0$  距离最近的点, 证明: 向量  $\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{p}_0$  与  $\mathbf{r}'(t_0)$  垂直.

9.(1) 设  $E^3$  的曲线  $C$  的所有切线过一个定点, 证明  $C$  是直线;

(2) 证明: 所有主法线过定点的曲线是圆.

10. 设  $\mathcal{T}(X) = XT + P$  是  $E^3$  的一个合同变换,  $\det T = -1$ .  $\mathbf{r}(t)$  是  $E^3$  的正则曲线. 求曲线  $\tilde{\mathbf{r}} = T \circ \mathbf{r}$  与曲线  $\mathbf{r}$  的弧长参数、曲率、挠率间的关系.

11. 设弧长参数曲线  $\mathbf{r}(s)$  的曲率  $\kappa > 0$ , 挠率  $\tau > 0$ ,  $\mathbf{b}(s)$  是  $C$  的副法向量, 定义曲线  $\tilde{C}$ :

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \int_0^s \mathbf{b}(u) du,$$

(1) 证明  $s$  是曲线  $\tilde{C}$  的弧长参数且  $\tilde{\kappa} = \tau$ ,  $\tilde{\tau} = \kappa$ ;

(2) 求  $\tilde{C}$  的 Frenet 标架.

12. 给定曲线  $\mathbf{r}(s)$ , 它的曲率和挠率分别是  $\kappa, \tau$ ;  $\mathbf{r}(s)$  的单位切向量  $\mathbf{t}(s)$  可视为单位球面  $S^2$  上的一条曲线, 称为曲线  $\mathbf{r}(s)$  的切线像. 证明: 曲线  $\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{t}(s)$  的曲率、挠率分别为

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa \left[1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right]}.$$

13. (1) 求曲率  $\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}$  ( $s$  是弧长参数) 的平面曲线;

(2) 求曲率  $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}$  ( $s$  是弧长参数) 的平面曲线.

14. 证明: 对  $E^3$  的弧长参数曲线  $\mathbf{r}(s)$ , 有

$$(1) \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right) = \kappa^2 \tau;$$

$$(2) \quad \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{t}}{ds^3}\right) = \kappa^3(\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau) = \kappa^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right).$$

15. 证明: 满足条件

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left[\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2 = \text{常数}$$

的曲线, 或者是球面曲线, 或者  $\kappa$  是常数.

16. 设  $P_0$  是  $E^3$  的曲线  $C$  上一点,  $P$  是  $C$  上  $P_0$  的邻近点,  $l$  是  $P_0$  处的切线; 证明:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{2d(P, l)}{d^2(P_0, P)} = \kappa(P_0),$$

这里  $d$  表示  $E^3$  的距离.

17. 求满足  $\tau = c\kappa$  ( $c$  为常数,  $\kappa > 0$ ) 的曲线.

18. (1) 设  $\mathbf{r}(t)$  是平面曲线, 曲率为  $\kappa(t)$ , 求曲线  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(-t)$  的曲率;

(2) 当  $\mathbf{r}(t)$  是  $E^3$  的曲线时, 求曲线  $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(-t)$  的曲率和挠率.

19. 求沿曲线的向量场  $\mathbf{v}(s)$ , 同时满足以下各式:

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{v}(s) \wedge \mathbf{t}(s),$$

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{v}(s) \wedge \mathbf{n}(s),$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{v}(s) \wedge \mathbf{b}(s).$$

20. 证明: 曲线  $\mathbf{r}(t) = (t + \sqrt{3}t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$  与曲线  $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \left(2 \cos \frac{t}{2}, 2 \sin \frac{t}{2}, -t\right)$  是合同的.

21. 证明定理 4.4.

## 第三章 曲面的局部理论

### §3.1 曲面的概念

#### 1. 曲面的概念

与第一章曲线的定义同样, 从平面区域  $D = \{(u, v)\}$  到  $E^3$  的映射

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

满足

(1) 每个分量函数是无限阶连续可微的,

(2) 向量  $\mathbf{r}_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$  与  $\mathbf{r}_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$  线性无关, 即

$$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0} \quad (1.1)$$

时, 我们称  $\mathbf{r}$  是  $E^3$  的一个曲面 (片),  $(u, v)$  称为曲面的 (坐标) 参数.

曲面有两类特殊情形, 之一是由函数  $z = f(x, y)$  描述的曲面  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , 称为函数  $f$  的图. 容易验证, 这时  $\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x)$ ,  $\mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$ ,  $\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y \neq \mathbf{0}$ . 另一类特例是考虑满足  $F(x, y, z) = 0$  的点全体  $S$ , 当  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  时, 由隐函数定理, 在  $(x_0, y_0)$  的小邻域  $D$  内,  $F(x, y, z) = 0$  有显式表示

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad z_0 = f(x_0, y_0),$$

因此在  $(x_0, y_0, z_0)$  的一个邻域内  $S$  可以表示为曲面 (片)

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

类似的, 当  $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  或  $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  时, 同样可以确定一个曲面 (片). 所以当  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$  时,  $F(x, y, z) = 0$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  邻近确定了一张曲面.

曲面  $\mathbf{r}$  可以有不同的参数表示. 考虑曲面

$$\mathbf{r}(u, v) : D \rightarrow E^3 \quad (1.2)$$

及参数变换

$$\sigma : (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D} \rightarrow (u, v) \in D, \quad (1.3)$$

也就是说, 对应  $\sigma: \bar{D} \rightarrow D$  是 1-1 对应且变换的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.4)$$

这样我们有曲面  $\mathbf{r}$  的新参数表示

$$\mathbf{r}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{r} \circ \sigma(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{r}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) : \bar{D} \rightarrow E^3. \quad (1.5)$$

自然, 给了两个曲面  $\mathbf{r}(u, v) ((u, v) \in D)$  和  $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v}) ((\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D})$ , 如果有参数变换  $\sigma: \bar{D} \rightarrow D$  使得曲面

$$\mathbf{r}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{r} \circ \sigma(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{r}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) : \bar{D} \rightarrow E^3 \quad (1.6)$$

与曲面  $\bar{\mathbf{r}}(\bar{u}, \bar{v})$  相同, 就认为  $\mathbf{r}$  和  $\bar{\mathbf{r}}$  是同一个曲面的两个不同参数表示. 通常我们把曲面记为  $S$ , 而称  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是曲面的一个参数表示.

**例 1.1** 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

球面的一种参数表示是

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

或者记为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), \\ (x, y) &\in D = \{x^2 + y^2 < a^2\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

它仅表示了上半球面. 另一种常见的参数表示为球坐标表示:

$$\bar{D} = \{(u, v) : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi\},$$

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v, \\ y = a \cos u \sin v, \\ z = a \sin u. \end{cases} \quad (1.8)$$

此时  $\mathbf{r}(u, v)$  表示的是球面去掉南、北两个极点以及联结这两个极点的一条大圆弧 (见图 3.1).

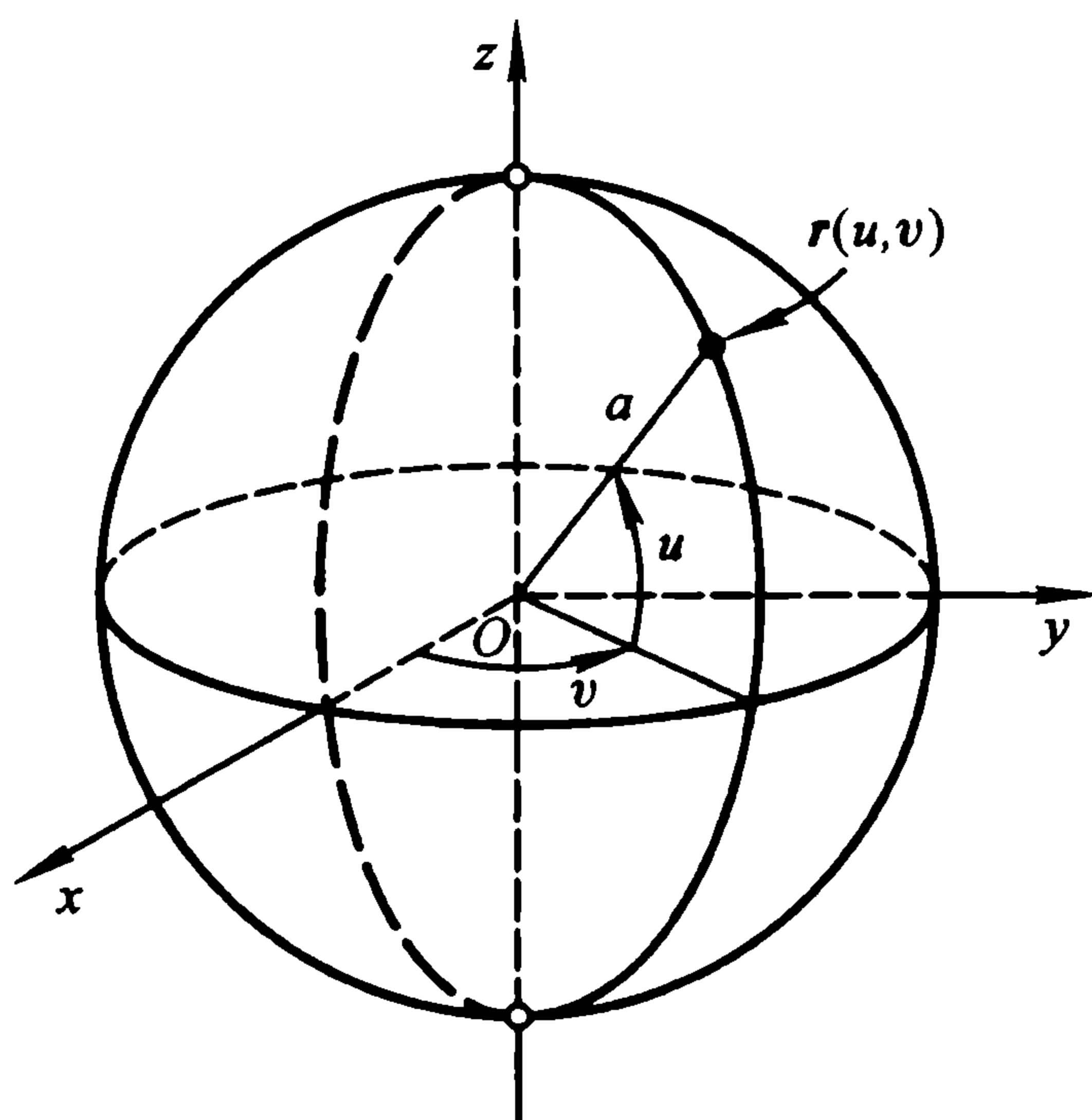


图 3.1

而  $D \rightarrow \bar{D}$  的变换

$$(x, y) \rightarrow (u, v) = \left( \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}, \arctan \frac{y}{x} \right) \quad (1.9)$$

是球面上的共同部分在两个不同参数间的参数变换.

球极投影坐标:

球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上除北极以外的任意一点  $(x, y, z)$  与北极  $N = (0, 0, a)$  的连线, 与  $xy$  平面交于惟一一点  $(\frac{ax}{a-z}, \frac{ay}{a-z}, 0)$ ; 或者说  $xy$  平面上任意一点  $(u, v, 0)$  与北极的连线交球面于惟一一点

$$\left( 2 \frac{a^2 u}{a^2 + u^2 + v^2}, 2 \frac{a^2 v}{a^2 + u^2 + v^2}, a \frac{u^2 + v^2 - a^2}{a^2 + u^2 + v^2} \right),$$

如图 3.2. 因此映射

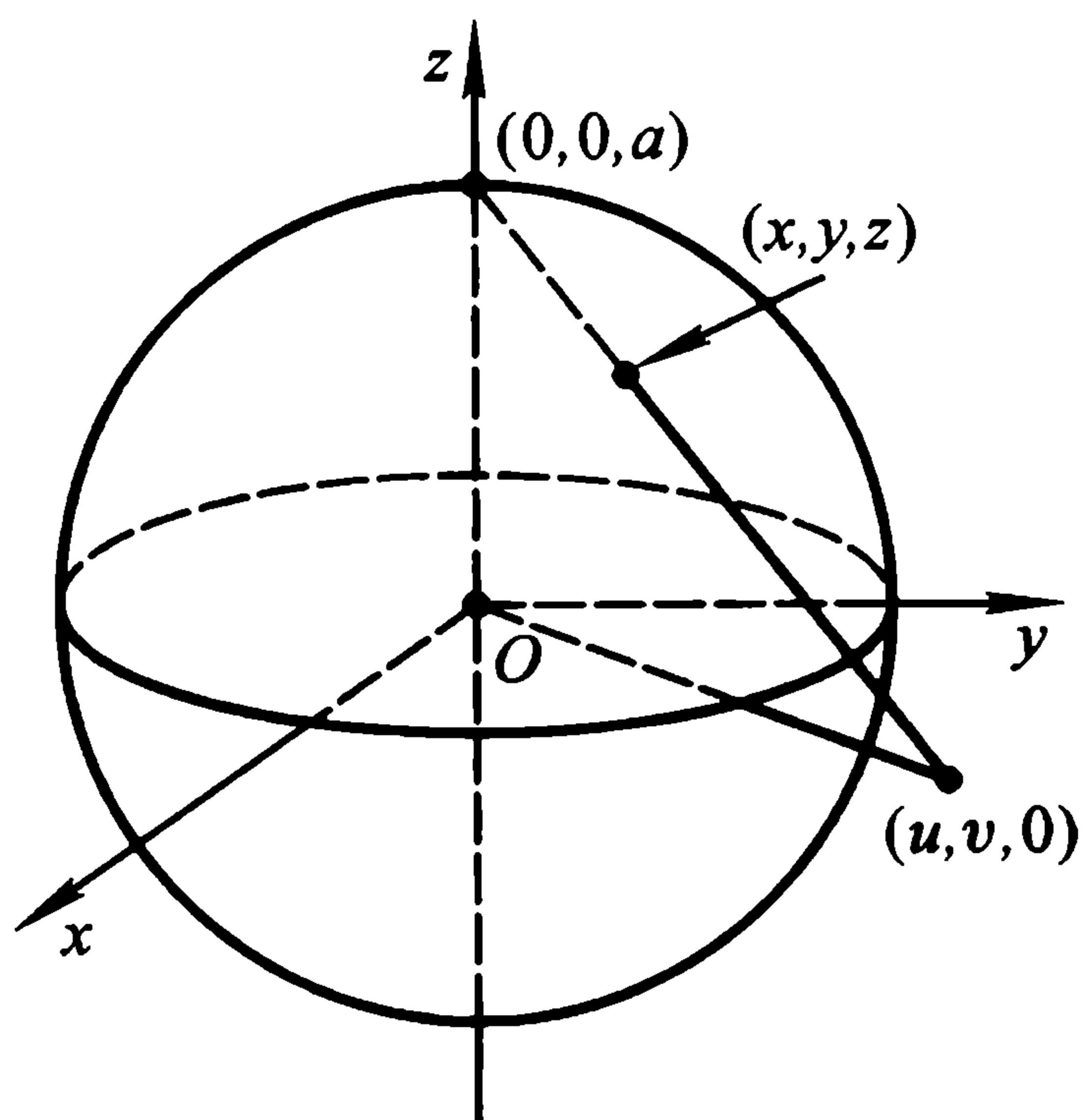


图 3.2



$$\mathbf{r}(u, v) = \left( 2 \frac{a^2 u}{a^2 + u^2 + v^2}, 2 \frac{a^2 v}{a^2 + u^2 + v^2}, a \frac{u^2 + v^2 - a^2}{a^2 + u^2 + v^2} \right) \quad (1.10)$$

给出了球面（去掉北极）的一个参数表示，称为球面的球极投影参数表示。

比球面略为广泛一点的是空间的二次曲面，人们可以很容易求出它们的参数表示式。

**例 1.2 (环面)** 环面可以视为  $xz$  平面上的一个圆周绕  $z$  轴旋转而成的一个曲面，如图 3.3. 在  $x$  轴上取离原点距离为  $R$  的点为圆心，以  $r$  ( $r < R$ ) 为半径作一个圆

$$\begin{cases} x = R + r \cos u, \\ z = r \sin u, \end{cases}$$

然后将此圆绕  $z$  轴旋转，得到环面

$$\begin{cases} x(u, v) = (R + r \cos u) \cos v, \\ y(u, v) = (R + r \cos u) \sin v, \\ z(u, v) = r \sin u. \end{cases} \quad (1.11)$$

注意此时  $\mathbf{r}(u \pm 2\pi, v \pm 2\pi) = \mathbf{r}(u, v)$ .

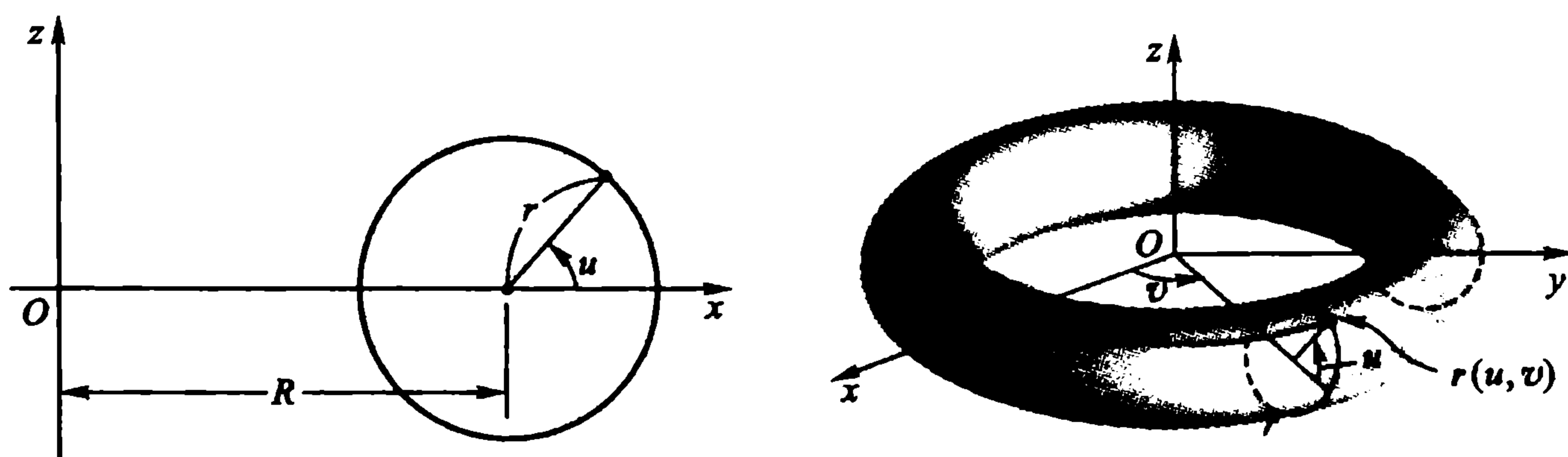


图 3.3

更一般地，有

**例 1.3 (旋转面)**  $xz$  平面上与  $z$  轴无交的参数曲线

$$x = f(u), \quad z = g(u) \quad (1.12)$$

绕  $z$  轴旋转得到曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad (1.13)$$

此类曲面称为旋转面，见图 3.4.



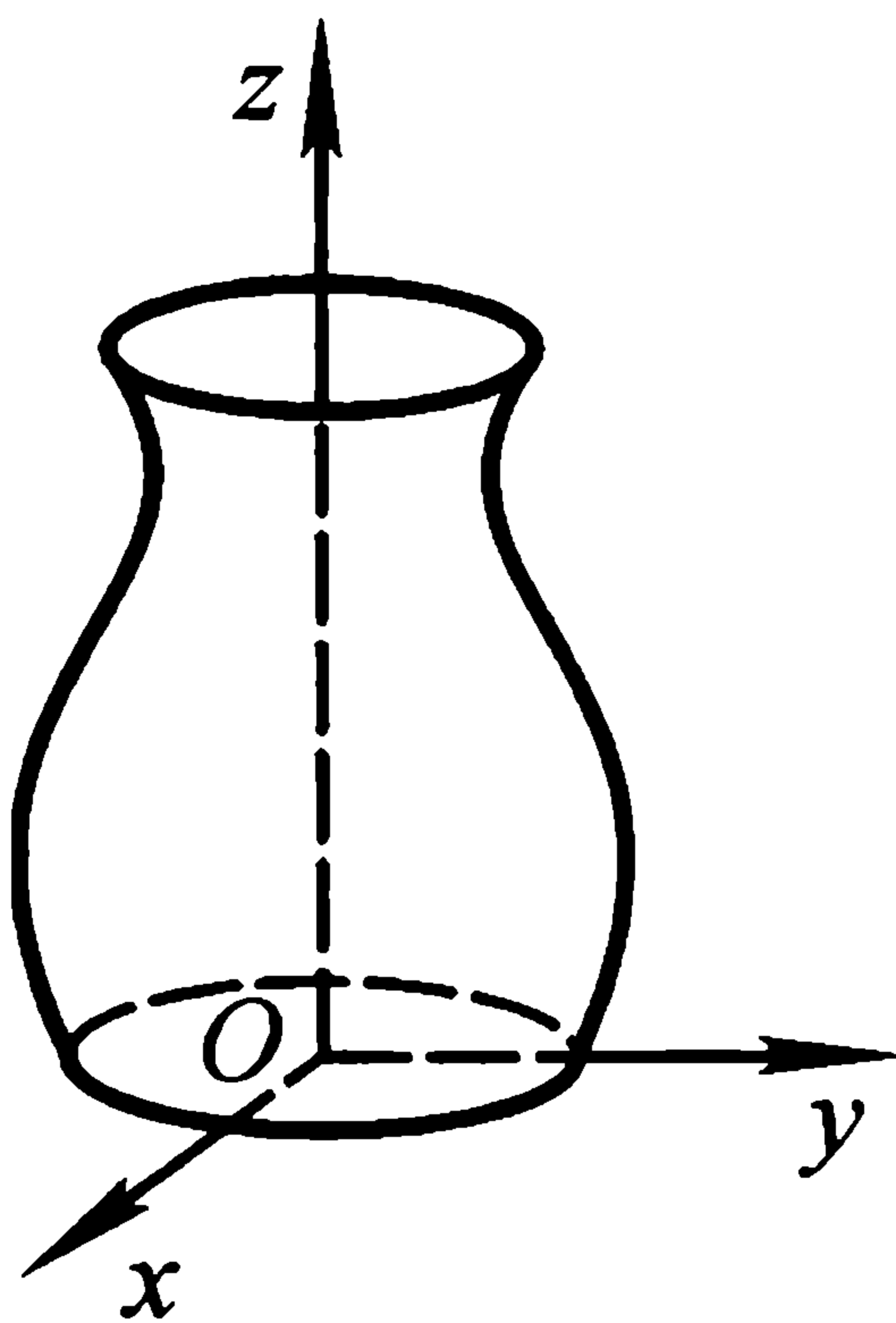


图 3.4

## 2. 切平面与法向

考虑曲面  $S$ ，设它的参数表示为

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D. \quad (1.14)$$

今后我们把曲面上参数为  $(u, v)$  的点记为  $P = P(u, v)$ ，有时也直接记为  $\mathbf{r}(u, v)$ 。

固定  $u = a$ ，这时  $\mathbf{r}(a, v)$  表示的是一条空间曲线，它在  $v = b$  点的切向量是  $\mathbf{r}_v(a, b) = \frac{d\mathbf{r}}{dv}(a, b)$ 。由于参数曲线  $\mathbf{r}(a, v)$  落在曲面  $S$  上，所以  $\mathbf{r}_v(a, b)$  与曲面  $S$  在点  $P_0 = P(a, b)$  相切。同样，固定  $v = b$ ，我们有曲线上的曲线  $\mathbf{r}(u, b)$ ，以及这条曲线在  $P_0$  点的一个切向量  $\mathbf{r}_u(a, b)$ ，见图 3.5。

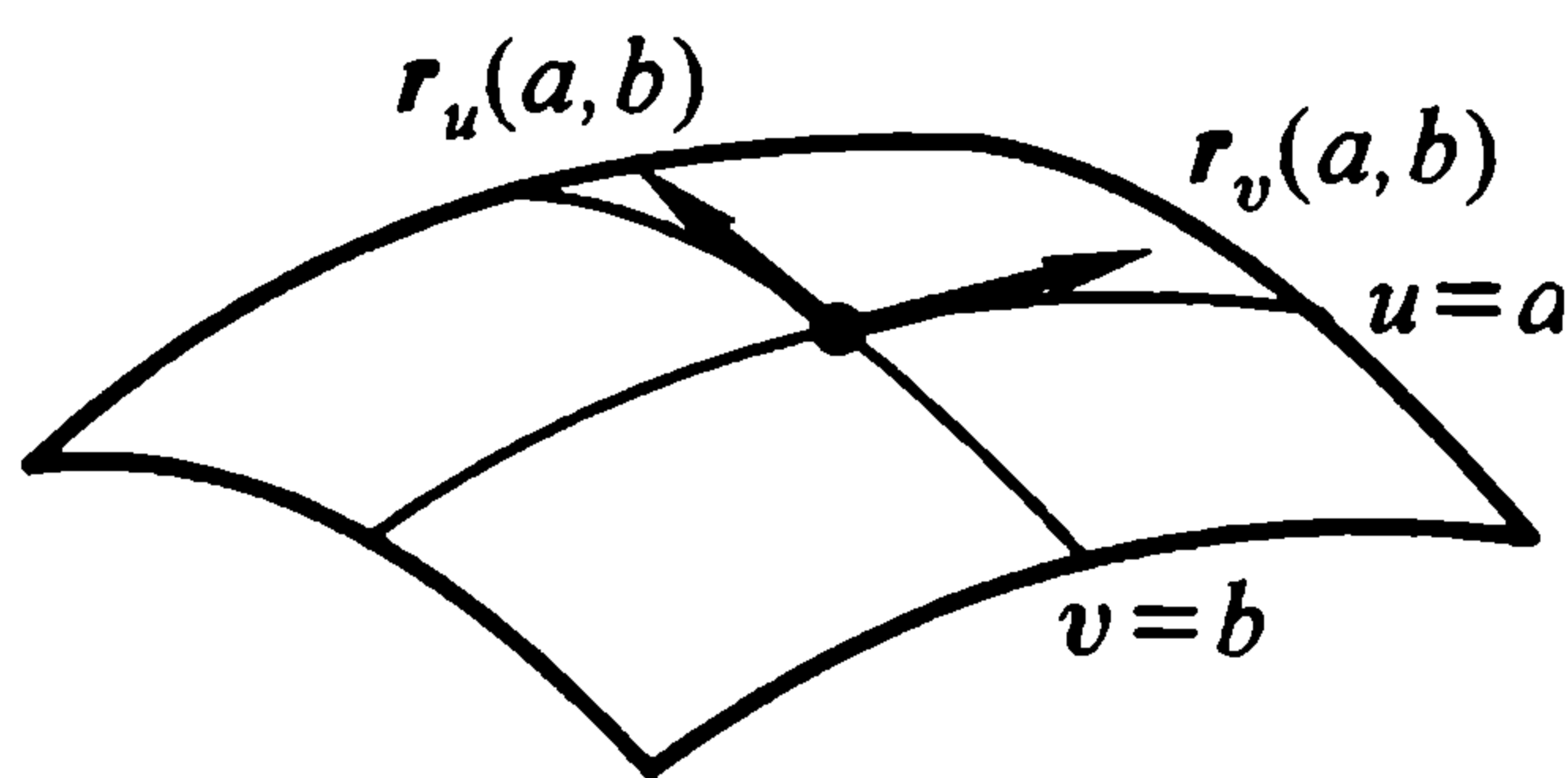


图 3.5

由曲面的定义知  $\mathbf{r}_u(a, b)$  与  $\mathbf{r}_v(a, b)$  不共线，因此  $\mathbf{r}_u(a, b)$  和  $\mathbf{r}_v(a, b)$  张成与曲面  $S$  相切于  $P_0$  点的一张平面，称为曲面  $S$  在  $P_0$  点的切平面，记为  $T_{P_0}S$ ， $\mathbf{r}_u(a, b)$  和  $\mathbf{r}_v(a, b)$  称为曲面在  $P_0$  点的坐标切向量。过  $P_0$  点与切平面  $T_{P_0}S$  垂直的直线我们称之为曲面在该点的法线。 $\mathbf{r}_u(a, b) \wedge \mathbf{r}_v(a, b)$  是与  $\mathbf{r}_u(a, b)$  和  $\mathbf{r}_v(a, b)$  均正交的向量，是曲面  $S$  在该点的一个法向量。不难看出

出,  $\{P_0; \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\}$  构成了  $E^3$  的一个自然定向的标架.

现考虑  $(u(t), v(t))$  是区域  $D$  内一条正则曲线,  $u(0) = a, v(0) = b$ , 那么  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  是曲面  $S$  上过  $P_0$  点的一条曲线, 它在  $t = 0$  处的切向量

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \mathbf{r}_u \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} + \mathbf{r}_v \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{r}_u(a, b)u'(0) + \mathbf{r}_v(a, b)v'(0), \end{aligned} \quad (1.15)$$

因此  $\mathbf{r}'(t)|_{t=0} \in T_{P_0}S$ .

如果  $D$  内另一条正则曲线  $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$  与  $(u(t), v(t))$  在  $t = 0$  处相切, 且  $u'(0) = \tilde{u}'(0), v'(0) = \tilde{v}'(0)$ , 由 (1.15) 式可以发现,  $\left. \frac{d}{dt} \mathbf{r}(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{r}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \right|_{t=0}$ . 这说明切向量  $\left. \frac{d}{dt} \mathbf{r}(u(t), v(t)) \right|_{t=0}$  只与  $u'(0)$ 、 $v'(0)$  有关, 而与曲线  $(u(t), v(t))$  的选取无关. 我们可以取  $(u(t), v(t))$  是以  $(u'(0), v'(0))$  为切向的平面直线; 特别,  $u$  坐标直线对应的切向量是  $\mathbf{r}_u$ ,  $v$  坐标直线对应的切向量是  $\mathbf{r}_v$ . 读者可以证明: 对于曲面上任意一点  $P$ ,  $T_P S$  等于曲面上过  $P$  点的曲线在  $P$  点的切向量的全体.

下面我们讨论曲面  $S$  的切平面与参数选取的关系. 设

$$\sigma: (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D} \rightarrow (u, v) \in D \quad (1.16)$$

是参数变换, 曲面有新的参数表示

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\bar{u}, \bar{v}) &= \mathbf{r} \circ \sigma(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= (x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))). \end{aligned} \quad (1.17)$$

由微商的链式法则,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\bar{u}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \mathbf{r}_{\bar{v}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

如果参数  $(u, v) = (a, b)$  和  $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{a}, \bar{b})$  表示曲面的同一点  $P_0$ , 由 (1.18) 式有

$$\mathbf{r}_{\bar{u}}(\bar{a}, \bar{b}), \quad \mathbf{r}_{\bar{v}}(\bar{a}, \bar{b}) \in T_{P_0}S, \quad (1.19)$$

且在  $P_0$  点

$$\mathbf{r}_{\bar{u}} \wedge \mathbf{r}_{\bar{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}. \quad (1.20)$$

因此由 (1.18) 式可得, 参数变换诱导出切平面的基变换, 基变换阵就是参数变换的 Jacobi 阵, 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\bar{u}} \\ \mathbf{r}_{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

于是我们有

**性质 1.4** 曲面的切平面和法线与参数选取无关.

从关系式 (1.20) 还可以看出, 当  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$  时,  $\mathbf{r}_{\bar{u}} \wedge \mathbf{r}_{\bar{v}}$  与  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$  的方向相同; 当  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} < 0$  时,  $\mathbf{r}_{\bar{u}} \wedge \mathbf{r}_{\bar{v}}$  与  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$  的方向相反. 因此, 当  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$  时相应的参数变换称为同向参数变换; 当  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} < 0$  时相应的参数变换称为反向参数变换.

**例 1.5** 设  $F(x, y, z)$  是定义在  $E^3$  的一个区域  $U$  上的光滑函数.

$$S_c = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = \text{常数 } c\} \neq \emptyset$$

是函数  $F$  的等值面. 当

$$\nabla F(P) = (F_x, F_y, F_z)(P) \neq \mathbf{0} \quad (\forall P \in S_c)$$

时,  $S_c$  是一个曲面.

设  $(x(t), y(t), z(t))$  是  $S_c$  上的一条曲线, 对  $F(x(t), y(t), z(t)) = c$  求导知

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = \langle (F_x, F_y, F_z), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle = 0. \quad (1.22)$$

所以  $F$  的梯度  $(F_x, F_y, F_z)$  是曲面  $S_c$  的法向,  $S_c$  在一点  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  的切平面方程为

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0. \quad (1.23)$$

特别, 当  $F = x^2 + y^2 + z^2$  时,  $S_{a^2}$  是半径为  $a$  的球面, 它的位置向量

$$\mathbf{p} = (x, y, z) = \frac{\nabla F}{2}$$

是法向量.

### §3.2 曲面的第一基本形式

设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是它的参数表示, 从上节我们知道曲面  $S$  上各点的切平面由切向量  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  张成,  $S$  的任何一个切向量  $\mathbf{v}$  都可以表示成如下形式

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r}_u + \mu \mathbf{r}_v. \quad (2.1)$$

$\mathbf{v}$  的长度平方为

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + 2\lambda\mu \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle + \mu^2 \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle. \quad (2.2)$$

记

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle, \quad (2.3)$$

这里  $\sqrt{E}$  是切向量  $\mathbf{r}_u$  的长度,  $\sqrt{G}$  是切向量  $\mathbf{r}_v$  的长度,  $\frac{F}{\sqrt{EG}}$  是  $\mathbf{r}_u$  与  $\mathbf{r}_v$

夹角的余弦. 那么 (2.2) 式意味着切向量的长度平方是以矩阵  $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$  为系

数的二次型.

现考虑  $S$  上的一条曲线  $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ , 它的切向量为

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}_u u'(t) + \mathbf{r}_v v'(t), \quad (2.4)$$

曲线在  $a < t < c$  间的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_a^c \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt \\ &= \int_a^c \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

所以

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2. \quad (2.6)$$

由此我们得到一个二次微分式

$$I = ds^2 = Edu \cdot du + 2Fdu \cdot dv + Gdv \cdot dv, \quad (2.7)$$

称为曲面  $S$  的第一基本形式.

第一基本形式是曲面的一个基本的几何量, 理解这个几何量是学习微分几何的出发点.

我们可以从单变量微分的角度出发来考察第一基本形式. 考虑  $t$  的微小增量  $t \rightarrow t + \Delta t$ , 相应地, 对曲面  $S$  上曲线有  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t + \Delta t)$ , 因此, 曲线的增量

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) &\approx \left( \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt} \right) \Delta t \\ &= \mathbf{r}_u \Delta u + \mathbf{r}_v \Delta v. \end{aligned} \quad (2.8)$$

当  $t$  的增量是  $\Delta t$  时,  $\mathbf{r}(t)$  的增量  $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$  的长度的平方约等于

$$E\Delta u\Delta u + 2F\Delta u\Delta v + G\Delta v\Delta v. \quad (2.9)$$

因此第一基本形式是 (2.9) 的极限形式, 或者说它是曲面上曲线的弧长微元的平方.

关于第一基本形式的一个基本性质是

**定理 2.1** 曲面  $S$  的第一基本形式与参数选取无关.

**证明** 设  $(u, v) = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$  是参数变换, 在参数  $(u, v)$  下曲面的第一基本形式为

$$I(u, v) = Edu + 2Fdu + Gdv, \quad (2.10)$$

在参数  $(\bar{u}, \bar{v})$  下曲面的第一基本形式为

$$I(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{E}d\bar{u} + 2\bar{F}d\bar{u} + \bar{G}d\bar{v}. \quad (2.11)$$

利用基变换公式 (1.21), 我们可以求出第一基本形式系数间的关系:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \langle \mathbf{r}_{\bar{u}}, \mathbf{r}_{\bar{u}} \rangle = \left\langle \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right\rangle \\ &= E \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2F \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + G \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2; \end{aligned}$$

同理, 有

$$\bar{F} = \langle \mathbf{r}_{\bar{u}}, \mathbf{r}_{\bar{v}} \rangle = E \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + F \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + G \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right);$$

$$\bar{G} = \langle \mathbf{r}_{\bar{v}}, \mathbf{r}_{\bar{v}} \rangle = E \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2F \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) + G \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2.$$

这些关系也可写成如下矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \mathbf{J}^T, \quad (2.12)$$

其中  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{bmatrix}$  是变换的 Jacobi 阵. 又因为

$$du = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} d\bar{v},$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} d\bar{v},$$

即

$$[du, dv] = [d\bar{u}, d\bar{v}] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{bmatrix} = [d\bar{u}, d\bar{v}] \mathbf{J}, \quad (2.13)$$

所以我们有

$$\begin{aligned} I(\bar{u}, \bar{v}) &= [d\bar{u}, d\bar{v}] \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{bmatrix} \\ &= (d\bar{u}, d\bar{v}) \mathbf{J} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{bmatrix} \\ &= [du, dv] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = I(u, v). \end{aligned} \quad (2.14)$$

证毕.

记向量值函数  $\mathbf{r}$  的一阶微分为  $d\mathbf{r}$  , 即

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= (dx(u, v), dy(u, v), dz(u, v)) \\ &= (x_u du + x_v dv, y_u du + y_v dv, z_u du + z_v dv) \\ &= \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \end{aligned} \quad (2.15)$$

那么曲面的第一基本形式可写为如下形式:

$$\begin{aligned} I &= Edudu + 2Fdudv + Gdv dv \\ &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle dud u + 2\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle dud v + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle dv dv \\ &= \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

所以由一阶微分形式不变性也可以知道, 曲面的第一基本形式与它的参数选取无关.

**定理 2.2** 曲面的第一基本形式在  $E^3$  的合同变换下不变, 即: 如果  $S$  是  $E^3$  的一张曲面,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是它的参数表示,  $\mathcal{T}$  是  $E^3$  的一个合同变换,  $\mathcal{T}$  将曲面  $S$  变为曲面  $\tilde{S} : \tilde{\mathbf{r}}(u, v) = \mathcal{T} \circ \mathbf{r}(u, v)$ , 则曲面  $\tilde{S}$  的第一基本形式  $\tilde{I}(u, v)$  与曲面  $S$  的第一基本形式  $I(u, v)$  相同.

**证明** 设  $\mathcal{T}(P) = P \cdot \mathbf{T} + P_0$  是合同变换. 则  $\tilde{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{T}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{T}$ . 设  $\{\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}\}$  是曲面  $\tilde{S}$  第一基本形式的系数, 由于  $\mathbf{T}$  是正交阵,

$$\tilde{E} = \langle \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{T}, \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = E,$$

同理,  $\tilde{F} = F$ 、 $\tilde{G} = G$ , 这时曲面  $\tilde{S}$  与曲面  $S$  的第一基本形式相同. 证毕.

现在我们来讨论一些简单的例子.

**例 2.3** 对平面  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, c)$  ( $c$  是常数)而言,  $\mathbf{r}_u = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{r}_v = (0, 1, 0)$ , 所以平面的第一基本形式为

$$I = dud u + dv dv.$$



**例 2.4 (柱面)** 设  $C: (x(u), y(u))$  是  $xy$  平面的一条正则参数曲线,  $C$  沿  $z$  轴方向移动, 得到的曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u), y(u), v)$$

称为柱面. 由于  $\mathbf{r}_u = (x', y', 0)$ ,  $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$ , 柱面的第一基本形式为

$$I = ((x')^2 + (y')^2)du^2 + dv^2.$$

我们可以取  $u$  是曲线  $C$  的弧长参数, 这时  $\mathbf{r}_u$  是单位向量, 所以柱面的第一基本形式可简化为

$$I(u, v) = du^2 + dv^2.$$

**例 2.5 球面的第一基本形式.**

在球坐标参数下, 半径为  $a$  的球面有表示

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta),$$

它的坐标切向量为

$$\mathbf{r}_\theta = (-a \sin \theta \cos \varphi, -a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{r}_\varphi = (-a \cos \theta \sin \varphi, a \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

所以  $E = \langle \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\theta \rangle = a^2$ ,  $F = \langle \mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi \rangle = 0$ ,  $G = \langle \mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi \rangle = a^2 \cos^2 \theta$ ,

$$I(\theta, \varphi) = a^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.18)$$

在球极投影参数表示 (1.10) 式下, 球面的坐标切向量为

$$\mathbf{r}_u = \left( \frac{2a^2(a^2 - u^2 + v^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}, \frac{-4a^2uv}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}, \frac{4a^3u}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_v = \left( \frac{-4a^2uv}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}, \frac{2a^2(a^2 + u^2 - v^2)}{(a^2 + u^2 + v^2)^2}, \frac{4a^3v}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} \right).$$

这时容易求出它的第一基本形式是

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{4a^4}{(a^2 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2) \\ &= \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{a^2}(u^2 + v^2)\right)^2} (du^2 + dv^2). \end{aligned} \quad (2.19)$$



## §3.3 曲面的第二基本形式

上一节我们定义了参数曲面的第一基本形式 I，它是一个二次微分形式，与曲面的参数选取无关，而且在  $E^3$  的合同变换下不变。这一节我们继续讨论三维欧氏空间  $E^3$  中曲面的欧氏不变量。

设曲面  $S$  有参数表示  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ， $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  为曲面的坐标切向量，这时

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|} \quad (3.1)$$

是  $S$  的单位法向量，曲面  $S$  的第二基本形式 定义为

$$\text{II} = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n} \rangle. \quad (3.2)$$

不难看出，第二基本形式是一个二次微分形式。下面我们首先来求第二基本形式的参数表示。

由  $\mathbf{n}$  的定义可知

$$\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n} \rangle = 0. \quad (3.3)$$

对上式求偏导数就有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle &= 0, & \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u \rangle &= 0, & \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

定义函数

$$\begin{aligned} L &= \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle, \\ M &= \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u \rangle, \\ N &= \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle, \end{aligned} \quad (3.5)$$

第二基本形式就可以表示为

$$\begin{aligned} \text{II} &= -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{n} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \rangle \\ &= L du du + 2M du dv + N dv dv. \end{aligned} \quad (3.6)$$

为说明第二基本形式的几何意义, 我们考虑曲面  $S$  在一点  $(u_0, v_0)$  的渐近展开:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ &= \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \mathbf{r}_{uu}(u_0, v_0)\Delta u\Delta u + 2\mathbf{r}_{uv}(u_0, v_0)\Delta u\Delta v \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{r}_{vv}(u_0, v_0)\Delta v\Delta v \right) + o(\Delta u\Delta u + \Delta v\Delta v).\end{aligned}\tag{3.7}$$

容易看出, 点  $\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$  到  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$  的切平面的有向距离为  $\langle \mathbf{n}(u_0, v_0), \Delta \mathbf{r} \rangle$ , 这个距离刻画了曲面在  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$  附近形状. 而

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}(u_0, v_0), \Delta \mathbf{r} \rangle &= \\ \frac{1}{2} (L\Delta u\Delta u + 2M\Delta u\Delta v + N\Delta v\Delta v) &+ o(\Delta u^2 + \Delta v^2).\end{aligned}\tag{3.8}$$

第二基本形式 II 是有向距离 (3.8) 的极限情形, 因此它反映了曲面的形状.

**例 3.1** 求平面 (例 2.3) 和柱面 (例 2.4) 的第二基本形式.

(1) 平面  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, c)$  有  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , 所以

$$\text{II} = -\langle d\mathbf{n}, d\mathbf{r} \rangle = 0.$$

(2) 柱面  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u), y(u), v)$ , 其中  $(x(u), y(u))$  为平面曲线,  $u$  是它的弧长参数, 即  $x_u^2 + y_u^2 = 1$ . 直接计算, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{uu} &= (x_{uu}, y_{uu}, 0), \\ \mathbf{r}_{uv} &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{r}_{vv} &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{n} &= (y_u, -x_u, 0).\end{aligned}\tag{3.9}$$

设  $\kappa$  是平面曲线  $(x(u), y(u))$  的曲率, 即  $\kappa = -x_{uu}y_u + x uy_{uu}$ , 从 (3.5) 式和 (3.9) 式可得

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = -\kappa, \quad M = N = 0.$$

所以柱面的第二基本形式为

$$\text{II} = -\kappa du du. \quad (3.10)$$

特别, 当平面曲线  $(x(u), y(u))$  是半径为  $a$  的圆时,  $\kappa = \frac{1}{a}$ , 所以圆柱面的第二基本形式为

$$\text{II} = -\frac{1}{a} du du. \quad (3.11)$$

上述例子与例 2.3、例 2.4 表明, 平面和柱面虽然有相同的第一基本形式, 但它们的第二基本形式不同, 同样它们在空间  $E^3$  中的形状也不同, 见图 3.6.

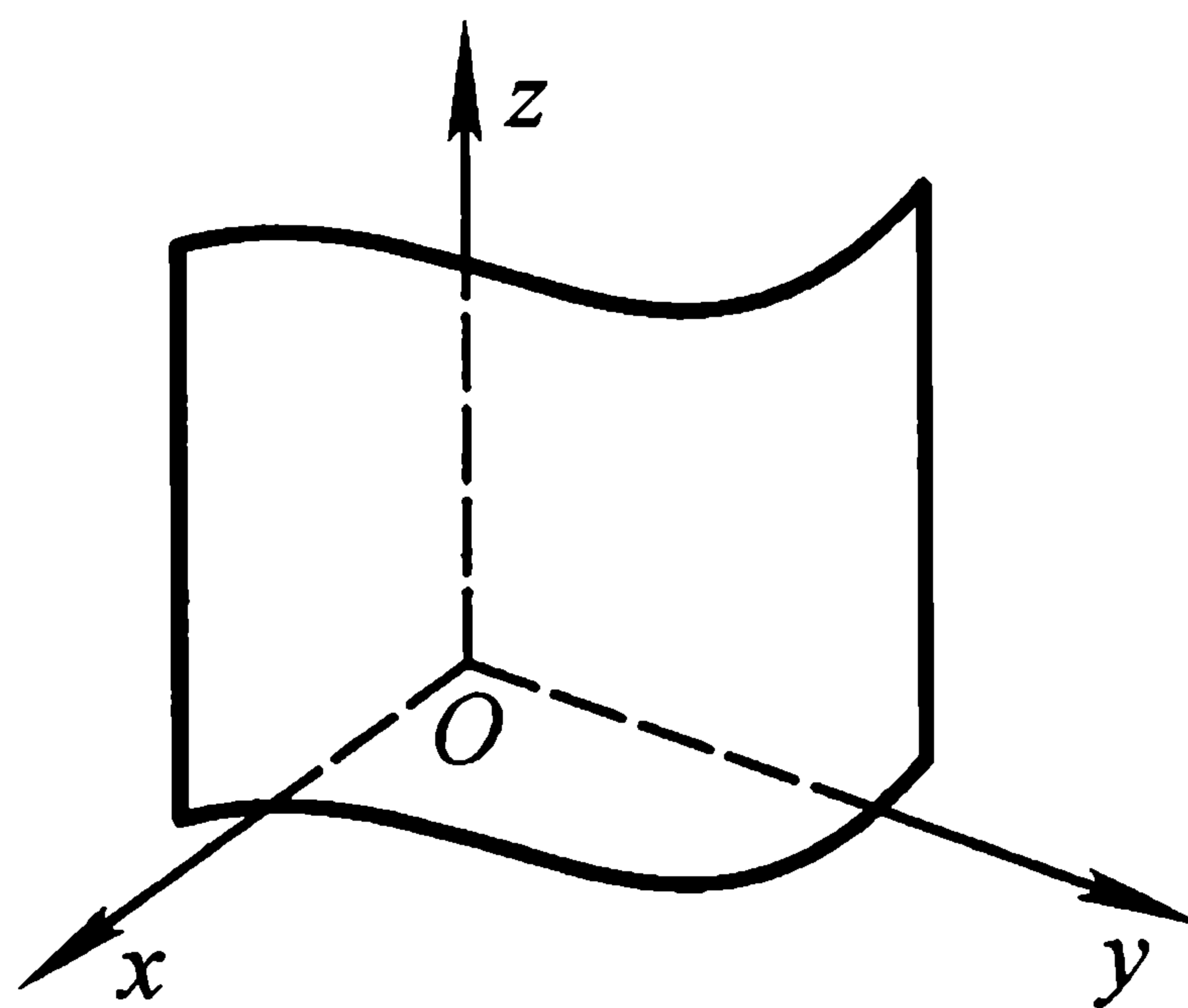


图 3.6

以下我们继续讨论第二基本形式的几何意义. 在参数表示  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  下曲面的第二基本形式  $\text{II} = Ldu du + 2Mdu dv + Ndv dv$  是关于  $(du, dv)$  的二次型, 由二次型理论, 它可以分成三种情形:

1.  $LN - M^2 > 0$ , 这时 II 是正定或负定的;
2.  $LN - M^2 < 0$ , 这时 II 是不定的;
3.  $LN - M^2 = 0$ , 这时 II 是退化的.

下面的性质表明, 第二基本形式在一点的值与这点附近曲面形状的关系.

**性质 3.2** 曲面的第二基本形式

$$\text{II} = Ldu du + 2Mdu dv + Ndv dv$$

正定或负定的点, 即  $LN - M^2 > 0$  的点的附近, 曲面的形状是凸的 (或凹的, 由法向选取决定), 在  $LN - M^2 < 0$  的点附近, 曲面是马鞍型的.

**证明** 设  $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$  是曲面  $S: \mathbf{r}(u, v)$  上的一个点, 考虑函数 (曲面的高度函数)

$$f(u, v) = \langle \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0), \mathbf{n}(u_0, v_0) \rangle. \quad (3.12)$$

由于

$$f_u = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}(u_0, v_0) \rangle, \quad f_v = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}(u_0, v_0) \rangle,$$

所以  $f_u(u_0, v_0) = f_v(u_0, v_0) = 0$ ，即  $(u_0, v_0)$  是  $f$  的临界点. 在这一点  $f$  的二阶导数方阵 (Hessian 矩阵) 为

$$\begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix} (u_0, v_0) = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} (u_0, v_0). \quad (3.13)$$

因此当第二基本形式 II 在点  $(u_0, v_0)$  正定或负定时,  $f(u_0, v_0) = 0$  是最大值或最小值, 这说明曲面  $S$  的形状是凸或凹的. 而当  $LN - M^2 < 0$  时, 第二基本形式 II 在  $(u_0, v_0)$  点即非正定也非负定,  $f(u_0, v_0) = 0$  既不是最大值也不是最小值, 因而曲面  $S$  在这点附近是马鞍型的, 见图 3.7.

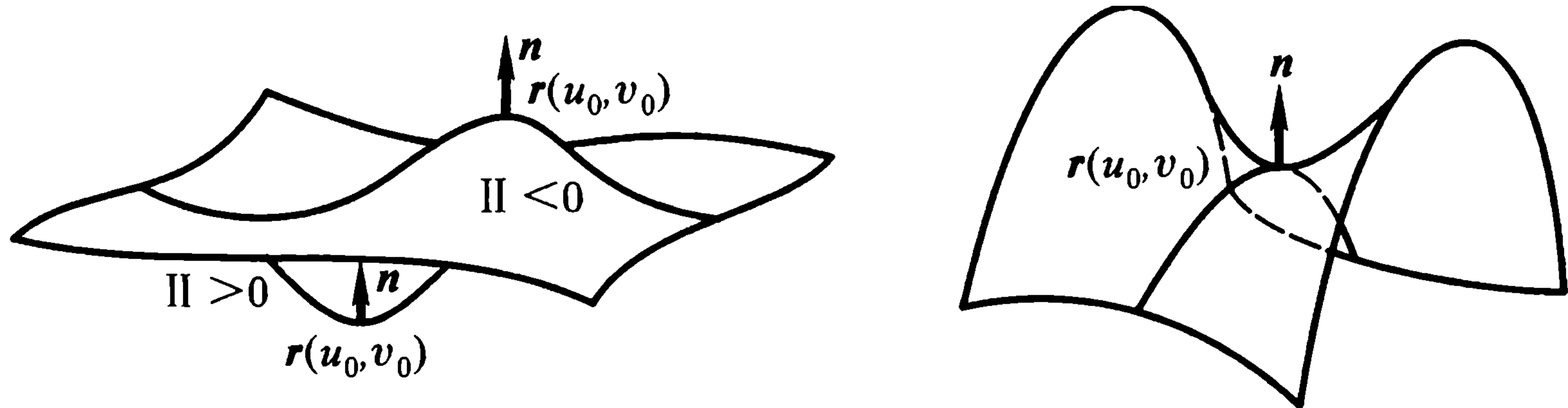


图 3.7

**例 3.3** 求半径为  $a$  的球面在球坐标参数下的第二基本形式.

从例 (2.5) 出发, 在球坐标参数  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi)$  下,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\theta\theta} &= (-a \cos \theta \cos \varphi, -a \cos \theta \sin \varphi, -a \sin \theta), \\ \mathbf{r}_{\theta\varphi} &= (a \sin \theta \sin \varphi, -a \sin \theta \cos \varphi, 0), \\ \mathbf{r}_{\varphi\varphi} &= (-a \cos \theta \cos \varphi, -a \cos \theta \sin \varphi, 0), \\ \mathbf{n} &= (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

所以  $L = a$ ,  $M = 0$ ,  $N = a \cos^2 \theta$ , 球面在球坐标参数下的第二基本形式为

$$\text{II} = a(d\theta d\theta + \cos^2 \theta d\varphi d\varphi). \quad (3.15)$$

最后我们讨论第二基本形式与曲面参数选取的关系, 以及它在  $E^3$  的合同变换下的变化.

**性质 3.4** 设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  和  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{u}, \bar{v})$  是曲面  $S$  的两个不同参数表示. 当变换  $(u, v) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  是同向参数变换时, 第二基本形式不变, 即  $\text{II}(u, v) = \text{II}(\bar{u}, \bar{v})$ ; 当变换  $(u, v) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  是反向参数变换时, 第二基本形式改变符号, 即  $\text{II}(u, v) = -\text{II}(\bar{u}, \bar{v})$ .

**证明** 根据 (1.20) 式, 当参数变换同向时,  $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{n}(\bar{u}, \bar{v})$ , 利用一阶微分形式不变性, 可得

$$\text{II}(u, v) = -\langle d\mathbf{r}(u, v), d\mathbf{n}(u, v) \rangle = -\langle d\mathbf{r}(\bar{u}, \bar{v}), d\mathbf{n}(\bar{u}, \bar{v}) \rangle = \text{II}(\bar{u}, \bar{v}).$$

当参数变换反向时,  $\mathbf{n}(u, v) = -\mathbf{n}(\bar{u}, \bar{v})$ , 同理可以证明, 这时  $\text{II}(u, v) = -\text{II}(\bar{u}, \bar{v})$ .

**性质 3.5** 设  $S$  是  $E^3$  的一张曲面,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是它的参数表示;  $\mathcal{T}$  是  $E^3$  的一个合同变换, 则曲面  $\tilde{S}: \tilde{\mathbf{r}}(u, v) = \mathcal{T} \circ \mathbf{r}(u, v)$  的第二基本形式  $\tilde{\text{II}}$  与曲面  $S$  的第二基本形式  $\text{II}$  有如下关系: 当  $\mathcal{T}$  是刚体运动时  $\tilde{\text{II}}(u, v) = \text{II}(u, v)$ , 当  $\mathcal{T}$  是反向刚体运动时  $\tilde{\text{II}}(u, v) = -\text{II}(u, v)$ .

**证明** 设  $\mathcal{T}(P) = P \cdot \mathbf{T} + P_0$ . 由于  $\tilde{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{T}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{T}$ , 于是

$$\tilde{\mathbf{r}}_u \wedge \tilde{\mathbf{r}}_v = \begin{cases} \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{T} & \text{当 } \det \mathbf{T} = 1, \\ -\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{T} & \text{当 } \det \mathbf{T} = -1. \end{cases}$$

因此我们有  $\tilde{\mathbf{n}} = \text{sgn}(\det \mathbf{T})\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ . 又因为  $d\tilde{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{T}$ , 所以

$$\tilde{\text{II}} = -\langle d\tilde{\mathbf{n}}, d\tilde{\mathbf{r}} \rangle = -\text{sgn}(\det \mathbf{T})\langle d\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, d\mathbf{r} \cdot \mathbf{T} \rangle = \text{sgn}(\det \mathbf{T})\text{II}.$$

注意到  $\det \mathbf{T} = 1$  或  $-1$  分别表示  $\mathcal{T}$  是刚体运动或反向刚体运动, 所以性质成立.

### §3.4 法曲率与 Weingarten 变换

这一节我们将深入讨论曲面的形状与第二基本形式的几何意义.

设曲面  $S$  的参数表示是  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $P_0 = P(u_0, v_0)$  是曲面  $S$  上与  $(u_0, v_0)$  对应的点,  $(u(s), v(s))$  是参数区域  $D$  上的过点  $(u_0, v_0)$  的一条曲线, 且  $u_0 =$

$u(0), v_0 = v(0)$ , 则  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$  是曲面  $S$  上过点  $P_0$  的一条曲线, 且  $P_0$  对应参数  $s = 0$ . 设  $s$  是曲线  $\mathbf{r}(s)$  的弧长参数.

曲线  $\mathbf{r}(s)$  在  $P_0$  点的单位切向量为

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} = \left( \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds} \right) \Big|_{s=0}, \quad (4.1)$$

它在  $P_0$  点的曲率向量为

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|_{s=0} = \left( \mathbf{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} + \mathbf{r}_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \right) \Big|_{s=0}. \quad (4.2)$$

从上式可知, 曲率向量  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  一般不再是曲面的切向量. 所以我们将  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  分解为曲面的切向和法向两部分. 这一节我们仅考虑曲率向量沿曲面的法向部分. 设

$$k_n = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right\rangle,$$

将 (4.2) 式代入可知

$$k_n = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle \left( \frac{dv}{ds} \right)^2,$$

结合 (3.5) 式有

$$k_n = L \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left( \frac{dv}{ds} \right)^2. \quad (4.3)$$

从上式可以看出  $k_n$  只与曲线  $\mathbf{r}(s)$  在  $P_0$  点的切向量  $\left( \frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds} \right)$  以及曲面第二基本形式的系数有关, 而与曲线  $u = u(s), v = v(s)$  的选取无关. 我们把  $k_n$  称为曲面在点  $P_0$  处沿单位切向量  $\left( \frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds} \right) \Big|_{s=0}$  的法曲率. 从 (4.3) 式可以看出, 曲面的法曲率  $k_n$  是曲面在一点处关于单位切向量的二次型. 因此, 在曲面  $S$  上一点  $P_0$  处, 任取一个单位切向量

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{r}_v(u_0, v_0), \quad (4.4)$$



曲面沿切向量  $\boldsymbol{v}$  的法曲率为

$$k_n(\boldsymbol{v}) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2. \quad (4.5)$$

对  $P_0$  点处的任意非零切向量  $\boldsymbol{w} = \xi\boldsymbol{r}_u + \eta\boldsymbol{r}_v$ ,  $\frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} = \frac{\xi}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{r}_u + \frac{\eta}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{r}_v$  为单位切向量. 令

$$\lambda = \frac{\xi}{|\boldsymbol{w}|}, \quad \mu = \frac{\eta}{|\boldsymbol{w}|},$$

代入 (4.5) 式, 有

$$k_n\left(\frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}\right) = \frac{1}{|\boldsymbol{w}|^2} (L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2).$$

由于

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{w}|^2 &= \langle \xi\boldsymbol{r}_u + \eta\boldsymbol{r}_v, \xi\boldsymbol{r}_u + \eta\boldsymbol{r}_v \rangle \\ &= E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2, \end{aligned}$$

所以曲面  $S$  沿非零切向量  $\boldsymbol{w} = \xi\boldsymbol{r}_u + \eta\boldsymbol{r}_v$  的法曲率定义为

$$k_n(\boldsymbol{w}) = \frac{\text{II}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})}{\text{I}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}. \quad (4.6)$$

直观地说, 曲面沿一个方向的法曲率可视作曲面沿那个方向的弯曲程度. 特别需要指出的是, 从前面所讲的有关第一基本形式和第二基本形式的基本性质可以知道, 曲面的第一基本形式不依赖于曲面的参数选取和  $E^3$  合同变换, 而曲面的第二基本形式在同向的参数变换和  $E^3$  的刚体运动下不变, 所以法曲率在同向参数变换和曲面的刚体运动下也保持不变; 但是由于曲面的第二基本形式在反向参数变换或反向刚体运动下改变符号, 所以曲面的法曲率相应地也改变符号.

**例 4.1** 求半径为  $a$  的球面的法曲率.

从例 (2.5) 和例 (3.3) 可以知道, 球面的第一基本形式和第二基本形式相差一个常数  $\frac{1}{a}$ , 即

$$\text{II} = \frac{1}{a}\text{I}.$$

所以在半径为  $a$  的球面上任意一点, 沿任何一个方向的法曲率均为  $\frac{1}{a}$ . 这说明球面沿任何方向的弯曲是一样的.



正如前面所指出, 在反定向的参数选取下 (或经过  $E^3$  的反向刚体运动), 球面的第二基本形式和第一基本形式也可以相差一个参数  $-\frac{1}{a}$ , 即  $\text{II} = -\frac{1}{a}\text{I}$ , 读者可以用球面的参数表示 (1.7) 式验证这一事实.

**例 4.2** 计算平面和圆柱面  $\mathbf{r}(u, v) = \left(a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, v\right)$  的法曲率.

由于平面的法向量  $\mathbf{n}$  是常向量,  $d\mathbf{n} = \mathbf{0}$ , 所以平面的第二基本形式  $\text{II} \equiv 0$ , 这说明平面沿任意方向的法曲率为 0.

例 2.4 和例 3.1 已经得到圆柱面的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\text{I} = du^2 + dv^2, \quad \text{II} = -\frac{1}{a}du^2,$$

因此  $\mathbf{r}_u$  与  $\mathbf{r}_v$  是单位向量, 对任何单位切向量  $\mathbf{w} = \cos \theta \mathbf{r}_u + \sin \theta \mathbf{r}_v$  ( $\theta$  是  $\mathbf{w}$  与  $\mathbf{r}_u$  的夹角), 对应的法曲率为

$$k_n(\mathbf{w}) = \kappa_n(\theta) = -\frac{1}{a} \cos^2 \theta.$$

**例 4.3** 求二次曲面  $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$  的法曲率.

曲面的参数表示为  $\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)\right)$ , 曲面的坐标切向量为

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, ax), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, by),$$

因此曲面的第一基本形式为

$$\text{I} = (1 + a^2x^2)dx^2 + 2abxydxdy + (1 + b^2y^2)dy^2.$$

取曲面的单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y|} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2x^2 + b^2y^2}}(-ax, -by, 1),$$

又因为

$$\mathbf{r}_{xx} = (0, 0, a), \quad \mathbf{r}_{xy} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{yy} = (0, 0, b),$$

因此曲面第二基本形式为

$$\text{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2x^2 + b^2y^2}}(adx^2 + bdy^2).$$

所以, 曲面在一点沿任意单位切向量  $v = \lambda r_x + \mu r_y$  的法曲率为

$$k_n(v) = \frac{a\lambda^2 + b\mu^2}{\sqrt{1 + a^2x^2 + b^2y^2}}.$$

从上式可以发现, 法曲率  $k_n$  的符号与  $a\lambda^2 + b\mu^2$  的符号相同. 当  $ab > 0$  时,  $k_n$  均同时为正或为负; 当  $ab < 0$  时,  $k_n(v) = 0$  (关于  $v$ ) 有两个线性无关的解; 当  $ab = 0$  ( $a, b$  不全为零) 时,  $k_n(v) = 0$  有一个解.

当  $ab > 0$  时, 曲面是椭圆抛物面; 当  $ab < 0$  时, 曲面是双曲抛物面; 当  $a, b$  有一个为零时, 曲面是抛物柱面. 不难发现, 二次曲面  $= \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$  法曲率符号的变化与曲面的形状密切相关.

在第三节 (性质 3.2) 我们讨论了第二基本形式在一点的值与曲面在这一点附近形状的关系. 这里我们将进一步讨论这种关系.

由 (4.5) 式, 在一点  $P$ , 曲面沿一个单位切向量  $v = \lambda r_u + \mu r_v \in T_P S$  的法曲率为  $k_n(v) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$ , 并且  $k_n(v) = k_n(-v)$ . 我们有

1. 当  $LN - M^2 > 0$  时, 沿  $P$  点任何切向的法曲率同时为正或为负. 这说明曲面在该点沿任意方向的弯曲是同向的. 这样的点称为曲面的椭圆点.

2. 当  $LN - M^2 < 0$  时,  $k_n(v) = 0$  关于  $v$  恰好有两个线性无关的解, 这两个方向称为曲面在该点的渐近方向. 这两个渐近方向将切平面分割为四个区域, 在相对的两个区域上, 法曲率的符号相等. 这样的点称为曲面的双曲点.

3. 当  $LN - M^2 = 0$  时, 这样的点称为曲面的抛物点. 当  $L, M, N$  不全为零时, 仅有一个切方向使法曲率  $k_n$  为零, 这个方向亦称作曲面在该点的渐近方向; 这个渐近方向将切平面分割为两个区域, 在这两个区域内法曲率均不为 0, 且它们的符号相等; 当  $L = M = N = 0$  时, 法曲率  $k_n$  沿任何方向均为零, 这样的点又称作平点.

前面我们利用曲面的第一、第二基本形式讨论了曲面的法曲率. 通过研究曲面法向量的变化来研究曲面的几何, 是另一种重要的方法, 为此我们定义 Gauss 映射如下:

设曲面  $S$  的参数表示为  $r = r(u, v)$ , 它在每点有一个确定的单位法向量

$$n(u, v) = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}.$$

平行移动  $n$  使之起点落在原点, 则  $n$  的终点就落在  $E^3$  的单位球面  $S^2$  上. 这样就得到一个映射

$$g: S \rightarrow S^2, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{r}(u, v) \rightarrow \mathbf{n}(u, v),$$

称为曲面  $S$  的 Gauss 映射, 见图 3.8.

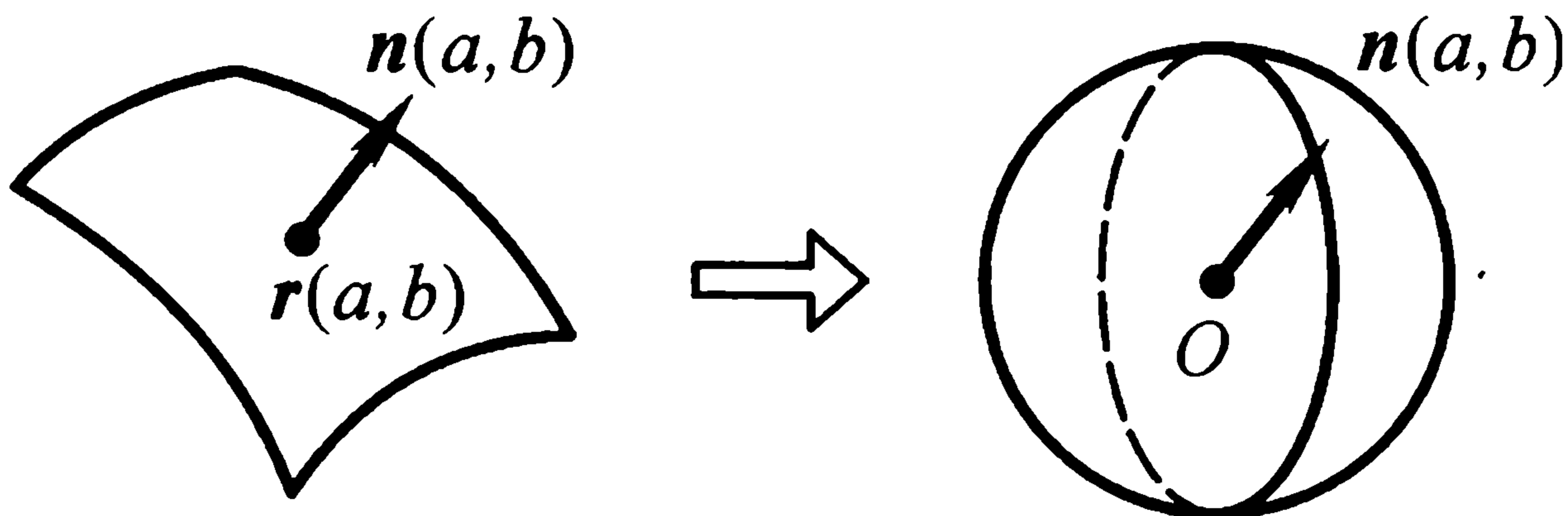


图 3.8

设  $(u(t), v(t))$  是参数区域  $D$  上的一条曲线,  $\mathbf{r}(u(t), v(t))$  是曲面  $S$  上相应的曲线. Gauss 映射  $g$  沿这条曲线求微分, 就有

$$\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt} = \mathbf{n}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{n}_v \frac{dv}{dt}. \quad (4.8)$$

由于  $\mathbf{n}$  是单位向量, 所以  $\langle \frac{d\mathbf{n}}{dt}, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 即  $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$  是曲面  $S$  的切向量; 特别,  $\mathbf{n}_u$  和  $\mathbf{n}_v$  都是曲面的切向量. 从 (4.8) 还可以看出, 切向量  $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$  只与切向  $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$  有关, 而与曲线  $(u(t), v(t))$  的选取无关. 这表明,

$$\left( \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) \rightarrow \frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{n}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{n}_v \frac{dv}{dt}$$

是切向量间的一个对应. 因此, 可以定义一个切平面到切平面的线性变换:

$$\mathcal{W}: T_P S \rightarrow T_P S, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r}_u + \mu \mathbf{r}_v \rightarrow \mathcal{W}(\mathbf{v}) = -(\lambda \mathbf{n}_u + \mu \mathbf{n}_v),$$

$\mathcal{W}$  称为曲面的 Weingarten 变换.

**性质 4.4** Weingarten 变换与曲面的参数选取无关.

**证明** 设  $(u, v)$  和  $(\bar{u}, \bar{v})$  是曲面的两组参数,  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ , 并设  $\mathbf{v}$  为曲面  $S$  上一点的一个切向量. 设  $(\lambda, \mu)$  和  $(a, b)$  分别是  $\mathbf{v}$  在不同坐标切向量下的分量, 即  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{r}_u + \mu \mathbf{r}_v = a \mathbf{r}_{\bar{u}} + b \mathbf{r}_{\bar{v}}$ , 那么由基变换公式 (1.21) 有

$$\lambda = a \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + b \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}, \quad \mu = a \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + b \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.$$

依 Weingarten 变换的定义, 在参数  $(u, v)$  下,

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{W}(\lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v) = -(\lambda \boldsymbol{n}_u + \mu \boldsymbol{n}_v),$$

在参数  $(\bar{u}, \bar{v})$  下,

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{W}(a \boldsymbol{r}_{\bar{u}} + b \boldsymbol{r}_{\bar{v}}) = -(a \boldsymbol{n}_{\bar{u}} + b \boldsymbol{n}_{\bar{v}}).$$

由于  $\boldsymbol{n}_{\bar{u}} = \boldsymbol{n}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \boldsymbol{n}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$ ,  $\boldsymbol{n}_{\bar{v}} = \boldsymbol{n}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \boldsymbol{n}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$ , 所以

$$\begin{aligned} a \boldsymbol{n}_{\bar{u}} + b \boldsymbol{n}_{\bar{v}} &= a \left( \boldsymbol{n}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \boldsymbol{n}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) + b \left( \boldsymbol{n}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \boldsymbol{n}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \boldsymbol{n}_u \left( a \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + b \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right) + \boldsymbol{n}_v \left( a \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + b \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \\ &= \lambda \boldsymbol{n}_u + \mu \boldsymbol{n}_v. \end{aligned}$$

这就给出了性质的证明.

利用 Weingarten 变换, 我们可以给出法曲率的另一描述.

**性质 4.5** 对曲面  $S$  的任意单位切向量  $\boldsymbol{v}$ , 曲面  $S$  沿  $\boldsymbol{v}$  方向的法曲率可表为

$$k_n(\boldsymbol{v}) = \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle.$$

**证明** 设  $S$  的参数是  $(u, v)$ ,  $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v$ , 则

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle &= -\langle \lambda \boldsymbol{n}_u + \mu \boldsymbol{n}_v, \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v \rangle \\ &= \lambda^2 L + 2\lambda\mu M + \mu^2 N \\ &= k_n(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

证毕.

有关 Weingarten 变换的一个重要性质是下面的定理:

**定理 4.6** Weingarten 变换是曲面切平面到自身的自共轭变换, 即  $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_P S$ ,

$$\langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mathcal{W}(\boldsymbol{w}) \rangle.$$

**证明** 设  $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v$ ,  $\boldsymbol{w} = \xi \boldsymbol{r}_u + \eta \boldsymbol{r}_v$  是  $P$  点的两个切向量, 由于  $\langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}_v \rangle = \langle \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{n}_u \rangle$ , 我们有

$$\begin{aligned}
-\langle \mathcal{W}(v), w \rangle &= \langle \lambda n_u + \mu n_v, \xi r_u + \eta r_v \rangle \\
&= \lambda \xi \langle n_u, r_u \rangle + \lambda \eta \langle n_u, r_v \rangle + \mu \xi \langle n_v, r_u \rangle + \mu \eta \langle n_v, r_v \rangle \\
&= \langle \lambda r_u + \mu r_v, \xi n_u + \eta n_v \rangle \\
&= -\langle v, \mathcal{W}(w) \rangle.
\end{aligned}$$

证毕.

### §3.5 主曲率与 Gauss 曲率

在上一节的最后我们讨论了曲面的 Weingarten 变换, 它是曲面切平面到自身的一个自共轭变换. 由线性代数理论知 Weingarten 变换的两个特征值是实数. 对  $P \in S$ , 设  $k$  是 Weingarten 变换  $\mathcal{W}: T_P S \rightarrow T_P S$  的一个特征值,  $v$  是相应的单位特征向量, 由

$$\langle \mathcal{W}(v), v \rangle = \langle kv, v \rangle = k$$

以及性质 4.5 我们知道,  $k$  是曲面沿切方向  $v$  的法曲率. 我们把 Weingarten 变换在  $P$  点的两个特征值称为曲面  $S$  在  $P$  点的主曲率. 特征值对应的两个 (实) 特征方向称为曲面在  $P$  点的主方向. 从线性代数理论我们知道, 当两个主曲率不相等时, 相应的两个主方向完全确定, 且相互正交. 当两个主曲率相等时, 主方向不能惟一确定, 这时曲面在该点的任一切向都是主方向.

为了计算曲面的主曲率, 我们首先要求 Weingarten 变换在坐标切向量下的系数矩阵. 设曲面  $S$  的参数表示为  $r(u, v)$ , 在切平面的基  $\{r_u, r_v\}$  下

Weingarten 变换的系数矩阵是  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 即

$$\mathcal{W}(r_u) = -n_u = ar_u + br_v, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{W}(r_v) = -n_v = cr_u + dr_v. \quad (5.2)$$

将 (5.1) 式分别与  $r_u, r_v$  作内积, 可得

$$L = aE + bF,$$

$$M = aF + bG.$$

求解以上线性方程组, 得

$$a = \frac{LG - MF}{EG - F^2}, \quad b = \frac{ME - LF}{EG - F^2}.$$

类似地将 (5.2) 式分别与  $r_u, r_v$  做内积, 得

$$M = cE + dF,$$

$$N = cF + dG,$$

求解, 得

$$c = \frac{MG - NF}{EG - F^2}, \quad d = \frac{NE - MF}{EG - F^2}.$$

所以 Weingarten 变换的系数矩阵为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & ME - LF \\ MG - NF & NE - MF \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

从 (5.3) 式可以知道主曲率  $k$  须满足方程

$$k^2 - \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0. \quad (5.4)$$

记曲面的两个主曲率(即方程 (5.4) 的两个根)为  $k_1, k_2$ . 我们把  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  称为曲面的 平均曲率,  $K = k_1 k_2$  称为曲面的 Gauss 曲率. 由根和系数的关系有

$$H = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \quad (5.5)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (5.6)$$



而且从 (5.3) 不难看出, Gauss 曲率  $K$  还满足

$$\boldsymbol{n}_u \wedge \boldsymbol{n}_v = (ad - bc)\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v = K\boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v. \quad (5.7)$$

下面我们考察法曲率和主曲率的关系. 设  $P \in S$ , 取  $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$  是曲面  $S$  在  $P$  点的主方向, 且  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$  构成  $T_P S$  的单位正交基. 按主方向的定义, 有  $\mathcal{W}(\boldsymbol{e}_i) = k_i \boldsymbol{e}_i, i = 1, 2$ . 这时对任意的单位向量  $\boldsymbol{v} \in T_P S$ , 设

$$\boldsymbol{v} = \cos \theta \boldsymbol{e}_1 + \sin \theta \boldsymbol{e}_2,$$

其中  $\theta$  为  $\boldsymbol{v}$  与  $\boldsymbol{e}_1$  的夹角, 不难看出, 沿  $\boldsymbol{v}$  方向曲面的法曲率

$$\begin{aligned} k_n(\boldsymbol{v}) &= \langle \mathcal{W}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle \cos \theta k_1 \boldsymbol{e}_1 + \sin \theta k_2 \boldsymbol{e}_2, \cos \theta \boldsymbol{e}_1 + \sin \theta \boldsymbol{e}_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

因此我们有

**性质 5.1(Euler公式)** 设  $k_1, k_2$  是曲面在一点  $P$  的主曲率,  $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$  是相应的正交主方向. 设  $\boldsymbol{v} \in T_P S$  是一个单位向量,  $\boldsymbol{v}$  与  $\boldsymbol{e}_1$  的夹角为  $\theta$ , 则曲面在  $P$  点沿  $\boldsymbol{v}$  方向的法曲率为

$$k_n(\boldsymbol{v}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (5.8)$$

从以上 Euler 公式可以看出, 当主曲率  $k_1, k_2$  不等时, 法曲率在主方向上取极大值或极小值; 当主曲率  $k_1, k_2$  相等时, 法曲率与切方向无关.

为进一步了解主曲率的几何意义, 我们考察曲面在一点的二阶近似.

**引理 5.2** 设  $P$  是曲面  $S$  上的一点,  $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$  是该点的单位正交主方向, 则存在  $S$  的参数  $(u, v)$  使得  $\boldsymbol{r}_u(P) = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{r}_v(P) = \boldsymbol{e}_2$ .

**证明** 设曲面  $S$  的参数为  $(u, v)$ , 在点  $P$ , 存在可逆的常值矩阵  $A$  使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v \end{bmatrix} (P).$$

作参数变换  $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)A^{-1}$ , 则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{\bar{u}} \\ \boldsymbol{r}_{\bar{v}} \end{bmatrix} (P) = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_u \\ \boldsymbol{r}_v \end{bmatrix} (P) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}.$$



证毕.

设  $P$  是曲面  $S$  上的一点, 由上述引理, 可以取  $S$  的参数  $(u, v)$  使得  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_u(P)$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_v(P)$  是该点的单位正交主方向, 这时曲面在该点的第二基本形式满足

$$\begin{aligned} L(P) &= \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle(P) = -\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_u \rangle(P) = \langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 \rangle = k_1, \\ M(P) &= \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle(P) = -\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_v \rangle(P) = \langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle = 0, \\ N(P) &= \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle(P) = -\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{r}_v \rangle(P) = \langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \rangle = k_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

经过  $E^3$  适当的旋转变换, 可以取  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ 、 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ , 则  $\mathbf{n}(P) = \mathbf{k}$ . 利用 (5.9) 式, 曲面在  $P$  点的二阶近似可表为 (参见 (3.7) 式)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \\ &= \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \mathbf{r}_{uu}(u_0, v_0)\Delta u\Delta u + 2\mathbf{r}_{uv}(u_0, v_0)\Delta u\Delta v + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{r}_{vv}(u_0, v_0)\Delta v\Delta v \right) + o(\Delta u\Delta u + \Delta v\Delta v) \\ &= \left( \Delta u + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}) \right) \mathbf{i} + \\ &\quad \left( \Delta v + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}) \right) \mathbf{j} + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( k_1\Delta u\Delta u + k_2\Delta v\Delta v + o((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2) \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

由此我们得到一个二次曲面  $S^*$  :

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{1}{2}(k_1u^2 + k_2v^2). \end{cases} \quad (5.11)$$

这个曲面是曲面  $S$  在  $P$  点的二阶近似曲面. 当 Gauss 曲率  $K = k_1k_2 > 0$  时,  $P$  是椭圆点,  $S^*$  是椭圆抛物面; 当  $K < 0$  时,  $P$  是双曲点,  $S^*$  是双曲抛物面; 当  $K = 0$  时,  $P$  是抛物点,  $S^*$  是抛物柱面.

一个特殊的情形是曲面在一点  $P$  的两个主曲率相等, 这时曲面在该点沿任何方向的法曲率都相等. 对任意非 0 向量  $w = \xi r_u + \eta r_v \in T_P S$ ,

$$k_n\left(\frac{w}{|w|}\right) = k_1 = k_2 = k$$

是与  $\xi, \eta$  无关的数. 根据 (4.6) 式, 有

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = k(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2).$$

由  $\xi, \eta$  的任意性, 我们知道在  $P$  点有

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = k. \quad (5.12)$$

这时点  $P$  称为曲面的脐点. 特别, 当  $k \neq 0$  时点  $P$  称为圆点; 当  $k = 0$  时,  $L = M = N = 0$ , 这时点  $P$  是曲面的平点. 直观地讲, 在脐点处, 曲面沿任何切方向的弯曲程度是一样的.

最后我们从 Gauss 映射来探讨 Gauss 曲率的几何意义. 在上一章我们发现, 平面曲线的曲率是曲线的 Gauss 映射像在单位圆上的位移速度. 而对曲面而言, 我们需要比较 Gauss 映射像的面积与曲面的面积.

设曲面  $S$  的面积元为

$$dA = \langle r_u \wedge r_v, n \rangle dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad (5.13)$$

它是曲面  $S$  上由参数  $u \rightarrow u + du, v \rightarrow v + dv$  所围的小平行四边形  $\Delta$  的面积, 如图 3.9.

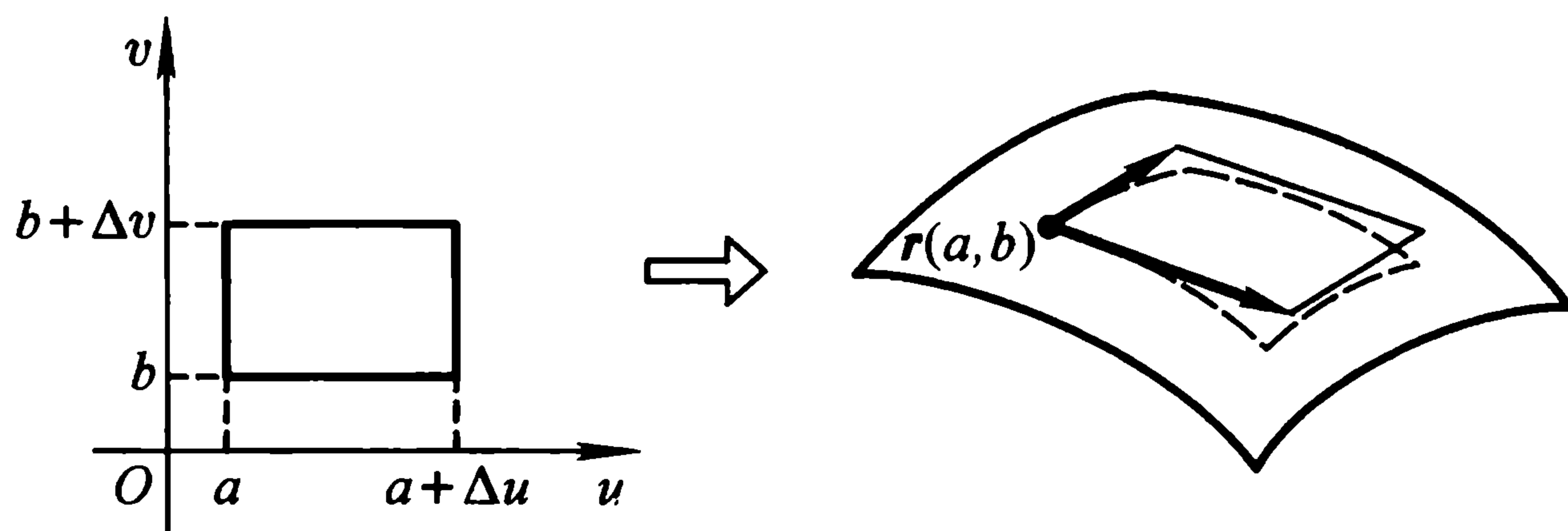


图 3.9

在 Gauss 映射  $g$  下,  $g(\Delta)$  的 (定向) 面积  $d\sigma$  为

$$\langle (n(u + du, v) - n(u, v)) \wedge (n(u, v + dv) - n(u, v)), n(u, v) \rangle$$

$$\approx \langle n_u \wedge n_v, n \rangle dudv,$$

利用 (5.7) 式有

$$d\sigma = \langle \mathbf{n}_u \wedge \mathbf{n}_v, \mathbf{n} \rangle du dv = K dA,$$

其中  $K$  是 Gauss 曲率. 因此若  $D$  是  $S$  上包含点  $P$  的一个区域,  $\mathbf{g}(D)$  是  $D$  在 Gauss 映射下的像,

$$\text{Area}(\mathbf{g}(D)) = \int_{\mathbf{g}(D)} d\sigma = \int_D K dA,$$

当  $D$  趋向于  $P$  时

$$\lim_{D \rightarrow P} \frac{\text{Area}(\mathbf{g}(D))}{\text{Area}(D)} = K(P).$$

上式说明了 Gauss 曲率的几何意义, 既通过 Gauss 映射反映的曲面在一点的弯曲程度, 正好是该点的 Gauss 曲率.

### §3.6 曲面的一些例子

这一节我们利用前面所讲的曲面一般理论, 来研究一些简单的曲面.

#### 1. 旋转曲面

对于旋转曲面 (例 (1.3))

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (f > 0), \quad (6.1)$$

有

$$\mathbf{r}_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{r}_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0).$$

直接计算得出

$$E = (f')^2 + (g')^2, \quad F = 0, \quad G = f^2,$$

$$L = \frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}},$$

$$M = 0, \quad N = \frac{fg'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}},$$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{(f'g'' - f''g')g'}{((f')^2 + (g')^2)^2 f}, \\
 H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{f'g'' - f''g'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} \right\}, \\
 k_1 &= \frac{f'g'' - f''g'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 k_2 &= \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

如果我们选取参数  $u$  为  $xz$  平面上的曲线  $(f(u), g(u))$  的弧长参数, 即

$$(f')^2 + (g')^2 = 1, \tag{6.4}$$

则有关旋转曲面的那些几何量会变得较为简单. 这时对 (6.4) 求微分, 有

$$f'f'' + g'g'' = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}
 (f'g'' - f''g')g' &= f'g'g'' - f''g'g' \\
 &= -f'f'f'' - f''(1 - f'f') \\
 &= -f'',
 \end{aligned}$$

最后代入 (6.3) 式, 我们得到

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{f''}{f}, & H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} \right\}, \\
 k_1 &= -\frac{f''}{g'}, & k_2 &= \frac{g'}{f}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

利用上面所得到的有关旋转曲面的公式, 我们可以求解 Gauss 曲率和平均曲率为常数的旋转曲面.

### 1) 常 Gauss 曲率旋转曲面

(1a)  $K = c^2 > 0$ : 由 (6.5) 式, 有常微分方程

$$f''(u) + c^2 f(u) = 0. \tag{6.6}$$

解为

$$f(u) = A \cos cu + B \sin cu, \quad (6.7)$$

因此

$$\begin{aligned} g(u) &= \pm \int_0^u \sqrt{1 - (f'(t))^2} dt \\ &= \pm \int_0^u \sqrt{1 - c^2(-A \sin ct + B \cos ct)^2} dt. \end{aligned} \quad (6.8)$$

当  $B = 0, A = \frac{1}{c}$  时,

$$f = \frac{1}{c} \cos cu, \quad g = \pm \frac{1}{c} \sin cu,$$

这时曲面是半径为  $\frac{1}{c}$  的球面.

(1b)  $K = 0$ : 这时相应的方程为  $f''(u) = 0$ , 它的解为

$$f(u) = Au + b, \quad g(u) = \pm \sqrt{1 - A^2}u + C, \quad (6.9)$$

其中  $0 \leq A \leq 1$ . 当  $A = 0$  时, 曲面是圆柱面; 当  $A = 1$  时曲面是平面; 当  $0 < A < 1$  时, 曲面是圆锥面.

(1c)  $K = -c^2 < 0$ : 这时相应的方程为  $f'' - c^2 f = 0$ , 它的解为

$$f(u) = A \cosh cu + B \sinh cu, \quad (6.10)$$

$$g(u) = \pm \int \sqrt{1 - c^2(A \sinh cu + B \cosh cu)^2} du. \quad (6.11)$$

特别, 当

$$f(u) = \frac{1}{c} e^{-cu}, \quad (6.12)$$

$$g(u) = \pm \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2ct}} dt \quad (6.13)$$

时, 曲面称为伪球面, 如图 3.10.

## 2) 常平均曲率旋转曲面

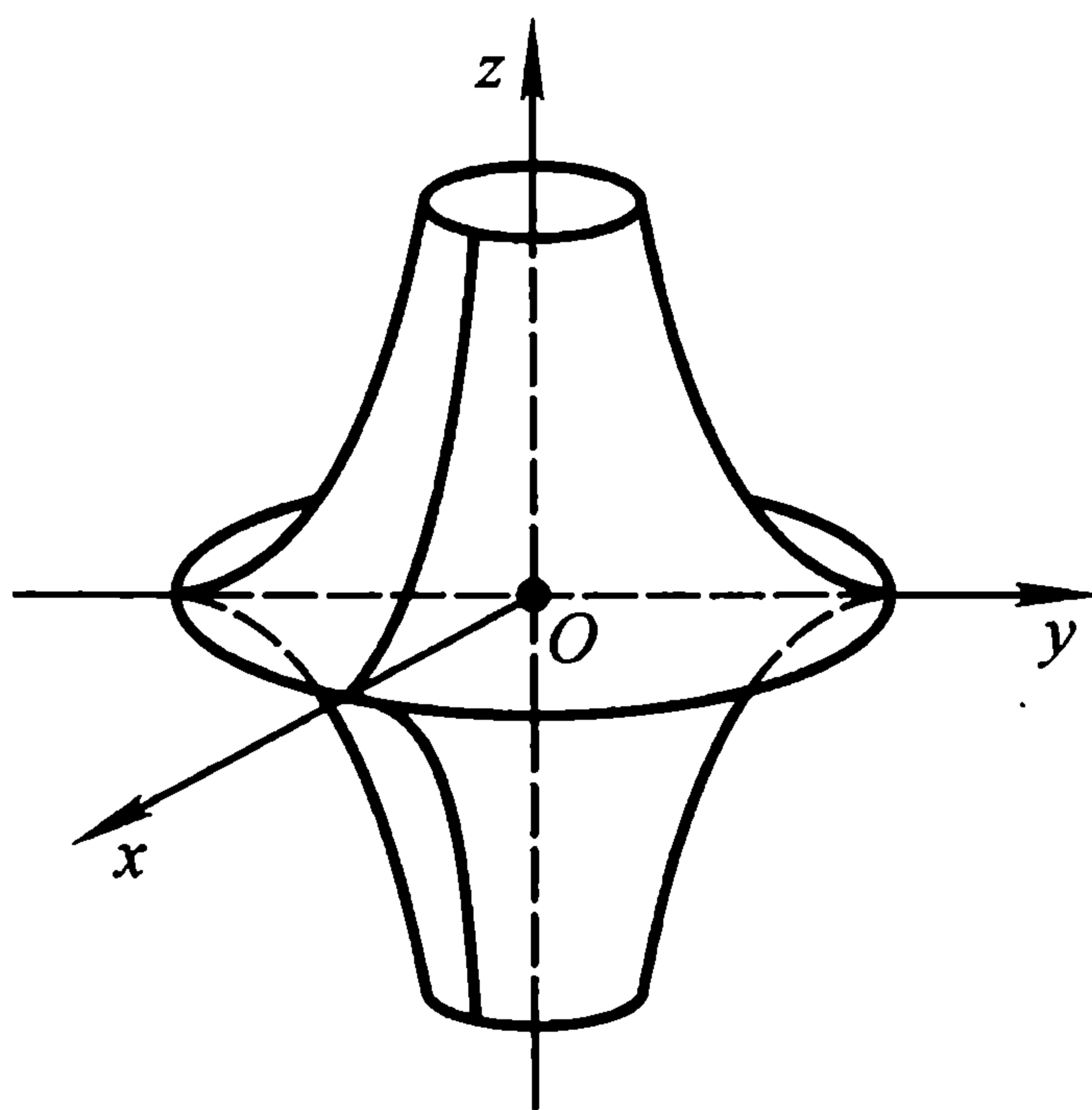


图 3.10

(2a)  $H = 0$  :  $H = 0$  的曲面称作 极小曲面. 从 (6.5) 式和 (6.4) 式可以得出

$$ff'' = (g')^2 = 1 - (f')^2, \quad (6.14)$$

即

$$(ff')' = (f')^2 + ff'' = 1. \quad (6.15)$$

对上式积分有

$$\frac{1}{2}(f^2)' = ff' = u + A. \quad (6.16)$$

再积分一次有

$$f^2 = u^2 + 2Au + B, \quad (6.17)$$

$$f = \sqrt{u^2 + 2Au + B}.$$

因此

$$g'(u) = \pm \sqrt{1 - (f')^2} = \pm \sqrt{\frac{B - A^2}{u^2 + 2Au + B}}. \quad (6.18)$$

一个简单的情形是当  $A = 0, B = a^2$  时 (这可以通过对  $u$  作参数变换得到),

$$\begin{cases} x = f(u) = \sqrt{u^2 + a^2}, \\ z = g(u) = \pm \int_0^u \frac{adt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \pm a \operatorname{ar} \sinh \frac{u}{a}, \end{cases} \quad (6.19)$$

消去  $u$ ，得到

$$x = a \cosh \frac{z}{a}, \quad (6.20)$$

这恰好是  $xz$  平面的一条悬链线 (Catenary)，它绕  $z$  轴旋转生成的曲面称为悬链面 (Catenoid)，如图 3.11.

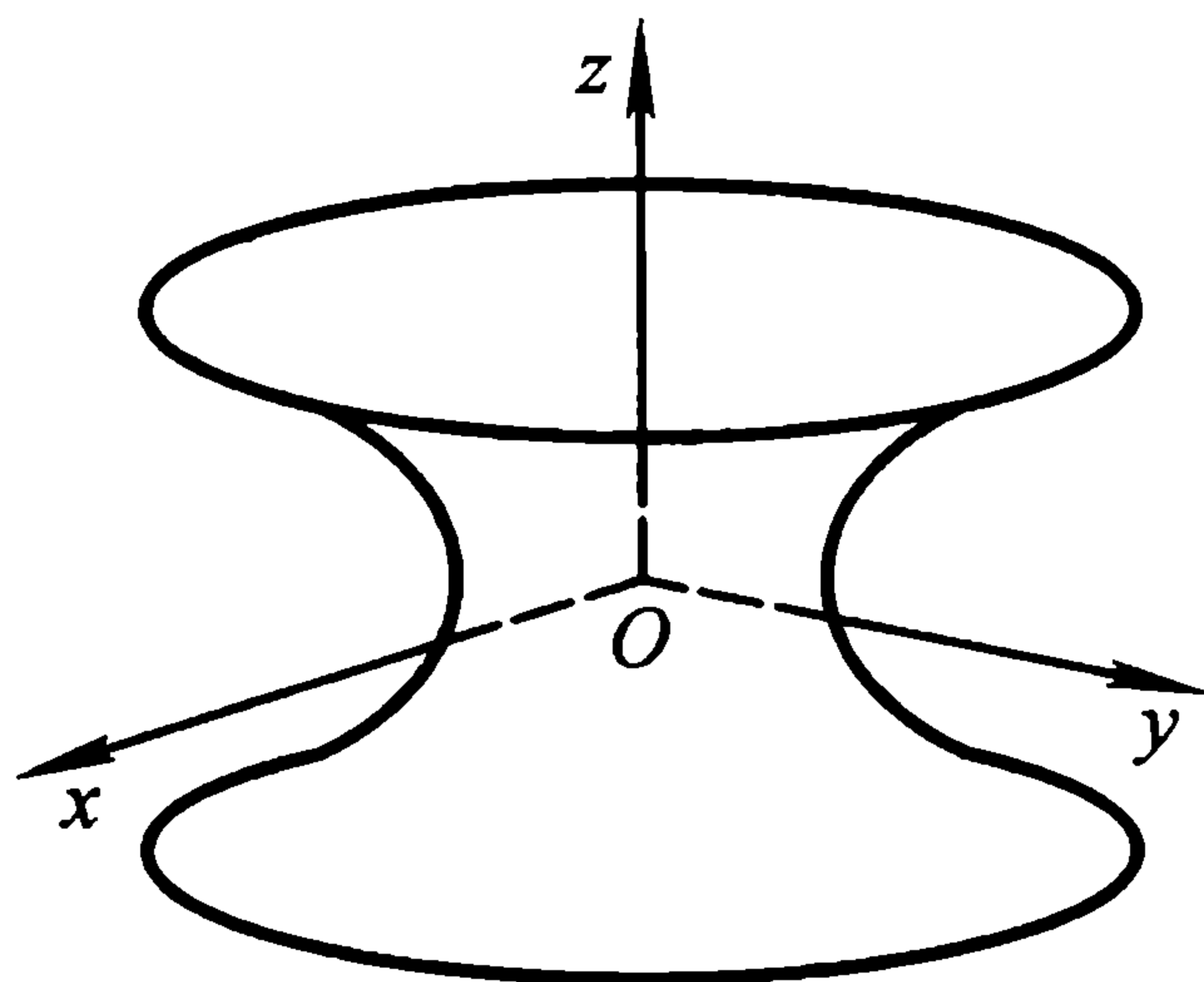


图 3.11

(2b)  $H$  为非零常数时，我们需要求解母线  $(f(u), g(u))$  满足的常微分方程

$$\frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} = 2H. \quad (6.21)$$

利用  $g' = \sqrt{1 - (f')^2}$ ，有

$$\begin{aligned} \frac{d(g'f)}{df} &= g' + f \frac{dg'}{du} \frac{1}{f'} = g' - \frac{ff''}{g'} \\ &= f \left( \frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'} \right) = 2Hf. \end{aligned} \quad (6.22)$$

由此可以求出  $g'f = Hf^2 - A^2$ ，从而  $f' = \frac{\sqrt{f^2 - (Hf^2 - A^2)^2}}{f}$ 。为求解函数  $f$  满足的常微分方程

$$\frac{df}{du} = \frac{\sqrt{f^2 - (Hf^2 - A^2)^2}}{f},$$

令  $B^2 = 1 + 4A^2H$ ，我们有

$$\frac{4H^2 df^2}{\sqrt{4B^2 - (4H^2 f^2 - (1 + B^2))^2}} = 2H du, \quad (6.23)$$



积分得

$$\arcsin \frac{(2Hf)^2 - (1 + B^2)}{2B} = 2Hu + C. \quad (6.24)$$

经过参数  $u$  适当的变换, 可以取积分常数  $C = 0$ , 因此我们有

$$f = \frac{1}{2H} \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin 2Hu} \quad (6.25)$$

以及

$$g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (f'(t))^2} dt = \int_0^u \frac{1 + B \sin 2Ht}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin 2Ht}} dt. \quad (6.26)$$

旋转常平均曲率曲面又称 Delaunay 曲面.

## 2. 直纹面与可展曲面

直纹面是指由单参数直线族构成的曲面, 它的参数表达式为

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad (6.27)$$

其中  $\mathbf{a}(u)$  是一条空间曲线,  $\mathbf{b}(u)$  是 (随  $u$  变化的) 一个方向, 固定  $u$  时,  $\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$  是过点  $\mathbf{a}(u)$ 、沿方向  $\mathbf{b}(u)$  的一条直线, 称为直纹面的直母线. 例如单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

就是一个直纹面, 它的一个参数表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (a(\cos u - v \sin u), b(\sin u + v \cos u), cv) \\ &= (a \cos u, b \sin u, 0) + v(-a \sin u, b \cos u, c). \end{aligned}$$

对直纹面而言, 由 (6.27) 式可以得出

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{a}'(u) + v\mathbf{b}'(u), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{b}(u), \quad (6.28)$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \mathbf{a}''(u) + v\mathbf{b}''(u), \quad \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu} = \mathbf{b}'(u), \quad \mathbf{r}_{vv} = 0.$$

所以  $N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 因此直纹面的 Gauss 曲率

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} \leq 0. \quad (6.29)$$

Gauss 曲率恒为零的直纹面称为可展曲面. 为给出可展曲面的分类, 我们首先讨论可展曲面的一些性质.

**性质 6.1** 直纹面  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$  是可展曲面当且仅当它满足下列条件之一:

$$(1) (\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 0,$$

$$(2) \text{ 沿着直母线, 直纹面的法向量不变, 即 } \mathbf{n}(u, v_1) = \mathbf{n}(u, v_2) (v_1 \neq v_2).$$

**证明** 我们仅证明 (1), (2) 的证明留作习题.

由 (6.29) 式可以发现, 直纹面 (6.27) 是可展曲面当且仅当  $M \equiv 0$ , 这等价于  $\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}'(u), \mathbf{n} \rangle \equiv 0$ , 即  $\mathbf{b}'$  是直纹面的切向量. 因此  $\mathbf{b}'$  是  $\mathbf{r}_u = \mathbf{a}' + v\mathbf{b}'$  与  $\mathbf{r}_v = \mathbf{b}$  的线性组合; 或者说, 直纹面是可展曲面等价于  $\mathbf{b}'$  是  $\mathbf{a}'$  和  $\mathbf{b}$  的线性组合, 这等价于

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 0.$$

证毕.

下面是可展曲面的一些例子.

**例 6.2** 设直纹面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$ , 当  $\mathbf{a}$  是常值向量  $\mathbf{a}_0$  时, 称它为以  $\mathbf{a}_0$  为顶点的锥面, 这时  $S$  的直母线均过定点; 当方向  $\mathbf{b}$  与  $u$  无关, 即  $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$  是常向量时, 称它为柱面, 这时  $S$  的直母线均平行.

设  $\mathbf{r}(t)$  是空间的一条正则曲线, 它的切线全体构成空间的一张曲面, 这个曲面可以表示为

$$\mathbf{r}(v, t) = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{r}'(t).$$

这类曲面称为切线面.

利用性质 6.1 不难验证, 锥面、柱面、切线面均为可展曲面.

**可展曲面的分类:**

设可展曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$ , 满足

$$(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = 0. \quad (6.30)$$

1. 若  $\mathbf{b}(u) \wedge \mathbf{b}'(u) \equiv \mathbf{0}$ , 由第一章习题 2 知,  $\mathbf{b}(u)$  的方向不变, 故曲面  $S$  的直母线平行, 这时  $S$  为柱面.

2. 若  $\mathbf{b}(u) \wedge \mathbf{b}'(u) \neq \mathbf{0}$  , 即  $\mathbf{b}(u)$  和  $\mathbf{b}'(u)$  线性独立, (6.30) 式意味着  $\mathbf{a}'(u)$  可以表成

$$\mathbf{a}'(u) = \lambda(u)\mathbf{b}(u) + \mu(u)\mathbf{b}'(u). \quad (6.31)$$

令  $\tilde{\mathbf{a}}(u) = \mathbf{a}(u) - \mu(u)\mathbf{b}(u)$  , 则

$$\tilde{\mathbf{a}}'(u) = (\lambda(u) - \mu'(u))\mathbf{b}(u). \quad (6.32)$$

(2a) 若  $\tilde{\mathbf{a}}'(u) \equiv \mathbf{0}$  , 则  $\tilde{\mathbf{a}}(u) = \text{常向量 } \mathbf{a}_0$  , 因此, 从曲面  $S$  的参数表示可以得出

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}_0 + (\mu(u) + v)\mathbf{b}(u). \quad (6.33)$$

容易发现  $S$  的直母线均过点  $\mathbf{a}_0$  , 此时  $S$  为锥面.

(2b) 若  $\tilde{\mathbf{a}}'(u) \neq \mathbf{0}$  , 则  $\tilde{\mathbf{a}}(u)$  是一条正则曲线. 曲面的参数表示式可改写为

$$\mathbf{r}(u, v) = \tilde{\mathbf{a}}(u) + \frac{\mu(u) + v}{\lambda(u) - \mu'(u)} \tilde{\mathbf{a}}'(u). \quad (6.34)$$

这说明  $S$  的直母线是曲线  $\tilde{\mathbf{a}}(u)$  的切线, 此时  $S$  是切线面.

### 3. 全脐点曲面

曲面  $S$  称为是全脐点曲面, 若  $S$  的每一个点都是脐点. 由 (5.12) 式知,  $S$  是全脐点曲面当且仅当曲面的第一基本形式 I 和第二基本形式 II 满足

$$\text{II} = k \text{ I}, \quad (6.35)$$

其中  $k$  是曲面  $S$  上的函数.

**定理 6.3** 曲面是全脐点曲面当且仅当它是平面或球面.

**证明** 充分性: 已知平面的第二基本型  $\text{II} = 0$  , 因此平面是全脐点曲面. 设  $\mathbf{r}(u, v)$  是以原点为球心、 $a$  为半径的球面, 它的单位法向量是  $\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}}{a}$ . 这推出  $d\mathbf{n} = \pm \frac{1}{a}d\mathbf{r}$  , 所以球面也是全脐点曲面.

必要性: 设全脐点曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r}(u, v)$  , 由 (6.35) 式知有函数  $k(u, v)$  使得

$$L = kE, \quad M = kF, \quad N = kG. \quad (6.36)$$

因此有

$$\langle \mathbf{n}_u + k\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = -L + kE = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}_u + k\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = -M + kF = 0,$$

同时我们有

$$\langle \mathbf{n}_u + k\mathbf{r}_u, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

由于  $\mathbf{r}_u$ 、 $\mathbf{r}_v$ 、 $\mathbf{n}$  线性无关, 上述三式意味着

$$\mathbf{n}_u + k\mathbf{r}_u = \mathbf{0}. \quad (6.37)$$

同理我们有

$$\mathbf{n}_v + k\mathbf{r}_v = \mathbf{0}. \quad (6.38)$$

对 (6.37) 和 (6.38) 两式求偏导得

$$\mathbf{n}_{uv} + k\mathbf{r}_{uv} + k_v\mathbf{r}_u = \mathbf{0}, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{n}_{vu} + k\mathbf{r}_{vu} + k_u\mathbf{r}_v = \mathbf{0}, \quad (6.40)$$

上面两式相减, 有

$$k_v\mathbf{r}_u - k_u\mathbf{r}_v = \mathbf{0}. \quad (6.41)$$

因为  $\mathbf{r}_u$  与  $\mathbf{r}_v$  线性无关, 所以  $k_u = k_v = 0$ , 即  $k$  是常值函数.

1. 当  $k = 0$  时,  $S$  的第二基本形式  $II = 0$ , 不难推出曲面  $S$  的法向量  $\mathbf{n}$  是常向量, 这时  $S$  是平面.

2. 当  $k \neq 0$  时, 由 (6.37)、(6.38) 两式,  $\mathbf{n} + k\mathbf{r}$  是常向量, 设它为  $\mathbf{a}$ , 则

$$\left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{a}}{k} \right|^2 = \left| \frac{\mathbf{n}}{k} \right|^2 = \frac{1}{k^2},$$

这时  $S$  是半径为  $\frac{1}{|k|}$  的球面. 证毕.

## 习 题 三

1. 求下列曲面的参数表达式:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{椭球面});$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{单叶双曲面});$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (\text{双叶双曲面});$$

$$(4) \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (\text{椭圆抛物面});$$

$$(5) \quad z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (\text{双曲抛物面}).$$

2. (1)  $\mathbf{r}(u, v) = (a(u+v), b(u-v), 4uv)$  是什么曲面?

(2)  $\mathbf{r}(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$  是什么曲面?

3. 求  $xy$  平面的曲线  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , 沿  $E^3$  的常方向  $\mathbf{a}$  平行移动所得的曲面的参数表达式.

4. 证明: 曲面  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$  的任意切平面过原点.

5. 设曲面  $S$  与平面  $\pi$  相交于  $P$  点, 且  $S$  位于  $\pi$  的同一侧, 证明:  $\pi$  是曲面  $S$  在  $P$  点的切平面.

6. 证明: 曲面  $S$  在  $P$  点的切平面  $T_P S$  等于曲面上过  $P$  点的曲线在  $P$  点的切向量全体.

7. 求椭球面的第一基本形式.

8. 求下列曲面的第一基本形式:

$$(1) \quad \mathbf{r}(u, v) = (f(u), g(u), v);$$

$$(2) \quad \mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv);$$

$$(3) \quad \mathbf{r}(u, v) = (a(u+v), b(u-v), u^2 + v^2).$$

9. 求曲面  $z = f(x, y)$  的第一基本形式.

10. 设  $F_\lambda(x, y, z) = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda}$  ( $a > b > c > 0$ ). 当  $\lambda \in (-\infty, c)$  时,  $F_\lambda = 1$  给出一族椭球面;  $\lambda \in (c, b)$  时,  $F_\lambda = 1$  给出一族单叶双曲面;  $\lambda \in (b, a)$  时,  $F_\lambda = 1$  给出一族双叶双曲面. 证明: 对  $E^3$  中任意一点  $P = (x, y, z)$  ( $xyz \neq 0$ ), 恰有分别属于这三族曲面的三个二次曲面过  $P$  点, 且它们在  $P$  点相互正交.

11. 设  $(x, y)$  是曲面  $\mathbf{r}(u, v)$  的另一组参数, 问:  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$  与  $\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y$  的指向是否相同?

12. 使  $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$  的参数  $(u, v)$  称为曲面的正交参数系. 给定一个曲面  $S$  以及它的一个参数表示  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , 证明: 对曲面  $S$  上任一点  $P_0 = P(u_0, v_0)$ , 存在  $P_0$  的邻域  $D$  以及  $D$  的新参数  $(s, t)$ , 使得  $(s, t)$  是曲面  $S$  的正交参数系.

13. 在曲面  $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  上一点, 由方程  $Pdu^2 + 2Qdudv + Rdv^2 = 0$  确定两个切方向. 证明: 这两个切方向相互正交的充要条件是  $ER - 2FQ + GP = 0$ .

14. 求习题 8 中曲面的第二基本形式.

15. 求曲面  $z = f(x, y)$  的第二基本形式.

16. 求曲面  $F(x, y, z) = 0$  的第二基本形式.

17. 证明: 在曲面的任意一点, 任何两个相互正交的切方向的法曲率之和为常数.

18. 设曲面  $S$  由方程  $x^2 + y^2 - f(z) = 0$  给定,  $f$  满足  $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ , 证明:  $S$  在点  $(0, 0, 0)$  的法曲率为常数.

19. 定义  $\text{III} = \langle d\mathbf{n}, d\mathbf{n} \rangle$  为曲面的第三基本形式, 证明:  $K\text{I} - 2H\text{II} + \text{III} = 0$ .

20. 设曲面  $S_1$  和  $S_2$  的交线  $C$  的曲率为  $\kappa$ , 曲线  $C$  在曲面  $S_i$  上的法曲率为  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ); 若沿  $C$ ,  $S_1$  和  $S_2$  法向的夹角为  $\theta$ , 证明:

$$\kappa^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta.$$

21. 求下列曲面的 Gauss 曲率和平均曲率:

(1) 单叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

(2) 环面 (例 1.2).

22. 求曲面  $z = f(x, y)$  的平均曲率和 Gauss 曲率.

23. 求曲面  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  的椭圆点、双曲点和抛物点.

24. 求曲面  $\mathbf{r}(u, v) = (u^3, v^3, u + v)$  上抛物点的轨迹.

25. 求曲面  $\mathbf{r}(u, v) = (a(u + v), b(u - v), 4uv)$  的 Gauss 曲率、平均曲率、主曲率及对应的主方向.

26. 设  $P$  是曲面  $S$  上的一点. 证明: 当  $P$  不是脐点时,  $S$  的主曲率  $k_1, k_2$  是  $P$  附近的光滑函数; 当  $P$  是脐点时, 主曲率是  $P$  附近的连续函数.

27. 设曲面  $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  上没有抛物点,  $\mathbf{n}$  是  $S$  的法向量; 曲面  $\tilde{S}: \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \lambda \mathbf{n}(u, v)$  (常数  $\lambda$  充分小) 称为  $S$  的平行曲面.

(1) 证明曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  在对应点的切平面平行;

(2) 可以选取  $\tilde{S}$  的单位法向  $\tilde{\mathbf{n}}$ , 使得  $\tilde{S}$  的 Gauss 曲率和平均曲率分别为

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}, \quad \tilde{H} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

28. 曲面  $S$  上的一条曲线  $C$  称为曲率线, 如果  $C$  在每点的切向量都是曲面  $S$  在该点的一个主方向. 证明: 曲线  $C: \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  是曲率线当且仅当沿着  $C$ ,  $\frac{d\mathbf{n}}{dt}$  与  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  平行.

29. 设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是曲面的一个参数表示, 证明: 曲面  $S$  的参数曲线  $u = \text{常数}$  和  $v = \text{常数}$  是曲率线的充要条件是  $F = M = 0$ .

30. 求曲面  $F(x, y, z) = 0$  的曲率线所满足的微分方程.

31. 曲面  $S$  上的一个切向称为渐近方向, 如果沿此方向的法曲率为 0;  $S$  上一条曲线  $C$  称为渐近线, 如果它的切向均为渐近方向. 证明: 曲面  $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  的参数曲线是渐近线当且仅当  $L = N = 0$ .

32. 证明: 若曲面的切平面过定点, 则该曲面是锥面.

33. 证明: 直纹面是可展曲面当且仅当沿直母线, 曲面的法向不变.

34. 求曲面  $\mathbf{r}(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3(u^2 - v^2))$  的平均曲率和 Gauss 映射的像集.

35. 若曲面  $z = f(x) + g(y)$  是极小曲面, 证明: 除相差一个常数外, 它可以写成

$$z = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos ay}{\cos ax}.$$

这个曲面称为 Scherk 曲面.

36. 证明: 正螺面  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$  是极小曲面; 并证明: 直纹极小曲面是平面或正螺面.



## 第四章 标架与曲面论基本定理

上一章我们讨论了曲面的两个基本不变量：第一基本形式和第二基本形式。其中第一基本形式刻画了曲面上曲线的弧长微元，第二基本形式反映了曲面在空间中的形状。第一基本形式和第二基本形式本质上是关于参数微分  $du$ 、 $dv$  的二次型，通称二次微分式，而且第一基本形式是正定的二次微分式。微分几何中的一个基本问题是：给定了关于参数  $(u, v)$  的两个二次微分式  $\varphi = a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2$  和  $\psi = b_{11}du^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}dv^2$ ，这两个微分式在满足什么条件下，存在  $E^3$  的参数曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  使得  $\varphi$  和  $\psi$  分别是它的第一、第二基本形式？如果这样的曲面存在的话，它是否惟一？

这一章我们将证明：当二次微分式  $\varphi$  和  $\psi$  满足 Gauss 方程和 Codazzi 方程时，存在参数曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  以  $\varphi$  和  $\psi$  为它的第一、第二基本形式；在相差  $E^3$  一个刚体运动的意义下，第一基本形式和第二基本形式将完全决定曲面。我们并讨论由此引出的有关曲面理论的较深刻的结果。我们将用自然标架和正交标架两种方法讨论这些问题。

### §4.1 活动标架

活动标架的概念起源于力学，例如在研究刚体运动时，我们在刚体上联系一个标架，刚体运动时标架随着运动，这样得到一依赖于时间参数  $t$  的一族标架，刚体的运动就可以用含  $t$  作为参数的这一族标架来表示。Cotten、Darboux 等把标架概念推广到（不仅与时间有关）与多个变量有关的情形。E.Cartan 将这个理论发扬光大，他将活动标架从运动群推广到任意李群，并引进外微分形式直接研究几何。

首先我们简要介绍曲面上的活动标架的概念。设  $E^3$  的曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ，参数曲面  $S$  上的（光滑）向量场  $\mathbf{x}(u, v)$  是指对于  $S$  上的任意一点  $\mathbf{r}(u, v)$ ， $\mathbf{x}(u, v)$  是从点  $\mathbf{r}(u, v)$  出发的一个向量，并且  $\mathbf{x}(u, v)$  光滑地依赖于参数  $(u, v)$ 。对于任何的  $(u, v)$ ，当  $\mathbf{x}(u, v)$  是曲面  $S$  在点  $\mathbf{r}(u, v)$  的切向量时， $\mathbf{x}(u, v)$  称为曲面  $S$  的切向量场；当  $\mathbf{x}(u, v)$  是曲面  $S$  在点  $\mathbf{r}(u, v)$

的法向量时,  $\mathbf{x}(u, v)$  称为曲面  $S$  的法向量场.

$\mathbf{r}_u$  和  $\mathbf{r}_v$  是曲面  $S$  上切向量场的两个自然的例子,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|}$  是曲面  $S$  的(单位)法向量场. 显然,  $\mathbf{r}_u$ 、 $\mathbf{r}_v$ 、 $\mathbf{n}$  线性无关, 因此  $\{\mathbf{r}(u, v); \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$  构成了以  $\mathbf{r}(u, v)$  为原点的  $E^3$  的一个标架, 这些标架的全体称为参数曲面  $S$  的自然标架(场).

更一般地, 曲面  $S$  上的活动标架(场)是指以曲面上的点为原点的  $E^3$  的坐标系  $\{\mathbf{r}(u, v); \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v), \mathbf{x}_3(u, v)\}$ , 其中  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  是曲面  $S$  上的处处线性无关的向量场, 即  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \neq 0$ . 简单地说曲面  $S$  的一个活动标架就是在曲面  $S$  的每一个点给了  $E^3$  的一组标架. 一般我们要求  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) > 0$  以保证这些标架均为正定向的. 特别, 如果  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  为单位正交标架, 则称  $\{\mathbf{r}(u, v); \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  为曲面  $S$  的正交(活动)标架.

**例 1.1 (正交标架的存在性)** 设曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , 对自然标架  $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$  施行 Schmidt 正交化, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle}} = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{r}_v - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{|\mathbf{r}_v - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1|} = \frac{E\mathbf{r}_v - F\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是曲面切平面的单位正交基. 令

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|} = \mathbf{n}, \quad (1.2)$$

则  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是  $S$  的一个(正定向)正交标架. 如果

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(u, v) & a_{12}(u, v) \\ a_{21}(u, v) & a_{22}(u, v) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

是定义在参数区域  $D$  上的正交矩阵且  $\det \mathbf{A} = 1$ , 令

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

那么  $\{\boldsymbol{r}; \tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_3\}$  也是  $S$  的一个 (正定向) 正交标架. 显然,  $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$  是  $S$  的切平面的正交基  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$  经过正交变换  $\boldsymbol{A}$  得到的.

通过研究曲面上的任意标架来研究曲面与标架无关的几何性质, 是微分几何学的一个基本方法. 为了使标架  $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$  能准确反映曲面的几何性质, 以后我们均要求  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$  是曲面的切向量.

最后我们来看一看曲线上活动标架与曲线几何的关系, 以使读者对利用活动标架处理几何问题有一个初步的了解; 同时, 也给出了 Frenet 标架的进一步解释.

**例 1.2** 设  $\boldsymbol{r}(s)$  是  $E^3$  的一条弧长参数曲线,  $\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$  是沿  $\boldsymbol{r}$  正定向的活动标架, 为简单起见, 设  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$  是正交标架.

设曲线的单位切向量  $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$  在标架下的分解为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3. \quad (1.5)$$

通过对标架  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$  作适当的正交变换, 可以使  $a^1 = 1$ ,  $a^2 = a^3 = 0$ ; 也就是说, 当  $\boldsymbol{e}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$  时, 分解式 (1.5) 最为简单.

固定  $\boldsymbol{e}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ , 并设

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^3 q_{ij}(s) \boldsymbol{e}_j(s), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.6)$$

由于对任意的  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ , 所以有

$$q_{ij} + q_{ji} = 0. \quad (1.7)$$

由于  $\boldsymbol{e}_1$  已经固定, 沿  $\boldsymbol{r}$  的任意一个新的正交标架  $\{\boldsymbol{r}; \tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3\}$  必然满足

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 &= \boldsymbol{e}_1, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

这里  $\theta$  是  $s$  的函数. 设

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = \tilde{q}_{12} \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{q}_{13} \tilde{\boldsymbol{e}}_3,$$

结合 (1.6) 式与 (1.8) 式易发现

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{13} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

因此, 量  $q_{12}^2 + q_{13}^2 = \tilde{q}_{12}^2 + \tilde{q}_{13}^2$  不依赖于标架的选取. 事实上  $\sqrt{q_{12}^2 + q_{13}^2}$  就是 §2.3 中所定义的曲线的曲率  $\kappa$ .

当  $q_{12}^2 + q_{13}^2 > 0$ , 即  $\kappa > 0$  时,  $q_{12}$  与  $q_{13}$  不同时为 0. 这样我们可以选取  $\theta(s)$  使得

$$\tilde{q}_{13} = -\sin \theta q_{12} + \cos \theta q_{13} = 0. \quad (1.10)$$

而且  $\tilde{q}_{12} > 0$ . 容易发现, 在这样的标架  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$  下 (1.6) 式取最简单的形式:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{e}}_1}{ds} &= \tilde{q}_{12}\tilde{\mathbf{e}}_2, \\ \frac{d\tilde{\mathbf{e}}_2}{ds} &= -\tilde{q}_{12}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{q}_{23}\tilde{\mathbf{e}}_3, \\ \frac{d\tilde{\mathbf{e}}_3}{ds} &= -\tilde{q}_{23}\tilde{\mathbf{e}}_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

显然这时  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$  就是第二章所定义的 Frenet 标架.

如果我们改变曲线的定向, 即对弧长参数  $s$  做变换  $s \rightarrow -s$ , 容易验证, 相应的 Frenet 标架的变换为:  $\mathbf{e}_1 \rightarrow -\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3 \rightarrow -\mathbf{e}_3$ .

## §4.2 自然标架的运动方程

设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是  $E^3$  的参数曲面, 在曲面上任意一点  $\mathbf{r}(u, v)$ , 有自然标架  $\{\mathbf{r}; \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ . 我们需要研究这个标架随参数  $(u, v)$  的变化规律, 为方便起见, 我们将采取张量的记法, 为此引进如下记号:

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad \text{即 } \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2); \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(u^1, u^2), \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}(u^1, u^2), \quad (2.2)$$

或者 
$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}(u^1, u^2), \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|}; \quad (2.4)$$

$$g_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.5)$$

$$b_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.6)$$

容易看出,  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$ ,  $b_{11} = L, b_{12} = b_{21} = M, b_{22} = N$ , 即  $(g_{\alpha\beta}), (b_{\alpha\beta})$  分别是曲面的第一基本形式和第二基本形式在参数  $(u^1, u^2)$  下的系数矩阵, 而且,  $g_{\alpha\beta}$  和  $b_{\alpha\beta}$  关于下标  $\alpha, \beta$  是对称的.

我们将使用 Einstein 求和约定: 在一个单项式中, 若一个指标字母 (以  $\alpha, \beta, \dots$  或  $i, j, \dots$  表示) 作为上标和下标各出现一次, 则该式就表示是对  $\alpha = 1, 2$  的求和式, 而上下指标多对重复出现就表示该式是多重求和式, 这样我们将省略求和号  $\Sigma$ . 依照这种约定有

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 du^1 + \mathbf{r}_2 du^2 = \mathbf{r}_\alpha du^\alpha, \quad (2.7)$$

$$\text{I} = g_{11} du^1 du^1 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} du^2 du^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (2.8)$$

$$\text{II} = b_{11} du^1 du^1 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22} du^2 du^2 = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \quad (2.9)$$

另记

$$(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g^{\alpha\beta}), \quad g = \det(g_{\alpha\beta}), \quad b = \det(b_{\alpha\beta}). \quad (2.10)$$

将矩阵运算  $(g^{\alpha\beta}) \cdot (g_{\alpha\beta}) = (\delta_\beta^\alpha)$  写成分量形式, 就是

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (2.11)$$

以下, 我们将利用上述张量记号, 来求出自然标架  $\{\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\}$  关于参数  $(u^1, u^2)$  偏导数的表达式. 由于  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\}$  线性无关,  $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$  和  $\mathbf{n}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha}$  可以表示成  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}$  的线性组合, 设

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + C_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = D_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta + D_\alpha \mathbf{n}, \quad (2.13)$$

其中  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 、 $C_{\alpha\beta}$ 、 $D_\alpha^\beta$  和  $D_\alpha$  是待定系数.

(2.12) 式两边与单位法向量  $\mathbf{n}$  作内积, 并注意到  $\langle \mathbf{r}_\gamma, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 就有

$$C_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{n} \rangle = b_{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

(2.13) 式与  $\mathbf{n}$  作内积, 由于  $\mathbf{n}$  是单位向量,  $\langle \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 所以  $D_\alpha = 0$ . 用  $\mathbf{r}_\gamma$  与 (2.13) 作内积, 就有

$$D_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} = \langle D_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta, \mathbf{r}_\gamma \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{r}_\gamma \rangle = -b_{\alpha\gamma}. \quad (2.15)$$

上式两边乘以  $g^{\gamma\xi}$ , 并对  $\gamma$  求和, 就得到  $D_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\xi} = -b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\xi}$ . 由于  $g_{\beta\gamma} g^{\gamma\xi} = \delta_\beta^\xi$ , 所以有

$$D_\alpha^\xi = D_\alpha^\beta \delta_\beta^\xi = D_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\xi} = -b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\xi}. \quad (2.16)$$

记

$$b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \quad (2.17)$$

那么

$$D_\alpha^\beta = -b_\alpha^\beta. \quad (2.18)$$

最后我们来求系数  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ .  $\mathbf{r}_\xi$  与 (2.12) 式作内积, 有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\xi} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\xi \rangle, \quad (2.19)$$

为求出  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ , 我们必需先求  $\langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\xi \rangle$ . 对  $g_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle$  求偏导, 就有

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\gamma}, \mathbf{r}_\beta \rangle + \langle \mathbf{r}_{\beta\gamma}, \mathbf{r}_\alpha \rangle. \quad (2.20)$$

同理有

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{r}_{\gamma\beta}, \mathbf{r}_\alpha \rangle, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} = \langle \mathbf{r}_{\beta\alpha}, \mathbf{r}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{r}_{\gamma\alpha}, \mathbf{r}_\beta \rangle. \quad (2.22)$$



(2.21) 与 (2.22) 两式相加, 再减去 (2.20) 式, 得

$$\langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_\gamma \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right\}, \quad (2.23)$$

由 (2.19) 式, 有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\xi} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right\}. \quad (2.24)$$

所以, 由  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \delta_\eta^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\eta g_{\eta\xi} g^{\xi\gamma}$  以及 (2.24) 式可得

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right\}. \quad (2.25)$$

从 (2.25) 式可以得到一个重要的结论: 系数  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  由曲面第一基本形式的系数以及它们的一阶偏导数完全确定.  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  通常称为曲面的 Christoffel 符号. 人们也把由 (2.24) 式确定的

$$\Gamma_{\xi\alpha\beta} = g_{\gamma\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right\} \quad (2.26)$$

称为曲面的 第二类 Christoffel 符号.

到此为止, 我们已经完全确定了 (2.12)、(2.13) 两式中的待定系数, 它们由曲面的第一基本形式、第二基本形式的系数以及第一基本形式系数的一阶偏导数完全确定. 将 (2.12)、(2.13) 两式重写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha, & \alpha = 1, 2; & (M_1) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, & \alpha, \beta = 1, 2; & (M_2) \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta. & \alpha = 1, 2. & (M_3) \end{cases}$$

方程  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  称为曲面  $S$  自然标架  $\{\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\}$  的运动方程, 其中, 系数  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  是曲面的 Christoffel 符号, 由 (2.25) 式可以发现它满足  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$ ; 系数  $\{b_{\alpha\beta}\}$  是曲面  $S$  的第二基本形式在参数  $(u, v)$  下的系数; 结合 (2.17) 式与第三章的 (5.3) 式可以发现系数矩阵  $(b_\alpha^\beta)$  就是 Weingarten 变换在基  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$  下的矩阵.



回到原来的记号, 用  $(u, v)$  代替  $(u^1, u^2)$ , 用  $E$ 、 $F$ 、 $G$  表示第一基本形式的系数, 即  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$ . 那么

$$g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG - F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2},$$

从 Christoffel 符号的表达式 (2.25) 可以求出

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( \frac{G}{2} \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{F}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial F}{\partial u} \right), \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left( \frac{G}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( -\frac{F}{2} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{E}{2} \frac{\partial E}{\partial v} + E \frac{\partial F}{\partial u} \right), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( G \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{G}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \right), \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{EG - F^2} \left( -\frac{F}{2} \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{E}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( -F \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{F}{2} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{E}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

请读者自行验证上述各式. 特别, 当  $(u, v)$  是曲面的正交参数时, 我们有  $F \equiv 0$ , 上述各式可简化为

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln E}{\partial u}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln E}{\partial v}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln G}{\partial u}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln G}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

**例 2.1** 求单位球面在球极投影参数下的 Christoffel 符号  $\{\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\}$  与  $(b_\alpha^\beta)$ . 由第三章例 1.1 我们知道, 单位球面的球极投影表示为

$$\mathbf{r}(u, v) = \left( \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right),$$

它的坐标切向量为

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \left( \frac{2(1 - u^2 + v^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \frac{-4uv}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \frac{4u}{(1 + u^2 + v^2)^2} \right),$$

$$\mathbf{r}_v(u, v) = \left( \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2} \right).$$

因此可以求出  $E = G = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}$ ,  $F = 0$ . 直接计算, 我们得到单位球面在球极投影参数下的 Christoffel 符号为

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{2u}{1+u^2+v^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{2v}{1+u^2+v^2},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2u}{1+u^2+v^2}.$$

另外, 容易验证这时的单位法向量为  $\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|} = -\mathbf{r}(u, v)$ ,

因此第二基本形式的系数为

$$L = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle = E, \quad M = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle = F = 0,$$

$$N = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle = G.$$

所以 Weingarten 变换的系数矩阵为  $(b_\alpha^\beta) = \mathbf{I}_2$ .

### §4.3 曲面的结构方程

上一节我们给出了曲面自然标架的运动方程, 它表明自然标架的运动由第一基本形式和第二基本形式的系数完全决定. 在这一节, 我们将利用这个运动方程来进一步研究曲面第一、第二基本形式系数之间的关系.

我们知道, 任何光滑函数  $f$  的二阶偏导数可交换求导次序, 即  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}$ . 这个原则对向量值函数  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_\alpha$  和  $\mathbf{n}$  也同样适用, 因此我们有

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\beta} \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\gamma} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\beta} \right). \quad (3.3)$$

由于  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}_\alpha$ 、 $\mathbf{n}$  满足运动方程  $(M_1) - (M_3)$ ，将  $(M_1)$  代入到 (3.1) 式，就得到  $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\beta\alpha}$ ，这等价于  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 、 $b_{\alpha\beta}$  关于  $\alpha$ 、 $\beta$  对称。将  $(M_2)$  代入 (3.2) 式，这时等式的左边为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} \right) &= \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \mathbf{r}_\xi + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \right) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} \mathbf{r}_\xi + \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \mathbf{r}_{\xi\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \mathbf{n} + b_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\gamma}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

再利用运动方程  $(M_2)$  和  $(M_3)$  就有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} \right) &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} \mathbf{r}_\xi + \Gamma_{\alpha\beta}^\xi (\Gamma_{\xi\gamma}^\eta \mathbf{r}_\eta + b_{\xi\gamma} \mathbf{n}) + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \mathbf{n} + b_{\alpha\beta} (-b_\gamma^\xi \mathbf{r}_\xi) \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\xi \right) \mathbf{r}_\xi + \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\xi b_{\xi\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

同理，将运动方程代入 (3.2) 式后，等式的右边为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\gamma} \right) &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta} \mathbf{r}_\xi + \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi (\Gamma_{\xi\beta}^\eta \mathbf{r}_\eta + b_{\xi\beta} \mathbf{n}) + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \mathbf{n} + b_{\alpha\gamma} (-b_\beta^\xi \mathbf{r}_\xi) \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\xi \right) \mathbf{r}_\xi + \left( \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi b_{\xi\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

由于 (3.5) 式与 (3.6) 式相等，利用  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 、 $\mathbf{n}$  线性无关，就得到下列方程

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi - b_{\alpha\beta} b_\gamma^\xi + b_{\alpha\gamma} b_\beta^\xi = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\xi b_{\xi\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi b_{\xi\beta} = 0. \quad (3.8)$$

将运动方程  $(M_3)$  代入 (3.3) 式，同样可以得到的一个方程

$$\frac{\partial b_\beta^\xi}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_\gamma^\xi}{\partial u^\beta} = -b_\beta^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi + b_\gamma^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi. \quad (3.9)$$

利用  $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$  以及 (2.24) 式, 可以证明 (3.9) 式和 (3.8) 式是等价的.

到此我们知道, 曲面的第一、第二基本形式的系数  $(g_{\alpha\beta})$ 、 $(b_{\alpha\beta})$  必须满足 (3.7)、(3.8) 两式. 方程 (3.7) 称为曲面的 Gauss 方程, 方程 (3.8) 称为曲面的 Codazzi 方程, 合称为 Gauss-Codazzi 方程, 或称为曲面的结构方程.

由于  $\alpha, \beta, \gamma, \xi = 1, 2$ , 所以 Gauss 方程和 Codazzi 方程是两组方程. Gauss-Codazzi 方程形式上很复杂, 但实质上 Gauss 方程中只有一个独立方程, Codazzi 方程中有两个独立的方程. 为说明这个事实, 我们引进如下 Riemann 记号:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\delta\xi} \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\gamma}^\xi - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\xi \right), \quad (3.10)$$

于是 Gauss 方程 (3.7) 就可以改写为

$$\begin{aligned} R_{\delta\alpha\beta\gamma} &= g_{\delta\xi} (b_{\alpha\beta} b_\gamma^\xi - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\xi) \\ &= -(b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} - b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

容易看出上式右边具有对称性质. 为发现 Riemann 记号的对称性, 我们利用第二类 Christoffel 符号  $\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = g_{\gamma\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^\xi$ , 从 (3.10) 可以推出

$$\begin{aligned} R_{\delta\alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\eta + \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \\ &\quad + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\delta\eta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\delta\eta\beta} \\ &= \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\delta\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \left( \Gamma_{\delta\eta\gamma} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\gamma} \right) \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \left( \Gamma_{\delta\eta\beta} - \frac{\partial g_{\delta\eta}}{\partial u^\beta} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

将 (2.26) 式代入 (3.12) 式, 有

$$\begin{aligned} R_{\delta\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\gamma \partial u^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma \partial u^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta \partial u^\delta} \right) \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \Gamma_{\eta\delta\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\eta\delta\beta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

从上式可以发现, Riemann 记号满足  $R_{\delta\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\delta\alpha} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta}$ , 而且 (3.11) 式的右边也满足同样的对称性质. 因此 Gauss 方程 (3.11) 中, 只有一个独立方程

$$R_{1212} = -(b_{11}b_{22} - (b_{12})^2). \quad (3.14)$$

同样, Codazzi 方程 (3.8) 中的  $\beta = \gamma$  时, 可以发现它为平凡的等式. 于是, Codazzi 方程只有两个独立方程

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = b_{1\xi}\Gamma_{12}^\xi - b_{2\xi}\Gamma_{11}^\xi, \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = b_{1\xi}\Gamma_{22}^\xi - b_{2\xi}\Gamma_{21}^\xi. \end{cases} \quad (3.15)$$

如果曲面的参数  $(u, v)$  是正交参数系, Christoffel 符号有简单的表达式 (2.28), 这时 Gauss 方程可化简为

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} = \frac{LN - M^2}{EG}, \quad (3.16)$$

Codazzi 方程可简化为

$$\begin{cases} \left( \frac{L}{\sqrt{E}} \right)_v - \left( \frac{M}{\sqrt{E}} \right)_u - N \frac{(\sqrt{E})_v}{G} - M \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} = 0, \\ \left( \frac{N}{\sqrt{G}} \right)_u - \left( \frac{M}{\sqrt{G}} \right)_v - L \frac{(\sqrt{G})_u}{E} - M \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

#### §4.4 曲面的存在惟一性定理

前两节我们已经推导了曲面自然标架的运动方程和曲面的结构方程, 即 Gauss-Codazzi 方程. 有了这样一些方程, 我们可以讨论曲面的存在性和惟一性问题.

首先我们讨论惟一性问题. 事实上我们有

**定理 4.1 (惟一性定理)** 设  $S_1$  和  $S_2$  是定义在同一个参数域  $D$  上的两个曲面, 它们的参数表示分别为  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$  和  $\tilde{\mathbf{r}}(u^1, u^2)$ . 如果  $\forall (u^1, u^2) \in D$ ,  $S_1$  和  $S_2$  在  $(u^1, u^2)$  点有相同的第一基本形式和第二基本形式, 则  $S_1$  和  $S_2$  相差一个  $E^3$  的刚体运动, 即存在  $E^3$  的一个刚体运动  $\mathcal{T}$  使得  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathcal{T} \circ \mathbf{r}$ .

**证明** 取一点  $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in D$ . 由于  $S_1$  和  $S_2$  在点  $u_0$  有相同的第一基本形式和第二基本形式, 所以有  $|\mathbf{r}_\alpha(u_0)| = |\tilde{\mathbf{r}}_\alpha(u_0)|$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle(u_0) = \langle \tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2 \rangle(u_0)$ , 而且  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\}$  与  $\{\tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2, \tilde{\mathbf{n}}\}$  均是正定向的. 因此经过一个适当的刚体运动之后, 我们不妨设  $S_1$  和  $S_2$  的自然标架在  $u_0$  点重合, 即

$$\{\mathbf{r}(u_0); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\} = \{\tilde{\mathbf{r}}(u_0); \tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2, \tilde{\mathbf{n}}\}. \quad (4.1)$$

从 §4.2 节已知曲面的自然标架满足运动方程  $(M_1) - (M_3)$ , 而且运动方程的系数由曲面的第一、第二基本形式的系数惟一确定. 由于曲面  $S_1$  和  $S_2$  的第一、第二基本形式处处相同, 所以  $S_1$  和  $S_2$  的自然标架满足相同的运动方程. 又因为曲面的运动方程是关于  $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\}$  的一阶线性偏微分方程组, 由一阶偏微分方程组关于初值问题解的惟一性以及 (4.1) 可得  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}$ .

下面讨论曲面的存在性问题.

设  $D = \{(u^1, u^2)\}$  是一个平面区域,  $\varphi = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  和  $\psi = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  是定义在  $D$  上的两个二次微分式, 而且  $(g_{\alpha\beta})$  和  $(b_{\alpha\beta})$  是对称阵,  $(g_{\alpha\beta})$  正定. 记  $(g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1}$ ,  $b_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} b_{\gamma\alpha}$ , 按照 (2.25) 式, 可以构造 Christoffel 符号

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi} \right\}. \quad (4.2)$$

**定理 4.2** 如果  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 、 $b_{\alpha\beta}$  和  $b_\beta^\alpha$  满足 Gauss 方程 (3.7) 和 Codazzi 方程 (3.8), 则  $\forall u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in D$ , 存在  $u_0$  的一个邻域  $U \subset D$  以及定义在  $U$  上的曲面  $\mathbf{r}(u_1, u_2) : U \rightarrow E^3$ , 使得  $\varphi$  和  $\psi$  分别为该曲面的第一、第二基本形式.

**证明** 考虑以  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 、 $\mathbf{n}$  为未知函数的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\beta} = -b_\beta^\gamma \mathbf{r}_\gamma, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (4.3)$$

求解上述方程组本质上是求解曲面标架的运动方程. 由一阶线性偏微分方程理



论, 方程组 (4.3) 有解的充分必要条件是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \right) &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\beta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} \right) &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\gamma} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} \right) &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\beta} \right).\end{aligned}\tag{4.4}$$

由第三节的讨论知, 条件 (4.4) 式成立等价于 Gauss 方程和 Codazzi 方程, 因此由定理条件知方程组 (4.3) 是可解的. 也就是说, 给定一点  $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in D$ , 及初值  $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}_\alpha^0, \mathbf{n}^0$ , 有  $u_0$  的邻域  $U$  以及定义在  $U$  上的函数  $\mathbf{r}(u_1, u_2)$ 、 $\mathbf{r}_\alpha(u_1, u_2)$ 、 $\mathbf{n}(u_1, u_2)$  满足方程组 (4.3) 和初值条件

$$\begin{cases} \mathbf{r}(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{r}^0, \\ \mathbf{r}_\alpha(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{r}_\alpha^0, \\ \mathbf{n}(u_0^1, u_0^2) = \mathbf{n}^0. \end{cases}\tag{4.5}$$

现取初值  $\mathbf{r}^0$ 、 $\mathbf{r}_\alpha^0$ 、 $\mathbf{n}^0$  满足

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r}_\alpha^0, \mathbf{r}_\beta^0 \rangle = g_{\alpha\beta}(u_0), \\ \langle \mathbf{r}_\alpha^0, \mathbf{n}^0 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{n}^0 \rangle = 1, \quad (\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0, \mathbf{n}^0) > 0. \end{cases}\tag{4.6}$$

下面我们证明方程组 (4.3) 的解  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ , 其初值条件满足 (4.6) 时, 是所求曲面.

考虑  $U$  上的函数  $\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle$ 、 $\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n} \rangle$  和  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle$ , 由 (4.3) 式可以推出它



们满足如下一阶线性偏微分方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle}{\partial u^\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma}^\xi \langle \mathbf{r}_\xi, \mathbf{r}_\beta \rangle + \Gamma_{\beta\gamma}^\xi \langle \mathbf{r}_\xi, \mathbf{r}_\alpha \rangle \\ \quad + b_{\alpha\gamma} \langle \mathbf{r}_\beta, \mathbf{n} \rangle + b_{\beta\gamma} \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n} \rangle, \\ \frac{\partial \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n} \rangle}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\xi \langle \mathbf{r}_\xi, \mathbf{n} \rangle + b_{\alpha\beta} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - b_\beta^\gamma \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\gamma \rangle, \\ \frac{\partial \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}{\partial u^\alpha} = -2b_\alpha^\beta \langle \mathbf{r}_\beta, \mathbf{n} \rangle. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

显然  $\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle = g_{\alpha\beta}$ ,  $\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$  是方程组 (4.7) 的一组解. 由初值条件 (4.6) 以及一阶偏微分方程组关于初值问题解的惟一性可知

$$\langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle \equiv g_{\alpha\beta}, \quad \langle \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n} \rangle \equiv 0, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \equiv 1.$$

因此  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  线性无关,  $\mathbf{r}(u^1, u^2)$  是  $E^3$  的一张参数曲面, 以  $\varphi = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  为第一基本形式. 由于单位向量  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  垂直, 解的连续性以及  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})(u_0) > 0$ , 保证了  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}$  是正定向的. 因此  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|}$ . 由方程组 (4.3) 的第二式知  $\psi = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = \langle \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{n} \rangle du^\alpha du^\beta$  是该曲面的第二基本形式. 证毕.

**注** 必须指出的是, 自然标架的运动方程  $(M_1) - (M_3)$  是一个一阶线性偏微分方程组, Gauss 方程和 Codazzi 方程实质上是这个偏微分方程组的可积性条件.

## §4.5 正交活动标架

迄今为止, 我们利用自然标架研究了曲面的几何性质. 在随后的两节里, 我们将引入曲面的正交活动标架, 通过研究正交标架的运动方程, 来研究曲面的几何.

给定  $E^3$  的曲面  $S$  以及  $S$  的一个参数表示  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , 在  $S$  的各点的切平面上取向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  使得

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0, \quad (5.1)$$

而且  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  关于  $(u, v)$  是光滑的.  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的选取不惟一, 例如, 可以取 (见例 1.1)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{|\mathbf{r}_v - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1|}.$$

取  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$  为曲面的单位法向量场, 则  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  构成了沿曲面的一个正交标架, 或称规范标架.

由于  $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$  和  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  都是切平面的基, 因此有

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r}_v = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2, \end{cases} \quad (5.2)$$

其中  $\{a_{\alpha\beta} : 1 \leq \alpha, \beta \leq 2\}$  均为曲面上的函数,  $\mathbf{A} = (a_{\alpha\beta})$  是基变换阵. (5.2) 式也可以记为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

利用 (5.2) 式, 有

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \\ &= (a_{11}du + a_{21}dv)\mathbf{e}_1 + (a_{12}du + a_{22}dv)\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

记

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{11}du + a_{21}dv \quad (= \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_1 \rangle), \\ \omega_2 &= a_{12}du + a_{22}dv \quad (= \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_2 \rangle), \end{aligned} \quad (5.5)$$

那么  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  是定义在  $(u, v)$  参数区域上的一阶微分形式, 而且

$$d\mathbf{r} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2, \quad (5.6)$$

因此利用微分形式  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ , 曲面  $S$  的第一基本形式可以表示为

$$I = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2. \quad (5.7)$$

对正交标架  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  求微分, 由于  $d\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是向量值的一阶微分形式, 它可以表为  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  以一阶微分形式为系数的线性组合, 令

$$d\mathbf{e}_i = \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \omega_{i3}\mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.8)$$

其中每个  $\omega_{ij} = \langle d\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 均是一阶微分形式. 由此可知, 标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  的微分由一阶微分形式矩阵  $(\omega_{ij})$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) 确定; 而且, 对  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$  微分可得

$$\langle d\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, d\mathbf{e}_j \rangle = 0,$$

将 (5.8) 式代入上式, 就有

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (5.9)$$

特别, 我们有

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0. \quad (5.10)$$

曲面  $S$  的第二基本形式也可以由这些微分形式表示为

$$\begin{aligned} \text{II} &= -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3 \rangle = -\langle \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= -\omega_1 \omega_{31} - \omega_2 \omega_{32} = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

综合以上讨论, 我们有

**命题 5.1** 设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是  $S$  的正交标架, 则

1.

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{23} \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中  $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ ;

2. 曲面  $S$  的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\begin{aligned} \text{I} &= \omega_1 \omega_1 + \omega_2 \omega_2, \\ \text{II} &= \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

(5.12) 式称为 曲面正交标架的运动方程. 从 (5.13) 式可以看出, 曲面的第一、第二基本形式由正交标架运动方程的系数确定. 事实上我们还有

**命题 5.2** 曲面的第一基本形式与正交标架的选取无关; 曲面的第二基本形式与同法向的正交标架选取无关.

**证明** 设  $\{\mathbf{r}; \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$  是曲面的另一组正交标架, 其中  $\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ . 设  $\mathbf{e}_1$  和  $\bar{\mathbf{e}}_1$  的夹角为  $\theta = \theta(u, v)$ , 则

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2. \end{cases} \quad (5.14)$$

设标架  $\{\mathbf{r}; \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$  运动方程的系数为  $\{\bar{\omega}_{ij} : i, j = 1, 2, 3\}$ , 那么

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_1 = \langle d\mathbf{r}, \bar{\mathbf{e}}_1 \rangle = \langle d\mathbf{r}, \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle \\ \quad = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2, \\ \bar{\omega}_2 = \langle d\mathbf{r}, \bar{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle d\mathbf{r}, -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \rangle \\ \quad = -\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2, \\ \bar{\omega}_{31} = \langle d\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_1 \rangle = \langle d\mathbf{e}_3, \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle \\ \quad = \cos \theta \omega_{31} + \sin \theta \omega_{32}, \\ \bar{\omega}_{32} = \langle d\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle d\mathbf{e}_3, -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \rangle \\ \quad = -\sin \theta \omega_{31} + \cos \theta \omega_{32}. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

由以上各式容易验证

$$\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_2 = \omega_1 \omega_1 + \omega_2 \omega_2,$$

$$\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{31} + \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_{32} = \omega_1 \omega_{31} + \omega_2 \omega_{32},$$

命题得证.

下面我们讨论 (5.13) 式与第三章中用坐标参数所定义的曲面第一、第二基本形式的关系.

将 (5.5) 式改写为

$$[\omega_1, \omega_2] = [du, dv] \mathbf{A}, \quad (5.16)$$

根据曲面的第一基本形式

$$I = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2 = [du, dv] \mathbf{A} \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

可得

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

由于  $\mathbf{A}$  是可逆矩阵, 由 (5.16) 式,  $du, dv$  可以表示为  $\omega_1, \omega_2$  的线性组合. 一阶微分形式  $\omega_{13}$  和  $\omega_{23}$  是  $du, dv$  的线性组合, 因此它们也可表示为  $\omega_1, \omega_2$  的线性组合. 设

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, \quad \omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \quad (5.18)$$

其中系数  $h_{\alpha\beta} (1 \leq \alpha, \beta \leq 2)$  是曲面上的函数.

将上式改写为

$$[\omega_{13}, \omega_{23}] = [\omega_1, \omega_2] \mathbf{B}, \quad (5.19)$$

其中  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$ , 则由 (5.13) 式, 曲面的第二基本形式为

$$II = [\omega_1, \omega_2] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

由于在参数  $(u, v)$  下曲面的第二基本形式为

$$II = [du, dv] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

结合 (5.16) 式可得

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T. \quad (5.21)$$

上式还可以看出  $\mathbf{B}$  是对称阵, 即  $h_{12} = h_{21}$ .

关于矩阵  $\mathbf{B}$  的几何特性, 有如下命题:

**命题 5.3** 矩阵  $\mathbf{B}$  的特征值是曲面的主曲率, 且曲面的 Gauss 曲率  $K = \det \mathbf{B} = (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)$ , 平均曲率  $H = \frac{1}{2}\text{tr} \mathbf{B} = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$ .

**证明** 因为  $\mathbf{B}$  是对称方阵, 它的特征值为实数, 我们只需证明  $K = \det \mathbf{B}, H =$

$$\frac{1}{2}\text{tr} \mathbf{B}, \text{ 为此记 } \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

由 (5.21) 式

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} (\mathbf{A}^T)^{-1},$$

所以

$$\det \mathbf{B} = \det \tilde{\mathbf{B}} \det (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1},$$

$$\text{tr} \mathbf{B} = \text{tr} \left( \tilde{\mathbf{B}} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \right).$$

根据 (5.17) 式, 不难算出

$$\tilde{\mathbf{B}} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & ME - LF \\ MG - NF & NE - MF \end{bmatrix},$$

它与第三章 §4 所讨论的 Weingarten 变换在自然基下的矩阵相同. 所以

$$\det \mathbf{B} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

$$\frac{1}{2}\text{tr} \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = H.$$

得证.

**例 5.4** 求 Weingarten 变换在正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  下的系数矩阵.

由 (5.3) 式可得

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\mathbf{r}_u) \\ \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\mathbf{e}_1) \\ \mathcal{W}(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix},$$

但由第三章的 (5.3) 式,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\mathbf{r}_u) \\ \mathcal{W}(\mathbf{r}_v) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{A}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix},$$

所以 Weingarten 变换在基  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  下的系数矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{B} = (h_{\alpha\beta}),$$

即  $\langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_\alpha), \mathbf{e}_\beta \rangle = h_{\alpha\beta}$ .

Weingarten 变换关于基  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  的系数矩阵也可以通过等式

$$\mathcal{W}(d\mathbf{r}) = -dn$$

来求. 将  $d\mathbf{r} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2, dn = d\mathbf{e}_3 = \omega_{13}\mathbf{e}_1 + \omega_{23}\mathbf{e}_2$  代入上式, 利用 (5.18) 式即得.

当曲面没有脐点时, 我们可以取  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  为曲面的主方向, 这时

$$\langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 \rangle = k_1, \quad \langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathcal{W}(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \rangle = k_2.$$

或者说, 当取主方向作为曲面的正交标架时, 第二基本形式的系数矩阵  $\mathbf{B} = (h_{\alpha\beta})$  是对角矩阵, 这时 (5.18) 式为

$$\omega_{13} = k_1\omega_1, \quad \omega_{23} = k_2\omega_2,$$

曲面的第二基本形式为

$$\text{II} = k_1\omega_1\omega_1 + k_2\omega_2\omega_2.$$



### §4.6 曲面的结构方程（外微分法）

从上一节可以看出，曲面正交标架的运动方程形式简洁，具有对称性。为研究曲面上正交标架的变化规律，微分是必要的手段，这是因为正交标架不再直接依赖于曲面的参数。为此，我们首先回顾一下外微分形式的基本性质。

#### 1. 外微分形式

平面参数区域  $D = \{(u, v)\}$  上的一阶（外）微分形式形如  $fdu + gdv$ ，它可以看成独立参变量  $u, v$  的微分  $du, dv$  张成的线性空间里的元素，以函数  $f, g$  为系数。记为

$$\theta = fdu + gdv.$$

类似向量的外积，可以定义两个一阶外微分形式的外积  $\wedge$ ，它满足

$$(1) \text{ 线性性: } (\lambda\theta_1 + \mu\theta_2) \wedge \varphi = \lambda(\theta_1 \wedge \varphi) + \mu(\theta_2 \wedge \varphi),$$

$$(2) \text{ 反交换律: } \theta \wedge \varphi = -\varphi \wedge \theta.$$

由条件 (2) 知道， $\theta \wedge \theta = 0$ 。对于  $\theta = f_1du + f_2dv$ ， $\varphi = g_1du + g_2dv$ ，由条件 (1) 有

$$\begin{aligned} \theta \wedge \varphi &= (f_1du + f_2dv) \wedge (g_1du + g_2dv) \\ &= (f_1g_2 - f_2g_1)du \wedge dv. \end{aligned}$$

所以  $\theta \wedge \varphi$  是  $du \wedge dv$  的倍数。 $du \wedge dv$  可以看成由  $du$  和  $dv$  生成的平行四边形的有向面积微元，因此自然有  $du \wedge dv = -dv \wedge du$ 。

我们把形如  $fdu \wedge dv$  的微分形式称为二阶外微分形式，并把函数称为零阶外微分形式。

微分形式间有外微分运算  $d$ ，它定义为

(1) 对于零次外微分形式  $f$ ，

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

(2) 对一阶外微分形式  $\theta = fdu + gdv$ ，

$$\begin{aligned} d\theta &= df \wedge du + dg \wedge dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}dv \wedge du + \frac{\partial g}{\partial u}du \wedge dv = \left( -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \right) du \wedge dv, \end{aligned}$$

(3) 对二阶外微分形式  $\varphi = f du \wedge dv$ ,

$$d\varphi = df \wedge du \wedge dv = \left( \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right) \wedge du \wedge dv = 0.$$

以下性质是容易验证的:

**性质 6.1** 设  $f$ 、 $g$  是函数,  $\varphi$  是一阶微分形式,

$$(1) \quad d(fg) = (df)g + f(dg);$$

$$(2) \quad d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi, \quad d(\varphi f) = d\varphi f - \varphi \wedge df;$$

$$(3) \quad d(df) = 0.$$

**例 6.2** 设  $\{e_1, e_2\}$  是曲面的正交标架,  $\{\omega_1, \omega_2\}$  是相应的 1 形式,  $d\mathbf{r} = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ . 根据 (5.5) 式,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (a_{11} du + a_{21} dv) \wedge (a_{12} du + a_{22} dv) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) du \wedge dv = \det \mathbf{A} du \wedge dv. \end{aligned}$$

但由 (5.17) 式,  $(\det \mathbf{A})^2 = EG - F^2$ , 所以

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$$

恰好是曲面的面积元.

下面, 我们将结合正交标架和外微分方法, 重新推导出曲面的结构方程式: Gauss 方程和 Codazzi 方程.

## 2. 曲面的结构方程

取曲面  $S$  的正交标架  $\{\mathbf{r}; e_1, e_2, e_3\}$ , 由上一节的讨论, 正交标架的运动方程为

$$d\mathbf{r} = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2,$$

$$de_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

对运动方程的第一式求外微分, 左边  $=d(dr)=0$ , 将运动方程代入右边可得

$$\begin{aligned}
 0 &= d\left(\sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} e_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^2 \left(d\omega_{\alpha} e_{\alpha} - \omega_{\alpha} \wedge de_{\alpha}\right) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^2 \left(d\omega_{\alpha} e_{\alpha} - \omega_{\alpha} \wedge \sum_{j=1}^3 \omega_{\alpha j} e_j\right) \\
 &= \left(d\omega_1 - \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\alpha 1}\right) e_1 + \left(d\omega_2 - \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\alpha 2}\right) e_2 \\
 &\quad - \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\alpha 3} e_3.
 \end{aligned}$$

由于  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  线性无关, 我们得到如下两个等式:

$$d\omega_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta}, \quad \beta = 1, 2; \quad (6.1)$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\alpha 3}. \quad (6.2)$$

但由于  $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ , (6.1) 式可简化为

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}. \end{cases} \quad (6.3)$$

将 (5.18) 式代入 (6.2) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \wedge (h_{\alpha 1} \omega_1 + h_{\alpha 2} \omega_2) \\
 &= \omega_1 \wedge (h_{11} \omega_1 + h_{12} \omega_2) + \omega_2 \wedge (h_{21} \omega_1 + h_{22} \omega_2) \\
 &= (h_{12} - h_{21}) \omega_1 \wedge \omega_2,
 \end{aligned}$$

所以  $h_{12} = h_{21}$ , 即方程 (6.2) 等价于矩阵  $\mathbf{B} = (h_{\alpha\beta})$  是对称的.

同样, 对运动方程的第二式求外微分, 由于  $d(de_{\alpha}) = 0 (\alpha = 1, 2)$ , 将运

动方程代入可得

$$\begin{aligned}
 0 &= d\left(\sum_{j=1}^3 \omega_{\alpha j} e_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^3 (d\omega_{\alpha j} e_j - \omega_{\alpha j} \wedge de_j) \\
 &= \sum_{k=1}^3 d\omega_{\alpha k} e_k - \sum_{j=1}^3 \omega_{\alpha j} \wedge \sum_{k=1}^3 \omega_{jk} e_k \\
 &= \sum_{k=1}^3 \left(d\omega_{\alpha k} - \sum_{j=1}^3 \omega_{\alpha j} \wedge \omega_{jk}\right) e_k,
 \end{aligned}$$

因此我们有

$$d\omega_{\alpha k} - \sum_{j=1}^3 \omega_{\alpha j} \wedge \omega_{jk} = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

(6.4) 式虽然形式复杂, 但独立的方程只有 3 个. 这是因为当  $k = 1$  或  $k = 2$  时, 由  $(\omega_{ij})$  的反称性, 非零的  $\omega_{\alpha k}$  只能是  $\omega_{21} = -\omega_{12}$ ; 当  $k = 3$  时, (6.4) 式是关于  $\omega_{13}$  和  $\omega_{23}$  的外微分满足的方程. 将 (6.4) 式具体写出, 就是

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}; \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \end{cases} \quad (6.6)$$

方程 (6.3) 和 (6.5)、(6.6) 通称曲面正交标架的结构方程式, 它们是正交标架运动方程的可积性条件. 读者可以自行验证: 由  $d(de_3) = 0$  得不出新的方程式.

利用命题 5.3, 方程 (6.5) 还可以简化为

$$\begin{aligned}
 d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\
 &= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) \\
 &= -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\omega_1 \wedge \omega_2.
 \end{aligned} \quad (6.7)$$

下面的例子说明, 方程 (6.5) 就是曲面的 Gauss 方程, 方程 (6.6) 就是曲面的 Codazzi 方程.

**例 6.3** 设  $(u, v)$  是曲面的正交参数, 这时曲面的第一基本形式为

$$I = Edu + Gdv.$$

取  $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}$ 、 $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$ , 则  $\omega_1 = \sqrt{E}du, \omega_2 = \sqrt{G}dv$ . 代入 (6.1) 式, 可得

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = (\sqrt{E})_v dv \wedge du = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du \wedge \omega_2,$$

$$d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv = -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv \wedge \omega_1.$$

从以上两式, 可以求解出 1 形式

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv.$$

同样, 通过直接计算可以求出

$$\begin{aligned}\omega_{13} &= \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = \frac{L}{\sqrt{E}} du + \frac{M}{\sqrt{E}} dv, \\ \omega_{23} &= \langle d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \frac{M}{\sqrt{G}} du + \frac{N}{\sqrt{G}} dv.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}d\omega_{12} &= \left[ \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right] du \wedge dv, \\ \omega_{13} \wedge \omega_{32} &= -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -\frac{LN - M^2}{\sqrt{EG}} du \wedge dv.\end{aligned}$$

将以上两式代入方程 (6.5), 就得到

$$-\left[ \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right] = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG}},$$

这就是正交参数下的 Gauss 方程 (3.16).

类似地, 将上述各式代入到方程 (6.6), 也可得到正交参数下的 Codazzi 方程 (3.17).

### 3. $E^3$ 的正交标架与曲面的部分标架

为深入理解曲面正交标架运动方程的意义, 我们首先来讨论  $E^3$  正交标架的运动方程.

三维欧氏空间  $E^3$  的一个正交标架是由一个点  $x \in E^3$  以及以点  $x$  为起点、两两相互正交的三个单位向量  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  构成, 记为

$$\{x; e_1, e_2, e_3\}. \quad (6.8)$$

直观地看,  $E^3$  的所有正交标架全体  $\mathcal{F}$  共由六个参数确定: 三个参数确定位置向量  $x$ , 另外两个参数确定  $e_1$ , 因为  $e_1$  可以在单位球面上变化; 再有一个参数确定  $e_2$ , 因为  $e_2$  可以在与  $e_1$  垂直的平面上的单位圆上转动; 当  $e_1$ 、 $e_2$  确定后,  $e_3$  (在相差一个正负号下) 就惟一确定了.

为导出正交标架的变化规律, 考虑标架  $\{x; e_1, e_2, e_3\}$  的微分 (即它的无穷小变化), 并在标架自身上投影, 于是就有

$$\begin{aligned} dx &= \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i, \\ de_i &= \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (6.9)$$

其中

$$\omega_i = \langle dx, e_i \rangle, \quad \omega_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle$$

都是一阶微分形式. 对  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  求外微分, 可得

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

对 (6.9) 的第一式求外微分, 得到

$$\begin{aligned} 0 &= d(dx) = \sum_{i=1}^3 \left( d\omega_i e_i - \omega_i \wedge de_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( d\omega_i e_i - \omega_i \wedge \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( d\omega_i - \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \wedge \omega_j \right) e_i, \end{aligned}$$

所以

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.10)$$

类似地, 对 (6.9) 的第二式取外微分, 可以得到

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \quad (6.11)$$

方程 (6.9) 称为  $E^3$  正交标架的运动方程式, 方程 (6.10) 和 (6.11) 称为  $E^3$  的结构方程式, 它们在活动标架法中起了基本的作用.

当我们利用正交标架来研究  $E^3$  的曲面  $S$  时, 没有必要沿着  $S$  取  $E^3$  的全体正交标架, 而只需沿着曲面  $S$  取合适的部分标架.

设曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , 在  $S$  上每一点  $\mathbf{r}$ , 首先选取它的单位法向量作为  $\mathbf{e}_3$  ( $\mathbf{e}_3$  有两种不同的选择, 另一选择是  $-\mathbf{e}_3$ ). 当  $\mathbf{e}_3$  选定以后, 我们再在  $\mathbf{r}$  点的切平面选取两个相互垂直的单位向量  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  使得  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是正定向的, 即  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ ; 并且我们要求  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  可微地依赖于参数  $u, v$ . 记这类标架为  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

称标架族  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  为曲面  $S$  的正交活动标架, 它是  $E^3$  正交标架全体  $\mathcal{F}$  的部分标架. 显然运动方程 (6.9) 和结构方程 (6.10)、(6.11) 限制在曲面  $S$  上仍然成立. 根据我们对标架的取法,  $\mathbf{e}_3$  为曲面的法向量, 但  $d\mathbf{r}$  是曲面的切向量, 所以

$$\omega_3 = \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_3 \rangle = 0,$$

且

$$\omega_1 = \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_1 \rangle, \quad \omega_2 = \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_2 \rangle.$$

这时运动方程 (6.9) 就简化为曲面标架的运动方程 (5.12), 结构方程 (6.10) 简化为曲面的结构方程 (6.3), 结构方程 (6.11) 简化为曲面的结构方程 (6.5) 和 (6.6).

为今后讨论的方便, 我们将这些方程一一列出:



1) 标架的运动方程:

$$d\mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \quad (Y_1)$$

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3, \quad (Y_2)$$

$$d\mathbf{e}_2 = \omega_{21} \mathbf{e}_1 + \omega_{23} \mathbf{e}_3, \quad (Y_3)$$

$$d\mathbf{e}_3 = \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2, \quad (Y_4)$$

其中  $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ );

2) 曲面的结构方程:

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad (S_1)$$

$$d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1, \quad (S_2)$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \quad (S_3)$$

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad (S_4)$$

$$d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \quad (S_5)$$

可以看出, 运动方程  $(Y_1) - (Y_4)$  的系数为五个一阶微分形式

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\},$$

它们与曲面的参数选取无关, 这等价于一阶微分的不变性; 但它们与正交标架的选取有关.

设  $\{\mathbf{r}; \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3\}$  是曲面的另一组标架,  $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{12}, \bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}\}$  是相应的诸微分形式. 由于  $\bar{\mathbf{e}}_1$  为  $\mathbf{e}_1$  绕法向量  $\mathbf{e}_3$  旋转  $\theta$  角, 所以

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2,$$

在命题 5.2 的证明中我们已经得到:  $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\}$  与  $\{\omega_1, \omega_2\}$  之间,  $\{\bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}\}$  与  $\{\omega_{13}, \omega_{23}\}$  之间均相差一个相同的旋转, 即

$$\bar{\omega}_1 = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2, \quad \bar{\omega}_2 = -\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2;$$

$$\bar{\omega}_{13} = \cos \theta \omega_{13} + \sin \theta \omega_{23}, \quad \bar{\omega}_{23} = -\sin \theta \omega_{13} + \cos \theta \omega_{23}.$$

由此不难验证, 以下所列的量与正交标架的选取无关, 所以它们都是曲面的几何量:

(1) 曲面的第一基本形式

$$I = \omega_1 \omega_1 + \omega_2 \omega_2 = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_2;$$

(2) 曲面的面积元

$$dA = \omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2;$$

(3) 曲面的第二基本形式

$$II = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{13} + \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_{23};$$

(4) 曲面的第三基本形式

$$III = \langle d\mathbf{e}_3, d\mathbf{e}_3 \rangle = \omega_{13} \omega_{13} + \omega_{23} \omega_{23} = \bar{\omega}_{13} \bar{\omega}_{13} + \bar{\omega}_{23} \bar{\omega}_{23};$$

(5) 曲面 Gauss 映射的面积元

$$d\sigma = \omega_{13} \wedge \omega_{23} = \bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{23} = K du \wedge dv;$$

(6) 曲面的 Hopf 不变式

$$\psi = \omega_1 \omega_{23} - \omega_2 \omega_{13} = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{23} - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_{13}.$$

需要特别指出的是: 随着正交标架的不同选取,  $\omega_{12}$  的变化与其它几个微分形式有所不同, 读者可以自行验证

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta. \quad (6.12)$$

曲面的结构方程式  $(S_1) - (S_5)$  是正交标架运动方程的系数所必须满足的条件, 它包含了曲面所有的局部性质; 其中方程  $(S_3)$  是 Gauss 方程, 方程  $(S_4)$  和  $(S_5)$  是 Codazzi 方程. 关于方程  $(S_1)$  和  $(S_2)$  以及  $\omega_{12}$  的几何含义, 我们将在下一章讨论.

最后,我们以两个例子说明如何用活动标架研究曲面的几何,并结束本章的讨论.

**例 6.4** 研究主曲率为常数的曲面的分类.

(1) 设曲面  $S$  的两个主曲率  $k_1, k_2$  为常数,如果  $k_1 = k_2$ , 则  $S$  是全脐点曲面,它只能是平面或球面.

(2) 如果  $k_1 \neq k_2$ , 这时  $S$  没有脐点,我们可以取正交标架  $e_1, e_2$  是曲面的主方向, 则

$$\begin{cases} \omega_{13} = k_1 \omega_1, \\ \omega_{23} = k_2 \omega_2. \end{cases}$$

对上述第一式求微分并利用结构方程  $(S_1)$ , 我们有

$$d\omega_{13} = k_1 d\omega_1 = k_1 \omega_{12} \wedge \omega_2,$$

代入到 Codazzi 方程  $(S_4)$ , 就有

$$k_1 \omega_{12} \wedge \omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_{23} = k_2 \omega_{12} \wedge \omega_2,$$

因此  $(k_1 - k_2) \omega_{12} \wedge \omega_2 = 0$ . 同理对  $\omega_{23} = k_2 \omega_2$  求微分可得  $(k_1 - k_2) \omega_{12} \wedge \omega_1 = 0$ . 所以

$$\omega_{12} \wedge \omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = 0,$$

由此推出  $\omega_{12} = 0$ .

从 Gauss 方程 (6.7) 立刻可以得到  $S$  的 Gauss 曲率  $K = k_1 k_2 = 0$ . 不妨设  $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ , 这时  $\omega_{23} = 0$ , 标架的运动方程为

$$de_1 = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 = k_1 \omega_1 e_3,$$

$$de_2 = \omega_{21} e_1 + \omega_{23} e_3 = 0,$$

$$de_3 = \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2 = -k_1 \omega_1 e_1.$$

因此  $e_2$  是常向量,  $e_1$  和  $e_3$  恰好是半径为  $\frac{1}{|k_1|}$  的圆的活动标架, 所以  $S$  是圆柱面.

**例 6.5** 证明: 如果曲面  $S$  的 Gauss 曲率  $K = 0$  且  $S$  没有脐点, 则  $S$  是可展曲面<sup>1</sup>.

由于  $S$  没有脐点, 我们可以取正交标架  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是曲面的主方向. 设  $k_1, k_2$  是  $S$  的主曲率,  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ , 则

$$\omega_{13} = k_1 \omega_1 = 0, \quad \omega_{23} = k_2 \omega_2.$$

由 Codazzi 方程,

$$0 = d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} = k_2 \omega_{12} \wedge \omega_2,$$

所以  $\omega_{12} = f\omega_2$ .

$\omega_2 = 0$  确定了曲面  $S$  上一族曲线, 设  $\mathbf{r}(t)$  是其中的一条曲线,  $t$  是参数, 沿着  $\mathbf{r}(t)$ , 有

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2}{dt} = \frac{\omega_1}{dt} \mathbf{e}_1,$$

因此  $\mathbf{e}_1$  是曲线  $\mathbf{r}(t)$  的单位切向量. 但沿着  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\omega_{12} = f\omega_2 = 0$ , 我们有

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{\omega_{12}\mathbf{e}_2 + \omega_{13}\mathbf{e}_3}{dt} = 0.$$

这说明  $\mathbf{r}(t)$  是直线. 因此  $\{\omega_2 = 0\}$  是曲面  $S$  上的直线族, 即  $S$  是直纹面, 但  $S$  的 Gauss 曲率为零, 所以  $S$  是可展曲面.

## 习 题 四

1. 证明:

$$(1) \quad g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 2,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{1\alpha}^1 + \Gamma_{2\alpha}^2.$$

2. 设曲面  $S: \mathbf{r}(u^1, u^2)$  有参数变换  $u^\alpha = u^\alpha(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . 记  $a_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i}$ ,  $\tilde{a}_\alpha^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha}$  ( $1 \leq \alpha, i \leq 2$ ),  $S$  在参数  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  下的第一、第二基本形式为  $\{\tilde{g}_{ij}\}, \{\tilde{b}_{ij}\}$ , 证明:

<sup>1</sup> 如果仅假设曲面的 Gauss 曲率为零, 但曲面含有脐点, 则结论不成立. 读者可参见 W. Klingenberg. A course on differential geometry. Springer, 1978.

$$(1) \quad \tilde{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} a_i^\alpha a_j^\beta, \quad \tilde{b}_{ij} = b_{\alpha\beta} a_i^\alpha a_j^\beta, \quad g^{\alpha\beta} = \tilde{g}^{ij} a_i^\alpha a_j^\beta;$$

$$(2) \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma a_i^\alpha a_j^\beta \tilde{a}_\gamma^k + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial \tilde{u}^j} \tilde{a}_\alpha^k.$$

$$3. \text{ 证明: 平均曲率 } H = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} g^{\beta\alpha}.$$

4. 已知曲面的第一基本形式  $I = drdr + r^2 ds ds$ , 求它的 Christoffel 符号.

5. 求曲面  $z = f(x, y)$  的 Christoffel 符号.

6. 证明: 当  $(u, v)$  是曲面的正交曲率线网时 (见第三章习题 29), Codazzi 方程可以简化为

$$L_v = H E_v, \quad N_u = H G_u.$$

7. 证明: 平均曲率为常数的曲面, 或是全脐点的曲面, 或者它的第一、第二基本形式可以表为

$$I = \lambda(u, v)(dudu + dv dv) \quad (\lambda > 0),$$

$$II = (1 + \lambda H)dudu - (1 - \lambda H)dv dv.$$

8. 证明: 第一、第二基本形式的系数均为常数的曲面是平面或圆柱面.

9. 问是否有曲面, 以  $\varphi$  和  $\psi$  为第一、第二基本形式?

$$(1) \quad \varphi = dudu + dv dv, \quad \psi = dudu - dv dv;$$

$$(2) \quad \varphi = dudu + \cos^2 u dv dv, \quad \psi = \cos^2 u dudu + dv dv.$$

10. 求曲面  $F(x, y, z) = 0$  的 Gauss 曲率.

11. 求曲面, 它的第一、第二基本形式分别为

$$I = (1 + u^2)dudu + u^2 dv dv, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}(dudu + dv dv).$$

12. 已知两个微分式

$$\varphi = Edudu + Gdv dv \quad (E, G > 0), \quad \psi = \lambda(u, v)\varphi.$$

(1)  $E, G, \lambda$  满足什么条件时,  $\varphi$ 、 $\psi$  可以作为曲面的第一、第二基本形式?

(2)  $E = G$  时, 求解  $E$ 、 $G$  和  $\lambda$ .

13. 在旋转面  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$  上建立正交标架场  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  并求相应的诸微分形式  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ .

14. 证明:  $\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2}$  与正交标架  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的选取无关.

15. 球面  $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$ ,

(1) 求球面的一组正交活动标架;

(2) 求相应的诸微分形式  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ ;

(3) 求球面的第二基本形式 II.

16. 利用正交标架法证明第三章习题 27.

17. 用正交标架法证明第三章习题 32.

18. 设曲面  $S$  的参数表示为  $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ ,  $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{r}_v$  是  $S$  的正交标架, 求  $S$  的 Gauss 曲率.

19. 设  $(u, v)$  是曲面  $S$  的正交参数,  $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}$ , 证明: 方程 (6.6) 与 Codazzi 方程 (3.17) 等价.

20. 设  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$  是曲面的正交标架,  $\boldsymbol{e}_1$ 、 $\boldsymbol{e}_2$  是曲面的主方向,  $k_1$ 、 $k_2$  是相应的主曲率. 证明: 这时曲面的 Codazzi 方程等价于

$$dk_1 \wedge \omega_1 = (k_2 - k_1)\omega_{12} \wedge \omega_2, \quad dk_2 \wedge \omega_2 = (k_1 - k_2)\omega_{21} \wedge \omega_1.$$

## 第五章 曲面的内蕴几何学

上一章我们研究了曲面标架的运动方程和曲面的结构方程. 曲面的结构方程又称 Gauss 方程和 Codazzi 方程, 它们是标架运动方程的可积性条件. 其中 Gauss 方程有一个重要的推论, 即熟知的 Gauss “绝妙定理”: 曲面的 Gauss 曲率可以由曲面的第一基本形式决定.

从定义我们知道, 曲面的 Gauss 曲率可以由曲面的第二基本形式定义, 它反映曲面的弯曲. 因此 “Gauss 曲率由曲面的第一基本形式决定” 这个事实是至关重要的, 它预示着曲面的度量蕴含着曲面的几何.

这一章我们正是从这一角度出发, 研究曲面由第一基本形式所决定的几何, 即所谓的曲面内蕴几何学. 事实上, 平面的欧氏几何学就是相应于平面欧氏度量的几何学, 它研究图形在欧氏变换下的不变的几何性质. 同样, 由于曲面的第一基本形式就是曲面的度量, 保持曲面度量不变的变换称为曲面的等距变换, 曲面的内蕴几何学是研究等距变换下不变的几何量和几何性质.

本章内容包括: 曲面协变微分的概念; 平面欧氏几何的基本概念如直线、平移等在曲面的推广; 曲面上函数的 Laplace 算子及相应的 Green 公式; 等等.

由于第一基本形式实质上是定义在参数区域上的一个正定二次微分式, 我们可以忽略曲面是 “放在”  $E^3$  这一现象, 直接把定义在参数区域上的一个正定二次微分式视为度量, 由此出发研究它的几何学, 这正是 Riemann 几何的基本点. 我们也将简要介绍这一内容.

### §5.1 曲面的等距变换

以前我们讨论的是  $E^3$  的合同变换群, 它是保持曲面的第一、第二基本形式的变换, 现在我们需要讨论的是更广泛的一类变换, 称为曲面的等距变换, 我们先给出它的定义.

**定义 1.1** 设  $S$  和  $\tilde{S}$  是  $E^3$  的两张曲面,  $\sigma$  为  $S$  到  $\tilde{S}$  的一个  $1:1$  对应. 如果在对应  $\sigma$  下, 曲面  $S$  上的任意曲线  $C$  与  $C$  在  $\tilde{S}$  对应的曲线  $\tilde{C}(=\sigma(C))$



长度相等, 则称  $\sigma$  为  $S$  到  $\tilde{S}$  的等距变换.

显然  $E^3$  的欧氏运动是等距变换, 但是曲面的等距变换不一定是欧氏运动, 也就是说两个等距的曲面不一定是合同的. 将一张纸卷成圆筒, 圆筒与铺平的纸当然是等距的, 但它们不能通过  $E^3$  的运动叠合到一起.

设曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  的参数表示分别为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) 和  $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{u}, \tilde{v})$  ( $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$ ), 它们的第一基本形式分别为  $I(u, v) = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$  和  $\tilde{I}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{E}d\tilde{u}^2 + 2\tilde{F}d\tilde{u}d\tilde{v} + \tilde{G}d\tilde{v}^2$ . 设等距变换  $\sigma$  的参数表示为

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u}(u, v), \\ \tilde{v} = \tilde{v}(u, v), \end{cases} \quad (1.1)$$

$\sigma$  保持相对应的曲线长度相等, 这等价于  $\sigma$  保持曲面上曲线的弧长微元相等, 即当  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma(u, v)$  时

$$ds^2(u, v) = d\tilde{s}^2(\tilde{u}, \tilde{v}). \quad (1.2)$$

但由于

$$ds^2 = [du, dv] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix},$$

$$d\tilde{s}^2 = [d\tilde{u}, d\tilde{v}] \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix},$$

在对应  $\sigma(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$  下,

$$[d\tilde{u}, d\tilde{v}] = [du, dv] \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{bmatrix},$$

将以上三式代入 (1.2) 式, 可得

**命题 1.2** 设曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  的参数表示分别为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  和  $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{u}, \tilde{v})$ ,  $S$  与  $\tilde{S}$  之间的  $1:1$  对应  $\sigma(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$  是等距对应的充要条件是在对应  $\sigma$

下，它们的第一基本形式满足

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\sigma \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} \mathbf{J}_\sigma^T, \quad \text{其中 } \mathbf{J}_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

下面我们看一个例子.

**例 1.3** 考察特殊螺旋面

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$

$$(u, v) \in D = \{(u, v) : u > 0, 0 < v < 2\pi\},$$

与悬链面

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \cosh^{-1} \rho),$$

$$(\rho, \theta) \in \tilde{D} = \{(\rho, \theta) : \rho > 1, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

它们的第一基本形式分别为

$$I(u, v) = du du + (1 + u^2) dv dv,$$

$$I(\rho, \theta) = \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} d\rho d\rho + \rho^2 d\theta d\theta.$$

1:1对应  $(u, v) \rightarrow (\rho, \theta) = (\sqrt{1 + u^2}, v)$  是两个曲面间的一个等距变换，这是因为将

$$d\rho = \frac{u du}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad d\theta = dv$$

代入到悬链面的第一基本形式，有

$$I(\rho, \theta) = \frac{1 + u^2}{1 + u^2 - 1} \frac{u^2 du^2}{1 + u^2} + (1 + u^2) dv^2 = I(u, v).$$

用正交标架来描述等距变换是更为方便的. 在曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  上分别给定正交标架  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  和  $\{\tilde{\mathbf{r}}; \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ . 记  $d\mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2$ ,  $d\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\omega}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\omega}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2$ , 如果  $\sigma: S \rightarrow \tilde{S}$  是等距变换, 在对应的点就有

$$\omega_1 \omega_1 + \omega_2 \omega_2 = \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_2. \quad (1.3)$$

为进一步分析上式, 需考查  $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$  与  $\{\omega_1, \omega_2\}$  的关系. 由于  $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$  是线性无关的一阶微分形式, 可由  $\{d\tilde{u}, d\tilde{v}\}$  线性表出, 通过变换  $\sigma$  的 Jacobi 阵  $\mathbf{J}_\sigma$ ,  $\{d\tilde{u}, d\tilde{v}\}$  可表为  $\{du, dv\}$  的线性组合, 因此  $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$  可由  $\{\omega_1, \omega_2\}$  线性表出. 设

$$\tilde{\omega}_1 = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2, \quad (1.4)$$

$$\tilde{\omega}_2 = a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2,$$

代入到 (1.3) 式, 就知道矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  满足  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ , 这说明

(1.4) 式是正交变换. 如果将曲面  $\tilde{S}$  的标架  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\}$  经过相同的正交变换, 则在新的标架下有

$$\omega_1 = \tilde{\omega}_1, \quad \omega_2 = \tilde{\omega}_2. \quad (1.5)$$

上述讨论给出

**命题 1.4** 设  $\sigma$  是曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  间的  $1:1$  对应,  $\sigma$  为等距变换的充要条件是: 可以选取适当的正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  和  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$  使得在对应点

$$\omega_1 = \tilde{\omega}_1, \quad \omega_2 = \tilde{\omega}_2.$$

为进一步理解等距变换, 我们引进切映射的概念.

设  $\mathbf{v} = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v \in T_P S$  是曲面  $S$  上点  $P$  处的一个切向量, 取  $S$  上的曲线  $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  满足

$$\gamma(0) = P, \quad \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dt}(0) + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt}(0) = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v = \mathbf{v},$$

则  $\tilde{\gamma}(t) = \sigma \circ \gamma(t)$  是曲面  $\tilde{S}$  上的曲线,  $\tilde{\gamma}(0) = \sigma(P)$ , 它在  $t=0$  处的切向量

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \left. \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \right|_{t=0} = \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{dt}(0) + \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \frac{d\tilde{v}}{dt}(0) \\ &= \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{u}} \left( a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \right) \Big|_{t=0} + \tilde{\mathbf{r}}_{\tilde{v}} \left( a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} + b \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

从上式可以发现, 切向量  $\tilde{v}$  仅依赖于  $v$  和对应  $\sigma$ , 而与曲线  $\gamma$  的选取无关. 因此, 曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  间的对应  $\sigma$  诱导出切平面之间的一个映射

$$\begin{aligned}\sigma_*: \quad T_P S &\longrightarrow T_{\sigma(P)} \tilde{S}, \\ v &\longrightarrow \tilde{v} = \sigma_*(v).\end{aligned}\tag{1.6}$$

$\sigma_*$  称为映射  $\sigma$  的切映射.

不难发现,  $\sigma_*$  是曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  对应点切平面之间的线性映射, 且

$$\sigma_*(r_u) = \tilde{r}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \tilde{r}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}, \quad \sigma_*(r_v) = \tilde{r}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{r}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}.$$

因此在自然标架下, 切映射  $\sigma_*$  的系数矩阵是  $J_\sigma$ , 即

$$\begin{bmatrix} \sigma_*(r_u) \\ \sigma_*(r_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{\tilde{u}} \\ \tilde{r}_{\tilde{v}} \end{bmatrix}.\tag{1.7}$$

根据命题 1.2 我们有

**命题 1.5** 曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  之间的 1:1 对应  $\sigma$  是等距变换当且仅当对  $S$  的任意两个切向量  $v, w$ ,

$$\langle \sigma_*(v), \sigma_*(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

由于等距变换保持曲面的第一基本形式, 它亦保持曲面上二条相交曲线在交点处的夹角不变. 两个曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  之间的 1:1 对应, 如果仅保持任意两条相交曲线在交点处的夹角不变, 称为曲面的保角变换.

保角变换是比等距离变换更广泛的一类变换, 保角变换不再保持曲面的第一基本形式. 但我们有

**命题 1.6** 设  $\sigma$  是曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  之间的 1:1 对应, 则  $\sigma$  是保角变换当且仅当存在正函数  $\lambda$  使得在对应点, 曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  的第一基本形式满足

$$\tilde{I} = \lambda^2 \cdot I.$$

**证明** 依照定义, 对应  $\sigma$  是保角变换当且仅当

$$\frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} = \frac{\langle \sigma_*(v), \sigma_*(w) \rangle}{|\sigma_*(v)||\sigma_*(w)|}\tag{1.8}$$

对  $S$  的任意切向量  $v, w$  成立. 取  $e_1, e_2$  是  $S$  的正交标架, 对任意的  $a, b$ , 取  $v = ae_1 + be_2$ 、 $w = e_2$  代入 (1.8) 式, 不难推得

$$\langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_1) \rangle = \langle \sigma_*(e_2), \sigma_*(e_2) \rangle, \quad \langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_2) \rangle = 0.$$

设  $\lambda^2 = \langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_1) \rangle > 0$ , 则  $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\lambda}\sigma_*(e_1)$ 、 $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\lambda}\sigma_*(e_2)$  是曲面  $\tilde{S}$  的正交标架. 不难发现,  $\sigma$  是保角变换等价于: 曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  分别存在正交标架  $\{e_1, e_2\}$  和  $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ , 且在这两组正交标架下,  $\sigma$  的切映射  $\sigma_* = \lambda \cdot I_2$ .

设  $r(t) = r(u(t), v(t))$  是曲面  $S$  上的任意曲线,  $\tilde{r}(t) = \sigma \circ r(t)$ , 依定义  $\sigma_*\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d\tilde{r}}{dt}$ , 因此

$$\left\langle \frac{d\tilde{r}}{dt}, \frac{d\tilde{r}}{dt} \right\rangle = \left\langle \sigma_*\left(\frac{dr}{dt}\right), \sigma_*\left(\frac{dr}{dt}\right) \right\rangle = \lambda^2 \left\langle \frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right\rangle,$$

由此可得  $\langle d\tilde{r}, d\tilde{r} \rangle = \lambda^2 \langle dr, dr \rangle$ . 证毕.

一个相关的结果是下述定理, 它的证明超出了本书的范围 (参见 Chern S S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. Proc. of AMS, 1955(6):771-782).

**定理 1.7** 任意曲面上每一点都有一个邻域, 它可以和欧氏平面的一个区域间建立保角变换.

如果我们在欧氏平面  $E^2$  取欧氏坐标  $(u, v)$ , 它的度量为  $du du + dv dv$ . 上述定理等价于说, 对曲面上任一点, 存在一个邻域, 它以  $(u, v)$  为参数, 使得曲面的第一基本形式为

$$I = \lambda^2(u, v)(du du + dv dv), \quad \lambda \neq 0. \quad (1.9)$$

这样的参数  $(u, v)$  称为曲面的等温参数.

## §5.2 曲面的协变微分

从本节起我们讨论曲面的内蕴几何. 首先回顾一下上一章 §5 和 §6 讲过的一些内容.

设  $S$  是  $E^3$  的曲面, 在  $S$  上取正交标架  $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ , 其中  $e_3$  是曲面的法向量. 标架运动方程的系数是五个一阶微分形式  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ ,

其中  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}\}$  所满足的结构方程式为

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1, \end{cases} \quad \omega_{12} + \omega_{21} = 0, \quad (2.1)$$

和

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (2.2)$$

这里  $K$  是曲面的 Gauss 曲率, (2.2) 式是曲面的 Gauss 方程.

这一节我们主要讨论一阶微分形式  $\omega_{12}$ , 它称为曲面关于标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  的联络形式.

首先我们证明

**性质 2.1** 联络形式  $\omega_{12} = -\omega_{21}$  由方程 (2.1) 惟一确定.

**证明** 如果记  $d\omega_1 = a\omega_1 \wedge \omega_2$ ,  $d\omega_2 = b\omega_1 \wedge \omega_2$ , 则  $\omega_{12} = a\omega_1 + b\omega_2$  满足方程 (2.1), 因此只须说明  $\omega_{12}$  是惟一的.

设另有一阶微分形式  $\tilde{\omega}_{12} = -\tilde{\omega}_{21}$  也满足 (2.1) 式, 那么

$$\begin{cases} d\omega_1 = \tilde{\omega}_{12} \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \tilde{\omega}_{21} \wedge \omega_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

将 (2.3) 与 (2.1) 对应的式子相减, 可以看出  $(\tilde{\omega}_{12} - \omega_{12})$  满足

$$\omega_1 \wedge (\tilde{\omega}_{12} - \omega_{12}) = \omega_2 \wedge (\tilde{\omega}_{12} - \omega_{12}) = 0.$$

由于  $\omega_1$  与  $\omega_2$  线性无关, 只可能有  $\tilde{\omega}_{12} - \omega_{12} = 0$ , 这就证明了惟一性.

下面的命题说明了曲面在不同标架下的联络形式之间的关系.

**命题 2.2** 设  $\bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$  是曲面的另一组正交标架, 则曲面关于标架  $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$  的联络形式

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta.$$

**证明** 由  $\bar{\omega}_{12} = \langle d\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2 \rangle$  直接验证可得.

$\omega_{12}$  只依赖于第一基本形式  $\omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$  (或者正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ), 但它依赖于标架的选取, 不是几何量. 联络形式只与第一基本形式有关这一事实是



至关重要的. 由此可以引入曲面内蕴几何学的一系列概念和结果, 在下述内容中我们将反复讨论联络形式.

第一个可以给出的结果是 Gauss 的著名定理, 人们称它为 Gauss 绝妙定理.

**定理 2.3** 曲面的 Gauss 曲率  $K$  只与曲面的第一基本形式有关.

**证明** 因为  $d\omega_{12}$ 、 $\omega_1 \wedge \omega_2$  只与曲面的第一基本形式有关, 所以从 Gauss 方程 (2.2) 可知 Gauss 曲率  $K$  只与第一基本形式有关.

**推论 2.4** 互为等距的曲面, 在对应点的 Gauss 曲率相等.

**例 2.5** 当  $(u, v)$  是曲面的等温坐标系时, 第一基本形式

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

取  $\omega_1 = \lambda du, \omega_2 = \lambda dv$ , 则

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

直接计算有

$$\omega_{12} = -\frac{\lambda_v}{\lambda} du + \frac{\lambda_u}{\lambda} dv = -(\ln \lambda)_v du + (\ln \lambda)_u dv.$$

所以 Gauss 曲率

$$\begin{aligned} K &= -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2} \\ &= -\frac{1}{\omega_1 \wedge \omega_2} \left[ d \left( -(\ln \lambda)_v du + (\ln \lambda)_u dv \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda^2 du \wedge dv} \left[ (\ln \lambda)_{uu} + (\ln \lambda)_{vv} \right] du \wedge dv \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left( (\ln \lambda)_{uu} + (\ln \lambda)_{vv} \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \ln \lambda. \end{aligned}$$

这时引入复坐标  $z = u + iv$  是方便的, 令

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$



则 Gauss 曲率可以表为

$$K = -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln \lambda.$$

现在我们回忆一下在上一章 §6 中, 联络形式出现的情形. 联络形式仅出现在正交标架的运动方程  $(Y_2)$  和  $(Y_3)$  中, 即

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_1 = \omega_{12}\mathbf{e}_2 + \omega_{13}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_{21}\mathbf{e}_1 + \omega_{23}\mathbf{e}_3. \end{cases} \quad (2.4)$$

上式表明, 标架切向量的微分可以分为两部分: 一部分是在法向量上的投影  $\{\omega_{13}, \omega_{23}\}$ , 它决定曲面的第二基本形式; 另一部分是在曲面切平面的投影, 它恰好是联络形式. 内蕴几何的观点是只考虑标架切向量在曲面内的变化, 即标架微分落在切平面的部分, 这一部分称为标架的协变微分, 记为  $D\mathbf{e}_\alpha (\alpha = 1, 2)$ , 即

$$D\mathbf{e}_1 = \omega_{12}\mathbf{e}_2, \quad D\mathbf{e}_2 = \omega_{21}\mathbf{e}_1. \quad (2.5)$$

规定了标架的协变微分之后, 可以自然地给出一般切向量场协变微分的定义: 设  $\mathbf{v} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2$  是曲面上的切向量场, 其中  $f_1, f_2$  都是曲面上的函数,  $\mathbf{v}$  的协变微分  $D\mathbf{v}$  定义为

$$D\mathbf{v} = (df_1 + f_2\omega_{21})\mathbf{e}_1 + (df_2 + f_1\omega_{12})\mathbf{e}_2. \quad (2.6)$$

为说明上述定义的合理性, 需要验证 (2.6) 式的右边与正交标架  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的选取无关. 为此, 我们将来比较一下向量场协变微分  $D\mathbf{v}$  与普通微分  $d\mathbf{v}$  的关系.  $D\mathbf{v}$  是曲面的切向量, 一般说来  $d\mathbf{v}$  不再是曲面的切向量, 但

$$\langle d\mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle df_1\mathbf{e}_1 + df_2\mathbf{e}_2 + f_1d\mathbf{e}_1 + f_2d\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = df_1 + f_2\omega_{21},$$

同理,  $\langle d\mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = df_2 + f_1\omega_{12}$ , 所以我们有

**命题 2.6** 设  $\mathbf{v}$  是曲面  $S$  上的切向量场, 它的协变微分  $D\mathbf{v}$  为  $d\mathbf{v}$  在切平面的投影, 即

$$D\mathbf{v} = \langle d\mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle d\mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2.$$

特别, 切向量场的协变微分与标架的选取无关.

容易验证, 下面有关协变微分的性质与普通微分是一致的:

**性质 2.7** 设  $v$ 、 $w$  是曲面的切向量场,  $f$  是曲面上函数, 则

- (1)  $D(v + w) = Dv + Dw$ ;
- (2)  $D(fv) = dfv + fDv$ ;
- (3)  $D\langle v, w \rangle = \langle Dv, w \rangle + \langle v, Dw \rangle$ .

协变微分的概念来源于在曲面上推广平行概念. 回想一下在欧氏空间中, 比较两个不同起点的向量的办法是将其中一个平行地移动, 使它们起点重合. 设  $P$ 、 $Q$  为欧氏平面上两点,  $\gamma$  是联结  $P$ 、 $Q$  的一条曲线,  $v$  是起点在  $P$  的一个向量. 沿  $\gamma$  将  $v$  平移到点  $Q$ , 就是沿曲线  $\gamma$  给出了一族向量  $v(t)$  ( $t$  是曲线  $\gamma$  的参数), 满足  $\frac{dv}{dt} = 0$ , 即  $v$  是常值向量. 欧氏平移有如下性质:

- (1) 平移保持长度不变;
- (2) 平移保持二个向量夹角不变;
- (3) 平移与路径无关.

利用协变微分, 可以推广平移的概念到曲面上.

**定义 2.8** 设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $r = r(u, v)$  是它的参数表示,  $P$ 、 $Q$  为  $S$  上两点,  $\gamma: u = u(t), v = v(t)$  为曲面  $S$  上联结  $P$  和  $Q$  的曲线. 设  $v = v(t)$  是沿曲线  $\gamma$  的切向量场,  $v(t)$  称为沿  $\gamma$  (在 Levi-Civita 意义下) 平行, 如果  $\frac{Dv}{dt} = 0$ .

这里  $\frac{Dv}{dt}$  就是向量  $\frac{dv}{dt}$  在曲面切平面的投影. 用协变微分来描述, 如果  $v(t) = f_1(t)e_1(t) + f_2(t)e_2(t)$ , 则

$$\frac{Dv}{dt} = \left( \frac{df_1}{dt} + f_2 \frac{\omega_{21}}{dt} \right) e_1 + \left( \frac{df_2}{dt} + f_1 \frac{\omega_{12}}{dt} \right) e_2, \quad (2.7)$$

其中  $\frac{\omega_{12}}{dt}$  的意思为: 若  $\omega_{12} = a du + b dv$ , 则  $\frac{\omega_{12}}{dt} = a \frac{du}{dt} + b \frac{dv}{dt}$ .

从 (2.7) 式可得, 向量场  $v(t) = f_1(t)e_1(t) + f_2(t)e_2(t)$  沿曲面  $S$  上曲线  $r(t) = r(u(t), v(t))$  平行等价于

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} + f_2 \frac{\omega_{21}}{dt} = 0, \\ \frac{df_2}{dt} + f_1 \frac{\omega_{12}}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

由于给定曲线  $(u(t), v(t))$  后, (2.8) 式是关于函数  $f_1, f_2$  的一阶常微分方程组, 它在给定的初值下解惟一. 这就是说

**性质 2.9** 设  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  是曲面  $S$  上一条参数曲线,  $t \in [a, b]$ ,  $\mathbf{r}(a) = P, \mathbf{r}(b) = Q$ . 对任何的切向量  $\mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 \in T_P S$ , 存在惟一沿曲线  $\mathbf{r}(t)$  的平行切向量场  $\mathbf{v}(t)$  使得  $\mathbf{v}(a) = \mathbf{v}_0$ . 换句话说, 我们可以将切向量  $\mathbf{v}_0 \in T_P S$  沿曲线  $\mathbf{r}(t)$  平行移动.

关于曲面平移的几何性质, 我们有

**定理 2.10** 设  $\mathbf{v}(t)$ 、 $\mathbf{w}(t)$  是曲面  $S$  上沿曲线  $\gamma$  的平行切向量场, 则  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \text{常数}$ .

**证明** 设  $\mathbf{v} = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{w} = g_1 \mathbf{e}_1 + g_2 \mathbf{e}_2$ , 利用 (2.8) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \frac{d}{dt} (f_1 g_1 + f_2 g_2) = \frac{df_1}{dt} g_1 + \frac{df_2}{dt} g_2 + f_1 \frac{dg_1}{dt} + f_2 \frac{dg_2}{dt} \\ &= - \left( f_2 \frac{\omega_{21}}{dt} g_1 + f_1 \frac{\omega_{12}}{dt} g_2 + f_1 g_2 \frac{\omega_{21}}{dt} + f_2 g_1 \frac{\omega_{12}}{dt} \right) = 0. \end{aligned}$$

所以  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  是与  $t$  无关的常数.

**推论 2.11** 曲面上的平行移动保持切向量的长度不变, 两个切向量的夹角不变.

**注** 需要指出的是 Levi-Civita 平行性与欧氏平行性的一个显著区别是平移与道路的选择有关.

### §5.3 测地曲率与测地线

这一节我们要用协变微分的概念研究曲线上的曲线.

设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  是  $S$  的参数表示.  $C: \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$  是曲面上的一条弧长参数曲线. 沿曲线  $C$  取曲面的正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 其中  $\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$ , 且  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是正定向的.

**定义 3.1** 曲面  $S$  上的弧长参数曲线  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  的测地曲率  $k_g$  定义为

$$k_g = \left\langle \frac{D\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \right\rangle.$$

我们也称  $\mathbf{k}_g = k_g \mathbf{e}_2 = \frac{D\mathbf{e}_1}{ds}$  为曲线的测地曲率向量.

从定义可以看出, 测地曲率只与曲面的第一基本形式有关, 它是一个内蕴几何量. 因为协变微分是平面普通微分在曲面的推广, 测地曲率是平面曲线曲率在曲面的推广.

下面我们来比较曲面上曲线的曲率与测地曲率的关系. 在第二章我们说过,  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}$  是曲线的曲率向量, 它的长度  $\kappa = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|$  是曲线的曲率, 但曲率向量  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  一般不再是曲面的切向量.

由于曲线的测地曲率

$$k_g = \left\langle \frac{D\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{e}_2 \right\rangle, \quad (3.1)$$

曲线的法曲率

$$k_n = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{e}_3 \right\rangle, \quad (3.2)$$

不难得出

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k_g \mathbf{e}_2 + k_n \mathbf{e}_3. \quad (3.3)$$

直观上看, 曲面上曲线的测地曲率向量是曲线曲率向量在切平面的投影. 曲线的弯曲有两部分, 法曲率是由曲面弯曲产生的, 测地曲率是曲线自身在曲面内的弯曲程度. 从 (3.3) 式还可以推出

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2. \quad (3.4)$$

我们也可用曲面的自然标架表示测地曲率. 设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  是曲面的一个参数表示, 根据自然标架的运动方程,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \mathbf{r}_1 \frac{du^1}{ds} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \mathbf{r}_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} \right) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \mathbf{r}_\gamma + \frac{d^2u^\alpha}{ds^2} \mathbf{r}_\alpha + b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

因此测地曲率向量

$$\mathbf{k}_g = \left( \frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} \right) \mathbf{r}_\alpha, \quad (3.6)$$

所以

$$k_g = \langle \mathbf{k}_g, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{k}_g, \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{ds} \rangle. \quad (3.7)$$

下面的 Liouville 公式常用于计算曲线的测地曲率.

**命题 3.2**(Liouville) 设  $(u, v)$  是曲面  $S$  的正交参数,  $I = Edu + Gdv$ ;  $C: u = u(s), v = v(s)$  是曲面上一条弧长参数曲线. 设  $C$  与  $u$  线的夹角为  $\theta$ , 则  $C$  的测地曲率为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \theta.$$

**证明** 取曲面的正交标架  $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$ , 那么  $\omega_1 = \sqrt{E}du, \omega_2 = \sqrt{G}dv$ . 在第四章的例 6.3 我们已求出

$$\omega_{12} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv.$$

由于  $C$  与  $\mathbf{e}_1$  的夹角为  $\theta$ , 沿曲线  $C$  我们取

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2,$$

则可求出  $C$  的测地曲率

$$\begin{aligned} k_g &= \left\langle \frac{D\bar{\mathbf{e}}_1}{ds}, \bar{\mathbf{e}}_2 \right\rangle \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \cos^2 \theta \left\langle \frac{D\mathbf{e}_1}{ds}, \mathbf{e}_2 \right\rangle - \sin^2 \theta \left\langle \frac{D\mathbf{e}_2}{ds}, \mathbf{e}_1 \right\rangle \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega_{12}}{ds}. \end{aligned}$$

但由于  $\sqrt{E} \frac{du}{ds} = \cos \theta, \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \sin \theta$ , 将  $\omega_{12}$  的表示式代入上式, 即可证明 Liouville 公式.

**定义 3.3** 曲面上测地曲率等于 0 的曲线称为曲面的测地线.

显然, 曲线是测地线等价于它的测地曲率向量等于 0. 根据 (3.6) 式, 当曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  时, 曲面上的弧长参数曲线  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$  是测地线当且仅当  $(u^1(s), u^2(s))$  满足方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$



上述方程组称为曲面的测地线方程.

容易看出, 测地线是平面直线在曲面的推广. 有关平面直线的一个基本性质是: 平面上从任意一点出发沿任一方向均可作一条直线. 曲面上相应的结果是如下定理:

**定理 3.4** 设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $P$  是曲面  $S$  上的一个点,  $v$  是  $P$  点的一个单位切向量, 则曲面  $S$  上存在惟一一条过  $P$  点的测地线, 它与  $v$  相切.

**证明** 设  $r = r(u^1, u^2)$  是  $S$  的参数表示,  $P = P(u_0^1, u_0^2)$ ,  $v = a^1 r_1 + a^2 r_2 \in T_P S$ . 定理的证明等价于求测地线方程 (3.8) 在初值条件

$$\begin{cases} u^1(0) = u_0^1, \\ u^2(0) = u_0^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du^1}{ds}(0) = a^1, \\ \frac{du^2}{ds}(0) = a^2 \end{cases}$$

下的解. 由常微分方程的知识知道, 这样的解  $(u^1(s), u^2(s))(s \in (-\varepsilon, \varepsilon))$  存在惟一. 这就证明了定理.

由于测地曲率由曲面的第一基本形式决定, 曲面的测地线也由曲面的第一基本形式决定, 因此, 曲面的测地线在等距变换下不变, 即

**定理 3.5** 设  $\sigma$  是曲面  $S$  与曲面  $\tilde{S}$  之间的一个等距变换,  $\gamma$  是曲面  $S$  的测地线, 则  $\sigma \circ \gamma$  是曲面  $\tilde{S}$  的测地线.

**命题 3.6** 表面上的正则曲线  $C$  是测地线当且仅当沿着  $C$ , 曲线的主法向量与曲面的法向量平行.

**证明** 设  $C$  的弧长参数表示为  $r = r(s)$ , 则  $\frac{d^2 r}{ds^2} = \kappa n'$ , 其中  $n'$  是曲线的主法向量. 根据 (3.3) 式,

$$\kappa n' = k_g + k_n n,$$

因此  $k_g = 0$  等价于主法向量  $n'$  与曲面的法向量  $n$  平行. 证毕.

**推论 3.7** 任何表面上的直线都是测地线.

**例 3.8** 讨论单位球面  $S^2$  上的测地线.

对于球面上任一点  $P$  以及  $P$  点的切向量  $v$ , 向量  $\overrightarrow{OP}$  和  $v$  张成的平面与球面交于一个圆  $\Gamma$ ,  $v$  是这个圆的切向量. 容易看出,  $\Gamma$  的主法向和球面的法向重合. 所以  $\Gamma$  是球面的测地线. 由定理 3.4 知, 球面的测地线就是过球心的平面与球面所交的圆. 这类圆称为球面的大圆, 如图 5.1.

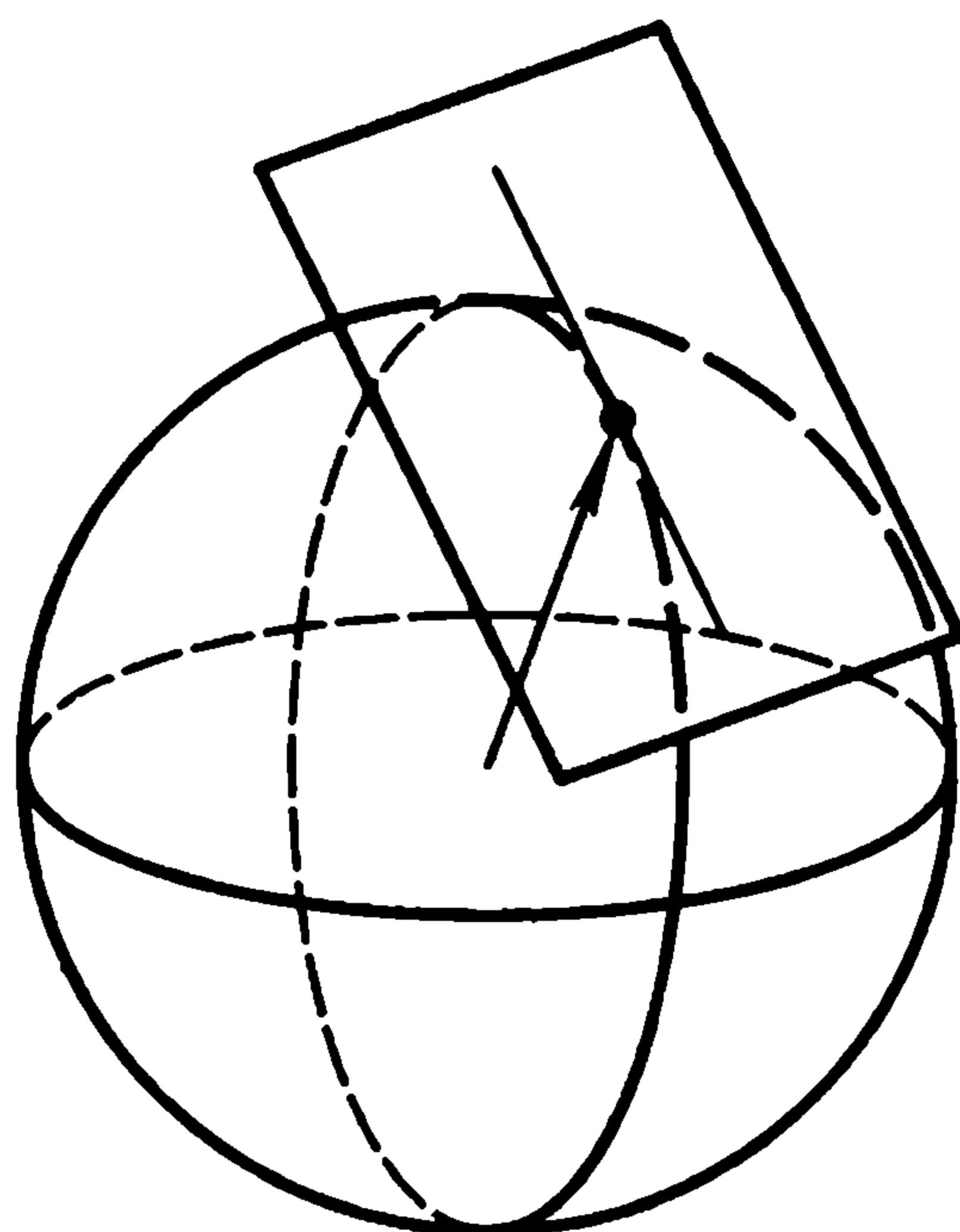


图 5.1

**例 3.9** 圆柱面上的测地线.

将圆柱面剪开铺平, 给出了圆柱面到平面的一个等距变换. 平面的测地线是直线. 因此圆柱面的测地线就是: 将平面卷成圆柱面时, 由平面直线变过来的曲线. 容易发现它们是平行圆与圆柱螺线. 自然界的攀缘植物, 沿螺线生长, 是测地线的一个有趣的例子.

平面上直线的另一性质是直线段是联结两点的最短线. 在曲面上有相应的结论, 它的证明采用了变分的办法.

**定理 3.10** 设曲线  $C$  是联结曲面上两点  $P$  和  $Q$  的长度最短的曲面上曲线, 则  $C$  是测地线.

**证明** 设曲线  $C$  的弧长参数表示为  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$  ( $s \in [0, l]$ ),  $\mathbf{r}(0) = P$ ,  $\mathbf{r}(l) = Q$ . 取曲面的正交标架  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 使得沿曲线  $C$ ,  $\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$ .  
设沿着  $C$ ,

$$\mathbf{e}_2 = a^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} + a^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = a^1 \mathbf{r}_1 + a^2 \mathbf{r}_2,$$

并设  $f$  是  $[0, l]$  上的任一光滑函数,  $f(0) = f(l) = 0$ . 考虑曲面上一族曲线

$$\mathbf{r}^\lambda(s) = \mathbf{r}(u^1(s) + \lambda f(s)a^1(s), u^2(s) + \lambda f(s)a^2(s)), \quad (3.9)$$

$$\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

这是联结  $P$ 、 $Q$  两点的一族曲线, 满足 (见图 5.2)



$$\begin{aligned}
(1) \quad & \mathbf{r}^0(s) = \mathbf{r}(s), \\
(2) \quad & \left. \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda(s)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = f(a^1 \mathbf{r}_1 + a^2 \mathbf{r}_2) = f \mathbf{e}_2, \\
(3) \quad & \mathbf{r}^\lambda(0) = P, \quad \mathbf{r}^\lambda(l) = Q, \quad \forall \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

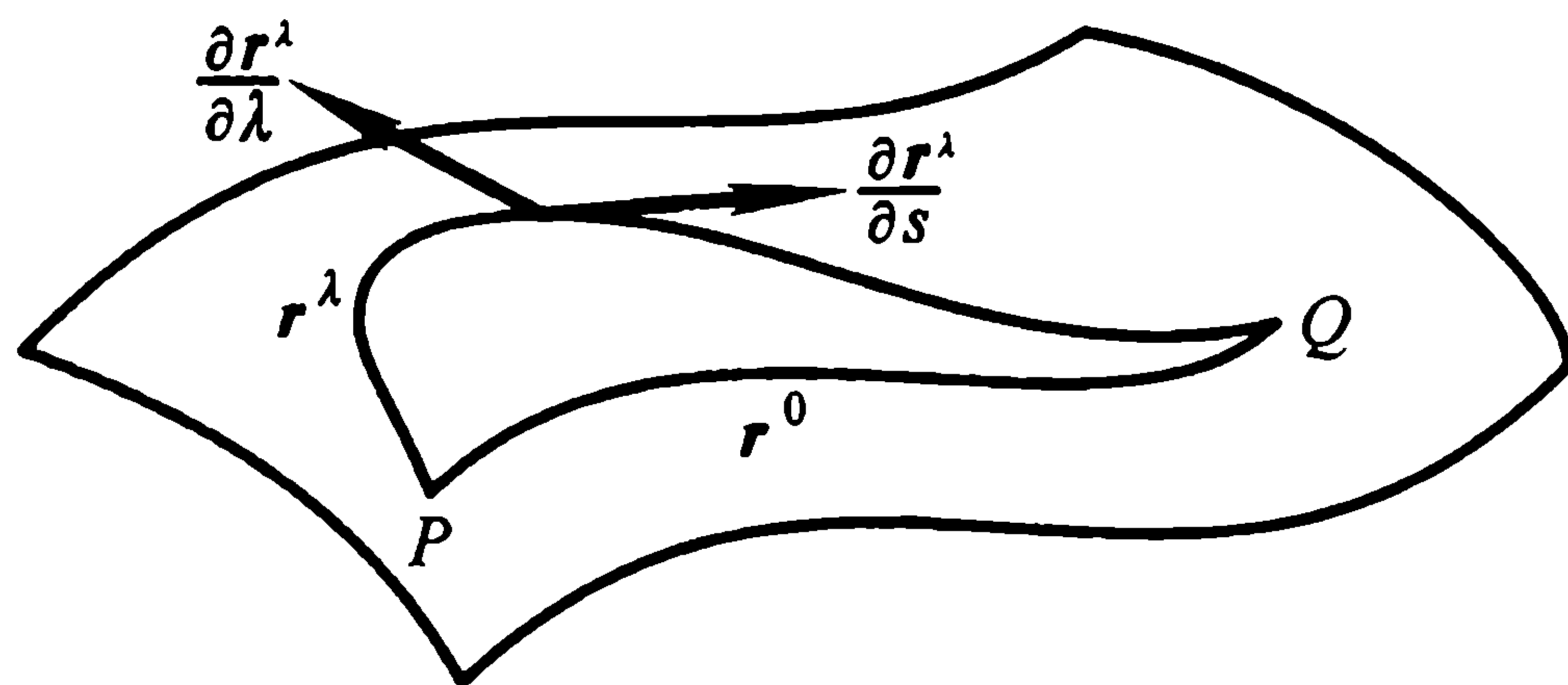


图 5.2

曲线族  $\{\mathbf{r}^\lambda\}$  称为曲线  $\mathbf{r}^0(s) = \mathbf{r}(s)$  的一个变分. 设  $L(\lambda)$  是曲线  $\mathbf{r}^\lambda$  的长度. 由假设,  $L(0) = \inf_{\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)} L(\lambda)$ , 所以

$$\left. \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

由于 (注意  $s$  仅是曲线  $\mathbf{r}^0$  的弧长参数)

$$L(\lambda) = \int_0^l \left| \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda(s)}{\partial s} \right| ds,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &= \int_0^l \left| \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda}{\partial s} \right|^{-\frac{1}{2}} \left\langle \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda}{\partial s} \right), \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda}{\partial s} \right\rangle \Big|_{\lambda=0} ds \\
&= \int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda}{\partial \lambda} \right), \frac{\partial \mathbf{r}^\lambda}{\partial s} \right\rangle \Big|_{\lambda=0} ds \\
&= \int_0^l \left\langle \frac{d}{ds} (f \mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1 \right\rangle ds \\
&= - \int_0^l f \left\langle \mathbf{e}_2, \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \right\rangle ds = - \int_0^l f k_g ds,
\end{aligned}$$

这里  $k_g$  是曲线  $\mathbf{r}(s)$  的测地曲率. 因此, 如果  $\mathbf{r}(s)$  是联结  $P$ 、 $Q$  的最短线, 则对定义在  $[0, l]$  上的任何光滑函数  $f$  满足  $f(0) = f(l) = 0$ , 都有

$$\int_0^l f k_g ds = 0.$$

由此容易推出  $k_g = 0$ ，这证明了定理。

**注** 定理 3.10 说明，曲面上联结两点的最短线是测地线，但曲面上联结两点的测地线有可能不是最短线。例如在球面上取  $P$ 、 $Q$  两点，它们不是对径点，过  $P$ 、 $Q$  有惟一一个大圆，联结  $P$ 、 $Q$  的劣弧是最短测地线，联结  $P$ 、 $Q$  的优弧也是测地线，但不是最短的。

## §5.4 测地坐标系

欧氏平面常用的坐标系是直角坐标系和极坐标系，其中直角坐标系的坐标参数由两族相互正交的直线族决定，极坐标系的坐标参数由从原点出发的射线决定。利用测地线，我们可以建立曲面上相应的坐标系。

### 1. 测地平行坐标系

设  $S$  是  $E^3$  的曲面，取曲面  $S$  上一点  $P$ ， $C$  是过  $P$  点的测地线， $C$  的弧长参数为  $v$  ( $|v| < \delta$ )， $v = 0$  对应  $P$  点。过  $C$  的各点作与  $C$  正交的测地线，它们的弧长参数记为  $u$ 。显然  $u = 0$  就是曲线  $C$ 。 $(u, v)$  构成了  $P$  点附近的一个参数网。

设曲面  $S$  在参数  $(u, v)$  下的第一基本形式为  $I = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2$ ，由于  $u$  是弧长参数，所以

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 1. \quad (4.1)$$

以下来说明  $F = 0$ 。对  $F$  求偏导，就有

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vu} \rangle,$$

由于  $u$  线是测地线，它的曲率向量  $\mathbf{r}_{uu}$  与曲面垂直，所以  $\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ 。又因为  $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 1$ ，因此  $\langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u \rangle = 0$ ，所以  $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ 。但  $u = 0$  的曲线即曲线  $C$  与  $u$  线垂直， $F(0, v) = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle|_{u=0} = 0$ ，这推出  $F(u, v) = F(0, v) = 0$ 。这时曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2, \quad (4.2)$$

而且，因为  $u = 0$  时  $v$  是曲线  $C$  的弧长参数，所以  $G(0, v) = 1$ 。

上述参数  $(u, v)$  称为曲面以  $P$  为原点的测地平行坐标系，它相似于平面的直角坐标系。测地平行坐标系  $(u, v)$  定义在  $P$  的一个小邻域内，从几何上看是非常直观的，严格地证明  $(u, v)$  是曲面的正则参数需用到反函数定理。

## 2. 测地极坐标系和法坐标系

从曲面  $S$  上一点  $P$  出发，沿任意单位切向量有惟一一条测地线存在。测地线上的点可以用弧长作参数，单位切向量可以用它与一个固定方向的夹角作参数，这样定义的参数系称作曲面的测地极坐标系，下面我们将详细讨论测地极坐标系的构成。

设  $S$  是  $E^3$  的曲面， $P \in S$ ， $v$  是  $P$  点的一个单位切向量，根据定理 3.4，以  $\gamma_v(s) = \gamma(v, s)$  记从  $P$  点出发、与  $v$  相切的测地线，这里弧长参数  $s \geq 0$ ， $\gamma_v(s)$  又称作从  $P$  点出发、沿  $v$  方向的测地射线。 $s$  的定义范围可能很小，且与  $v$  有关。但  $v$  的全体是一个单位圆周，这是一个紧致集合。利用常微分方程解对初值的连续性可以证明：存在  $\varepsilon > 0$ ，使得对任意的单位切向量  $v \in T_P S$ ， $\gamma_v(s)$  当  $0 \leq s < \varepsilon$  时有定义。

对非零切向量  $w \in T_P S$ ， $|w| = \rho$ ，定义映射

$$\begin{aligned} \exp_P : T_P S &\longrightarrow S, \\ w &\longrightarrow \exp_P(w) = \gamma\left(\frac{w}{\rho}, \rho\right). \end{aligned}$$

$\exp_P$  称为  $P$  点的指数映射，当  $|w| < \varepsilon$  时  $\exp_P(w)$  有定义。

指数映射是从切平面原点的一个小邻域到曲面的映射，它把切平面过原点的直线  $\rho v$  ( $|v| = 1$ ) 映为测地线  $\gamma(v, \rho) = \exp_P(\rho v)$ 。通过指数映射，可以用切平面  $T_P S$  的坐标给出曲面的参数表示。

取  $P$  点的正交标架  $e_1, e_2$  建立  $T_P S$  的直角坐标系，对应

$$w = x^1 e_1 + x^2 e_2 \longrightarrow r(x^1, x^2) = \exp_P(w)$$

给出了曲面  $S$  在  $P$  附近的参数表示  $r = r(x^1, x^2)$ ， $(x^1, x^2)$  称为以  $P$  为原点的法坐标系。通过切平面  $T_P S$  的直角坐标系与极坐标系之间的变换：

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos \theta, \\ x^2 = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (4.3)$$

$(\rho, \theta)$  也可以作为曲面  $S$  在点  $P$  附近的参数表示,  $(\rho, \theta)$  称为以  $P$  为原点的测地极坐标系.

在以  $P$  为原点的测地极坐标系  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \theta)$  下,  $\rho$  线  $\theta = \theta_0$  是从  $P$  点出发、与单位切向量  $\mathbf{v}_0 = \cos \theta_0 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_0 \mathbf{e}_2$  相切的测地射线,  $\rho$  是弧长参数. 从指数映射来看,  $\rho$  线是切平面  $T_P S$  的射线  $\rho \mathbf{v}_0$  在指数映射下的像  $\exp_P(\rho \mathbf{v}_0)$ . 同样,  $\theta$  线  $\rho = \rho_0$  是切平面  $T_P S$  上以原点为圆心、 $\rho_0$  为半径的圆在指数映射下的像  $\exp_P(\rho_0 \mathbf{v})$ , 称作以  $\rho_0$  为半径的测地圆, 参见图 5.3.

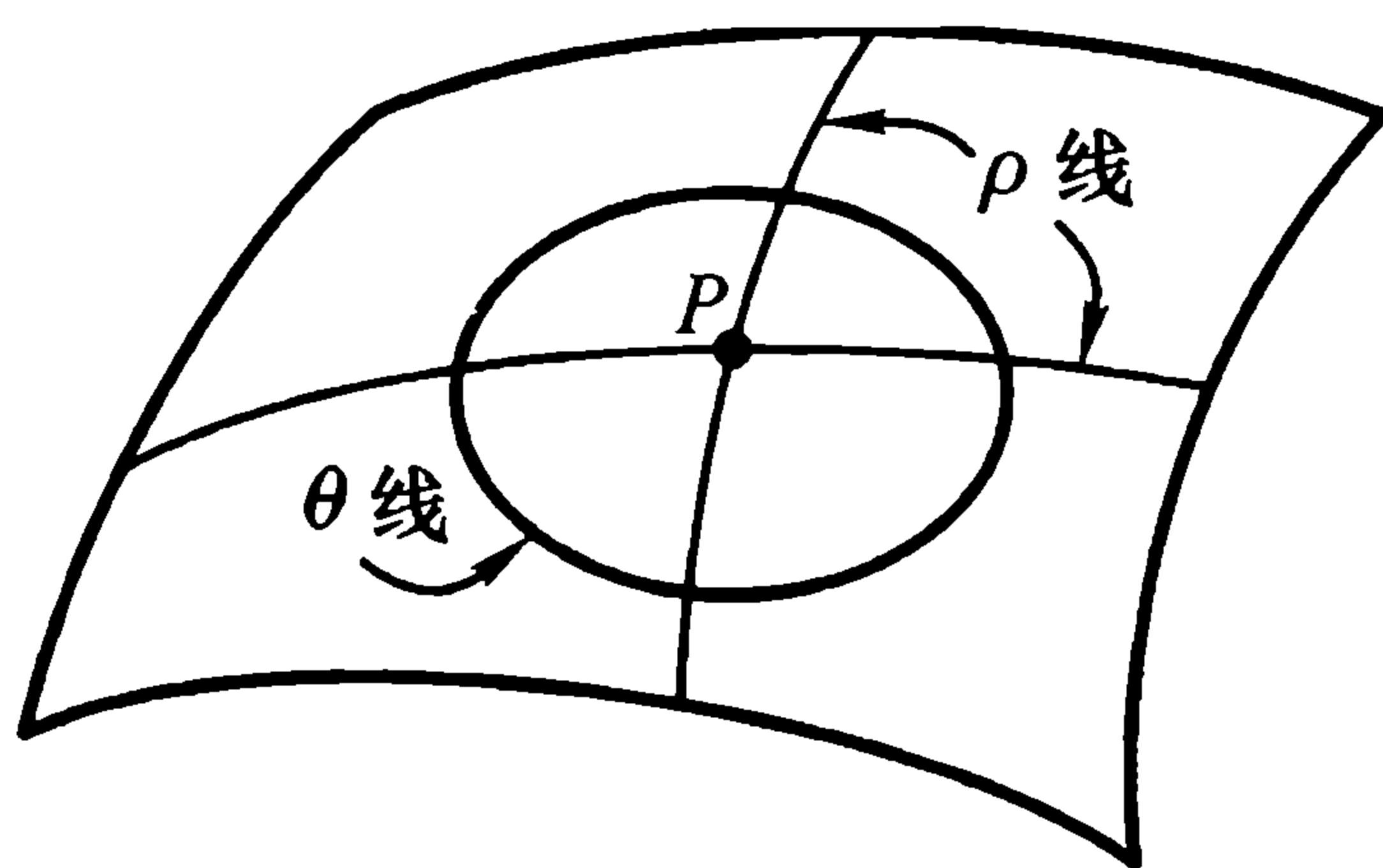


图 5.3

记与  $\mathbf{e}_1$  的夹角为  $\theta$  的  $\rho$  线为  $C_\theta$ , 则  $\{C_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$  是从  $P$  点出发的一族测地线,  $\mathbf{r}(\rho, \theta)$  表示的是测地线  $C_\theta$  上弧长为  $\rho$  对应的点. 因此测地极坐标系类似于平面的极坐标系, 以下我们将详细讨论它的性质.

**命题 4.1**  $(x^1, x^2)$  是曲面在  $P$  附近的正则参数.

**证明** 设  $(u^1, u^2)$  是  $S$  在  $P$  附近的正交参数, 且

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(P) = \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}(P) = \mathbf{e}_2.$$

我们需证明在  $P$  附近有  $\det \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \neq 0$ .

设  $P$  对应的参数为  $u^1 = 0, u^2 = 0$ , 从  $P$  出发的测地线  $C_\theta$  的参数表示为  $\mathbf{r}(u^1(\rho), u^2(\rho))$ , 它满足测地线方程 (3.8)

$$\frac{d^2 u^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\rho} \frac{du^\gamma}{d\rho} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.4)$$

因为  $C_\theta$  在  $P$  的切向量

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\theta) &= \left. \frac{d\mathbf{r}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \left( \mathbf{e}_1 \frac{du^1}{d\rho} + \mathbf{e}_2 \frac{du^2}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=0} \\ &= \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

所以

$$\left. \frac{du^1}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \cos \theta, \quad \left. \frac{du^2}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \sin \theta. \quad (4.5)$$

将  $u^\alpha(\rho)$  在  $\rho = 0$  处做渐近展开, 结合 (4.4)、(4.5) 两式可得

$$\begin{aligned} u^\alpha(\rho) &= u^\alpha(0) + \left. \frac{du^\alpha}{d\rho} \right|_{\rho=0} \rho + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{d^2 u^\alpha}{d\rho^2} \right|_{\rho=0} \right) \rho^2 + \cdots \\ &= u^\alpha(0) + x^\alpha + \frac{1}{2} \left( -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \left. \frac{du^\beta}{d\rho} \frac{du^\gamma}{d\rho} \right|_{\rho=0} \right) \rho^2 + \cdots \\ &= u^\alpha(0) + x^\alpha - \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha x^\beta x^\gamma + \cdots, \end{aligned}$$

于是

$$\left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right) (P) = (\delta_\beta^\alpha), \quad (4.6)$$

所以  $\det \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \neq 0$  在  $P$  附近成立. 命题得证.

在以  $P$  为原点的法坐标系  $(x^1, x^2)$  下,  $P$  点对应参数区域的原点, 曲面上过  $P$  点的测地线对应参数区域上从原点出发的直线  $\theta = \theta_0$ , 即

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos \theta_0, \\ x^2 = \rho \sin \theta_0 \end{cases}$$

是曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$  的测地线, 将其代入测地线方程

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\rho} \frac{dx^\gamma}{d\rho} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

就得到

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(\rho \cos \theta_0, \rho \sin \theta_0) \frac{dx^\beta}{d\rho} \frac{dx^\gamma}{d\rho} = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

沿测地线  $\theta = \theta_0$  成立. 令  $\rho \rightarrow 0$  就得到

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(P) \left. \frac{dx^\beta}{d\rho} \right|_{\rho=0} \left. \frac{dx^\gamma}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

但  $\left. \frac{dx^\beta}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \cos \theta_0$  或  $\sin \theta_0$ ，由  $\theta_0$  的任意性，上式不难推出

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(P) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2. \quad (4.7)$$

由此可以得到

**定理 4.2** 设曲面在以  $P$  为原点的法坐标系  $(x^1, x^2)$  下的第一基本形式  $I = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ，则

$$(g_{\alpha\beta})(P) = (\delta_{\alpha\beta}), \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(P) = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2.$$

**证明** 因为过  $P$  点的  $x^1$  线和  $x^2$  线是相互正交的弧长参数测地线，所以  $(g_{\alpha\beta})(P)$  是单位阵。利用 (4.7) 式与第四章关于 Christoffel 符号的定义可直接推出  $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(P) = 0$ 。

以下我们将利用法坐标系的性质来研究测地极坐标系。从 (4.3) 式可以看出，法坐标系与测地极坐标系之间变换的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho,$$

这说明测地极坐标系  $(\rho, \theta)$  是曲面在点  $P$  附近 ( $P$  点除外) 的正则参数。在测地极坐标系下， $\rho$  线 ( $\theta = \text{常数}$ ) 是过  $P$  点的测地线， $\theta$  线 ( $\rho = \text{常数}$ ) 称为以  $P$  为中心， $\rho$  为半径的测地圆。

**定理 4.3** 测地极坐标系  $(\rho, \theta)$  有如下性质：

- (1)  $I = ds^2 = d\rho^2 + G(\rho, \theta)d\theta^2$ ,
- (2)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ ,
- (3)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$ .

**证明** 设曲面的第一基本形式  $ds^2 = Ed\rho^2 + 2Fd\rho d\theta + Gd\theta^2$ ，由于  $\rho$  是测地线的弧长参数，所以  $E = 1$ 。测地线满足方程

$$\frac{d^2 u^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\rho} \frac{du^\gamma}{d\rho} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

现  $u^1 = \rho$ ， $u^2 = \theta = \text{常数}$  是测地线，代入到上述方程可得

$$\Gamma_{11}^2 = 0.$$



再由第四章 Christoffel 符号的表达式以及  $g_{11} = E = 1$  可得

$$0 = \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{EG - F^2} \frac{\partial F}{\partial \rho},$$

所以  $F$  不依赖于  $\rho$ .

另一方面, 由于  $\mathbf{r}_\theta = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \rho \sin \theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \rho \cos \theta$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \mathbf{r}_\theta = 0$ , 所以

$$F = \lim_{\rho \rightarrow 0} F = \lim_{\rho \rightarrow 0} \langle \mathbf{r}_\rho, \mathbf{r}_\theta \rangle = 0.$$

这证明了 (1).

设曲面在法坐标系下的第一基本形式为  $(g_{\alpha\beta})$ , 则

$$\sqrt{G} = \sqrt{EG - F^2} = \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(\rho, \theta)} \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} = \rho \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})},$$

所以  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ .

最后, 因为

$$\begin{aligned} (\sqrt{G})_\rho &= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} \\ &= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \\ &\quad \rho \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} \det(g_{\alpha\beta}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2} \det(g_{\alpha\beta}) \right). \end{aligned}$$

根据定理 4.2, 上式右边的后一项当  $\rho \rightarrow 0$  时趋于 0, 所以

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}(P) = 1.$$

定理证毕.

上一节我们已经指出, 联结曲面上两点的最短线一定是测地线, 但联结两点的测地线不一定最短. 下面的定理描述了测地线的最短性.

**定理 4.4** 设  $P$  是曲面  $S$  的一点, 则存在  $P$  点的一个小邻域  $U$ , 使得对任意的  $Q \in U$ , 在  $U$  内联结  $P$ 、 $Q$  两点的测地线的长度在所有联结这两点的曲面曲线中最短.

**证明** 取  $U = \{\exp_P(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in T_P S, |\mathbf{w}| < \varepsilon\}$ , 在  $U$  上取以  $P$  为原点的测地极坐标系  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \theta)$ . 设  $Q = \mathbf{r}(\rho_0, \theta_0) \in U$ , 则  $\rho$  线



$C_{\theta_0} = \{\theta = \theta_0, 0 \leq \rho \leq \rho_0\}$  是联结  $P, Q$  的测地线, 它的长度为  $\rho_0$ , 显然  $\rho_0 < \varepsilon$ , 下面我们证明  $C_{\theta_0}$  是最短的.

设  $C$  是联结  $P, Q$  的任意曲面曲线,  $C$  的参数表示为  $\mathbf{r}(t)$  ( $t \in [0, t_0]$ ),  $\mathbf{r}(0) = P, \mathbf{r}(t_0) = Q$ . 我们要证明  $C$  的长度  $l(C) \geq \rho_0$ , 分两种情况讨论:

(1) 当曲线  $\mathbf{r}(t)$  整个落在  $U$  内时, 它可以表为

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\rho(t), \theta(t)).$$

根据定理 4.3 的 (1),

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^2 = \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + G \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \geq \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2,$$

所以  $C$  的长度

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{t_0} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \\ &\geq \int_0^{t_0} \frac{d\rho}{dt} dt = \rho(t_0) = \rho(Q) = \rho_0. \end{aligned}$$

(2) 当曲线  $C$  不完全落在  $U$  内时,  $C$  与  $U$  的边界  $\partial U$  有交. 设曲线  $C$  的一部分  $\mathbf{r}(t): 0 \leq t < t_1$  落在  $U$  内, 但  $\mathbf{r}(t_1) \in \partial U$ . 对  $t_2 < t_1$ , 设  $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}(\rho(t_2), \theta(t_2))$ , 与情况 (1) 的证明同理,

$$\int_0^{t_2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \geq \rho(t_2).$$

所以  $l(C) > \rho(t_2)$ . 当  $t_2 \rightarrow t_1$  时  $\rho(t_2) \rightarrow \varepsilon$ , 所以  $l(C) \geq \varepsilon > \rho_0$ . 定理证毕.

最后我们利用测地极坐标系, 讨论 Gauss 曲率为常数的曲面.

设  $S$  是  $E^3$  的曲面, 在测地极坐标系下,  $ds^2 = d\rho^2 + Gd\theta^2$ , 由 Gauss 方程不难推出 Gauss 曲率

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}. \quad (4.8)$$

当  $K$  是常数时, (4.8) 是二阶常系数常微分方程, 我们分三种情形来讨论:

(1)  $K = 0$ .

对方程 (4.8) 求解有  $(\sqrt{G})_\rho = f(\theta)$ , 利用定理 4.3 的 (3) 就有  $f(\theta) = 1$ , 所以

$$\sqrt{G} = \rho + g(\theta).$$

再利用定理 4.3 的 (2), 可以推得  $\sqrt{G} = \rho$ , 所以曲面  $S$  的第一基本形式为

$$ds^2 = d\rho d\rho + \rho^2 d\theta d\theta. \quad (4.9)$$

$$(2) \quad K = \frac{1}{a^2} > 0.$$

这时方程 (4.8) 为

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + \frac{1}{a^2}\sqrt{G} = 0.$$

它的通解为

$$\sqrt{G} = f(\theta) \cos \frac{\rho}{a} + g(\theta) \sin \frac{\rho}{a}.$$

利用  $\sqrt{G} \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$  以及  $(\sqrt{G})_\rho \rightarrow 1 (\rho \rightarrow 0)$ , 可得  $f(\theta) = 0$ ,  $g(\theta) = a$ , 所以这时曲面  $S$  的第一基本形式

$$ds^2 = d\rho d\rho + a^2 \sin^2 \frac{\rho}{a} d\theta d\theta. \quad (4.10)$$

$$(3) \quad K = -\frac{1}{a^2} < 0.$$

这时方程 (4.8) 为

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} - \frac{1}{a^2}\sqrt{G} = 0,$$

它的通解为

$$\sqrt{G} = f(\theta) \cosh \frac{\rho}{a} + g(\theta) \sinh \frac{\rho}{a}.$$

同样利用定理 4.3 有  $f = 0$ ,  $g = a$ , 于是  $S$  的第一基本形式

$$ds^2 = d\rho d\rho + a^2 \sinh^2 \frac{\rho}{a} d\theta d\theta. \quad (4.11)$$

**注** 上述讨论表明, 具有相同常 Gauss 曲率的曲面, 局部间可以建立等距变换.

## §5.5 Gauss-Bonnet 公式

设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是  $S$  的正交标架,  $S$  的第一基本形式为

$$ds^2 = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2. \quad (5.1)$$

设  $\omega_{12}$  是相应的联络形式, 根据 Gauss 方程,

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -KdA, \quad (5.2)$$

其中  $dA$  是曲面  $S$  的面积元.

现设  $D$  是曲面上的一块单连通区域, 在  $D$  上积分 (5.2) 式并利用 Green 公式, 就得到

$$\iint_D KdA = - \iint_D d\omega_{12} = - \int_{\partial D} \omega_{12}, \quad (5.3)$$

上式左边是几何量, 因此我们需要讨论上式右边的几何意义 (因为  $\omega_{12}$  不是几何量).

设  $D$  的边界  $\partial D$  是分段光滑的闭曲线, 即  $\partial D = C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n$ , 每个  $C_i$  是光滑的. 首先固定一个  $C_i$  来考虑.

记曲面  $S$  的法向量为  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ , 设  $C_i$  的弧长参数表示为  $\mathbf{r}(s)$ ,  $C_i$  的切向与  $\mathbf{e}_1$  的夹角为  $\alpha$ , 即

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2. \quad (5.4)$$

那么

$$\mathbf{e}_3 \wedge \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2. \quad (5.5)$$

因为  $C_i$  的测地曲率为  $k_g = \left\langle \frac{D}{ds} \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right), \mathbf{e}_3 \wedge \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\rangle$ , 所以

$$\begin{aligned} k_g ds &= \langle D(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2), -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \langle d \cos \alpha \mathbf{e}_1 + d \sin \alpha \mathbf{e}_2 + \cos \alpha D\mathbf{e}_1 + \sin \alpha D\mathbf{e}_2, \\ &\quad -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= d\alpha + \omega_{12}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

代入到 (5.3) 式, 可得

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds = \int_{\partial D} d\alpha. \quad (5.7)$$

以下是我们将要证明的 Gauss-Bonnet 公式.

**定理 5.1** 设  $D$  是曲面  $S$  上的一块单连通区域,  $\partial D$  是分段光滑闭曲线, 设  $\alpha_i$  是  $\partial D$  的顶点的外角 (如图 5.4), 则

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

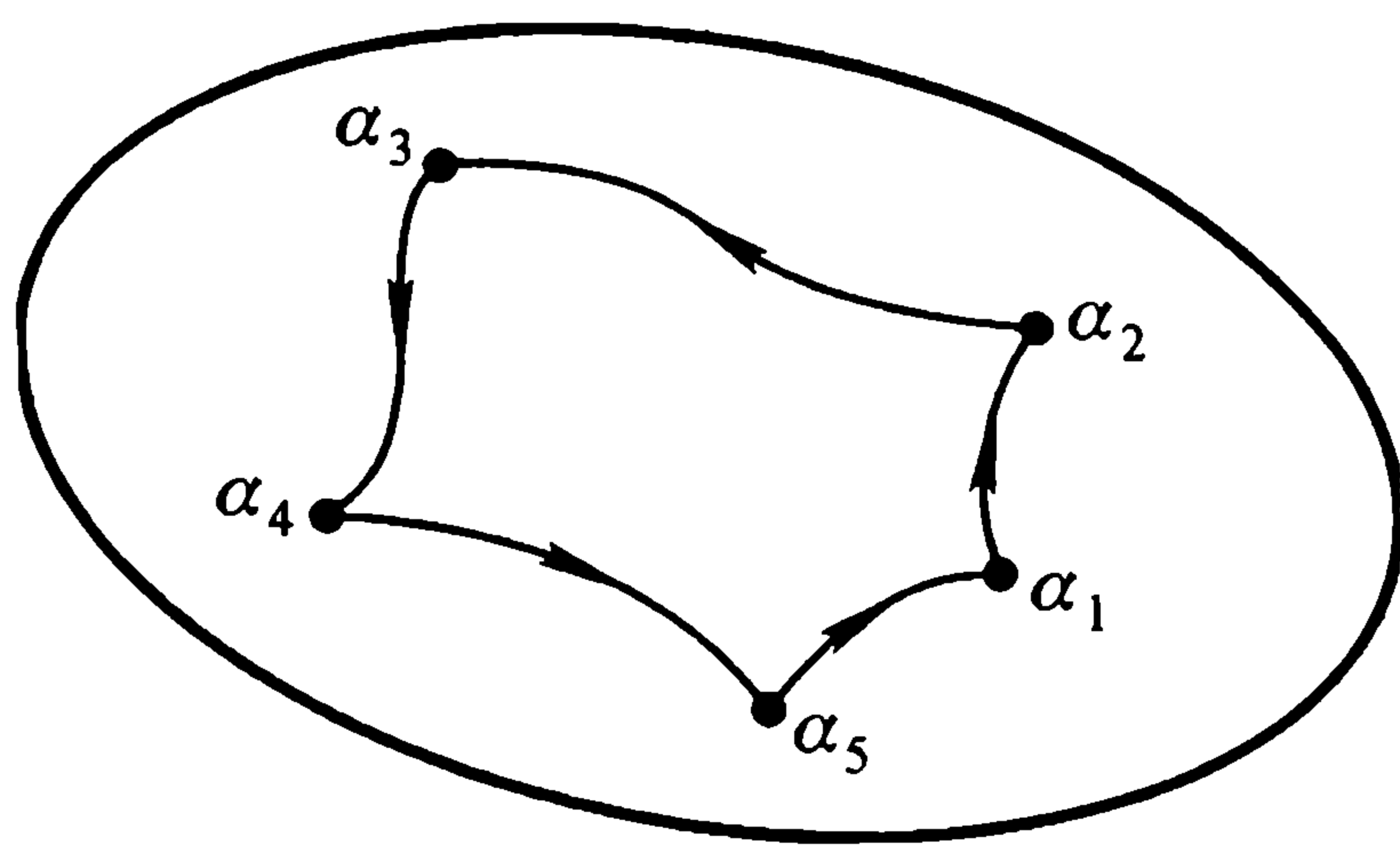


图 5.4

### 证明

1. 首先假设  $\partial D$  是光滑的闭曲线, 根据 (5.7) 式, 我们需要证明  $\int_{\partial D} d\alpha = 2\pi$ . 设  $\partial D$  的参数表示为  $\mathbf{r}(s)$ ,  $s \in [0, l]$ . 适当选取  $\alpha$  使得  $\alpha = \alpha(s)$  是  $s$  的可微函数. 由于  $\partial D$  光滑,  $\left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=l}$ . 因此  $\alpha(l) = \alpha(0) + 2k\pi$  ( $k$  是某个整数), 这推出  $\int_{\partial D} d\alpha = 2k\pi$ .

将  $\partial D$  连续光滑地变形, 越变越小, 最后落在  $S$  的某个等温坐标系内. 随着  $\partial D$  的连续形变,  $\int_{\partial D} d\alpha = 2k\pi$  的变化应该是连续的. 但由于  $\int_{\partial D} d\alpha$  必须是  $2\pi$  的整数倍, 因此它只能保持恒为常数不变. 设  $D$  在等温参数平面的原像为  $\tilde{D}$ . 由于保角变换不改变夹角, 所以仍有  $\int_{\partial \tilde{D}} d\alpha = 2k\pi$ .

在平面上将  $\partial \tilde{D}$  连续地变形为一个圆, 同理  $\int_{\partial \tilde{D}} d\alpha$  也不随之变化, 而当  $\partial \tilde{D}$  是圆时  $\int_{\partial \tilde{D}} d\alpha = 2\pi$ , 即  $k = 1$ . 所以  $\int_{\partial D} d\alpha = 2\pi$ .

2. 当  $\partial D = C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n$  是分段光滑闭曲线时, 设曲线从  $C_i$  到  $C_{i+1}$  的外角为  $\alpha_i$ . 构造一个单连通区域  $\tilde{D} \subset D$ , 使得  $\partial \tilde{D}$  光滑, 且仅在  $\partial D$  的顶点附近  $\partial \tilde{D}$  与  $\partial D$  不一样, 如图 5.5.

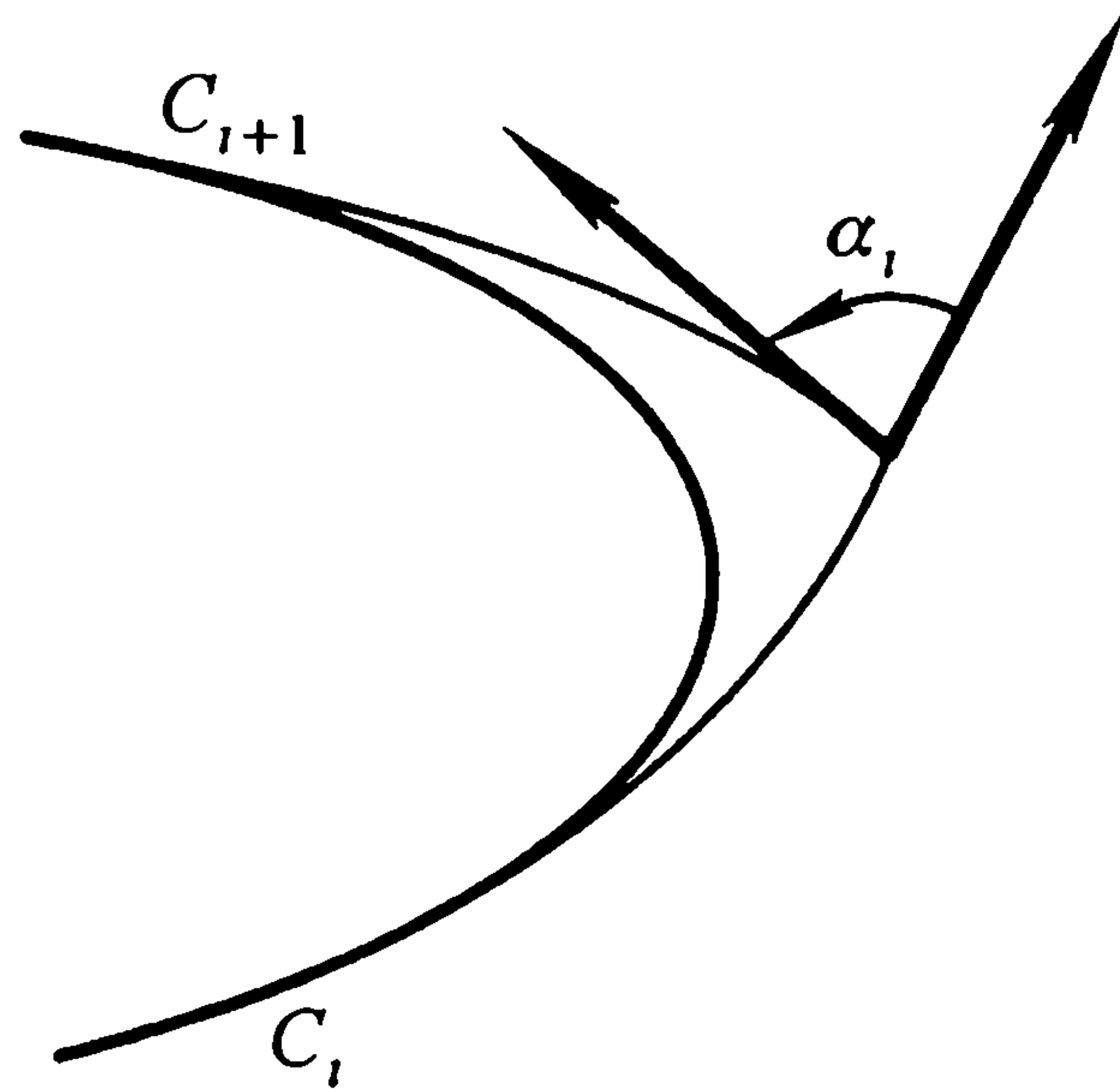


图 5.5

设  $\partial \tilde{D} \cap \partial D = \Gamma_1$ ,  $\partial \tilde{D} \setminus \partial D = \Gamma_2$ , 则

$$2\pi = \int_{\partial \tilde{D}} d\alpha = \int_{\Gamma_1} d\alpha + \int_{\Gamma_2} d\alpha.$$

当  $\tilde{D} \rightarrow D$  时,

$$\lim \int_{\Gamma_1} d\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} d\alpha = \int_{\partial D} d\alpha,$$

$$\lim \int_{\Gamma_2} d\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

于是

$$\int_{\partial D} d\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi,$$

代入到 (5.7) 式就证明了定理.

下面我们给出 Gauss-Bonnet 公式的两个简单应用.

(1) 曲面三角形的内角和:

当  $D$  是曲面上的一个三角形时, 记它的三个内角分别为  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , 则  $\beta_i + \alpha_i = \pi (i = 1, 2, 3)$ , 所以

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi.$$

当三角形  $D$  的三个边都是测地线时

$$\iint_D K dA = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi.$$

如果曲面是欧氏平面, Gauss 曲率  $K \equiv 0$ , 上式就等价于三角形内角和等于  $\pi$ . 当  $K =$  正数时, 曲面的测地三角形内角和大于  $\pi$ , 同样  $K =$  负数时, 曲面测地三角形的内角和小于  $\pi$ . 特别, 当曲面的 Gauss 曲率是非零常数时, 曲面测地三角形的内角和减去  $\pi$  与它的面积成比例.

(2) 曲面上向量沿闭曲线平移产生的角差.

设  $C$  是曲面  $S$  上的一条光滑闭曲线, 它围成一个单连通区域  $D$ . 利用 Gauss-Bonnet 公式, 可以求出向量沿  $C$  平移一圈后产生的角度差.

设  $C$  的参数表示为  $\mathbf{r}(s)$ ,  $s \in [0, l]$ ,  $\mathbf{v}(s)$  是沿  $C$  的平行切向量场. 取  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是  $S$  的正交标架,  $\mathbf{v}(s)$  可以表示为

$$\mathbf{v}(s) = \cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2,$$

其中  $\beta = \beta(s)$  是  $\mathbf{v}(s)$  与  $\mathbf{e}_1$  的夹角. 由  $\mathbf{v}(s)$  的平行性,

$$0 = \frac{D\mathbf{v}}{ds} = \frac{d\beta}{ds}(-\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2) + \cos \beta \frac{\omega_{12}}{ds} \mathbf{e}_2 + \sin \beta \frac{\omega_{21}}{ds} \mathbf{e}_1,$$

上式两边与  $(-\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2)$  作内积就得到

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{\omega_{12}}{ds},$$

即  $d\beta = -\omega_{12}$ .

设  $\alpha$  是曲线  $C$  与  $\mathbf{e}_1$  的夹角, 利用 (5.6) 式, 有

$$d\alpha - d\beta = k_g ds,$$

沿  $C$  将上式积分, 并利用 Gauss-Bonnet 公式, 可得

$$\int_C d\beta = \int_C (d\alpha - k_g ds) = 2\pi - \int_C k_g ds = \iint_D K dA.$$

因此, 向量  $\mathbf{v}(0)$  沿  $C$  平移一周后, 得到的  $\mathbf{v}(l)$  与  $\mathbf{v}(0)$  的角度差为

$$\beta(l) - \beta(0) = \int_C d\beta = \iint_D K dA.$$

由此可以看出, 平移产生的角度差是由曲面的弯曲引起的.

注 在 Gauss-Bonnet 公式的证明中, 我们关于  $\int_{\partial D} d\alpha = 2\pi$  的证明是直观的. 对于严格证明有兴趣的读者, 可参见本书第六章关于曲线旋转指标定理的证明.

## §5.6 曲面的 Laplace 算子 \*

设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是  $S$  的正交标架,  $\omega_1, \omega_2$  是曲面的第一基本形式,  $\omega_{12}$  是相应的联络形式.

对定义在  $S$  上的函数  $f$  而言,  $f$  的微分  $df$  可以表示为  $\omega_1, \omega_2$  的线性组合, 设

$$df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2. \quad (6.1)$$

$f_1$  和  $f_2$  也是曲面上的函数, 称为函数  $f$  关于标架  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  的导数.

如果  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$  是曲面的另一组正交标架,

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2. \quad (6.2)$$

相应的微分形式记为  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{12}$ , 则

$$\bar{\omega}_1 = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_2, \quad \bar{\omega}_2 = -\sin \theta \omega_1 + \cos \theta \omega_2, \quad (6.3)$$

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\theta.$$

将函数  $f$  关于  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$  的导数记为  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ , 利用

$$df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2 = \bar{f}_1\bar{\omega}_1 + \bar{f}_2\bar{\omega}_2,$$

可得

$$\bar{f}_1 = \cos \theta f_1 + \sin \theta f_2, \quad \bar{f}_2 = -\sin \theta f_1 + \cos \theta f_2. \quad (6.4)$$

因此  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$  与  $(f_1, f_2)$  相差相同的旋转. 这说明, 曲面函数关于标架的导数只与方向有关, 它是平面函数方向导数的推广.

若考虑曲面函数的二阶导数, 不能直接从  $df_1, df_2$  出发求微分, 这是因为从 (6.4) 式可以看出, 在标架的旋转变换下,  $(d\bar{f}_1, d\bar{f}_2)$  与  $(df_1, df_2)$  除了



相差旋转外, 还与旋转角的微分  $d\theta$  有关. 但从 (6.2) 式和 (6.4) 不难发现,  $f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2$  与正交标架的选取无关.  $f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2$  称为函数  $f$  的梯度, 记为

$$\nabla f = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2.$$

$\nabla f$  是曲面的切向量场, 对它求协变微分, 可得

$$D(\nabla f) = (df_1 + f_2\omega_{21})\mathbf{e}_1 + (df_2 + f_1\omega_{12})\mathbf{e}_2.$$

**定义 6.1** 设曲面函数  $f$  关于正交标架  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的导数为  $f_1, f_2$ , 令

$$Df_1 = df_1 + f_2\omega_{21}, \quad Df_2 = df_2 + f_1\omega_{12}, \quad (6.5)$$

$Df_1$  和  $Df_2$  称为  $f_1, f_2$  的协变微分.

同样可以验证  $Df_1, Df_2$  也只与方向有关.

**命题 6.2** 设  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  和  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$  是曲面的两组正交标架, 它们相差一个角度为  $\theta$  的旋转. 函数  $f$  关于两组标架的导数分别记为  $f_1, f_2$  和  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ ,  $Df_i, D\bar{f}_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是相应的协变微分, 则

$$D\bar{f}_1 = \cos\theta Df_1 + \sin\theta Df_2, \quad D\bar{f}_2 = -\sin\theta Df_1 + \cos\theta Df_2.$$

**证明** 依定义,  $D\bar{f}_1 = d\bar{f}_1 + \bar{f}_2\bar{\omega}_{21}$ . 由 (6.3)、(6.4) 两式可得

$$\begin{aligned} D\bar{f}_1 &= d(\cos\theta f_1 + \sin\theta f_2) + (-\sin\theta f_1 + \cos\theta f_2)(-\omega_{12} - d\theta) \\ &= \cos\theta(df_1 - f_2\omega_{12}) + \sin\theta(df_2 + f_1\omega_{12}) \\ &= \cos\theta Df_1 + \sin\theta Df_2. \end{aligned}$$

同理可验证第二个等式成立. 证毕.

因为协变微分  $Df_1$  和  $Df_2$  都是一阶微分形式, 所以可设

$$\begin{aligned} Df_1 &= df_1 + f_2\omega_{21} = f_{11}\omega_1 + f_{12}\omega_2, \\ Df_2 &= df_2 + f_1\omega_{12} = f_{21}\omega_1 + f_{22}\omega_2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

由  $d(df) = 0$  可以推出

$$\begin{aligned}
0 &= d(f_1\omega_1 + f_2\omega_2) \\
&= df_1 \wedge \omega_1 + f_1 d\omega_1 + df_2 \wedge \omega_2 + f_2 d\omega_2 \\
&= (df_1 + f_2\omega_{21}) \wedge \omega_1 + (df_2 + f_1\omega_{12}) \wedge \omega_2 \\
&= Df_1 \wedge \omega_1 + Df_2 \wedge \omega_2 = (f_{21} - f_{12})\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

所以  $f_{12} = f_{21}$ .

对称函数阵  $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$  称为函数  $f$  关于标架  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  的 Hessian 阵.

**命题 6.3** 曲面函数  $f$  的 Hessian 阵的迹  $f_{11} + f_{22}$  与正交标架的选取无关.

**证明** 将 (6.6) 式记为

$$[Df_1 \ Df_2] = [\omega_1 \ \omega_2] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

设  $f$  在另一组正交标架  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$  下的协变微分为

$$[D\bar{f}_1 \ D\bar{f}_2] = [\bar{\omega}_1 \ \bar{\omega}_2] \begin{bmatrix} \bar{f}_{11} & \bar{f}_{21} \\ \bar{f}_{12} & \bar{f}_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

因为

$$[\bar{\omega}_1 \ \bar{\omega}_2] = [\omega_1 \ \omega_2] \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$[D\bar{f}_1 \ D\bar{f}_2] = [Df_1 \ Df_2] \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

将这两个等式代入到 (6.7) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_{11} & \bar{f}_{21} \\ \bar{f}_{12} & \bar{f}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

所以  $\bar{f}_{11} + \bar{f}_{22} = f_{11} + f_{22}$ . 证毕.

现在我们可以给出曲面 Laplace 算子的定义.

**定义 6.4** 曲面  $S$  的 Laplace 算子  $\Delta_S$  定义为对任意曲面函数  $f$ ,

$$\Delta_S f = f_{11} + f_{22}.$$

我们先来讨论一些例子.

**例 6.5** 在欧氏平面  $E^2$  上, 设  $(x, y)$  是直角坐标系, 则度量  $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ . 这时  $\omega_1 = dx$ ,  $\omega_2 = dy$ ,  $\omega_{12} = 0$ , 函数  $f$  关于标架的导数就是  $f$  的偏导数,  $f_1 = f_x$ ,  $f_2 = f_y$ .

同样, 协变微分与普通微分相同,

$$Df_1 = df_1 = f_{xx}dx + f_{xy}dy, \quad Df_2 = df_2 = f_{yx}dx + f_{yy}dy.$$

$f$  的 Laplace 为  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ , 与微积分中的定义一致.

现设  $(r, t)$  是  $E^2$  的极坐标系,  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ . 这时  $E^2$  的度量为

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(dt)^2.$$

取  $\omega_1 = dr$ ,  $\omega_2 = rdt$ , 则  $\omega_{12} = dt$ . 此时对函数  $f$ ,

$$f_1 = f_r, \quad f_2 = \frac{f_t}{r}.$$

$f$  的协变微分

$$\begin{aligned} Df_1 &= df_1 + f_2\omega_{21} = f_{rr}dr + f_{rt}dt - \frac{f_t}{r}dt \\ &= f_{rr}\omega_1 + \frac{rf_{rt} - f_t}{r^2}\omega_2, \\ Df_2 &= df_2 + f_1\omega_{12} = \frac{rf_{tr} - f_t}{r^2}dr + \frac{f_{tt}}{r}dt + f_rdt \\ &= \frac{rf_{tr} - f_t}{r^2}\omega_1 + \left(\frac{f_{tt}}{r^2} + \frac{f_r}{r}\right)\omega_2. \end{aligned}$$

所以在极坐标下,  $\Delta f = f_{rr} + \frac{f_r}{r} + \frac{f_{tt}}{r^2}$ .

**例 6.6** 计算在曲面  $S$  的等温参数  $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$  下, Laplace 算子的表达式.

取  $\omega_1 = \lambda du$ ,  $\omega_2 = \lambda dv$ ,  $\omega_{12} = -\frac{\lambda_v}{\lambda} du + \frac{\lambda_u}{\lambda} dv$ . 对函数  $f$  而言,

$$df = f_u du + f_v dv = \frac{f_u}{\lambda} \omega_1 + \frac{f_v}{\lambda} \omega_2,$$

所以  $f_1 = \frac{f_u}{\lambda}$ ,  $f_2 = \frac{f_v}{\lambda}$ . 依照协变微分的定义,

$$\begin{aligned} Df_1 &= df_1 + f_2 \omega_{21} \\ &= \frac{1}{\lambda} (f_{uu} du + f_{uv} dv) \\ &\quad - \frac{f_u}{\lambda^2} (\lambda_u du + \lambda_v dv) + \frac{f_v}{\lambda} \left( \frac{\lambda_v}{\lambda} du - \frac{\lambda_u}{\lambda} dv \right) \\ &= \left( \frac{f_{uu}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} + \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3} \right) \omega_1 + \left( \frac{f_{uv}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_v}{\lambda^3} - \frac{f_v \lambda_u}{\lambda^3} \right) \omega_2, \end{aligned}$$

同样可求出

$$Df_2 = \left( \frac{f_{vu}}{\lambda^2} - \frac{f_u \lambda_v}{\lambda^3} - \frac{f_v \lambda_u}{\lambda^3} \right) \omega_1 + \left( \frac{f_{vv}}{\lambda^2} + \frac{f_u \lambda_u}{\lambda^3} - \frac{f_v \lambda_v}{\lambda^3} \right) \omega_2.$$

所以

$$\Delta_S f = \frac{1}{\lambda^2} (f_{uu} + f_{vv}).$$

特别, 根据例 2.5 可得, 在等温参数下曲面  $S$  的 Gauss 曲率

$$K = -\Delta_S \ln \lambda.$$

下面我们继续讨论曲面 Laplace 算子的性质.

设函数  $f$  关于标架的导数为  $f_1, f_2$ , 不难验证 1 形式

$$\varphi_f = f_1 \omega_2 - f_2 \omega_1 \tag{6.8}$$

与标架的选取无关, 而且

$$\begin{aligned} d\varphi_f &= df_1 \wedge \omega_2 + f_1 \omega_{21} \wedge \omega_1 - df_2 \wedge \omega_1 - f_2 \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ &= Df_1 \wedge \omega_2 - Df_2 \wedge \omega_1 \\ &= (f_{11} + f_{22}) \omega_1 \wedge \omega_2 = \Delta_S f \omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

设  $U$  是曲面  $S$  的一个区域, 边界  $\partial U = C$  是闭曲线, 在  $U$  上积分 (6.9) 式并应用 Stokes 公式, 可得

$$\iint_U \Delta_S f dA = \oint_C \varphi_f,$$

这就是曲面的 Green 公式. 事实上, 我们有

**定理 6.7**(Green 公式) 设  $f$  和  $g$  是曲面  $S$  上的函数,  $U$  是  $S$  的一个区域,  $\partial U = C$  是闭曲线. 则有

(1)

$$\iint_U f \Delta_S g dA + \iint_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle dA = \oint_C f \frac{\partial g}{\partial \nu} ds,$$

其中  $\nu$  是区域  $U$  在  $S$  的外法向,  $ds$  为  $C$  的弧长微元;

(2)

$$\iint_U (f \Delta_S g - g \Delta_S f) dA = \oint_C \left( f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) ds.$$

**证明** 不难发现  $\langle \nabla f, \nabla g \rangle = (f_1 g_1 + f_2 g_2)$  与标架选取无关. 对 1 形式  $f \varphi_g = f(g_1 \omega_2 - g_2 \omega_1)$  微分, 可得

$$\begin{aligned} df \varphi_g &= df \wedge \varphi_g + f \Delta_S g \omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (f_1 g_1 + f_2 g_2) \omega_1 \wedge \omega_2 + f \Delta_S g \omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

在  $U$  上积分, 利用 Stokes 公式, 有

$$\iint_U f \Delta_S g dA + \iint_U (f_1 g_1 + f_2 g_2) dA = \oint_C f \varphi_g.$$

注意到  $f \varphi_g = f(g_1 \omega_2 - g_2 \omega_1)$  与标架选取无关, 因此在  $C$  上我们可以取  $\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  为  $C$  的切向量,  $\nu = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$  为  $C$  的外法向. 在这个标架下, 沿着  $C$  有  $\omega_1 = ds, \omega_2 = 0$ , 所以

$$\oint_C f(g_1 \omega_2 - g_2 \omega_1) = \oint_C -f g_2 ds = \oint_C f \frac{\partial g}{\partial \nu} ds.$$

这就证明了 (1). 而 (2) 可以由 (1) 直接推出. 证毕.

利用 Green 公式, 容易求出在一般参数下曲面的 Laplace 算子的表达式.

设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  是曲面  $S$  的一个参数表示, 以下我们将采用求和约定. 设曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

通过取正交标架  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , 使得

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = \omega_1 \omega_1 + \omega_2 \omega_2. \quad (6.10)$$

设

$$\omega_1 = a_{11} du^1 + a_{12} du^2, \quad \omega_2 = a_{21} du^1 + a_{22} du^2, \quad (6.11)$$

代入 (6.10) 式可以推出

$$g_{\xi\eta} du^\xi du^\eta = \sum_{\alpha=1}^2 \omega_\alpha \omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 a_{\alpha\xi} a_{\alpha\eta} du^\xi du^\eta,$$

所以

$$\sum_{\alpha=1}^2 a_{\alpha\xi} a_{\alpha\eta} = g_{\xi\eta},$$

即矩阵  $\mathbf{A} = (a_{\alpha\beta})$  满足  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = (g_{\alpha\beta})$ . 记  $g = \det(g_{\alpha\beta})$ 、 $(g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1}$ . 则  $\mathbf{A}(g^{\alpha\beta})\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_2$ , 写成分量形式, 即为

$$a_{\xi\alpha} g^{\alpha\beta} a_{\eta\beta} = \delta_{\xi\eta}. \quad (6.12)$$

设  $f$  是曲面的函数, 它关于正交标架的导数为  $f_1, f_2$ . 由

$$df = f_{u^1} du^1 + f_{u^2} du^2 = f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2$$

以及 (6.11) 式可以求出,  $f$  关于标架的导数与  $f$  关于参数的导数有关系

$$f_{u^\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 a_{\beta\alpha} f_\beta, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6.13)$$

设  $h$  是曲面上另一个函数, 那么利用 (6.12)、(6.13) 两式可得

$$f_{u^\alpha} h_{u^\beta} g^{\alpha\beta} = \sum_{\xi, \eta=1}^2 a_{\xi\alpha} f_\xi a_{\eta\beta} f_\eta g^{\alpha\beta} = \sum_{\xi, \eta=1}^2 f_\xi h_\eta \delta_{\xi\eta} = \langle \nabla f, \nabla h \rangle. \quad (6.14)$$

令  $\psi = \sqrt{g}(g^{\alpha 1} f_{u^\alpha} du^2 - g^{\alpha 2} f_{u^\alpha} du^1)$ , 不难求出

$$d\psi = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right) du^1 \wedge du^2, \quad (6.15)$$

$$dh \wedge d\psi = g^{\alpha\beta} f_{u^\alpha} h_{u^\beta} \sqrt{g} du^1 \wedge du^2. \quad (6.16)$$

注意到这时曲面的面积元  $dA = \omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{g} du^1 \wedge du^2$ , 结合以上三式我们有

$$\begin{aligned} d(h\psi) &= h d\psi + dh \wedge d\psi \\ &= h \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right) dA + (f_1 h_1 + f_2 h_2) dA. \end{aligned} \quad (6.17)$$

设  $U$  是曲面的任意区域,  $\partial U$  是闭曲线, 取  $h$  满足在  $U$  以外恒为零. 在  $U$  上积分 (6.17) 式, 利用 Stokes 公式可得

$$\begin{aligned} \iint_U h \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right) dA + \iint_U (f_1 h_1 + f_2 h_2) dA \\ = \iint_U d(h\psi) = \oint_{\partial U} h\psi = 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

其中最后一个等式是因为  $h|_{\partial U} \equiv 0$ .

另一方面, 对  $f$  和  $h$  应用曲面的 Green 公式, 可得

$$\iint_U h \Delta_S f dA + \iint_U (f_1 h_1 + f_2 h_2) dA = \oint_{\partial U} h \frac{\partial f}{\partial \nu} ds = 0. \quad (6.19)$$

比较 (6.18) 与 (6.19) 两式, 我们有

$$\iint_U h \Delta_S f dA = \iint_U h \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right) dA.$$

由  $U$  和  $h$  的任意性不难推出

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left( \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right), \quad (6.20)$$

这就是曲面的 Laplace 算子在参数  $(u^1, u^2)$  下的表示式.



## §5.7 Riemann 度量 \*

在上述几节中, 我们讨论了曲面的内蕴几何学. 研究曲面内蕴几何的出发点是曲面的协变微分, 它由曲面的第一基本形式惟一确定.

第一基本形式实质上是定义在参数区域上的一个正定二次微分式, 从这个角度看, 在一个参数区域上定义了一个正定的二次微分式, 亦可以讨论它的几何.

## 1. Riemann 度量

**定义 7.1** 参数区域  $D = \{(u, v)\}$  上的一个二次微分式

$$Edudu + 2Fdudv + Gdv dv \quad (7.1)$$

满足  $E > 0, EG - F^2 > 0$  时, 称为是  $D$  上的一个 Riemann 度量.

给了一个 Riemann 度量, 就可以定义区域  $D$  上曲线的长度. 设  $(u(t), v(t))$  是一条正则曲线,  $t \in (a, b)$ , 它的长度为

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt,$$

于是

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

因此 Riemann 度量通常记为

$$ds^2 = Edudu + 2Fdudv + Gdv dv, \quad (7.2)$$

也可以说, 在区域  $D$  上定义 Riemann 度量就是定义了区域内曲线的弧长微元. 另外, 给了 Riemann 度量后, 同样可以定义区域的面积元

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv. \quad (7.3)$$

对  $E^3$  中的曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) 而言, 它的第一基本形式  $ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle$  可以看作区域  $D$  上的一个 Riemann 度量, 这时这个 Riemann 度量是由映射  $\mathbf{r} : D \rightarrow E^3$  诱导的.

下面我们来看两个定义在参数域上的 Riemann 度量的重要例子.

**例 7.2** 区域是平面上的单位圆盘

$$D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\},$$

Riemann 度量

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2)^2)^2} (dudv + dvdu). \quad (7.4)$$

这个度量称为 Poincarè 度量. 引进复坐标  $z = u + iv$ , 这个度量可写作

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dzd\bar{z}. \quad (7.5)$$

**例 7.3** 参数区域是上半平面

$$U = \{(x, y) : y > 0\},$$

度量

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2). \quad (7.6)$$

同样, 记  $w = x + iy$ , 有

$$ds^2 = \frac{1}{(\operatorname{Im} w)^2} dw d\bar{w}. \quad (7.7)$$

这个度量也称为 Poincarè 度量.

上面两个例子所定义的度量本质上是一样的. 从复变函数论知, 从单位圆盘到上半平面间有保角变换

$$w = i \frac{1 - z}{1 + z} \quad \left( \text{或者 } z = \frac{i - w}{i + w} \right). \quad (7.8)$$

直接计算有

$$dz = \frac{-2idw}{(i + w)^2}, \quad d\bar{z} = \frac{2id\bar{w}}{(-i + \bar{w})^2},$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dzd\bar{z} &= 4 \frac{(i + w)^2 (-i + \bar{w})^2}{(4\operatorname{Im} w)^2} \frac{-2idw}{(i + w)^2} \frac{2id\bar{w}}{(-i + \bar{w})^2} \\ &= \frac{1}{(\operatorname{Im} w)^2} dw d\bar{w}. \end{aligned}$$

因此, 对应 (7.8) 实际上是两个 Poincarè 度量之间的等距变换.

## 2. 结构方程

与第四章 §5 同样,  $D$  上有线性无关的 1 形式  $\omega_1, \omega_2$ , 使得 Riemann 度量可以写成

$$ds^2 = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2. \quad (7.9)$$

$\omega_1, \omega_2$  是不惟一的, 如果设

$$[\omega_1, \omega_2] = [du, dv]A, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

则函数矩阵  $A$  满足

$$AA^T = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

这样的  $A$  选取也不惟一. 一种取法是 (来自配方)

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ \frac{F}{\sqrt{E}} & \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \end{bmatrix}.$$

从 (7.11) 也可以看出,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv \quad (7.12)$$

是面积元, 与  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的选取无关.

根据性质 2.1, 由方程

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 \end{cases} \quad (7.13)$$

惟一确定一个 1 形式  $\omega_{12} = -\omega_{21}$ , 称为 Riemann 度量  $ds^2 = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$  的联络 1 形式. 方程 (7.13) 称为结构方程. 而由 Gauss 方程所定义的函数

$$K = K(u, v) = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2} \quad (7.14)$$

称为 Riemann 度量  $ds^2$  的 Gauss 曲率.

### 3. 切向量场

为进一步研究区域  $D$  上 Riemann 度量的几何, 引进区域切向量的概念是必须的.

设  $P = (u_0, v_0) \in D$ ,  $P$  点的切平面可以看作是过  $P$  点的所有曲线在该点的切向量的全体. 容易看出,  $P$  点的切平面  $T_P D$  是全平面, 或者说  $P$  点的切向量就是以  $P$  为起点的平面向量.

设  $v_P = (\lambda, \mu) \in T_P D$  (或记  $v = (P, (\lambda, \mu))$ ).  $f$  是定义在  $P$  附近的可微函数, 将  $f$  沿着  $v_P$  方向的方向导数记为  $v_P(f)$ , 有

$$v_P(f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(P) + \mu \frac{\partial f}{\partial v}(P) = \left( \lambda \frac{\partial}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial v} \right) \Big|_P (f). \quad (7.15)$$

因此将切向量看成方向导数算子,  $v_P$  可以记为

$$v_P = \lambda \frac{\partial}{\partial u} \Big|_P + \mu \frac{\partial}{\partial v} \Big|_P \quad (\text{或省略下标 } P). \quad (7.16)$$

现考查  $D$  内的曲线  $(u(t), v(t))$ . 设  $f(u, v)$  是可微函数, 那么  $\frac{d}{dt} f(u(t), v(t))$  就等于  $f$  在点  $(u(t), v(t))$  沿  $(u'(t), v'(t))$  方向的方向导数, 即

$$\frac{df}{dt}(u(t), v(t)) = \frac{du}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial f}{\partial v} = \left( \frac{du}{dt} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \right) f.$$

按 (7.16) 的记号, 曲线  $(u(t), v(t))$  的切向量为

$$\frac{du}{dt} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (7.17)$$

综上所述可见, 点  $P \in D$  的切平面为

$$\left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial u} \Big|_P + \mu \frac{\partial}{\partial v} \Big|_P : \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}. \quad (7.18)$$

这时,  $\frac{\partial}{\partial u} \Big|_P$  为  $P$  点沿  $(1, 0)$  方向的方向导数算子,  $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_P$  为沿  $(0, 1)$  方向的方向导数算子.

区域  $D$  上的每点给定一个切向量, 就称为  $D$  上的一个切向量场, 它可以表示为

$$v = \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v} \quad \left( v(P) = \xi(P) \frac{\partial}{\partial u} \Big|_P + \eta(P) \frac{\partial}{\partial v} \Big|_P \right), \quad (7.19)$$

$\xi, \eta$  是  $D$  上的函数, 通常我们只考虑  $\xi, \eta$  是光滑函数的情形.

设  $\theta = fdu + gdv$  是  $D$  上的一个一阶微分形式,  $v = \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$  是一个向量场, 定义

$$\theta(v) = f\xi + g\eta, \quad (7.20)$$

这等价于定义

$$du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = 1, \quad du\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = dv\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = 0, \quad dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 1. \quad (7.21)$$

在这个意义下, 微分形式空间就是切空间的对偶空间.

按照定义 (7.20), 对函数  $f$  以及切向量  $v$ , 有

$$df(v) = (f_u du + f_v dv)\left(\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}\right) = \xi f_u + \eta f_v = v(f). \quad (7.22)$$

关系 (7.22) 是非常自然的. 这是因为全微分  $df|_P$  是  $f$  在点  $P$  附近的“全”变化率, 那么  $df(v)$  是  $df$  在方向  $v$  上的反映, 自然应该等于  $f$  沿方向  $v$  的方向导数  $v(f)$ .

若  $\omega_1, \omega_2$  是线性无关的 1 形式, 那么存在惟一的切向量场  $e_1, e_2$  使得

$$\omega_1(e_1) = \omega_2(e_2) = 1, \quad \omega_1(e_2) = \omega_2(e_1) = 0. \quad (7.23)$$

这是因为, 如果  $[\omega_1, \omega_2] = [du, dv]A$ , 则容易验证

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}$$

满足 (7.23) 式. 反之, 如果  $\{e_1, e_2\}$  是线性无关切向量场, 则满足 (7.23) 式的 1 形式  $\{\omega_1, \omega_2\}$  也惟一确定, 此时  $\{e_1, e_2\}$  与  $\{\omega_1, \omega_2\}$  是互为对偶基.

回到 Riemann 度量  $ds^2 = Edu + 2Fdu + Gdv$ . 如果

$$ds^2 = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2,$$

$\{e_1, e_2\}$  是  $\{\omega_1, \omega_2\}$  的对偶基. 对于两个切向量

$$v = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2, \quad w = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2, \quad (7.24)$$

定义  $v$  与  $w$  的内积

$$\langle v, w \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2. \quad (7.25)$$

也就是说, 将  $e_1, e_2$  看作切空间的正交标架. 定义 (7.25) 与正交标架的选取无关, 事实上, 容易验证, 当  $v = \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$  时,

$$\langle v, v \rangle = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2.$$

因此 Riemann 度量本质上是切空间的内积.

#### 4. 协变微分

现设 Riemann 度量  $ds^2 = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$ ,  $\{e_1, e_2\}$  是  $\{\omega_1, \omega_2\}$  的对偶基, 由结构方程 (7.13) 惟一确定的 1 形式  $\omega_{12} = -\omega_{21}$ , 可定义标架的协变微分如下:

$$\begin{cases} D\mathbf{e}_1 = \omega_{12}\mathbf{e}_2, \\ D\mathbf{e}_2 = \omega_{21}\mathbf{e}_1. \end{cases} \quad (7.26)$$

对切向量场  $v = \xi e_1 + \eta e_2$ , 它的协变微分定义为

$$Dv = d\xi e_1 + d\eta e_2 + \xi\omega_{12}e_2 + \eta\omega_{21}e_1. \quad (7.27)$$

容易验证, 这样定义的协变微分与标架的选取无关, 并且满足性质 2.7.

设  $C: (u(t), v(t))$  是  $D$  内一条正则曲线, 沿  $C$  的向量场  $v(t) = \xi(t)e_1 + \eta(t)e_2$ ,  $v(t)$  的协变微商

$$\frac{Dv}{dt} = \left( \frac{d\xi}{dt} + \frac{\omega_{21}}{dt}\eta \right) e_1 + \left( \frac{d\eta}{dt} + \frac{\omega_{12}}{dt}\xi \right) e_2. \quad (7.28)$$

$\frac{Dv}{dt} = 0$  时称  $v(t)$  沿  $C$  平行, 这等价于

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\omega_{21}}{dt}\eta = 0, \\ \frac{d\eta}{dt} + \frac{\omega_{12}}{dt}\xi = 0. \end{cases} \quad (7.29)$$

(7.29) 式是关于  $(\xi, \eta)$  的一个一阶常微分方程组, 给定初值后解存在惟一. 这意味着, 给定一个初始向量, 可以将其沿一条曲线平行移动, 这个结论与性质 2.9 是一致的.

### 5. 测地曲率

设  $C : (u(s), v(s))$  是  $D$  内一条弧长参数曲线, 它的切向量记为  $t(s)$ , 即

$$t(s) = \frac{du}{ds} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{ds} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (7.30)$$

$C$  的测地曲率向量  $k_g$  定义为

$$k_g = \frac{Dt}{ds}. \quad (7.31)$$

设  $n(s)$  是沿  $C$  的单位向量场,  $n$  与  $t$  垂直且  $\{t, n\}$  与  $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$  定向一致, 那么  $C$  的测地曲率定义为

$$k_g = \left\langle \frac{Dt}{ds}, n \right\rangle. \quad (7.32)$$

显然, 当区域  $D$  的 Riemann 度量是欧氏度量时, 测地曲率就是平面曲线的曲率.

曲线的测地曲率为 0 时称为测地线. 不难发现 §3 中所有有关测地线的结论在这里也同时成立. 同样, 也可以证明 Gauss-Bonnet 定理成立.

最后我们来求例 7.3 定义的 Poincaré 度量下的测地线, 可以发现它是经典的 Lobachevsky 几何的一个模型.

区域  $U = \{(x, y) : y > 0\}$ , 度量  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . 这时

$$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \quad \omega_2 = \frac{dy}{y},$$

$$e_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = y \frac{\partial}{\partial y}.$$

由  $d\omega_1 = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy = \frac{dx}{y} \wedge \omega_2$ ,  $d\omega_2 = 0 = -\frac{dx}{y} \wedge \omega_1$  知

$$\omega_{12} = \frac{dx}{y}.$$

设  $(x(s), y(s))$  是测地线, 它的单位切向量

$$t(s) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\dot{x}}{y} e_1 + \frac{\dot{y}}{y} e_2 = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2,$$



则从  $\frac{Dt}{ds} = 0$  可以得到

$$0 = \frac{Dt}{ds} = \left( \frac{d\xi^1}{ds} + \frac{\omega_{21}}{ds} \xi^2 \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{d\xi^2}{ds} + \frac{\omega_{12}}{ds} \xi^1 \right) \mathbf{e}_2,$$

即

$$\begin{cases} \frac{d\xi^1}{ds} + \frac{\omega_{21}}{ds} \xi^2 = 0, \\ \frac{d\xi^2}{ds} + \frac{\omega_{12}}{ds} \xi^1 = 0. \end{cases}$$

将  $\xi^1 = \frac{\dot{x}}{y}, \xi^2 = \frac{\dot{y}}{y}$  代入, 有

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( \frac{\dot{x}}{y} \right) - \frac{\dot{x}}{y} \frac{\dot{y}}{y} = 0, \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) + \frac{\dot{x}}{y} \frac{\dot{x}}{y} = 0. \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \frac{d\xi^1}{ds} - \xi^1 \xi^2 = 0, \\ \frac{d\xi^2}{ds} - \xi^1 \xi^1 = 0. \end{cases}$$

由上式的第一式, 当  $\xi^1 \neq 0$  时,

$$\frac{d\xi^1}{\xi^1} = \xi^2 ds = \frac{dy}{y},$$

解得  $\xi^1 = cy$ , 代入到  $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = 1$ , 有

$$c^2 y^2 + \left( \frac{\dot{y}}{y} \right)^2 = 1,$$

因此

$$ds = \frac{dy}{y\sqrt{1-c^2y^2}}.$$

令  $y = \frac{1}{c} \sin t$ , 就得到

$$ds = \frac{dt}{\sin t}.$$

由

$$\xi^2 = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{1}{y} \frac{dy}{ds} = \frac{c}{\sin t} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \cos t$$

知  $\xi^1 = \sin t$ . 因此

$$x = \int \dot{x} ds = \int \xi^1 y ds = \int \sin t \frac{1}{c} \sin t \frac{ds}{dt} dt = -\frac{1}{c} \cos t + d.$$

于是, 解为

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{c} \cos t + d, \\ y = \frac{1}{c} \sin t. \end{cases}$$

或

$$(x - d)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}.$$

另外,  $\xi^1 \equiv 0$  时,  $x = a$  (常数) 也是解.

因此, 测地线为圆心在  $x$  轴上的半圆和与  $x$  轴平行的直线. 容易发现, 这时过测地线外一点可以作无数多条测地线与原来那条不交, 如图 5.6.

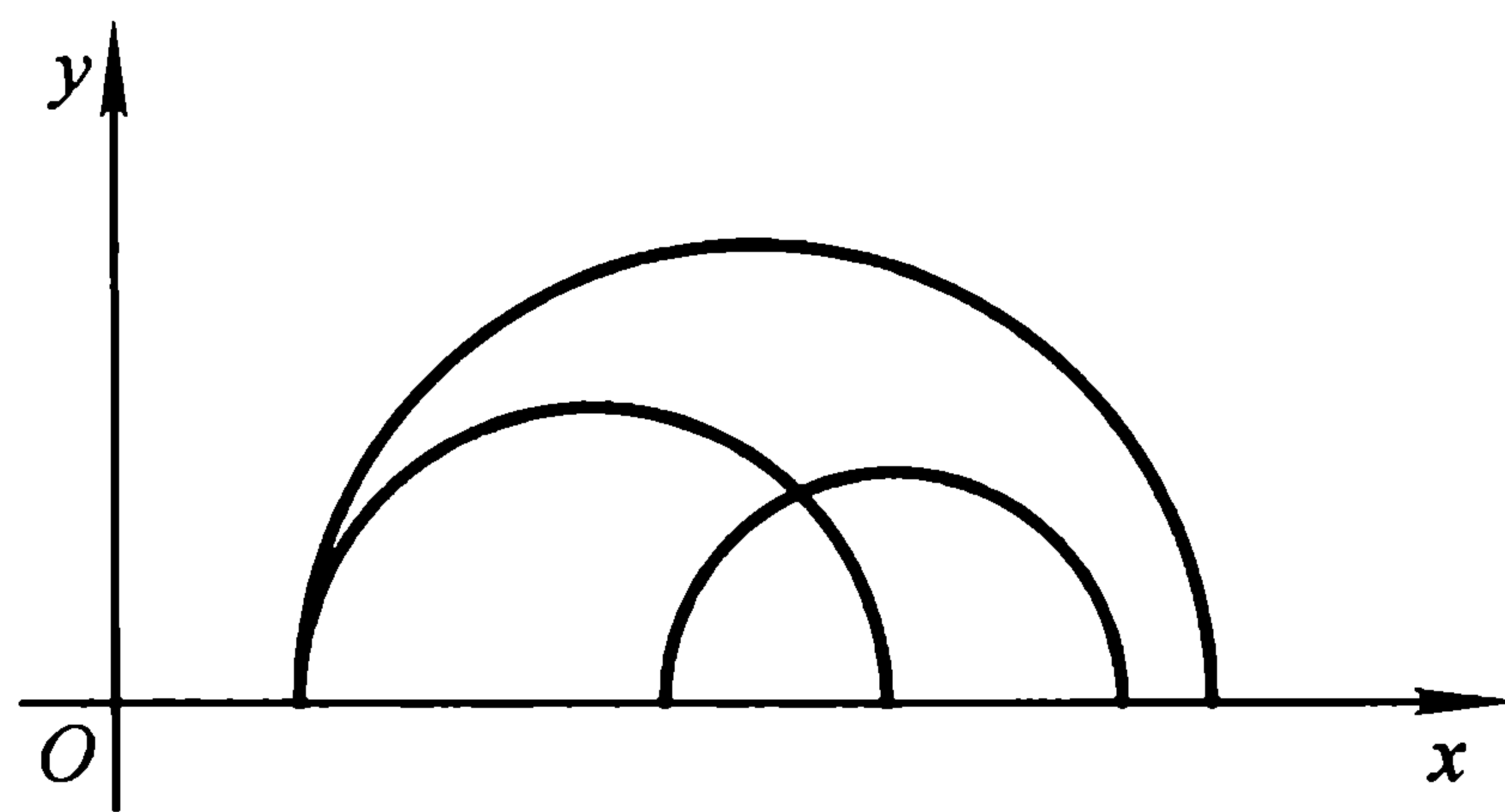


图 5.6

## 习 题 五

1. 已知曲面的第一基本形式, 求 Gauss 曲率:

(1)  $I = du du + u^2 dv dv;$

(2)  $I = du du + \sin^2 u dv dv;$

(3)  $I = \frac{du du + dv dv}{(c + u^2 + v^2)^2};$

(4)  $I = du du + 2 \cos \theta du dv + dv dv$  ( $\theta$  是常数).

2. 设两个曲面  $S$  和  $\tilde{S}$  的第一基本形式满足  $I = \lambda \tilde{I}$  ( $\lambda > 0$ , 常数), 证明:

$$K = \frac{1}{\lambda} \tilde{K}.$$

3. 设曲面  $S: \mathbf{r}(u, v) = \left( au, bv, \frac{au^2 + bv^2}{2} \right)$  与  $\tilde{S}: \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left( \tilde{a}\tilde{u}, \tilde{b}\tilde{v}, \frac{\tilde{a}\tilde{u}^2 + \tilde{b}\tilde{v}^2}{2} \right)$ .

(1) 证明: 当  $ab = \tilde{a}\tilde{b}$  时, 在对应  $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$  下,  $S$  与  $\tilde{S}$  的 Gauss 曲率相等;

(2)  $(a, b)$  与  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  满足什么关系时,  $S$  与  $\tilde{S}$  有等距变换?

4. 证明性质 2.7.

5. 设  $\mathbf{v} = f^1 \mathbf{r}_1 + f^2 \mathbf{r}_2$  是曲面  $S$  的切向量场, 证明:  $\mathbf{v}$  的协变微分为

$$D\mathbf{v} = (df^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha f^\beta du^\gamma) \mathbf{r}_\alpha.$$

6. 设曲面  $S: \mathbf{r}(u^1, u^2)$  的一个正交标架为

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2 - \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{|\mathbf{r}_2 - \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1|}.$$

求  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_{12}$  与  $\{du^\alpha, \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\}$  的关系.

7. 设曲面的第一基本形式如下, 求结构方程与 Gauss 曲率:

(1)  $ds^2 = (U + V)(dudv + dvdu)$  ( $U = U(u)$ ,  $V = V(v)$ );

(2)  $ds^2 = \frac{1}{4(u - v^2)}(dudv - 4vdudv + 4udvdu)$  ( $u > v^2$ ).

8. 求沿着球面的赤道, 切向量的平行移动.

9. 设曲面  $S$  的参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ , 证明: 切向量场  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E}}$  沿曲线

$C: (u^1(t), u^2(t))$  是平行的充要条件是: 沿着  $C$  有  $\Gamma_{1\alpha}^2 \frac{du^\alpha}{dt} = 0$ .

10. 在球面  $\mathbf{r} = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u)$  上,

(1) 证明: 曲线的测地曲率可以表为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \sin u \frac{dv}{ds},$$

其中  $s$  是曲线  $(u(s), v(s))$  的弧长参数,  $\theta$  是曲线与经线 ( $u$  线) 的夹角;

(2) 求球面纬圆的测地曲率.

11. 求旋转面上纬线的测地曲率.

12. 沿曲面  $S$  上弧长参数曲线  $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  有正交标架场  $\{\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}\}$ , 设

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix},$$

- (1) 证明:  $\lambda_1 = k_g, \lambda_2 = k_n$ ;  
 (2)  $\tau_g = \lambda_3$  称为曲线  $C$  的测地挠率, 证明

$$\tau_g = (e_3, \dot{e}_3, e_1) = (n, \dot{n}, \dot{r}).$$

13. 设  $S$  是  $E^3$  的曲面,  $n$  是  $S$  的单位法向量场,  $r(t)$  是曲面  $S$  上的正则曲线. 若  $v = v(t), w = w(t)$  是沿曲线  $r(t)$  曲面的单位切向量场,  $\theta$  是  $v$  和  $w$  的夹角, 证明:

$$\left\langle \frac{Dw}{dt}, n \wedge w \right\rangle - \left\langle \frac{Dv}{dt}, n \wedge v \right\rangle = \frac{d\theta}{dt}.$$

14. 设曲线  $C$  是旋转面  $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$  上的一条测地线,  $\theta$  是曲线  $C$  与经线的夹角, 证明: 沿  $C$  有  $f(u) \sin \theta = \text{常数}$ .

15. 求旋转面  $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$  的测地线.

16. 设曲面的第一基本形式为  $I = du^2 + G(u, v)dv^2$ , 且  $G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$ , 证明

$$G(u, v) = 1 - u^2 K(0, v) + o(u^2).$$

17. 试在测地平行坐标系下求常 Gauss 曲率曲面的第一基本形式.

18. 设曲面  $S$  上以点  $P$  为中心、 $r$  为半径的测地圆的周长为  $L(r)$ , 所围区域的面积为  $A(r)$ , 证明:  $P$  点的 Gauss 曲率

$$\begin{aligned} K(P) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}. \end{aligned}$$

19. 证明: 在常 Gauss 曲率曲面上, 测地圆具有常测地曲率.

20. 证明: 若曲面上有两族测地线相互交定角; 则曲面是可展曲面.

21. 设  $r: D \rightarrow E^3$  是一张曲面,  $D$  是单连通区域,  $r$  的 Gauss 曲率  $K < 0$ . 证明: 从  $D$  内一点出发的两条测地线不会相交于  $D$  内另一点.

22. 设  $A$  是曲面  $S$  上的一个四边形,  $P_i$  是顶点,  $\alpha_i$  是相应的内角,  $(i = 1, 2, 3, 4)$ . 证明:

$$\int_A K d\sigma + \int_{\partial A} k_g ds = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi.$$

23. 求下述两个曲面间的等距变换:

- (1)  $D = \{(u, v) | v > 0\}, \quad ds^2 = \frac{a^2}{v^2}(du^2 + dv^2);$   
 (2)  $D = \mathbf{R}^2, \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}} dv^2.$

24. 设  $ds^2$  是参数区域  $D = \{(u, v)\}$  的一个 Riemann 度量,  $C: (u(t), v(t))$  是  $D$  的一条正则参数曲线,  $v = u'(t) \frac{\partial}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial}{\partial v}$  是  $C$  的切向量场. 证明:  $C$  是测地

线当且仅当存在函数  $\lambda = \lambda(t)$  使得沿  $C$ , 有

$$\frac{Dv}{dt} + \lambda v = 0.$$

25. 在区域  $D$  上给定 Riemann 度量, 求它的测地线:

(1)  $D = \{(u, v) | v > 0\}$ ,  $ds^2 = v(du^2 + dv^2)$ ;

(2)  $D = \mathbf{R}^2$ ,  $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$ .

## 第二部分

# 整体微分几何选讲





## 第六章 平面曲线的整体性质

从这一章开始，我们主要研究曲线和曲面的整体性质。整体几何性质的研究，除了需要我们前面所述的局部理论外，还需要发展一些新的工具。这一章我们讨论平面曲线的整体性质，主要是关于简单闭曲线和凸曲线的几何特性。有关空间曲线的一些整体性质，我们将在以后的章节中，结合曲面的整体性质一起讨论。

### §6.1 平面的闭曲线

设  $\mathbf{r}(s), s \in [0, l]$  是一条平面曲线，若  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(l), \mathbf{r}^{(k)}(0) = \mathbf{r}^{(k)}(l), k = 1, 2, \dots$ ，称  $\mathbf{r}$  是一条平面闭曲线。闭曲线的另一个等价定义是  $\mathbf{r}(s)$  是周期为  $l$  的映射。当闭曲线没有自交点时称为简单闭曲线。

#### 1. 切线的旋转指数定理

设  $\mathbf{r}(s) (s \in [0, l])$  是平面闭曲线， $\kappa(s)$  是  $C$  的曲率。考虑积分

$$i = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s) ds. \quad (1.1)$$

由于  $\kappa(s)$  是曲线  $C$  的 Gauss 像  $\mathbf{n}(s)$  在单位圆  $S^1$  上移动的速度，所以  $\int_0^l \kappa(s) ds$  是法向  $\mathbf{n}$  在  $S^1$  上移动的总路程。当  $\kappa > 0$  时， $\mathbf{n}$  逆时针转动，位移为正； $\kappa < 0$  时位移为负。由于曲线是闭的， $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(l)$ ，所以  $\mathbf{n}$  在单位圆周上的整个有效路程应是在圆周上跑了若干圈，因此 (1.1) 定义的  $i$  应该是个整数，称为曲线  $C$  的旋转指数。

显然，如果  $C$  是圆， $i = 1$  或  $-1$ ，其符号取决于  $C$  的方向。如果  $C$  是简单闭曲线，则  $C$  可以光滑地形变为圆。在形变过程中，旋转指数  $i$  连续地变化。但因  $i$  是一个整数，只能保持不变。这表明，简单闭曲线的旋转指数是  $\pm 1$ 。

**定理 1.1 (旋转指数定理)** 设  $C$  为平面  $E^2$  上的简单闭曲线，则  $C$  的旋转指数为  $\pm 1$ 。

在证明定理之前，我们再来讨论一下曲线的 Gauss 映射。

设曲线的单位切向量  $t$  与  $x$  轴的方向角为  $\tilde{\theta}$ , 那么  $t = (\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta})$ , 法向量  $n = (-\sin \tilde{\theta}, \cos \tilde{\theta})$ . 由此可推出曲线的曲率

$$\kappa(s) = \left\langle \frac{dt}{ds}, n \right\rangle = \frac{d\tilde{\theta}}{ds}. \quad (1.2)$$

这表明  $n(s)$  的终点在  $S^1$  上的速度  $\kappa(s)$  等于  $n(s)$  在  $S^1$  上旋转的角速度  $\frac{d\tilde{\theta}}{ds}$ . 这里需要注意的是, 由于方向角  $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi)$ ,  $\tilde{\theta}(s)$  有可能不是  $[0, l]$  上的连续函数. 读者很容易构造一个简单闭曲线的例子使得存在  $s_1 \in (0, l)$ , 满足  $\tilde{\theta}(s_1) = 0$ , 并且  $\lim_{s_2 \rightarrow s_1^-} \tilde{\theta}(s_2) = 2\pi$ .

但我们可以证明

**引理 1.2** 存在连续函数  $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得

$$\tilde{\theta}(s) = \theta(s) \pmod{2\pi}, \quad \forall s \in [0, l],$$

且满足上式的连续函数  $\theta$  在  $\text{mod} 2\pi$  意义下惟一.

**证明**  $\forall s \in [0, l]$ , 存在包含  $s$  的小开区间  $I_s$ , 使得  $I_s$  在 Gauss 映射下的像落在  $S^1$  上的一个  $\frac{1}{4}$  圆内, 这样可以在  $I_s$  上适当定义连续函数  $\theta$  使得  $\theta(s) = \tilde{\theta}(s) \pmod{2\pi}$ . 因为  $\{I_s : s \in [0, l]\}$  是闭区间的开覆盖, 有有限子覆盖  $I_{s_1}, I_{s_2}, \dots, I_{s_n} (s_1 < s_2 < \dots < s_n)$ , 相应定义的连续函数记为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . 在区间  $I_{s_k} \cap I_{s_{k+1}}$  上, 由  $\theta_k = \theta_{k+1} \pmod{2\pi}$  及  $\theta_k, \theta_{k+1}$  均连续知: 存在  $n_k \in \mathbf{Z}$ ,

$$\theta_k(s) = \theta_{k+1}(s) + 2n_k\pi, \quad \forall s \in I_{s_k} \cap I_{s_{k+1}}.$$

所以适当地修改  $\theta_k$  的定义 (在  $\text{mod} 2\pi$  意义下), 可以拼成  $[0, l]$  上的一个连续函数使得

$$\theta(s) = \tilde{\theta}(s) \pmod{2\pi}, \quad \forall s \in [0, l].$$

若有另一个连续函数  $\bar{\theta}(s)$  也满足要求, 则

$$\theta(s) - \bar{\theta}(s) = 0 \pmod{2\pi}, \quad \forall s \in [0, l].$$

因为  $\theta(s) - \bar{\theta}(s)$  是连续函数, 所以存在整数  $k$  使得

$$\theta(s) - \bar{\theta}(s) = 2k\pi, \quad \forall s \in [0, l].$$

证毕.

需要指出的是引理 1.2 对任何闭曲线均成立, 而且, 由  $t = (\cos \theta, \sin \theta)$  以及  $t$  可微知  $\theta(s)$  也是可微函数.

### 定理 1.1 的证明

由引理 1.2 ,

$$i = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\theta}{ds} ds = \frac{\theta(l) - \theta(0)}{2\pi}. \quad (1.3)$$

下面我们利用弦映射来证明定理. 设  $\Delta = \{(s_1, s_2) | 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq l\}$  为三角形区域. 由于  $C$  是简单闭曲线, 可以定义弦映射如下:

$$\Phi(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}(s_2) - \mathbf{r}(s_1)}{|\mathbf{r}(s_2) - \mathbf{r}(s_1)|} & \text{当 } s_1 \neq s_2, (s_1, s_2) \neq (0, l); \\ \dot{\mathbf{r}}(s) \quad (= \mathbf{t}(s)) & \text{当 } s_1 = s_2 = s; \\ -\dot{\mathbf{r}}(0) \quad (= -\mathbf{t}(0)) & \text{当 } s_1 = 0, s_2 = l. \end{cases} \quad (1.4)$$

如图 6.1 , 显然  $\Phi$  在  $\Delta$  内部是光滑的, 且在  $\Delta$  的边界连续, 与引理 1.2

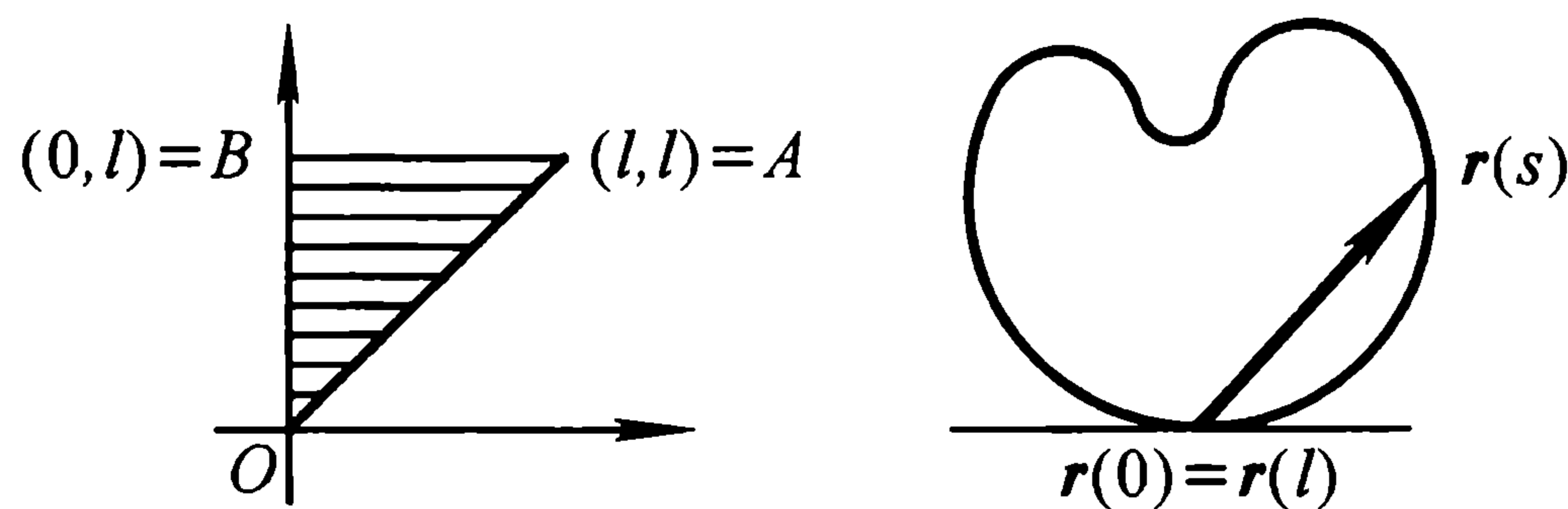


图 6.1

同理, 可以选取可微函数  $\theta(s_1, s_2)$  使得

$$\Phi(s_1, s_2) = (\cos \theta(s_1, s_2), \sin \theta(s_1, s_2)), \quad (1.5)$$

而且  $s_1 = s_2 = s$  时  $\theta(s, s)$  与引理 1.2 所选  $\theta(s)$  一致. 因此,

$$i = \frac{1}{2\pi} \int_{\overrightarrow{OA}} d\theta = \frac{-1}{2\pi} \left( \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BO}} \right) d\theta. \quad (1.6)$$

从  $\Phi$  的定义 (1.4) 可以知道, 在  $\overrightarrow{OB}$  上,

$$\Phi(0, s) = \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)}{|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)|}. \quad (1.7)$$

所以  $\theta(0, s)$  是弦  $\overrightarrow{r(0)r(s)}$  与  $x$  轴的夹角, 当  $s$  从  $0 \rightarrow l$  时,  $\Phi(0, s)$  从  $\Phi(0, 0) = t(0)$  变到  $\Phi(0, l) = -t(0)$ , 这样,  $\theta(0, s)$  的变化为  $\pi$ . 因此

$$\int_{\overrightarrow{OB}} d\theta = \int_0^l d\theta(0, s) = \pi. \quad (1.8)$$

同理, 在  $\overrightarrow{BA}$  上,  $\theta$  的变化也为  $\pi$ , 这说明

$$i = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\overrightarrow{OB}} + \int_{\overrightarrow{BA}} \right) d\theta = 1. \quad (1.9)$$

证毕.

## 2. 等周不等式与圆的几何特性

等周问题是古老的几何问题. 关于平面曲线的等周问题是: 在给定周长的所有简单闭曲线中, 什么曲线界定的区域面积最大. 尽管古希腊人早知答案是圆, 但第一个严格证明是由 Weierstrass 在 1870 年给出.

我们这里介绍的证明是属于 Hurwitz(1902 年) 的, 他的证明给出了分析不等式与几何不等式的联系.

**定理 1.3** 设平面简单闭曲线  $C$  的长度为  $L$ ,  $C$  界定的区域的面积为  $A$ , 则有

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

且等号成立当且仅当  $C$  是一个圆.

定理的证明基于下述 Wirtinger 不等式.

设  $f$  是周期为  $2\pi$  的连续函数. 若  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ , 则

$$\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2 dt \geq \int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt,$$

且等号成立当且仅当  $f(t) = a \cos t + b \sin t$ ,  $a, b$  是常数.

Wirtinger 不等式的证明只须将  $f$  展开为 Fourier 级数, 并利用 Parseval 等式即可.

**定理 1.3 的证明** 取曲线  $C$  的重心为原点建立平面直角坐标系  $(x, y)$ .  $C$  的坐标为  $(x(s), y(s))$ ,  $s \in [0, L]$ . 令  $t = \frac{2\pi}{L}s$ , 则

$$\int_0^{2\pi} x(t) dt = 0,$$

且

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = ((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt = \frac{L^2}{2\pi}.$$

设  $C$  界定的区域是  $D$ ，由 Green 公式，

$$A = \int_D dx \wedge dy = \int_D d(xdy) = \int_C xdy = \int_0^{2\pi} x(t) \frac{dy}{dt} dt,$$

因此

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{L^2}{4\pi} - A \right) &= \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2x \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2 + \left(x - \frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt \\ &\geq \int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2 \right] dt. \end{aligned}$$

对  $x(t)$  应用 Wirtinger 不等式，知  $\frac{L^2}{4\pi} - A \geq 0$ . 当  $\frac{L^2}{4\pi} - A = 0$  时，不难发现， $x(t) = a \cos t + b \sin t$  且  $\frac{dy}{dt} = x(t)$ . 于是

$$y(t) = a \sin t - b \cos t + c.$$

所以  $C$  是圆.

圆是最简单的闭曲线，除了它是等周问题的解外，还有许多有趣的几何特性，这里我们只能讨论一些圆的简单性质.

(1) 圆的均匀性：圆的曲率为常数，而且曲率为非零常数的曲线是圆.

(2) 圆的对称性：圆是绕圆心旋转不变的，而且圆以任意方向的直径为对称轴. 下面我们将证明轴对称也是圆的几何特性之一.

**定义 1.4** 给定平面简单闭曲线  $C$ ，设  $e$  是平面的一个向量，如果存在一条与  $e$  垂直的直线  $l$ ，使得  $C$  以  $l$  为对称轴，则称  $e$  为曲线  $C$  的一个对称方向.

例如，椭圆以它的长、短轴方向为对称方向.

**定理 1.5** 设  $C$  是平面简单闭曲线, 如果平面的任意方向均是曲线  $C$  的对称方向, 则  $C$  必是圆.

**证明** 平面的反射变换有如下性质: 设直线  $l_1$  和  $l_2$  的夹角为  $\theta$ , 平面的点经过关于  $l_1$  的反射后再经过关于  $l_2$  的反射, 其结果为该点关于  $l_1$  与  $l_2$  交点的旋转, 转角为  $2\theta$ .

由假设, 曲线  $C$  沿任意方向均有对称轴(并未假定所有对称轴交于一点). 特别, 我们可以取两条对称直线  $l_1$  和  $l_2$ , 使其交角为  $\theta = \lambda\pi$ , 其中  $\lambda \in (0, 1)$  是无理数. 设  $l_1$  与  $l_2$  的交点为  $O$  点, 则曲线  $C$  关于点  $O$  旋转  $2\lambda\pi$  角后不变.

在曲线  $C$  上任取一点  $P$ , 由上面的讨论可以知道, 点  $P$  关于  $O$  点旋转  $2\lambda\pi$  角后仍然属于曲线  $C$ ; 如此继续下去, 因为  $\lambda$  是无理数, 所以点  $P$  的轨迹是以点  $O$  为圆心、 $\overline{OP}$  为半径的圆上的稠密子集, 再由连续性知  $C$  为圆. 证毕.

圆的反射对称性在曲面的 Steiner 对称化原理中起了重要的作用, 并且高维的球面也有类似的性质.

## §6.2 平面的凸曲线

平面简单闭曲线的曲率  $\kappa > 0$  时称为凸曲线. 例如圆和椭圆都是凸曲线. 凸曲线有许多良好的几何性质, 首先我们要证明的是

**定理 2.1** 凸曲线的 Gauss 映射是一一对应.

**证明** 设  $\theta(s)$  是由引理 1.2 所定义的函数, 由于  $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ , 曲线是凸的等价于  $\theta(s)$  是严格单调增的, 所以凸曲线的 Gauss 映射是局部一一对应. 但由切线的旋转指数定理知

$$\theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \kappa(s) ds = 2\pi,$$

因此凸曲线的 Gauss 映射是整体一对一的. 证毕.

由于上述定理, 我们在研究凸曲线时, 不仅可以用弧长  $s$  作参数, 而且可以用切线的转角  $\theta$  作参数,  $\theta$  称为曲线的角参数. 有时用角参数往往会更加方便. 此外, 我们还将引进支撑函数的概念. 曲线  $\mathbf{r}(s)$  的支撑函数定义为

$$\varphi(s) = -\langle \mathbf{r}(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \quad (2.1)$$



它表示平面的坐标原点到曲线过  $\mathbf{r}(s)$  点的切线的 (有向) 距离.

当  $C$  是凸曲线时, 将平面的坐标原点取在  $C$  界定的区域内部, 且取  $s$  的方向为逆时针方向, 则支撑函数  $\varphi(s)$  恒为正. 利用角参数, 我们可以导出支撑函数与曲率的关系. 首先, 由定义有  $\varphi(\theta) = -\langle \mathbf{r}(\theta), \mathbf{n}(\theta) \rangle$ , 因此

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\left\langle \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}, \mathbf{n} \right\rangle - \left\langle \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} \right\rangle.$$

但因

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{d\theta} = -\mathbf{t},$$

所以

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \langle \mathbf{r}, \mathbf{t} \rangle. \quad (2.2)$$

再求导一次, 我们有

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = \left\langle \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}, \mathbf{t} \right\rangle + \left\langle \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{t}}{d\theta} \right\rangle = \frac{1}{\kappa} + \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\kappa} - \varphi,$$

于是我们有

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \varphi = \frac{1}{\kappa}. \quad (2.3)$$

由上面的推导还可以看出, 如果知道了曲线的支撑函数  $\varphi$ , 则曲线的表达式也就知道了. 事实上, 在平面取一个固定标架, 我们有

$$\mathbf{t} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta). \quad (2.4)$$

曲线的位置向量  $\mathbf{r}$  可以写成  $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{n}$  的线性组合

$$\mathbf{r} = \langle \mathbf{r}, \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n},$$

利用 (2.1) 和 (2.2) 两式立得

$$\mathbf{r} = \varphi' \mathbf{t} - \varphi \mathbf{n}, \quad (2.5)$$

也可以将上式写为分量的形式

$$x = \varphi' \cos \theta + \varphi \sin \theta, \quad (2.6)$$

$$y = \varphi' \sin \theta - \varphi \cos \theta.$$



### 1. Minkowski 问题

显然, 对于凸曲线而言, 其曲率函数满足

- (a)  $\kappa > 0$ ;
- (b)  $\kappa$  为周期函数.

反过来, 人们自然要问: 如果一条曲线  $C$  的曲率函数是正的周期函数, 那么这条曲线是不是凸曲线呢? 这就是一维的 Minkowski 问题.

一般说来这是不对的, 读者容易构造出曲率是正周期函数非闭曲线的例子. 根据前面关于曲线支撑函数的讨论, Minkowski 问题显然可以化为微分方程 (2.3)

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \varphi = \frac{1}{\kappa}$$

在什么条件下有一个与  $\kappa$  同周期的周期解.

根据常微分方程理论, 方程 (2.3) 的通解为

$$\varphi(\theta) = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta - \cos \theta \int_0^\theta \frac{\sin \psi}{\kappa} d\psi + \sin \theta \int_0^\theta \frac{\cos \psi}{\kappa} d\psi. \quad (2.7)$$

不失一般性, 我们可以假定  $c_1 = c_2 = 0$ . (事实上, 如果曲线  $C$  和  $\bar{C}$  的支持函数分别为  $\varphi(\theta)$  和  $\bar{\varphi}(\theta)$ , 且

$$\varphi(\theta) = \bar{\varphi}(\theta) + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta,$$

则由公式 (2.6) 有

$$x = \bar{x} + c_2,$$

$$y = \bar{y} - c_1.$$

上式表明, 曲线  $C$  和  $\bar{C}$  只相差一个平移.)

从 (2.5) 可以看出, 曲线成为闭曲线当且仅当

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi), \quad \varphi'(0) = \varphi'(2\pi). \quad (2.8)$$

代入到 (2.7) 式, 条件 (2.8) 等价于

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi}{\kappa} d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi}{\kappa} d\psi = 0. \quad (2.9)$$

利用 (2.6) 式, 此时曲线  $C$  的坐标函数为

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\theta \frac{1}{\kappa} \cos \psi d\psi, \\ y &= \int_0^\theta \frac{1}{\kappa} \sin \psi d\psi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

不难验证, 在条件 (2.9) 下, 曲线  $C$  也是单纯的 (留作练习).

总结上述讨论, 我们有

**定理 2.2** 设  $\kappa: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$  为正值连续函数, 满足条件

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi}{\kappa} d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi}{\kappa} d\psi = 0,$$

则存在平面凸曲线  $C$  以及曲线  $C$  的 Gauss 映射  $g: C \rightarrow S^1$  使得曲线  $C$  在点  $g^{-1}(\theta)$  的曲率为  $\kappa(\theta)$  ( $\theta \in S^1$ ), 且曲线  $C$  在相差一个平移的意义下惟一.

以上是一维 Minkowski 问题的回答, 以后我们还会谈到有关曲面的 Minkowski 问题.

## 2. 四顶点定理

曲线上曲率的驻点称为曲线的顶点, 或者说使  $\frac{d\kappa}{ds} = 0$  的点称为曲线的顶点. 比如圆的所有点都是顶点, 而椭圆上仅有 4 个顶点. 四顶点定理是说, 任何凸曲线至少有四个顶点.

设  $C$  是一条平面凸曲线,  $\kappa$  是它的曲率函数. 令  $\rho(\theta) = \frac{1}{\kappa(\theta)}$ , 由于

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{d\theta} = -\frac{1}{\kappa^3} \frac{d\kappa}{ds},$$

所以,  $\frac{d\kappa}{ds} = 0$  当且仅当  $\frac{d\rho}{d\theta} = 0$ .

曲线  $C$  满足条件 (2.9) 式, 即

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad (2.11)$$

利用分部积分, 不难得出

$$\int_0^{2\pi} \rho'(\theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \rho'(\theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad (2.12)$$

其中  $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ ；同时我们还有显然的等式

$$\int_0^{2\pi} \rho' d\theta = 0. \quad (2.13)$$

所以对一条凸曲线而言，等式

$$\int_0^{2\pi} \rho'(\theta) (a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) d\theta = 0$$

恒成立，其中  $a_0, a_1, a_2$  为任意常数. 上式也可以改写为

$$\int_0^{2\pi} \rho'(\theta) (a_0 + \cos(\theta - \theta_0)) d\theta = 0 \quad (2.14)$$

对任意的常数  $a_0, \theta_0$  均成立.

由于  $\rho(\theta)$  是  $S^1$  上的函数，必达到最大最小值，设  $\theta = \alpha$  和  $\theta = \beta$  分别是最大、最小值点，这两点当然是顶点.

如果  $\rho(\theta)$  不含有任何其它的驻点，则在弧  $\widehat{\alpha\beta}$  上  $\rho' < 0$ ，而在弧  $\widehat{\beta\alpha}$  上  $\rho' > 0$ . 选取  $\theta_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ，且取常数  $a_0$  使得  $a_0 + \cos(\theta - \theta_0)$  在  $\theta = \alpha$  及  $\theta = \beta$  时为零. 则在弧  $\widehat{\beta\alpha}$  上， $a_0 + \cos(\theta - \theta_0) > 0$ ，而在弧  $\widehat{\alpha\beta}$  上， $a_0 + \cos(\theta - \theta_0) < 0$ ，因此，积分 (2.14) 不可能为零，这得出矛盾. 所以  $\rho'(\theta)$  必须还有另外一个零点. 不难看出， $\rho'(\theta)$  必须偶数次改变符号，所以必须还有第四个零点.

再稍加分析，我们可以得到

**定理 2.3** 设  $C$  是平面的凸曲线，则它的曲率函数或者为常数；或者至少有两个相对极大点和两个相对极小点，且相对极大值严格大于相对极小值. 特别，平面凸曲线上至少有 4 个顶点.

最后我们简要提一下四顶点定理的逆定理.

**逆定理** 设  $\kappa: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$  为正值连续函数， $\kappa$  或者为常数，或者至少有两个相对极大点和两个相对极小点，且相对极大值严格大于相对极小值，则存在凸曲线  $C$ ，参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t): S^1 \rightarrow E^2$ ，它在相应点的曲率为  $\kappa = \kappa(t)$ .

注意，在上述定理中并没有假设  $t$  是角参数，因此 (2.9) 不一定成立. 定理的证明超出了本书的范围，有兴趣的读者可以参看

Geuck H. The converse to the four vertex theorem. L'Enseignement Mathematique, 1971(3~4): 295~309

## 第七章 曲面的若干整体性质

从本章起我们要研究曲面的整体性质. 整体曲面不仅要适合曲面的结构方程式, 而且还有拓扑的限制. 为建立曲面的局部不变量与整体几何量及拓扑量之间的联系, 我们需要引入一些新工具如 Stokes 定理、极大值原理等.

本章的安排大体如下: 首先我们引进整体曲面的概念, 然后叙述并证明著名的整体 Gauss-Bonnet 定理, 并给出 Gauss-Bonnet 定理的若干应用. 接着我们研究紧致曲面和凸曲面的几何性质, 最后简要介绍曲面的完备性.

### §7.1 曲面的整体描述

在第三章开头, 我们定义了参数曲面. 我们把这种曲面称为曲面片. 容易发现, 曲面片无法描述像球面、圆柱面这样的曲面. 因此需要引入整体曲面的概念. 从直观上说, 一张整体曲面是将若干曲面片按适当的方式拼合起来的.

**定义 1.1**  $\Sigma$  称为  $E^3$  中的光滑曲面, 若  $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha$ , 满足:

(1) 其中的每个  $\Sigma_\alpha$  是  $E^3$  中的曲面片, 即有参数区域  $D_\alpha$  及光滑映射

$$\mathbf{r}_\alpha: D_\alpha (= \{(u_\alpha, v_\alpha)\}) \rightarrow E^3 \quad (1.1)$$

使得  $\Sigma_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(D_\alpha)$ , 且

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\alpha} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial v^\alpha} \neq 0; \quad (1.2)$$

(2)  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ , 当  $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \neq \emptyset$  时,  $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$  仍然是曲面片, 且复合映射

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\beta^{-1} \circ \mathbf{r}_\alpha: D_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha^{-1}(\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta) \subset D_\alpha &\rightarrow D_{\beta\alpha} \\ &= \mathbf{r}_\beta^{-1}(\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta) \subset D_\beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

是可微映射, 见图 7.1.

$\{\Sigma_\alpha\} = \{(D_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)\}$  称为曲面的一个 (局部) 坐标系.

从定义可以看出, 条件 (1.2) 保证每个  $\Sigma_\alpha$  都是正则曲面片, 而条件 (1.3) 则保证了曲面片拼接时的光滑性.

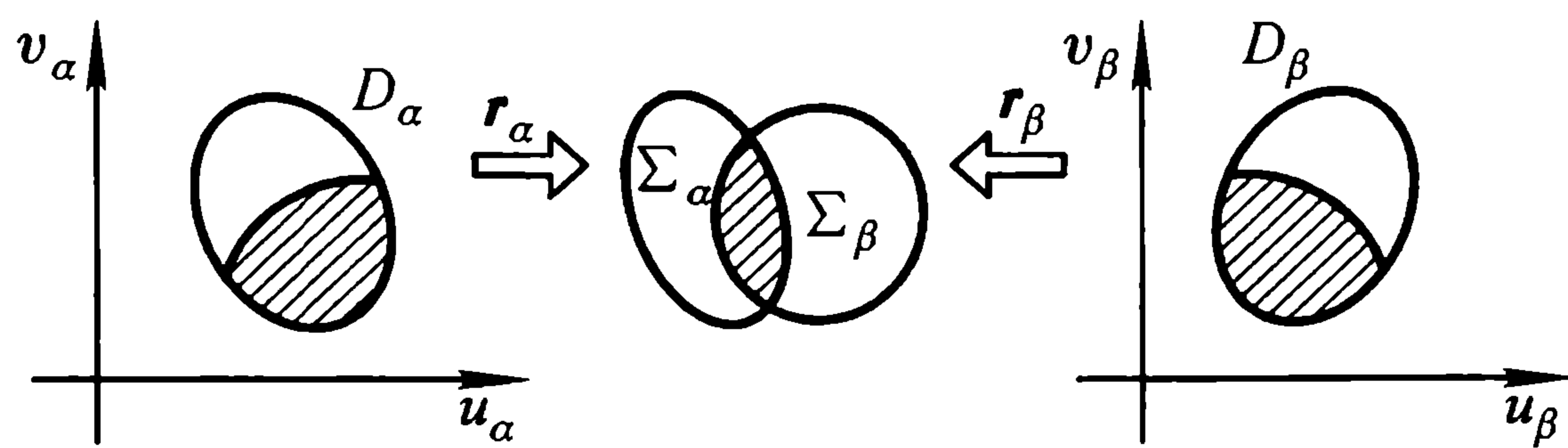


图 7.1

**例 1.2** 平面是曲面，它可以仅用一块曲面片来表示。实际上按定义，任何曲面片都是曲面。

**例 1.3** 圆柱面  $x^2 + y^2 = 1$ 。

将圆柱面分为  $\Sigma_1 = \{x^2 + y^2 = 1 : x < 1\}$  和  $\Sigma_2 = \{x^2 + y^2 = 1 : x > -1\}$  两部分，利用柱坐标系，取

$$D_1 = \{(\theta, u) : 0 < \theta < 2\pi, u \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{r}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, u),$$

和

$$D_2 = \{(\varphi, v) : -\pi < \varphi < \pi, v \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{r}_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi, v),$$

则  $\Sigma_1 = \mathbf{r}_1(D_1)$ ,  $\Sigma_2 = \mathbf{r}_2(D_2)$ . 在  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{x^2 + y^2 = 1 : x^2 \neq 1\}$  上,

$$\mathbf{r}_1^{-1}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = \{(\theta, u) : \theta \in (0, \pi) \text{ 或 } (\pi, 2\pi)\},$$

因此其拼接方式为

$$(\varphi, v) = \mathbf{r}_2^{-1} \circ \mathbf{r}_1(\theta, u) = \begin{cases} (\theta, u) & \text{当 } \theta \in (0, \pi), \\ (\theta - 2\pi, u) & \text{当 } \theta \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

它是  $C^\infty$  映射。

**例 1.4** 球面  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 。

将球面分成两部分

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z > -1\} \text{ 和 } S_-^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z < 1\}.$$

不难看出

$$S_+^2 \cap S_-^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z \neq \pm 1\}.$$

利用球极投影, 将  $S_+^2$  和  $S_-^2$  写成曲面片形式如下:

$$S_+^2 : \mathbf{r}_1 \begin{cases} x = \frac{2u_1}{1 + u_1^2 + v_1^2}, \\ y = \frac{2v_1}{1 + u_1^2 + v_1^2}, \\ z = \frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{1 + u_1^2 + v_1^2}, \end{cases} \quad (u_1, v_1) \in D_1 = \mathbf{R}^2;$$

$$S_-^2 : \mathbf{r}_2 \begin{cases} x = \frac{2u_2}{1 + u_2^2 + v_2^2}, \\ y = \frac{2v_2}{1 + u_2^2 + v_2^2}, \\ z = \frac{u_2^2 + v_2^2 - 1}{1 + u_2^2 + v_2^2}, \end{cases} \quad (u_2, v_2) \in D_2 = \mathbf{R}^2.$$

其拼接方式为

$$u_2 = \frac{u_1}{u_1^2 + v_1^2}, \quad v_2 = \frac{v_1}{u_1^2 + v_1^2},$$

上述变换定义在  $D_1 - \{(0, 0)\}$  上, 是  $C^\infty$  的.

在定义中虽然没有连通性的要求, 为方便起见, 以后我们总假设曲面是连通的. 对曲面  $\Sigma = \cup \Sigma_\alpha$  而言, 在每片  $\Sigma_\alpha$  上有定义好的第一基本形式以及 Gauss 曲率、测地曲率等内蕴几何量, 它们与参数选取无关. 在  $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$  上, 由于  $\Sigma_\alpha$  与  $\Sigma_\beta$  是光滑拼接的, 由  $\Sigma_\alpha$  所定义的内蕴几何量和由  $\Sigma_\beta$  所定义的内蕴几何量是一致的, 这样, 这些几何量可以定义在整个曲面  $\Sigma$  上.

而对第二基本形式来说, 它依赖于法向方向的选择. 因此, 当  $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \neq \emptyset$  时, 若由  $\Sigma_\alpha$  确定的法向与由  $\Sigma_\beta$  ( $\forall \alpha, \beta$ ) 确定的法向一致, 单位法向可以定义在整个曲面上, 这时第二基本形式在整个曲面  $\Sigma$  上有定义. 不然, 则不可以通过单位法向量来整体定义曲面的第二基本形式.

有关曲面的一个基本概念是定向. 当  $\Sigma_\alpha$  是一个曲面片时, 它有两个单位法向量  $\mathbf{n}_\alpha$  和  $-\mathbf{n}_\alpha$ . 我们称  $\mathbf{n}_\alpha$  为  $\Sigma_\alpha$  的一个定向 (显然  $-\mathbf{n}_\alpha$  是  $\Sigma_\alpha$  的另一个定向). 对曲面  $\Sigma$  来说, 如果有一族坐标系  $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ , 以及每个  $\Sigma_\alpha$  的一个定向  $\mathbf{n}_\alpha$ , 使得



- (1)  $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_{\alpha}$ ;  
 (2)  $\mathbf{n}_{\alpha} = \mathbf{n}_{\beta}$  当  $\Sigma_{\alpha} \cap \Sigma_{\beta} \neq \emptyset$  时,

则称  $\Sigma$  是可以定向的. 这时  $\mathbf{n}(P) = \mathbf{n}_{\alpha}(P)$  (当  $P \in \Sigma_{\alpha}$ ) 是  $\Sigma$  上一个光滑的法向量场, 称为  $\Sigma$  的一个定向.

简单地说, 可定向曲面有“两个面”. 按定义, 球面, 柱面, 环面都是可定向的, 图 7.2 的 Mobius 带是不可定向的.

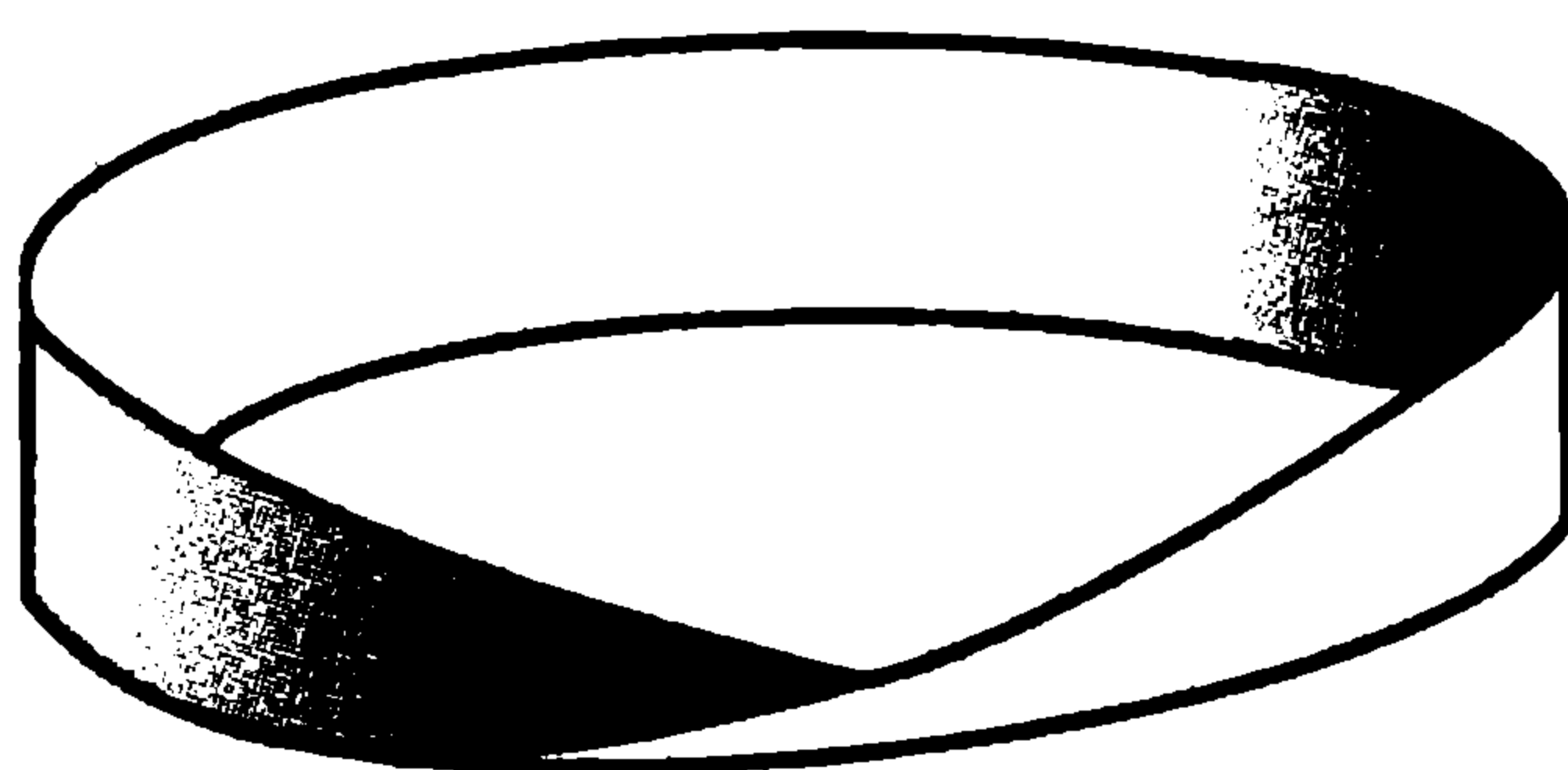


图 7.2

**性质 1.5** 可定向曲面  $\Sigma$  有整体定义的第二基本形式.

**定义 1.6** 曲面  $\Sigma$  称为紧致的, 如果  $\Sigma$  是  $E^3$  中无边的有界闭集.

上述例中平面, 柱面, 都不是紧致的, 而球面、环面是紧致的.

现在我们可以证明如下的整体定理. 关于紧致曲面的其它几何性质, 我们将在 §7.4 继续讨论.

**定理 1.7** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的紧致曲面, 则在  $\Sigma$  上必有一点  $P_0$ , 它的 Gauss 曲率  $K(P_0) > 0$ .

**证明** 设  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  是曲面的位置向量, 考虑曲线上的函数

$$f(p) = \langle \mathbf{r}(p), \mathbf{r}(p) \rangle = x^2(p) + y^2(p) + z^2(p).$$

由  $\Sigma$  的紧性知  $f$  必在某一点  $P_0$  达到最大值. 下面我们将证明  $K(P_0) > 0$ .

设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  是曲面  $\Sigma$  在  $P_0$  附近的坐标系, 由  $f(P_0)$  是极大值, 故

$$df(P_0) = 2\langle d\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle(P_0) = 0.$$

这表明  $\mathbf{r}(P_0)$  是  $\Sigma$  在  $P_0$  点的法向量, 且显然有  $|\mathbf{r}|(P_0) > 0$ , 所以

$$\mathbf{r}(P_0) = \lambda \mathbf{n}(P_0), \quad \lambda \neq 0 \text{ 是定数.}$$



考虑  $\Sigma$  上过  $P_0$  点的弧长参数曲线  $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ ,  $\mathbf{r}(0) = P_0$ .  $P_0$  亦是函数  $f(s) = f(\mathbf{r}(s))$  的最大值点, 所以

$$0 \geq \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{ds^2}(0) = \langle \ddot{\mathbf{r}}(0), \mathbf{r}(0) \rangle + 1 = \lambda \langle \ddot{\mathbf{r}}(0), \mathbf{n}(P_0) \rangle + 1.$$

由于曲线  $\mathbf{r}(s)$  在  $P_0$  点的法曲率  $k_n = \langle \ddot{\mathbf{r}}(0), \mathbf{n}(P_0) \rangle$ , 所以

$$|k_n| \geq \left| \frac{1}{\lambda} \right|.$$

由  $\mathbf{r}(s)$  的任意性知  $\Sigma$  在  $P_0$  处的主曲率也满足上式, 所以

$$K(P_0) = k_1(P_0)k_2(P_0) \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0.$$

证毕.

## §7.2 整体的 Gauss-Bonnet 公式

### 1. 曲面的三角剖分

设  $\Sigma$  是  $E^3$  的曲面,  $\{\Sigma_\alpha = (\mathbf{r}_\alpha, D_\alpha)\}$  是  $\Sigma$  的坐标系.  $\Sigma$  上的一个三角形  $T$  是指

- (a)  $T$  是由  $\Sigma$  上三条光滑曲线围成的单连通区域,
- (b)  $T$  落在某个  $\Sigma_\alpha$  内.

因此, 三角形  $T$  是由三个顶点, 以及联结顶点的三条光滑的边构成的, 如图 7.3.

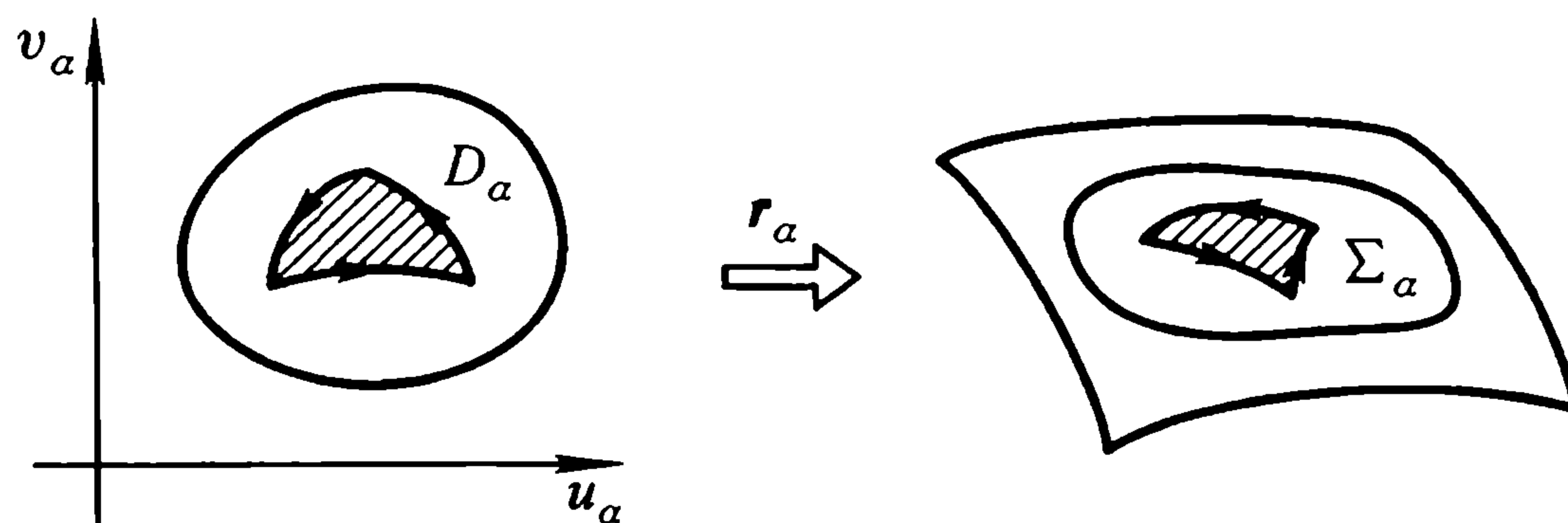


图 7.3

曲面  $\Sigma$  的三角剖分是  $\Sigma$  上的一族三角形  $\{T_\lambda\}$  (图 7.4), 满足

- (1) 对  $\Sigma$  的任意一点  $P$ ,  $P$  必落在某一个三角形上, 且  $P$  不落在三角形的边界上时,  $P$  属于惟一个三角形;

(2) 当  $P$  属于某个三角形  $T_1$  的边、且不是三角形的顶点时, 则或者  $P$  不再属于其它三角形的边, 或者  $P$  也属于另外惟一个三角形  $T_2$  的边, 且  $P$  属于  $T_1 \cup T_2$  的内部;

(3)  $P$  属于某个三角形的顶点时, 则以  $P$  为顶点的三角形至多只有有限个, 且两个三角形至多有一个公共边.

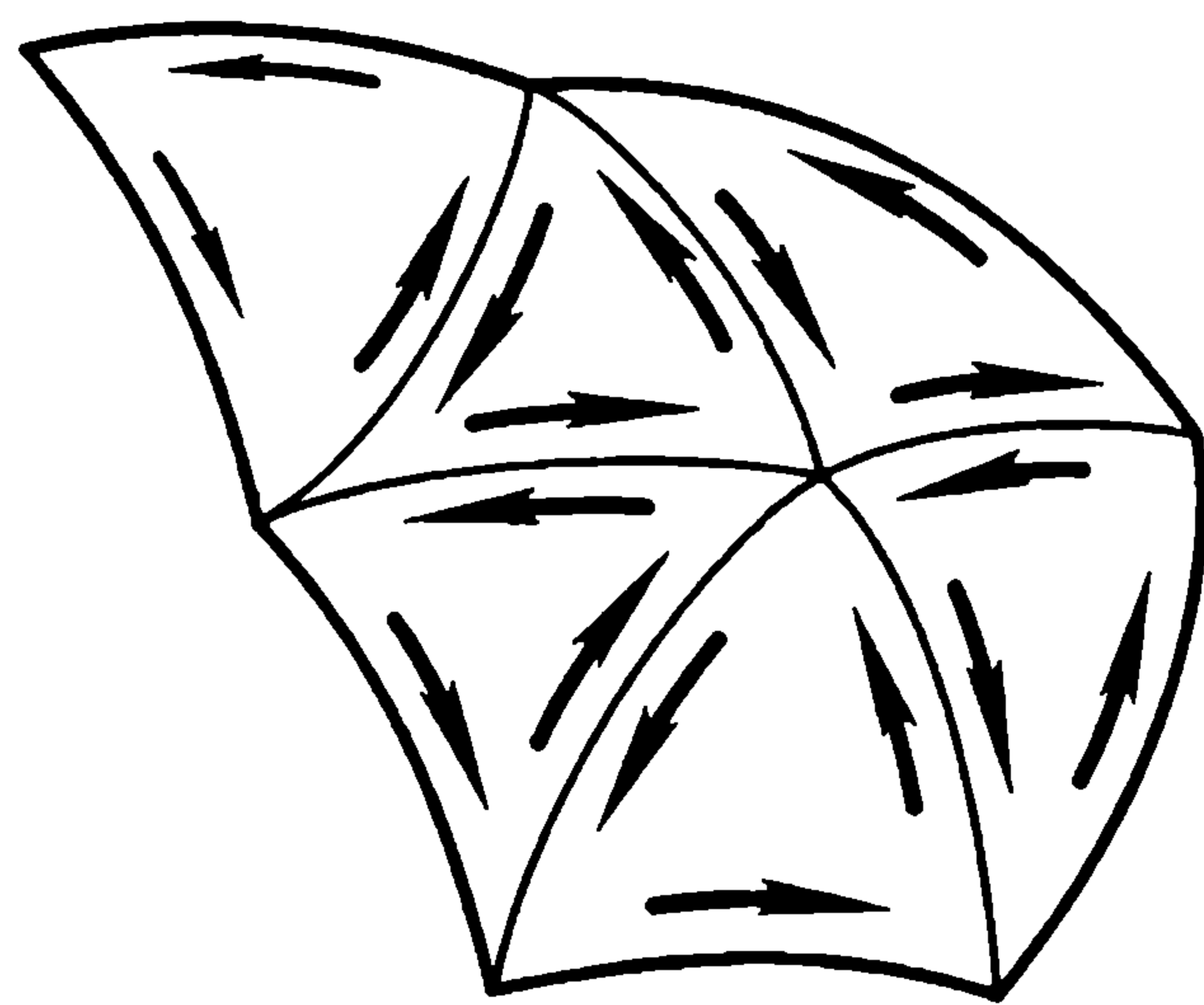


图 7.4

图 7.5 是两个不是三角剖分的例子:

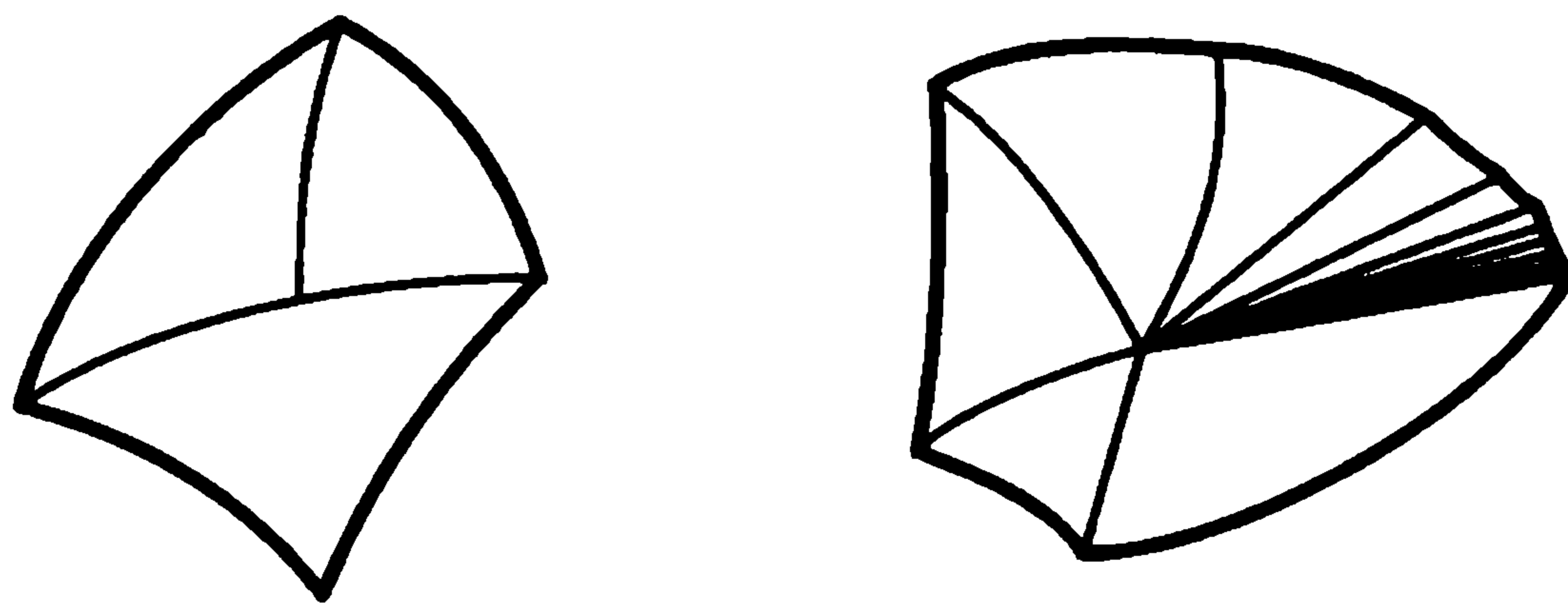


图 7.5

可以证明, 当  $D$  是曲面上的一个有界区域,  $\partial D$  分段光滑时,  $D \cup \partial D$  具有有限多个三角形的三角剖分.

## 2. Gauss-Bonnet 公式

利用三角剖分以及第五章 §5 的局部的 Gauss-Bonnet 公式, 我们有

**定理 2.1** ( Gauss-Bonnet 公式 ) 设  $D$  为定向曲面  $\Sigma$  上由分段光滑曲线围成的区域, 则

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi \chi(D),$$

其中  $\alpha_i$  是  $\partial D$  的顶点的外角,  $\chi(D)$  为  $D$  的 Euler 示性数.

**证明** 取  $T_1, T_2, \dots, T_f$  是  $D$  的三角剖分,  $\partial T_i$  的逆时针方向为正向, 在每个  $T_i$  上应用第五章的定理 5.1, 就有

$$\int_{T_i} K dA + \int_{\partial T_i} k_g ds + \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} = 2\pi, \quad (2.1)$$

其中  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}$  是  $T_i$  的外角. 记  $\beta_{i_\lambda} = \pi - \alpha_{i_\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) 为三角形的内角, 对 (2.1) 式求和, 有

$$\int_D K dA + \sum_{i=1}^f \int_{\partial T_i} k_g ds + \sum_{i=1}^f (3\pi - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - \beta_{i_3}) = 2\pi f. \quad (2.2)$$

由于在  $D$  内部的三角形  $T_i$  的边上,  $\int_{\partial T_i} k_g ds$  恰好出现两次, 且方向相反, 所以

$$\sum_{i=1}^f \int_{\partial T_i} k_g ds = \int_{\partial D} k_g ds. \quad (2.3)$$

我们需要计算 (2.2) 式右边的第三项, 为此记

$v_I$  = 剖分落在  $D$  内部的顶点数,

$v_O$  = 剖分落在  $D$  边界的顶点数,

$e_I$  = 剖分落在  $D$  内部的边数,

$e_O$  = 剖分落在  $D$  边界的边数.

由于在内部顶点处三角形的内角和为  $2\pi$ , 在边界顶点处三角形的内角和为  $\pi$  或  $\pi - \alpha_i$ . 所以

$$\sum_{i=1}^f (3\pi - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - \beta_{i_3}) = 3\pi f - 2\pi v_I - \pi v_O + \sum \alpha_i. \quad (2.4)$$

由于每条内边是两个三角形的边, 每条外边仅是一个三角形的边, 所以

$$3f = 2e_I + e_O. \quad (2.5)$$

将 (2.3)、(2.4) 以及 (2.5) 代入到 (2.2) 式, 并注意到  $e_O = v_O$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 & \int_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum \alpha_i \\
 &= 2\pi f + 2\pi v_I + \pi v_O - \pi(2e_I + e_O) \\
 &= 2\pi(f - e_I - e_O + v_I + v_O) \\
 &= 2\pi(\text{面的个数} - \text{边的个数} + \text{顶点个数}) \\
 &= 2\pi\chi(D).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

**推论 2.2** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  的紧致曲面, 则

$$\int_{\Sigma} K dA = 2\pi\chi(\Sigma).$$

这里需指出的是  $\chi(D)$  是  $D$  的拓扑不变量, 它与剖分是无关的. 由拓扑学可知, 紧致可定向曲面的 Euler 示性数  $\chi$  与亏格  $g$  有关系  $\chi = 2(1 - g)$ . 紧致可定向曲面可以按亏格  $g$  分类, 其中球面的亏格为 0, 图 7.6 是亏格为 1 和 2 的曲面.

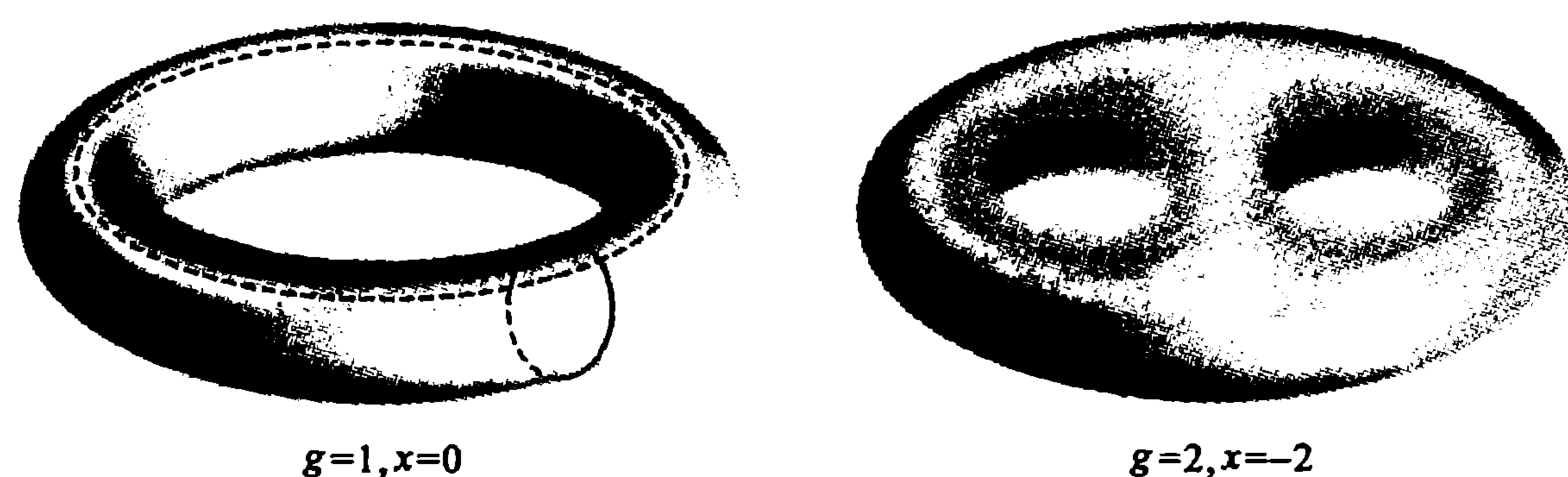


图 7.6

**推论 2.3** 若紧致曲面  $\Sigma$  的 Gauss 曲率  $K \geq 0$ , 则  $\int_{\Sigma} K dA = 4\pi$ .

### 3. Gauss-Bonnet 定理的应用

Gauss-Bonnet 公式有许多深刻的应用. 这一节和下一节, 我们将给出几个例子.

#### 1) 切向量场的指数定理

设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的紧致曲面,  $v$  是  $\Sigma$  上的切向量场, 当  $v$  处处非零时,  $e = \frac{v}{|v|}$  是  $\Sigma$  上的单位切向量场. 但一般说来紧致曲面上处处非零的切向量场

不一定存在. 因此, 如果我们说  $v$  是曲面  $\Sigma$  上的单位切向量场, 是允许  $v$  有一些奇点存在的.

设  $v$  是紧致曲面上的单位切向量场, 且仅有孤立奇点. 由  $\Sigma$  的紧致性可知  $v$  的奇点数有限. 设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是  $v$  的奇点, 下面我们来定义切向量场  $v$  在孤立奇点处的指数.

因为  $v$  在  $\Sigma - \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  上有定义, 且为单位向量场, 设  $u$  是与  $v$  正交的单位切向量场, 这样  $v$  和  $u$  构成  $\Sigma - \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  上的正交标架, 相应的联络 1 形式  $\omega_{uv}$  在  $\Sigma - \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  有定义.

设  $r_\varepsilon$  是以  $P_i$  为圆心、 $\varepsilon$  为半径的测地圆, 单位切向量场  $v$  在孤立奇点  $P_i$  的指数定义为

$$I(v, P_i) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_\varepsilon} \omega_{uv}. \quad (2.7)$$

首先, 我们需要说明所定义的  $I(v, P_i)$  为整数. 为此, 在  $P_i$  的邻域取等温坐标系  $(u, v)$ , 设  $I = e^{2\lambda}(du du + dv dv)$ , 并设  $v$  与坐标曲线  $v = \text{常数}$  的定向夹角为  $\theta$ . 则不难推出

$$\omega_{uv} = d\theta + \omega_{12}, \quad (2.8)$$

其中  $\omega_{12} = -\lambda_v du + \lambda_u dv$  是等温坐标对应的联络形式. 所以

$$\omega_{uv} = d\theta + \lambda_u dv - \lambda_v du. \quad (2.9)$$

因此

$$\begin{aligned} I(v, p_i) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{r_\varepsilon} d\theta + \int_{r_\varepsilon} \lambda_u dv - \lambda_v du \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r_\varepsilon} d\theta = \text{整数}. \end{aligned}$$

图 7.7 是一些切向量场孤立奇点的例子.

**定义 2.4** 具有孤立奇点的单位切向量场  $v$  在所有奇点的指数之和称为  $v$  的指数, 即

$$I(v) = \sum_{i=1}^n I(v, P_i). \quad (2.10)$$

利用 Gauss-Bonnet 定理, 我们可以得到著名的 Poincaré -Brouwer 定理.

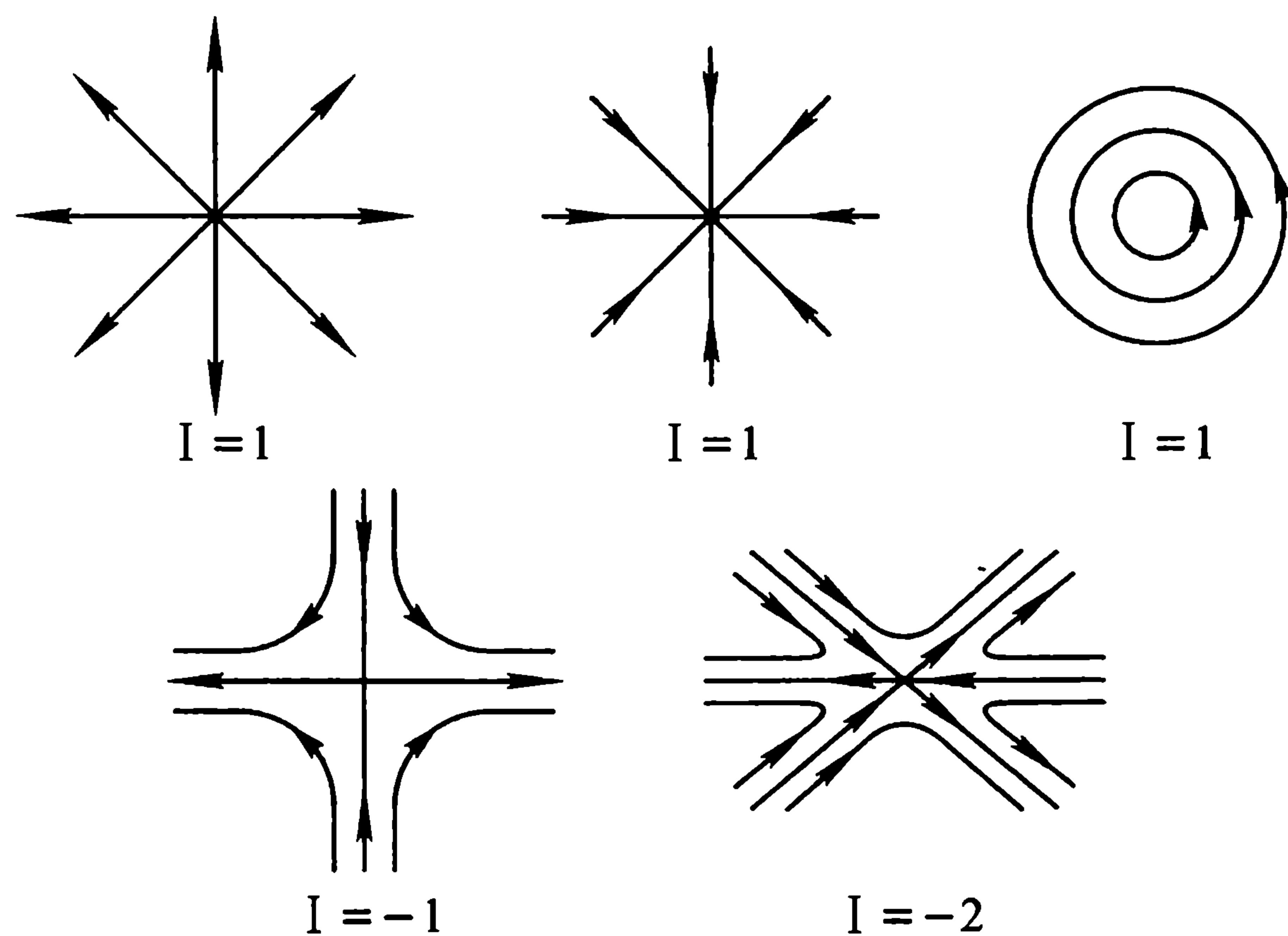


图 7.7

**定理 2.5** 设  $\Sigma$  为  $E^3$  中的紧致曲面,  $v$  为  $\Sigma$  上具有孤立奇点的单位切向量场, 则

$$I(v) = \chi(\Sigma).$$

**证明** 设  $P_1, P_2, \dots, P_n \in \Sigma$  为  $v$  的孤立奇点, 设  $r_i(\varepsilon)$  是以  $P_i$  为圆心的小测地圆,  $D_i$  是  $r_i(\varepsilon)$  所包围的小圆盘. 由 Gauss 方程及 Stokes 定理可知

$$\int_{\Sigma - \cup D_i} K dA = - \int_{\Sigma - \cup D_i} d\omega_{uv} = \sum_{i=1}^n \int_{r_i(\varepsilon)} \omega_{uv}.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 由 Gauss-Bonnet 定理可得

$$2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K dA = 2\pi \sum_{i=1}^n I(v, P_i).$$

证毕.

上述定理建立了曲面的拓扑不变量、微分拓扑不变量与几何量之间的联系, 它还有一些有意义的推论.

**推论 1** 设  $v$  和  $w$  是  $\Sigma$  上具有孤立奇点的单位切向量场, 则  $I(v) = I(w)$ .

**推论 2** 在紧致曲面中, 只有环面上存在处处非零的切向量场.

## 2) Jacobi 定理

设  $r(s)$  是  $E^3$  的一条光滑闭曲线,  $\kappa(s) > 0$ , 沿  $r(s)$  有 Frenet 标架  $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ , 它们分别是切向、主法向和副法向量.

$\mathbf{e}_2(s)$  的终点在单位球面上画出一条曲线, 称为曲线  $\mathbf{r}(s)$  的主法标线. 由 Frenet 公式

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\kappa\mathbf{e}_1 + \tau\mathbf{e}_3. \quad (2.11)$$

所以  $\left|\frac{d\mathbf{e}_2}{ds}\right|^2 = \kappa^2 + \tau^2 > 0$ , 这说明  $\mathbf{e}_2(s)$  是一条正则曲线.

**定理 2.6(Jacobi)** 设  $C$  为  $E^3$  的光滑闭曲线, 曲率  $\kappa(s) > 0$ . 如果  $C$  的主法标线  $\mathbf{e}_2(s)$  是一条简单闭曲线, 则它将单位球面分成面积相等的两部分.

**证明** 设  $\rho$  是主法标线的弧长参数, 则它在单位球面上的测地曲率为

$$k_g = \left( \mathbf{e}_2, \frac{d\mathbf{e}_2}{d\rho}, \frac{d^2\mathbf{e}_2}{d\rho^2} \right). \quad (2.12)$$

从 (2.11) 式可知

$$d\rho = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} ds,$$

因此由 Frenet 公式有

$$\begin{aligned} k_g &= \left( \kappa \frac{d\tau}{ds} - \tau \frac{d\kappa}{ds} \right) \left( \frac{ds}{d\rho} \right)^3 \\ &= \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2} \left( \kappa \frac{d\tau}{ds} - \tau \frac{d\kappa}{ds} \right) \frac{ds}{d\rho} \\ &= \frac{d}{ds} \left( \arctan \frac{\tau}{\kappa} \right) \frac{ds}{d\rho}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

设  $D$  为主法标线所界定的区域之一, 在  $D$  上应用 Gauss-Bonnet 公式, 注意到单位球面的 Gauss 曲率为 1, 有

$$\int_D dA + \int_{\partial D} k_g d\rho = 2\pi. \quad (2.14)$$

但由 (2.13) 式知

$$\int_{\partial D} k_g d\rho = \int_{\partial D} d\left(\arctan \frac{\tau}{\kappa}\right) = 0,$$

所以  $D$  的面积为  $2\pi$ , 这恰好是球面面积的一半.



## §7.3 紧致曲面的 Gauss 映射

当  $\Sigma$  是  $E^3$  的可定向曲面时,  $\Sigma$  的单位法向  $\boldsymbol{n}$  给出了  $\Sigma$  的 Gauss 映射

$$g: \Sigma \rightarrow S^2.$$

由第三章, 我们知道  $\boldsymbol{n}_u \wedge \boldsymbol{n}_v = K \boldsymbol{r}_u \wedge \boldsymbol{r}_v$ , 因此在 Gauss 映射下, 单位球面的面积元  $d\sigma$  与曲面  $\Sigma$  的面积元  $dA$  有关系

$$d\sigma = K dA. \quad (3.1)$$

以下我们所考虑的曲面都是可定向的.

## 1. 紧致曲面的绝对全曲率

当  $\Sigma$  是紧致曲面时, 积分

$$\int_{\Sigma} |K| dA \quad (3.2)$$

称为  $\Sigma$  的绝对全曲率.

我们给出绝对全曲率的下界估计.

**定理 3.1** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的紧致曲面, 它的亏格为  $g$ , 则绝对全曲率

$$\int_{\Sigma} |K| dA \geq 4\pi(1 + g).$$

**证明** 设  $\Sigma_+$  是  $\Sigma$  上 Gauss 曲率非负的点的集合, 首先我们断言

$$\int_{\Sigma_+} K dA \geq 4\pi. \quad (3.3)$$

利用上述断言和 Gauss-Bonnet 定理,

$$\int_{\Sigma} K dA = \int_{\Sigma_+} K dA + \int_{\Sigma - \Sigma_+} K dA = 2\pi\chi(\Sigma) = 4\pi(1 - g),$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |K| dA &= \left( \int_{\Sigma_+} - \int_{\Sigma - \Sigma_+} \right) K dA \\ &= 2 \int_{\Sigma_+} K dA - 4\pi(1 - g) \\ &\geq 8\pi - 4\pi(1 - g) = 4\pi(1 + g). \end{aligned} \quad (3.4)$$

因此我们只须证明断言 (3.3), 这将利用到 Gauss 映射.

设  $\mathbf{e} \in S^2$  是一个单位向量, 以  $\mathbf{e}$  为法向的所有平面中, 至少有两个与  $\Sigma$  相切. 可以证明在切点  $\Sigma$  的法向与  $\mathbf{e}$  平行. 为此我们考虑函数

$$f(P) = \langle \mathbf{r}(P), \mathbf{e} \rangle,$$

其中  $\mathbf{r}$  是  $\Sigma$  的位置向量.  $f$  在两点  $P_1$  和  $P_2$  分别达到极大, 极小值, 所以  $df(P_1) = df(P_2) = 0$ , 这说明  $\mathbf{n}(P_1), \mathbf{n}(P_2)$  与  $\mathbf{e}$  平行. 由  $f$  的二阶导数阵在  $P_1$  和  $P_2$  点分别是半负定、半正定的, 容易推出  $P_1, P_2 \in \Sigma_+$ .

设  $D = g(\Sigma_+) \subset S^2$  是  $\Sigma_+$  在 Gauss 映射下的像,

$$D_1 = \{\mathbf{e} \in D : g^{-1}(\mathbf{e}) \text{ 是 1 个点}\},$$

$$D_2 = \{\mathbf{e} \in D : g^{-1}(\mathbf{e}) \text{ 大于或等于 2 个点}\},$$

那么  $D = D_1 \cup D_2$ . 由上述论断可知,  $\mathbf{e} \in S^2 - D \Rightarrow -\mathbf{e} \in D_2$ . 因此  $-\{S^2 - D\} \subset D_2$ . 由于在 Gauss 映射下,  $S^2$  的面积元与  $\Sigma$  的面积元有关系 (3.1), 所以

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_+} K dA &= \int_{g^{-1}(D_1)} K dA + \int_{g^{-1}(D_2) \cap \Sigma_+} K dA \\ &\geq \int_{D_1} d\sigma + 2 \int_{D_2} d\sigma \\ &\geq \int_{D_1} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma + \int_{S^2 - D} d\sigma \\ &= \text{Area}(S^2) = 4\pi. \end{aligned}$$

证毕.

与绝对全曲率有关的一个问题是考虑积分

$$\int_{\Sigma} H^2 dA, \quad (3.5)$$

其中  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  为曲面  $\Sigma$  的平均曲率.

**定理 3.2** 设  $\Sigma$  为  $E^3$  中的紧致曲面, 则

$$\int_{\Sigma} H^2 dA \geq 4\pi,$$

且等号成立当且仅当  $\Sigma$  为球面.

**证明** 由  $\Sigma_+$  的定义, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} H^2 dA &\geq \int_{\Sigma_+} H^2 dA = \int_{\Sigma_+} \frac{1}{4} (k_1 + k_2)^2 dA \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma_+} (k_1 - k_2)^2 dA + \int_{\Sigma_+} k_1 k_2 dA \\ &\geq \int_{\Sigma_+} K dA \geq 4\pi, \end{aligned}$$

而且等号成立当且仅当在  $\Sigma_+$  上  $k_1 = k_2$ , 再由连续性容易知道在  $\Sigma$  上  $k_1 = k_2$  处处成立. 因此当等号成立时  $\Sigma$  是闭的全脐点曲面, 因而只能是球面.

当  $\Sigma$  是亏格为 1 的曲面时, 人们自然期望积分 (3.5) 有一个更好的下界. 为此, 我们先来计算一下  $E^3$  中旋转环面的  $\int_{T^2} H^2 dA$ .

设环面  $T^2$  的参数表示为

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((a + r \cos \varphi) \cos \theta, (a + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi), \quad (3.6)$$

其中  $0 < r < a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , 那么有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\varphi} &= r(-\sin \varphi \cos \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \\ \mathbf{r}_{\theta} &= (-(a + r \cos \varphi) \sin \theta, (a + r \cos \varphi) \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

因此我们可以选取正交标架为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-\sin \varphi \cos \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \\ \mathbf{e}_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (-\cos \varphi \cos \theta, -\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

相应的各微分形式为

$$\begin{aligned}\omega_1 &= r d\varphi, & \omega_2 &= (a + r \cos \varphi) d\theta, \\ \omega_{13} &= -\langle d\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle = d\varphi = \frac{1}{r} \omega_1, \\ \omega_{23} &= -\langle d\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle = \cos \varphi d\theta = \frac{\cos \varphi}{a + r \cos \varphi} \omega_2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

从上式可得,  $T^2$  的平均曲率为

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos \varphi}{a \cos \varphi} \right),\tag{3.9}$$

而  $T^2$  的面积元为

$$dA = \omega_1 \wedge \omega_2 = r(a + r \cos \varphi) d\varphi \wedge d\theta,$$

经过直接计算, 可得

$$\begin{aligned}\int_{T^2} H^2 dA &= \frac{1}{4r} \int_{T^2} \frac{(a + 2r \cos \varphi)^2}{(a + r \cos \varphi)} d\varphi d\theta \\ &= \pi^2 \frac{a^2}{r \sqrt{a^2 - r^2}}.\end{aligned}$$

为给出上式右端下界的估计, 设  $\lambda = \frac{a^2}{r^2} > 1$ , 则

$$\frac{a^2}{r \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda - 1}} = \sqrt{\lambda - 1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}} \geq 2,$$

而且当且仅当  $\sqrt{\lambda - 1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}} = 1$ , 即  $a = \sqrt{2} r$  时, 等号成立. 因此有

**性质 3.3** 设  $T^2$  为  $E^3$  中的旋转环面, 则

$$\int_{T^2} H^2 dA \geq 2\pi^2,$$

等号成立当且仅当  $a = \sqrt{2}r$ .

对于一般的环面 (即  $E^3$  中亏格  $g = 1$  的紧致曲面), 有如下的 Willmore 猜想:

**Willmore 猜想** 设  $\Sigma$  为  $E^3$  中的任意环面, 则  $\int_{\Sigma} H^2 dA \geq 2\pi^2$ .

这是微分几何中一个著名的未解问题.

## 2. 空间曲线的全曲率

作为 Gauss 映射的另一个应用,我们将证明关于空间曲线全曲率的 Fenchel 定理.

**定理 3.4(Fenchel)** 设  $C$  是  $E^3$  中的闭曲线,  $\kappa$  是它的曲率函数, 则  $C$  的全曲率满足

$$\int_C \kappa ds \geq 2\pi.$$

**证明** 设曲线  $C$  的弧长参数表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ , 它的 Frenet 标架为  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ . 以  $C$  为中心构造管状曲面  $\Sigma$  如下:

$$\mathbf{r}(s, \theta) = \mathbf{r}(s) + \lambda(\mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (3.10)$$

其中  $\lambda$  是充分小的实数. 由 Frenet 公式, 不难得到曲面  $\Sigma$  的第一基本形式为

$$I = (1 - \lambda\kappa \cos \theta)^2 ds^2 + \lambda^2(\tau ds + d\theta)^2, \quad (3.11)$$

其中  $\kappa$ 、 $\tau$  分别是曲线  $C$  的曲率和挠率.

取  $\omega_1 = (1 - \lambda\kappa \cos \theta)ds$ ,  $\omega_2 = \lambda(\tau ds + d\theta)$ , 则  $\Sigma$  的第一基本形式为  $I = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$ , 联络 1 形式为

$$\omega_{12} = -\kappa \sin \theta ds. \quad (3.12)$$

利用 Gauss 方程  $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ , 可以求出管状曲面  $\Sigma$  的 Gauss 曲率为

$$K = -\frac{\kappa \cos \theta}{\lambda(1 - \lambda\kappa \cos \theta)}. \quad (3.13)$$

从上一小节我们知道,

$$\int_{\Sigma_+} K dA = \int_{\Sigma_+} K\omega_1 \wedge \omega_2 \geq 4\pi. \quad (3.14)$$

但此时  $\Sigma_+ = \{(s, \theta) : \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_+} K\omega_1 \wedge \omega_2 &= - \int_{\Sigma_+} \kappa \cos \theta ds \wedge d\theta \\ &= \int_C \kappa ds \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos \theta) d\theta \\ &= 2 \int_C \kappa ds \geq 4\pi. \end{aligned}$$

这就证明了定理.

关于空间曲线的全曲率定理有下述推广:

**定理 3.5** 设  $C$  为  $E^3$  中的扭结曲线, 则  $C$  的全曲率  $\int_C \kappa ds \geq 4\pi$ .

**证明** 类似于上一个定理的证明, 我们可以构造一个管状曲面  $\Sigma$ . 因为  $C$  是扭结曲线, 所以  $\Sigma$  亦为扭结曲面, 因此 Gauss 映射  $g: \Sigma_+ \rightarrow S^2$  至少覆盖两次, 所以有  $\int_{\Sigma_+} K dA \geq 8\pi$ , 再重复上述定理的证明即可.

## §7.4 凸 曲 面

### 1. 凸曲面

**定义 4.1**  $E^3$  中的曲面  $\Sigma$  称为凸曲面, 如果  $\Sigma$  位于每点切平面的同一侧.

我们首先证明 Hadamard(1897) 的一个定理:

**定理 4.2**(Hadamard) 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的紧致曲面, 若  $\Sigma$  的 Gauss 曲率处处为正, 则它是凸曲面.

定理的证明基于如下事实:

**引理 4.3** 设  $\Sigma$  如定理 4.2 所设, 则 Gauss 映射是 1:1 对应.

**证明** 对任意单位向量  $e \in S^2$ , 定义函数

$$f(P) = \langle n(P), e \rangle, \quad P \in \Sigma.$$

设  $f$  在  $P_0$  点达到最大值. 在  $P_0$  附近取  $\Sigma$  的正交坐标系  $r(u, v)$ , 因此有

$$\begin{cases} f_u(P_0) = \left\langle -\frac{L}{E}r_u - \frac{M}{G}r_v, e \right\rangle|_{P_0} = 0, \\ f_v(P_0) = \left\langle -\frac{M}{E}r_u - \frac{N}{G}r_v, e \right\rangle|_{P_0} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

由 Gauss 曲率  $K(P_0) > 0$  知  $(LN - M^2)(P_0) > 0$ , 所以上式推出

$$\langle r_u(P_0), e \rangle = \langle r_v(P_0), e \rangle = 0.$$

因此  $n(P_0) = \pm e$ .

由  $f(P_0)$  的极大性, 继续有

$$\begin{cases} f_{uu}(P_0) = \left\langle -\frac{L}{E}\mathbf{r}_{uu} - \frac{M}{G}\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{e} \right\rangle|_{P_0} \leq 0, \\ f_{vv}(P_0) = \left\langle -\frac{M}{E}\mathbf{r}_{uv} - \frac{N}{G}\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{e} \right\rangle|_{P_0} \leq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

如果  $\mathbf{n}(P_0) = -\mathbf{e}$ , 则  $\langle \mathbf{r}_{uu}(P_0), \mathbf{e} \rangle = -L$ ,  $\langle \mathbf{r}_{uv}(P_0), \mathbf{e} \rangle = -M$ , 代入 (4.2) 式就导致矛盾. 所以  $\mathbf{n}(P_0) = \mathbf{e}$ . 这说明 Gauss 映射  $\mathbf{n}$  是满的.

以下证明 Gauss 映射是单的. 若不然, 存在两个点  $P, Q \in \Sigma$ ,  $\mathbf{n}(P) = \mathbf{n}(Q)$ , 则可以取  $P$  的一个邻域  $U$ , 使得 Gauss 映射在  $\Sigma - U$  上仍然是满的. 这样由 (3.1) 式

$$\int_{\Sigma-U} K dA \geq \int_{S^2} d\sigma = 4\pi.$$

但  $\int_U K dA > 0$ , 由推论 2.2

$$4\pi = \int_{\Sigma} K dA = \int_{\Sigma-U} K dA + \int_U K dA > 4\pi,$$

矛盾. 这说明 Gauss 映射  $\mathbf{g}$  是一一对应.

**定理 4.2 的证明** 利用反证法. 如果不然, 存在一点  $P \in \Sigma$ , 过  $P$  点的切平面  $\Pi_P$  将  $\Sigma$  分割成两部分. 设  $Q_1, Q_2$  是  $\Sigma$  上相对平面  $\Pi_P$  的最高点和最低点, 则  $\Sigma$  在  $P$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$  的法向平行, 因此至少两点的法向相同, 这与 Gauss 映射的单一性矛盾. 证毕.

**注** (1) Gauss 曲率大于零的紧致曲面又称作卵形面.

(2) 如果仅假设 Gauss 曲率  $K \geq 0$ , Hadamard 定理仍然成立, 但证明要困难得多, 读者可以参看文献:

Chern S S, Lashof R K. On the total curvature of immersed manifolds I. American Journal of Mathematics, 1957(79):302-318; II. Michigan Math Journal, 1958(59):5-12

## 2. 积分公式

设  $\Sigma$  是  $E^3$  的紧致曲面,  $\mathbf{r}(P)$  是它的位置向量, 函数

$$\varphi(P) = -\langle \mathbf{r}(P), \mathbf{n}(P) \rangle, \quad P \in \Sigma \quad (4.3)$$



称为曲面的支撑函数，它是坐标原点  $O$  到点  $P$  的切平面的有向距离。对紧致凸曲面而言，如果将坐标原点取在凸曲面所包围的区域内，那么有  $\varphi < 0$ （或  $\varphi > 0$ ）。

首先考虑  $\Sigma$  上的一阶微分形式  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}, d\mathbf{n})$ ，这个微分式是整体定义的，与标架选取无关。

取  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是在  $\Sigma$  的局部坐标系  $\Sigma_\alpha$  上的正交标架， $\mathbf{e}_3$  是法向； $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$  是相应的诸微分形式（详见第四章 §6），则

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}) = (d\mathbf{r}, \mathbf{e}_3, d\mathbf{e}_3) + (\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3, d\mathbf{e}_3).$$

因为

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r}, \mathbf{e}_3, d\mathbf{e}_3) &= (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2) \\ &= -\omega_1 \wedge \omega_{32} + \omega_2 \wedge \omega_{31} = 2H\omega_1 \wedge \omega_2, \\ (\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3, d\mathbf{e}_3) &= (\mathbf{r}, \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2, \omega_{31} \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \mathbf{e}_2) \\ &= 2\omega_{31} \wedge \omega_{32}(\mathbf{r}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &= -2\varphi\omega_{31} \wedge \omega_{32} = -2\varphi K\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

所以

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}) = 2(H - K\varphi)dA.$$

两边积分就有

$$\int_{\Sigma} H dA = \int_{\Sigma} K\varphi dA. \quad (4.4)$$

用类似的方法考察一阶微分形式  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}, d\mathbf{r})$ ，同样可以得到积分公式

$$\int_{\Sigma} dA = \int_{\Sigma} H\varphi dA. \quad (4.5)$$

(4.4) 和 (4.5) 通称 Minkowski 公式。

类似地，设  $\mathbf{a}$  是一个常向量，考虑一阶微分形式  $(\mathbf{r}, d\mathbf{r}, \mathbf{a})$ 、 $(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{a})$  和  $(\mathbf{n}, d\mathbf{n}, \mathbf{a})$ ，可以分别得到积分公式

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle dA &= 0, \\ \int_{\Sigma} H \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle dA &= 0, \\ \int_{\Sigma} K \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle dA &= 0.\end{aligned}$$

由于  $\mathbf{a}$  的任意性, 上述三式亦可以写成

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} dA = 0, \quad (4.6)$$

$$\int_{\Sigma} H \mathbf{n} dA = 0, \quad (4.7)$$

$$\int_{\Sigma} K \mathbf{n} dA = 0. \quad (4.8)$$

### 3. 球面的特性

作为积分公式的第一个应用, 我们证明两个有关球面特性的定理.

**定理 4.4** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  的紧致凸曲面, 若  $\Sigma$  的平均曲率  $H = \text{常数}$ , 则  $\Sigma$  是一个球面.

**证明** 由 (4.4) 和 (4.5) 两式可知

$$\int_{\Sigma} K \varphi dA = \int_{\Sigma} H dA = H \int_{\Sigma} dA = \int_{\Sigma} H^2 \varphi dA,$$

所以

$$\int_{\Sigma} (H^2 - K) \varphi dA = 0. \quad (4.9)$$

但由于

$$H^2 - K = \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1 k_2 = \frac{1}{4} (k_1 - k_2)^2 \geq 0,$$

以及  $\Sigma$  是凸曲面, 可以取  $\varphi > 0$ . 因此 (4.9) 式意味着  $H^2 = K$ , 即  $\Sigma$  是全脐点曲面, 所以  $\Sigma$  是球面的一部分. 但由于  $\Sigma$  是紧致的, 它必须是整个球面.

**定理 4.5** 设  $\Sigma$  是紧致凸曲面,  $\frac{H}{K} = \text{常数}$ , 则  $\Sigma$  是球面.

**证明** 由定理条件及公式 (4.4), (4.5) 知,  $\Sigma$  的面积

$$\int_{\Sigma} dA = \int_{\Sigma} H \varphi dA = \int_{\Sigma} \frac{H}{K} K \varphi dA = \int_{\Sigma} \frac{H^2}{K} dA,$$

因此

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{H^2 - K}{K} \right) dA = 0.$$

根据与定理 4.4 证明的同样理由, 可知  $\Sigma$  是全脐点曲面. 证毕.

#### 4. 凸曲面的刚性

在这一小段我们要给出积分公式更深刻的应用, 即所谓的凸曲面的刚性, 这是首先由 Cohn-Vossen 得到的, 下面的证明基本上属于 Herglotz.

**定理 4.6** 设  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  为  $E^3$  的紧致凸曲面, 他们的 Gauss 曲率均大于零, 如果  $f: \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$  是一个等距对应, 则  $f$  必为刚体运动.

**证明** 根据曲面论基本定理, 我们只需证明: 在对应  $f$  下,  $\Sigma$ 、 $\bar{\Sigma}$  的第一、第二基本形式对应相等.

首先, 由于  $f$  是等距对应, 所以在  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  上可以选取标架, 使得

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1, \quad \omega_2 = \bar{\omega}_2. \quad (4.10)$$

严格地说, 如果在  $\Sigma$  上取好切向量  $e_1$  和  $e_2$ , 则在  $\bar{\Sigma}$  上取  $\bar{e}_1 = f_* e_1$ ,  $\bar{e}_2 = f_* e_2$  就能保证 (4.10) 成立, 这里  $f_*$  是  $f$  的切映射.

设  $\{\omega_{13}, \omega_{23}\}$  和  $\{\bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}\}$  分别是曲面  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  的第二基本形式. 令一阶微分式

$$\Phi = \langle r, e_1 \rangle \bar{\omega}_{23} - \langle r, e_2 \rangle \bar{\omega}_{13}. \quad (4.11)$$

不难看出  $\Phi$  是整体定义的, 即  $\Phi$  的定义与局部标架  $e_1, e_2$  的选取无关. 事实上, 如果在  $\Sigma$  上取另一组标架  $e'_1, e'_2$ , 且

$$e_1 = e'_1 \cos \theta + e'_2 \sin \theta, \quad (4.12)$$

$$e_2 = -e'_1 \sin \theta + e'_2 \cos \theta,$$

则在  $\bar{\Sigma}$  上相应地也有

$$\bar{e}_1 = \bar{e}'_1 \cos \theta + \bar{e}'_2 \sin \theta, \quad (4.13)$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}'_1 \sin \theta + \bar{e}'_2 \cos \theta,$$

其中  $\bar{e}'_\alpha = f_* e'_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). 将 (4.12) 与 (4.13) 两式代入到 (4.11) 式, 就可以看出  $\Phi$  是整体定义的.

对  $\Phi$  取外微分, 并利用曲面的结构方程式可得

$$d\Phi = \omega_1 \wedge \bar{\omega}_{23} - \omega_2 \wedge \bar{\omega}_{13} + \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle (\omega_{13} \wedge \bar{\omega}_{23} - \omega_{23} \wedge \bar{\omega}_{13}), \quad (4.14)$$

这里利用了  $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12}$ . 再将

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, & \omega_{23} &= h_{12}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \\ \bar{\omega}_{13} &= \bar{h}_{11}\omega_1 + \bar{h}_{12}\omega_2, & \bar{\omega}_{23} &= \bar{h}_{12}\omega_1 + \bar{h}_{22}\omega_2, \end{aligned}$$

代入到 (4.14) 式, 我们就得到

$$d\Phi = (\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22})\omega_1 \wedge \omega_2 - \varphi(h_{11}\bar{h}_{22} + \bar{h}_{11}h_{22} - 2h_{12}\bar{h}_{12})\omega_1 \wedge \omega_2, \quad (4.15)$$

这里  $\varphi = -\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle$  是曲面  $\Sigma$  的支撑函数.

对 (4.15) 式取积分, 并利用 Stokes 定理, 我们就得到混合型积分公式

$$\int \varphi(h_{11}\bar{h}_{22} + \bar{h}_{11}h_{22} - 2h_{12}\bar{h}_{12})dA = 2 \int \bar{H}dA, \quad (4.16)$$

注意到

$$\begin{aligned} \det(h_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta}) &= \det(h_{\alpha\beta}) + \det(\bar{h}_{\alpha\beta}) \\ &\quad - (\bar{h}_{11}h_{22} + h_{11}\bar{h}_{22} - 2h_{12}\bar{h}_{12}) \\ &= K + \bar{K} - (\bar{h}_{11}h_{22} + h_{11}\bar{h}_{22} - 2h_{12}\bar{h}_{12}) \\ &= 2K - (\bar{h}_{11}h_{22} + h_{11}\bar{h}_{22} - 2h_{12}\bar{h}_{12}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

将 (4.17) 式两边乘以  $\varphi$  并积分之, 利用积分公式 (4.4) 和 (4.16) 就得到

$$\int \varphi \det(h_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta})dA = 2 \int (H - \bar{H})dA. \quad (4.18)$$

为完成定理的证明, 我们需要如下事实: 因为  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  均为凸曲面, 且 Gauss 曲率相等, 所以二次曲线

$$h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 = 1$$

和二次曲线

$$\bar{h}_{11}x^2 + 2\bar{h}_{12}xy + \bar{h}_{22}y^2 = 1$$

为面积相等的椭圆，因此它们至少有四个交点，即方程

$$(h_{11} - \bar{h}_{11})x^2 + 2(h_{12} - \bar{h}_{12})xy + (h_{22} - \bar{h}_{22})y^2 = 0$$

有非零实数解。这说明上式的判别式大于或等于零，即行列式

$$\det(h_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta}) \leq 0, \quad (4.19)$$

且等号成立当且仅当  $h_{11} = \bar{h}_{11}$ ,  $h_{12} = \bar{h}_{12}$ ,  $h_{22} = \bar{h}_{22}$ .

将上述事实代入到 (4.18) 式，我们得到

$$\int (H - \bar{H})dA \leq 0.$$

但由于上述公式的对称性知，

$$\int (\bar{H} - H)dA \leq 0.$$

所以必须有

$$\int \varphi \det(h_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta})dA = 2 \int (H - \bar{H})dA = 0, \quad (4.20)$$

这就证明了  $h_{11} = \bar{h}_{11}$ ,  $h_{12} = \bar{h}_{12}$ ,  $h_{22} = \bar{h}_{22}$ . 因此等距对应  $f$  必为刚体运动。证毕。

## 5. 凸曲面的 Minkowski 问题

类似于凸曲线的 Minkowski 问题，关于凸曲面也有如下的

**Minkowski 问题：**在单位球面  $S^2$  上给定正值函数  $K > 0$ ，是否存在  $E^3$  的凸曲面  $\Sigma$ ，使其 Gauss 曲率恰好为  $K \circ g$ ，其中  $g$  为  $\Sigma$  的 Gauss 映射？

我们首先讨论函数  $K$  必须满足的可积性条件。

由积分公式 (4.6) 可知

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n}dA = \int_{S^2} \frac{\mathbf{n}}{K}d\sigma = 0, \quad (4.21)$$

这里  $d\sigma$  是单位球面  $S^2$  的面积元. 设  $\boldsymbol{n} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 则 (4.21) 式为

$$\int_{S^2} \frac{\xi_i}{K} d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.22)$$

有关凸曲面的 Minkowski 问题已经得到解决, 准确地说, 如果函数  $K$  满足条件 (4.22), 则在  $E^3$  中存在惟一的凸曲面  $\Sigma$  (在相差一个刚体运动的意义下), 其 Gauss 曲率为  $K \circ g$ .

首先我们叙述并证明惟一性定理.

**定理 4.7** 若凸紧致曲面  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  的 Gauss 曲率均为  $K \circ g$ , 则  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  相差一个运动.

**证明** 在凸紧致曲面  $\Sigma$  上选取标架  $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ , 相应的一阶微分形式为  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ . 因为 Gauss 映射是一一对应, 所以  $\Sigma$  上的微分形式均可以看成  $S^2$  上的微分形式, 为简单起见, 我们仍采用同一记号.

类似地, 凸曲面  $\bar{\Sigma}$  上的微分形式  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_{12}, \bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}$  也可以通过 Gauss 映射对应到  $S^2$  上.

设  $\boldsymbol{r} \in \Sigma$ ,  $\bar{\boldsymbol{r}} \in \bar{\Sigma}$ , 在 Gauss 映射下对应于  $S^2$  上同一个点, 由 Gauss 映射的定义可知, 曲面  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  在  $\boldsymbol{r}$  点和  $\bar{\boldsymbol{r}}$  点的法向量相同, 即  $\boldsymbol{e}_3 = \bar{\boldsymbol{e}}_3$ . 我们可以选取  $\boldsymbol{e}_1 = \bar{\boldsymbol{e}}_1, \boldsymbol{e}_2 = \bar{\boldsymbol{e}}_2$ . 在如此选择的标架下, 显然有  $\omega_{13} = \bar{\omega}_{13}, \omega_{23} = \bar{\omega}_{23}$ . 因此我们的目的是要证明: 同时也有  $\omega_1 = \bar{\omega}_1, \omega_2 = \bar{\omega}_2$ .

由曲面的结构方程式,

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = K \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (4.23)$$

由 Gauss 曲率  $K > 0$  知道,  $\omega_{13}, \omega_{23}$  为  $S^2$  上线性无关的一阶微分形式. 所以, 我们可以写

$$\omega_1 = a\omega_{13} + b\omega_{23}, \quad (4.24)$$

$$\omega_2 = b\omega_{13} + c\omega_{23}.$$

同样地, 我们也有

$$\bar{\omega}_1 = \bar{a}\omega_{13} + \bar{b}\omega_{23}, \quad (4.25)$$

$$\bar{\omega}_2 = \bar{b}\omega_{13} + \bar{c}\omega_{23}.$$

由定理假设知道

$$ac - b^2 = \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 = \frac{1}{K}. \quad (4.26)$$

如果我们能证明

$$a = \bar{a}, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}, \quad (4.27)$$

则可推出  $\omega_1 = \bar{\omega}_1$ ,  $\omega_2 = \bar{\omega}_2$ , 因此由曲面论的基本定理即得  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  相差一个运动.

下面我们将用积分公式来证明 (4.27) 式. 考虑一阶微分形式  $(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}, d\bar{\mathbf{r}})$ , 求其外微分, 并利用结构方程可得

$$\begin{aligned} d(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}, d\bar{\mathbf{r}}) &= (d\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}, d\bar{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r}, d\bar{\mathbf{r}}, d\bar{\mathbf{r}}) \\ &= (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{\omega}_2 \mathbf{e}_2) \\ &\quad + (\mathbf{r}, \bar{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{\omega}_2 \mathbf{e}_2, \bar{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{\omega}_2 \mathbf{e}_2) \\ &= \bar{\varphi}(\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 - \omega_2 \wedge \bar{\omega}_1) - 2\varphi \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= \left\{ \frac{2}{K}(\bar{\varphi} - \varphi) - \bar{\varphi} \begin{vmatrix} a - \bar{a} & b - \bar{b} \\ b - \bar{b} & c - \bar{c} \end{vmatrix} \right\} \omega_{13} \wedge \omega_{23}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

上式中  $\varphi = -(\mathbf{r}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  和  $\bar{\varphi} = -(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  分别为  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  的支撑函数.

将 (4.28) 式取积分并利用 Stokes 定理, 可得

$$\int_{S^2} \bar{\varphi} \begin{vmatrix} a - \bar{a} & b - \bar{b} \\ b - \bar{b} & c - \bar{c} \end{vmatrix} \omega_{13} \wedge \omega_{23} = \int_{S^2} \frac{2}{K}(\bar{\varphi} - \varphi) \omega_{13} \wedge \omega_{23}. \quad (4.29)$$

与前一个定理的证明完全相似, 可得

$$a = \bar{a}, \quad b = \bar{b}, \quad c = \bar{c}.$$

这就完成了定理的证明.

关于 Minkowski 问题的存在性, 涉及到困难的偏微分方程问题, 这已超出了本书的范围, 下面我们只能给出一个大致的描述.



设单位球面  $S^2$  的位置向量为  $\xi$ ，选取  $S^2$  的标架场为  $\{\xi: e_1, e_2, e_3\}$ ，其中  $e_3 = \xi$  为法向量；并设  $S^2$  的诸微分形式为  $\theta_1, \theta_2, \theta_{12}, \theta_{13}$  和  $\theta_{23}$ 。由于  $e_3 = \xi$ ，有

$$\theta_{31} = \langle de_3, e_1 \rangle = \theta_1, \quad (4.30)$$

$$\theta_{32} = \langle de_3, e_2 \rangle = \theta_2.$$

现在我们来说明，对于凸曲面  $\Sigma$ ，如果知道了支撑函数  $\varphi = \langle r, e_3 \rangle$ ，这可以求出曲面  $\Sigma$  本身。

事实上，通过 Gauss 映射， $r$  可以看作  $S^2$  上的函数， $\{r; e_1, e_2, e_3 = \xi\}$  是曲面的标架。设

$$d\varphi = \varphi_1 \theta_1 + \varphi_2 \theta_2, \quad (4.31)$$

但

$$\begin{aligned} d\varphi &= d\langle r, e_3 \rangle = \langle r, de_3 \rangle \\ &= \langle r, d\xi \rangle = \langle r, e_1 \rangle \theta_1 + \langle r, e_2 \rangle \theta_2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

因此，

$$\varphi_1 = \langle r, e_1 \rangle, \quad \varphi_2 = \langle r, e_2 \rangle. \quad (4.33)$$

由此不难看出，

$$\begin{aligned} r &= \langle r, e_1 \rangle e_1 + \langle r, e_2 \rangle e_2 + \langle r, e_3 \rangle e_3 \\ &= \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi e_3. \end{aligned} \quad (4.34)$$

设曲面  $\Sigma$  的诸微分形式为  $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ ，通过 Gauss 映射，由 (4.30) 式可知

$$\omega_{31} = \theta_1, \quad \omega_{32} = \theta_2, \quad (4.35)$$

因此，利用 Gauss 方程可以推出

$$K\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_{31} \wedge \omega_{32} = \theta_1 \wedge \theta_2. \quad (4.36)$$

但由 (4.34) 式知

$$\omega_1 = \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_1 \rangle = d\varphi_1 + \varphi_2\theta_{21} + \varphi\theta_1, \quad (4.37)$$

$$\omega_2 = \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_2 \rangle = d\varphi_2 + \varphi_2\theta_{12} + \varphi\theta_2.$$

由  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  协变微分的定义,

$$d\varphi_1 + \varphi_2\theta_{21} = \varphi_{11}\theta_1 + \varphi_{12}\theta_2,$$

$$d\varphi_2 + \varphi_2\theta_{12} = \varphi_{21}\theta_1 + \varphi_{22}\theta_2,$$

代入到 (4.37) 式, 再从 (4.36) 式可以得到关于支撑函数  $\varphi$  满足的微分方程式

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} + \varphi & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} + \varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{K}. \quad (4.38)$$

这是一个 Monge-Ampere 型的方程, 可以证明, 当球面  $S^2$  上的正函数  $K$  满足条件

$$\int_{S^2} \frac{\xi}{K} dA = 0 \quad (4.39)$$

时, 方程 (4.38) 有解. 因此, Minkowski 问题有解, 且解惟一.

## §7.5 曲面的完备性

设  $\Sigma = \cup \Sigma_\alpha$  是  $E^3$  的曲面, 在每个曲面片  $\Sigma_\alpha$  上, 存在测地线. 由于曲面  $\Sigma$  有整体定义的第一基本形式, 当  $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \neq \emptyset$  时,  $\Sigma_\alpha$  和  $\Sigma_\beta$  所定义的测地线在公共部分一致, 所以我们可以定义  $\Sigma$  的测地线.

**定义 5.1** 曲面  $\Sigma$  上的弧长参数曲线  $\mathbf{r}(s)$  称作是测地线, 如果  $\mathbf{r}(s)$  落在每个  $\Sigma_\alpha$  的部分都是测地线.

设  $\mathbf{v}$  是点  $P$  的一个单位切向量,  $\gamma(\mathbf{v}, s)$  ( $s \geq 0$ ) 是从  $P$  出发、沿方向  $\mathbf{v}$  的测地射线,  $s$  是弧长参数, 记

$$B_P(r) = \{\gamma(\mathbf{v}, s) : \mathbf{v} \in T_P\Sigma, |\mathbf{v}| = 1, s < r\}, \quad (5.1)$$

$B_P(r)$  称作以  $P$  为圆心、 $r$  为半径的测地球，它是切平面  $T_P\Sigma$  上半径为  $r$  的开圆盘在指数映射  $\exp_P$  下的像。当  $r < \varepsilon$  时，以  $P$  为中心的测地极坐标系可以定义在  $B_P(r)$  上，但  $\varepsilon$  与  $P$  有关。利用常微分方程的解对初值的连续性可以证明：

**命题 5.2** 设  $D$  是曲面  $\Sigma$  的一个紧致区域，则存在  $\varepsilon > 0$  使得对  $D$  中任意一点  $P$ ，测地极坐标系在  $B_P(\varepsilon)$  有定义。

**定义 5.3** 曲面  $\Sigma$  称作是测地完备的，如果它的任何测地线都可以无限延长，即： $\Sigma$  的任何弧长参数测地线  $r(s)$  对  $s \in (-\infty, +\infty)$  有定义。

按照定义，平面显然是测地完备的。去掉顶点的锥面是正则曲面但不是完备的，这是因为锥面上过顶点的直线是测地线，但不能无限延长。另一个不完备的例子是球面  $S^2$  去掉一个点  $P$ ，这样大圆无法过  $P$  点无限延长。

与测地完备相关的概念是曲面关于距离完备，我们简要介绍如下。

设  $P, Q$  是曲面  $\Sigma$  上两个点，定义这两点的距离为

$$d(P, Q) = \inf_{\gamma} l(\gamma), \quad (5.2)$$

其中  $\gamma$  是曲面上联结  $P, Q$  两点的分段光滑曲线， $l(\gamma)$  是  $\gamma$  的长度，下确界取遍所有这样的曲线  $\gamma$ 。

距离  $d$  定义的合理性依赖于下述引理，它的证明可以由曲面的连通性得到。

**引理 5.4** 曲面  $\Sigma$  上任意两点都可以由曲面上的分段光滑曲线相联结。

**命题 5.5**  $d$  是曲面的一个距离，即  $d$  满足

- (1)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ;
- (2)  $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ ;
- (3)  $d(P, Q) \geq 0$  且  $d(P, Q) = 0$  当且仅当  $P = Q$ 。

**证明** 根据定义，(1) 和 (2) 是容易验证的。下面我们证明 (3)。

只需证明：当  $P \neq Q$  时，存在  $\varepsilon > 0$  使得  $d(P, Q) \geq \varepsilon$ 。取以  $P$  点为原点的测地极坐标系  $(\rho, \theta)$ ，记  $B_P(\varepsilon) = \{(\rho, \theta) : \rho < \varepsilon\}$  是以  $P$  为圆心、 $\varepsilon$  为半径的测地球。当  $\varepsilon$  充分小时  $Q$  不属于  $B_P(\varepsilon)$ 。

设  $\gamma$  是联结  $P, Q$  的任意分段光滑曲线， $\gamma_\varepsilon = \gamma \cap B_P(\varepsilon)$ ，则由第五章的定理 4.4， $l(\gamma_\varepsilon) \geq \varepsilon$ ，因此  $l(\gamma) \geq l(\gamma_\varepsilon) \geq \varepsilon$ ，这推出  $d(P, Q) \geq \varepsilon$ 。

**定义 5.6** 曲面  $\Sigma$  称为是距离完备的, 若  $\{\Sigma, d\}$  作为距离空间是完备的, 即关于距离  $d$  的 Cauchy 列是收敛的.

事实上曲面的测地完备性和距离完备性是等价的, 在证明这个结论之前, 我们先来讨论曲面的距离  $d$  和测地完备性的一些性质.

如果曲线  $\gamma$  是联结曲面上两点的最短线, 或者说  $\gamma$  达到它两个端点的距离, 则  $\gamma$  是测地线. 第五章的定理 4.4 告诉我们, 在以一点  $P$  为中心充分小的测地球内, 任意一点都可以与  $P$  用最短线相联结. 另一方面, 曲面的距离  $d$  定义了曲面的一个拓扑, 以点  $P$  为中心、 $r$  为半径的距离球  $B_d(P, r) = \{Q \in \Sigma : d(Q, P) < r\} (\forall P, r)$  是这个拓扑的拓扑基. 根据第五章的定理 4.4, 当  $r$  充分小时, 距离球  $B_d(P; r)$  和以  $P$  为圆心、 $r$  为半径的测地球  $B_P(r)$  相等, 所以曲面由距离定义的拓扑和曲面的原有拓扑一致. 据此容易推得

**命题 5.7** 曲面距离  $d$  有以下性质:

- (1)  $|d(P, Q_1) - d(P, Q_2)| \leq d(Q_1, Q_2)$ ;
- (2) 对任意固定的  $P \in \Sigma$ , 曲面的函数  $f(Q) = d(Q, P)$  是连续函数.

**证明** (1) 是距离三角不等式的直接推论. (2) 可以由 (1) 推得.

如果曲面  $\Sigma$  是测地完备的,  $\forall P \in \Sigma$ , 它的指数映射  $\exp_P$  在整个切平面  $T_P\Sigma$  上有定义. 距离完备的本质是曲面上两点的距离可以由联结这两点的曲面曲线达到, 下面的 Hopf-Rinow 定理刻画了这个本质.

**定理 5.8(Hopf-Rinow)** 设  $\Sigma$  是测地完备曲面, 则  $\Sigma$  上任意两点都可由最短测地线联结.

Hopf-Rinow 定理直接推出测地完备曲面的指数映射是满射. 利用 Hopf-Rinow 定理可以证明

**定理 5.9** 曲面的测地完备和距离完备是等价的.

**证明** 设曲面  $\Sigma$  是距离完备的, 如果  $\Sigma$  不是测地完备的, 则存在测地射线  $\gamma(s)$  仅在  $0 \leq s < s_0$  有定义. 取  $\{s_n\}$  是趋于  $s_0$  的单调上升数列,  $P_n = \gamma(s_n)$ . 因为  $d(P_m, P_n) \leq |s_m - s_n|$ , 所以  $\{P_n\}$  是关于距离  $d$  的 Cauchy 列. 设  $P_n \rightarrow P$ , 取  $P$  的一个测地球  $B_P(r)$ , 在这个测地球的闭包上应用命题 5.2, 可得存在  $\epsilon > 0$  使得  $\forall Q \in B_P(r)$ , 以  $Q$  为圆心的测地极坐标系在  $B_Q(\epsilon)$  有定义.

当  $n$  充分大时,  $P_n = \gamma(s_n) \in B_P(r)$ , 而且  $s_0 - s_n < \epsilon$ , 这时在  $B_{P_n}(\epsilon)$  内来看, 测地线  $\gamma(s)$  从  $P_n$  出发至少可以延长  $\epsilon$ , 即  $\gamma(s)$  在  $s < s_n + \epsilon$  有定

义, 但  $s_n + \varepsilon > s_0$ , 这与假设矛盾.

如果  $\Sigma$  是测地完备的, 设  $\{P_n\}$  是  $\Sigma$  上的 Cauchy 点列. 取一点  $Q \in \Sigma$ , 则  $r = \sup d(P_n, Q) < +\infty$ .

根据 Hopf-Rinow 定理, 对每个  $n$ ,  $P_n$  与  $Q$  可以由长度不超过  $r$  的测地线联结, 所以  $\{P_n\} \subset B_Q(r)$ . 但  $B_Q(r)$  的闭包  $\overline{B_Q(r)}$  是切平面  $T_Q\Sigma$  上半径为  $r$  的闭圆盘在连续映射  $\exp_Q$  下的像, 它一定是紧致集合.  $\{P_n\}$  是紧集  $\overline{B_Q(r)}$  内的 Cauchy 列, 它一定收敛. 证毕.

以后, 我们不加区别, 把测地完备和距离完备统称为完备.

**推论 5.10** 如果曲面  $\Sigma$  作为  $E^3$  的子集是闭集, 则  $\Sigma$  是完备的.

**证明** 首先注意一个事实: 曲面上两点的曲面距离  $d$  小于或等于这两点的欧氏距离. 设  $\{P_n\}$  是  $\Sigma$  上关于距离  $d$  的 Cauchy 列, 则它也是关于欧氏距离的 Cauchy 列, 由  $E^3$  的完备性可得  $\{P_n\}$  有极限点  $P$ , 但  $\Sigma$  是闭子集, 所以  $P \in \Sigma$ , 这说明  $\{P_n\}$  在  $\Sigma$  内收敛.

**注** 完备的曲面不一定是  $E^3$  的闭子集.

最后我们来证明定理 5.8.

设  $P_0, P$  是曲面  $\Sigma$  上两点,  $d(P_0, P) = r > 0$ ,  $B_{P_0}(\varepsilon)$  上有测地极坐标系, 不妨设  $P \notin B_{P_0}(\varepsilon)$ . 考虑连续函数  $f(Q) = d(Q, P)$ , ( $Q \in \Sigma$ ),  $f$  在紧集  $\partial B_{P_0}(\varepsilon)$  上有最小值点  $Q_0$ . 设  $\gamma(s)$  是从  $P_0$  出发、联结  $P_0$  和  $Q_0$  的最短测地线,  $s$  是弧长参数, 则  $\gamma(\varepsilon) = Q_0$ . 根据  $\Sigma$  的测地完备性,  $\gamma(s)$  可无限延长, 如果我们能证明  $\gamma(r) = P$ , 由于测地线段  $\gamma(s)$ ,  $s \in [0, r]$  联结  $P_0$ 、 $P$  两点, 它的长度  $r = d(P_0, P)$ , 所以定理 5.8 成立.

为证明  $\gamma(s) = P$ , 我们只需证明  $\forall s \in [\varepsilon, r]$ ,

$$d(\gamma(s), P) = r - s. \quad (*)$$

令

$$I = \{s \in [\varepsilon, r] : d(\gamma(s), P) = r - s\}.$$

显然  $I$  是  $[\varepsilon, r]$  的闭子集. 为证明  $(*)$  式, 我们只需证明:

- (1)  $I$  是非空的, 且  $s_0 \in I$  推得  $[\varepsilon, s_0] \subset I$ ;
- (2) 若  $s_0 \in I$  且  $s_0 < r$ , 则存在  $\delta > 0$ ,  $s_0 + \delta \in I$ .

(1) 和 (2) 意味着  $I$  是  $[\varepsilon, r]$  既开又闭的连通子集, 所以  $I = [\varepsilon, r]$ .



首先证明  $\varepsilon \in I$ . 因为  $d(P_0, Q_0) = \varepsilon$ , 对任何联结  $Q_0, P$  的分段光滑曲线  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}$  与  $\partial B_{P_0}(\varepsilon)$  有交, 在交点  $Q$  处将  $\bar{\gamma}$  分为两段  $\bar{\gamma}'_Q$  和  $\bar{\gamma}''_Q$ , 其中  $\bar{\gamma}'_Q$  是落在  $B_{P_0}(\varepsilon)$  中的部分, 则

$$\begin{aligned} d(P_0, P) &= \inf l(\bar{\gamma}) = \inf \{l(\bar{\gamma}'_Q) + l(\bar{\gamma}''_Q)\} \\ &= \inf_Q \{\inf l(\bar{\gamma}'_Q) + \inf l(\bar{\gamma}''_Q)\} \quad (Q \in \partial B_{P_0}(\varepsilon)) \\ &= \inf_Q (\varepsilon + d(Q, P)) = \varepsilon + d(Q_0, P). \end{aligned}$$

所以  $d(\gamma(\varepsilon), P) = d(Q_0, P) = r - \varepsilon$ , 即  $\varepsilon \in I$ .

当  $s_0 > \varepsilon$ ,  $s_0 \in I$  时, 对  $s < s_0$ , 因为  $d(\gamma(s), P_0) \leq s$ ,

$$d(\gamma(s), P) \geq d(P_0, P) - d(\gamma(s), P_0) \geq r - s,$$

但

$$\begin{aligned} d(\gamma(s), P) &\leq d(\gamma(s), \gamma(s_0)) + d(\gamma(s_0), P) \\ &\leq (s_0 - s) + (r - s_0) = r - s, \end{aligned}$$

所以  $d(\gamma(s), P) = r - s$ , 即  $s \in I$ , 这就证明了 (1).

为证明 (2), 设  $B(\delta)$  是以  $\gamma(s_0)$  为圆心、 $\delta$  为半径的测地球, 上面有相应的测地极坐标系. 设  $Q'_0$  是函数  $d(Q, P)$  在  $\partial B(\delta)$  的最小值点, 即  $d(Q'_0, P) = d(\partial B(\delta), P)$ . 同理,

$$\begin{aligned} d(\gamma(s_0), P) &= \inf_{Q'} \{d(\gamma(s_0), Q') + d(Q', P)\} \\ &= \delta + d(Q'_0, P). \end{aligned}$$

所以根据假设

$$d(Q'_0, P) = d(\gamma(s_0), P) - \delta = r - s_0 - \delta.$$

根据距离的三角不等式,

$$d(P_0, Q'_0) \geq d(P_0, P) - d(Q'_0, P) = r - (r - s_0 - \delta) = s_0 + \delta.$$

设  $\gamma_1$  是联结  $\gamma(s_0)$  和  $Q'_0$  的最短测地线,  $\gamma_1(\delta) = Q'_0$ .  $\gamma_1$  和  $\gamma(s)$  ( $s \in [0, s_0]$ ) 拼接成联结  $P_0$  和  $Q'_0$  的曲线  $C$ ,  $C$  的长度  $l(C) = s_0 + \delta$ . 因为  $d(P_0, Q'_0) \geq$

$s_0 + \delta$  , 因此  $C$  是联结  $P_0$  和  $Q'_0$  的最短线, 它必是测地线. 这说明  $\gamma$  和  $\gamma_1$  重合, 特别,  $\gamma(s_0 + \delta) = Q'_0$ . 所以

$$d(\gamma(s_0 + \delta), P) = d(Q'_0, P) = r - (s_0 + \delta),$$

这说明  $s_0 + \delta \in I$ . 证毕.



## 第八章 常 Gauss 曲率曲面

这一章, 我们将讨论三维欧式空间  $E^3$  中的常 Gauss 曲率曲面.

当  $E^3$  的一个曲面  $\Sigma$  的 Gauss 曲率  $K$  为常数时,  $K$  可以是正数、负数或零, 这里我们主要讨论 Gauss 曲率为正常数或负常数的曲面. 关于 Gauss 曲率为零的完备曲面的分类, 读者可以参阅 Spivak M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol 3. Berkeley: Publish or Perish Inc, 1979. 363-367.

### §8.1 常正 Gauss 曲率曲面

这一节我们主要证明如下定理:

**定理 1.1** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中 Gauss 曲率为常数的紧致曲面, 则  $\Sigma$  是球面.

定理 1.1 可以利用下述 Hilbert 引理 来证明:

**引理 1.2** 设  $k_1$ 、 $k_2$  是曲面  $\Sigma$  的主曲率函数,  $P_0 \in \Sigma$  不是脐点, 如果  $k_1(P_0) > k_2(P_0)$  且  $k_1(P_0)$  是局部极大、 $k_2(P_0)$  是局部极小, 则 Gauss 曲率  $K(P_0) = k_1(P_0)k_2(P_0) \leq 0$ .

**证明** 由于  $P_0$  不是脐点, 主曲率函数  $k_1, k_2$  在  $P_0$  附近可微, 可以在  $P_0$  附近取曲率线参数  $(u, v)$  作为曲面的局部坐标, 这时曲面的第一、第二基本形式为

$$I = Edu + Gdv,$$

$$II = k_1 Edu + k_2 Gdv.$$

取  $\omega_1 = \sqrt{E}du$ ,  $\omega_2 = \sqrt{G}dv$ , 则

$$\omega_{13} = k_1\omega_1, \quad \omega_{23} = k_2\omega_2. \quad (1.1)$$

对上式微分, 利用 Codazzi 方程得

$$(dk_1) \wedge \omega_1 + k_1\omega_{12} \wedge \omega_2 = k_2\omega_{12} \wedge \omega_2, \quad (1.2)$$

$$(dk_2) \wedge \omega_2 + k_2\omega_{21} \wedge \omega_1 = k_1\omega_{21} \wedge \omega_1.$$

由于

$$(dk_1) \wedge \omega_1 = -(k_1)_v \sqrt{G} \omega_1 \wedge \omega_2,$$

$$(dk_2) \wedge \omega_2 = (k_2)_u \sqrt{E} \omega_1 \wedge \omega_2,$$

(1.2) 式可以改写成

$$\begin{aligned} \left( (k_1 - k_2) \omega_{12} - (k_1)_v \sqrt{G} \omega_1 \right) \wedge \omega_2 &= 0, \\ \left( (k_1 - k_2) \omega_{12} - (k_2)_u \sqrt{E} \omega_2 \right) \wedge \omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

从上式容易发现

$$(k_1 - k_2) \omega_{12} = (k_1)_v \sqrt{G} \omega_1 + (k_2)_u \sqrt{E} \omega_2. \quad (1.4)$$

对 (1.4) 式再微分一次, 有

$$\begin{aligned} &d(k_1 - k_2) \wedge \omega_{12} - K(k_1 - k_2) \omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (k_1)_{vv} G \omega_2 \wedge \omega_1 + (k_2)_{uu} E \omega_1 \wedge \omega_2 + \\ &\quad (k_1)_v d(\sqrt{G} \omega_1) + (k_2)_u d(\sqrt{E} \omega_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

由假设, 在点  $P_0$  有  $dk_1 = dk_2 = 0$ , 所以从 (1.5) 式可得

$$K(P_0) = \frac{-1}{k_1 - k_2} \left( (k_2)_{uu} E - (k_1)_{vv} G \right) \Big|_{P_0}. \quad (1.6)$$

由此利用有关的极值条件可以推出  $K(P_0) \leq 0$ . 证毕.

**定理 1.1 的证明** 由上一章的定理 1.7 我们知道  $\Sigma$  的 Gauss 曲率为正常数. 设  $k_1$ 、 $k_2$  是曲面的主曲率函数,  $k_1 \geq k_2$  并且它们是连续函数. 设在  $P_0$  点  $k_1$  达到极大值, 那么由  $K = k_1 k_2 = \text{常数}$  可知函数  $k_2$  在  $P_0$  点达到极小. 如果  $P_0$  不是脐点, 即  $k_1(P_0) > k_2(P_0)$ , 那么由 Hilbert 引理,  $K(P_0) \leq 0$ , 矛盾.

由于  $P_0$  必须是脐点,  $k_1(P_0) = k_2(P_0)$ . 对任意的  $P \in \Sigma$ , 我们有

$$k_1(P_0) \geq k_1(P) \geq k_2(P) \geq k_2(P_0),$$

这说明  $k_1(P) = k_2(P)$ ,  $\forall P \in \Sigma$ , 即  $\Sigma$  是全脐点曲面, 所以  $\Sigma$  是球面. 证毕.

定理 1.1 的另一证明是利用积分公式:

显然  $\Sigma$  是凸曲面, 由  $H^2 \geq K$  有  $|H| \geq \sqrt{K} > 0$ , 因此我们可以适当选取曲面的法向使得平均曲率  $H > 0$ , 这时曲面  $\Sigma$  的支撑函数  $\varphi > 0$  (见上一章的 (4.3) 式).

利用上一章的积分公式 (4.4) 和 (4.5), 就得到

$$\int_{\Sigma} K \varphi dA = \int_{\Sigma} H dA \geq \int_{\Sigma} \sqrt{K} dA = \sqrt{K} \int_{\Sigma} H \varphi d\sigma \geq K \int_{\Sigma} \varphi d\sigma.$$

上式表明  $H^2 = K$  处处成立, 因此  $\Sigma$  是全脐点曲面.

## §8.2 常负 Gauss 曲率曲面与 Sine-Gordon 方程

设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的常负曲率曲面, 经过适当的相似变换, 我们不妨设  $\Sigma$  的 Gauss 曲率  $K = -1$ . 这样的曲面没有脐点, 因而可以取  $(u, v)$  为曲面的曲率线参数, 同时取曲面的主方向  $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|}$ 、 $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_v|}$  为活动标架.

在这样的标架下, 我们有

$$\omega_1 = Adu, \quad \omega_2 = Bdv, \quad (2.1)$$

以及

$$\omega_{12} = -\frac{A_v}{B}du + \frac{B_u}{A}dv, \quad (2.2)$$

这里  $A, B$  是  $u, v$  的函数. 设  $k_1, k_2$  是主曲率函数, 那么

$$\omega_{13} = k_1\omega_1 = k_1Adu, \quad \omega_{23} = k_2\omega_2 = k_2Bdv. \quad (2.3)$$

将 (2.3) 式代入到 Codazzi 方程

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13},$$

就得到  $(k_1A)_v = k_2A_v$ ,  $(k_2B)_u = k_1B_u$ , 或者

$$(k_1)_v A + (k_1 - k_2)A_v = 0, \quad (2.4)$$

$$(k_2)_u B - (k_1 - k_2)B_u = 0.$$

由于  $k_1 k_2 = -1$ ，可以设  $k_1 = \tan \varphi$ ， $k_2 = -\cot \varphi$ ，则  $k_1 - k_2 = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi}$ ，(2.4) 式就推出

$$\left(\frac{A}{\cos \varphi}\right)_v = 0, \quad \left(\frac{B}{\sin \varphi}\right)_u = 0. \quad (2.5)$$

因此，可以取新的参数  $\xi = \xi(u)$ 、 $\eta = \eta(v)$  满足

$$d\xi = \frac{A}{\cos \varphi} du, \quad d\eta = \frac{B}{\sin \varphi} dv. \quad (2.6)$$

这时坐标曲线  $\xi$  线和  $\eta$  线仍然是曲面的曲率线，曲面的诸微分形式变为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= Adu = \cos \varphi d\xi, & \omega_2 &= Bdv = \sin \varphi d\eta, \\ \omega_{12} &= \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\omega_{13} = k_1 \omega_1 = \sin \varphi d\xi, \quad \omega_{23} = k_2 \omega_2 = -\cos \varphi d\eta.$$

将上述各式代入到 Gauss 方程  $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ ，因为

$$d\omega_{12} = (\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta})d\xi \wedge d\eta, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = \sin \varphi \cos \varphi d\xi \wedge d\eta,$$

所以函数  $\varphi$  满足方程

$$\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta} = \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi. \quad (2.8)$$

作参数变换  $\xi = s + t$ ， $\eta = s - t$ ，并令  $\alpha = 2\varphi$ ， $\alpha$  就满足方程

$$\alpha_{st} = \sin \alpha. \quad (2.9)$$

方程 (2.9) 称作 Sine-Gordon 方程. 从以上推断可以看出，Gauss 曲率  $K = -1$  的曲面的结构方程，选取适当的参数后，可以化为 Sine-Gordon 方程 (2.9). 反之，知道了 Sine-Gordon 方程 (2.9) (或 (2.8)) 的一个解，通过求解以形如 (2.7) 的诸微分形式为系数的标架运动方程，我们可以得到一个 Gauss 曲率为  $-1$  的曲面片.

## §8.3 Hilbert 定理

由于  $E^3$  中任何紧致曲面必有一点的 Gauss 曲率大于零,  $E^3$  中不存在紧致的常负 Gauss 曲率曲面. 更一般的结论是如下的著名定理.

**定理 3.1** 在  $E^3$  中不存在常负 Gauss 曲率的完备曲面.

在上一节我们已经证明, 适当地选取参数, Gauss 曲率为  $-1$  的曲面的结构方程可以化为 Sine-Gordon 方程. 也就是说, 根据 (2.7) 式, 在参数  $\xi, \eta$  下, 曲面的基本形式为

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 \varphi d\xi^2 + \cos^2 \varphi d\eta^2, \\ II &= (\sin \varphi \cos \varphi)(d\xi^2 - d\eta^2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

经过参数变换

$$\xi = s + t, \quad \eta = s - t, \quad (3.2)$$

曲面的第一、第二基本形式为

$$\begin{aligned} I &= ds^2 + 2 \cos \alpha ds dt + dt^2, \\ II &= 2 \sin \alpha ds dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

从上式可以看出,  $s$  线和  $t$  线是曲面的渐近线,  $\alpha = 2\varphi$  是曲面两渐近方向的夹角. 通常,  $(s, t)$  称为曲面的 Chebyshev 参数.

需要指出的是, 上述的 Chebyshev 参数是曲面的局部参数, 即对于 Gauss 曲率为  $-1$  的曲面  $\Sigma$  上的任意一点, 都有该点的一个邻域, 在这个邻域上可以取到 Chebyshev 参数.

以下设  $\Sigma$  是 Gauss 曲率为  $-1$  的完备曲面,  $\Sigma$  在每一点都有两个线性无关的单位渐近方向  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ . 因此,  $\forall P \in \Sigma$  以及  $P$  点的一个渐近方向  $\mathbf{v}$ , 有惟一一条弧长参数渐近线  $\mathbf{c}(s)$  过点  $P$  且与  $\mathbf{v}$  相切,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . 由  $\Sigma$  的完备性我们可以得到如下事实: 渐近线  $\mathbf{c}(s)$  可以无限延长, 即  $\mathbf{c}(s)$  对任何  $s \in \mathbf{R}$  有定义. 不然, 设  $\mathbf{c}(s)$  在  $s < s_0$  有定义, 但在  $s = s_0$  没有定义; 设  $\lim_{s \rightarrow s_0} \mathbf{c}(s) = P_1 \in \Sigma$ , 由于在  $P_1$  的一个邻域上有 Chebyshev 参数,  $\mathbf{c}(s_0) = P_1$  可以定义, 矛盾.

利用以上事实, 我们可以定义映射  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \Sigma$  如下: 固定一点  $P_0 \in \Sigma$ , 过点  $P_0$  与渐近方向  $v_1$  相切的弧长参数渐近线记为  $c(s)$ ,  $s \in \mathbf{R}$ , 过点  $c(s)$  与渐近方向  $v_2$  相切的渐近线记为  $\gamma_s(t)$ , 其中  $t$  也是弧长参数, 定义  $f(s, t) = \gamma_s(t)$ .

**引理 3.2** 对固定的  $t$ , 曲线  $f(s, t)$  是以  $s$  为弧长参数的渐近线.

**证明** 当  $t = 0$  时,  $f(s, 0)$  是弧长参数渐近线. 固定  $s_0$ , 在点  $P_0 = f(s_0, 0)$  的邻域  $U$  上有曲面的 Chebyshev 参数表示  $r = r(s, t)$ ,  $|s - s_0|$ ,  $|t|$  充分小, 而且  $r_s = v_1$ ,  $r_t = v_2$ . 显然  $r(s, 0) = f(s, 0)$  在  $P_0$  附近成立. 由  $f$  的定义可知,

$$f(s, t) = f(s, 0) + \int_0^t v_2 dt.$$

而由  $r_t = v_2$  可得

$$r(s, t) - r(s, 0) = \int_0^t v_2 dt.$$

因此当  $|t|$  充分小时  $r(s, t) = f(s, t)$ . 这说明  $s$  曲线  $f(s, t)$  当  $|t|$  充分小时是弧长参数渐近线.

对固定的  $P = f(s_0, t_0) \in \Sigma$ , 由于渐近线  $\{f(s_0, t) : 0 \leq t \leq t_0\}$  紧致, 存在有限多个局部 Chebyshev 参数网

$$(U_1, r_1), (U_2, r_2), \dots, (U_n, r_n)$$

覆盖  $\{f(s_0, t) : 0 \leq t \leq t_0\}$ . 排列这些局部 Chebyshev 参数网的次序使之依次相交, 且  $(U_1, r_1)$  覆盖点  $f(s_0, 0)$ . 重复以上的推断可知, 当  $|s - s_0|$  充分小时曲线  $f(s, t_0)$  是渐近线. 引理证毕.

**定理 3.1 的证明** 设  $\alpha = \alpha(s, t)$  是渐近线  $s \rightarrow f(s, t)$  和  $t \rightarrow f(s, t)$  的夹角,  $0 < \alpha < \pi$ , 则  $\alpha$  满足

$$\alpha_{st} = \sin \alpha. \quad (3.4)$$

下面我们将证明定义在整个平面  $\mathbf{R}^2$  上的函数  $\alpha$  不存在, 因而证明  $E^3$  中不存在 Gauss 曲率等于  $-1$  的完备曲面.

由  $\alpha_{st} > 0$  知  $\alpha_s$  是关于  $t$  的严格单调增函数, 所以

$$\alpha_s(s, t) > \alpha_s(s, 0), \quad \text{当 } t > 0. \quad (3.5)$$



上式对  $s$  积分, 得到

$$\alpha(b, t) - \alpha(a, t) > \alpha(b, 0) - \alpha(a, 0), \quad \text{当 } t > 0, a < b. \quad (3.6)$$

因此  $\alpha_s$  不可能恒等于 0. 经过参数的适当平移变换, 我们可以设  $\alpha_s(0, 0) \neq 0$ ; 由于函数  $(s, t) \rightarrow \alpha(-s, -t)$  同样满足 Sine-Gordon 方程, 我们可以设  $\alpha_s(0, 0) > 0$ .

固定三点  $s_3 > s_2 > s_1 > 0$ , 并且当  $s \in [0, s_3]$  时  $\alpha_s(s, 0) > 0$ , 令

$$\delta = \min\{\alpha(s_3, 0) - \alpha(s_2, 0), \alpha(s_1, 0) - \alpha(0, 0)\} > 0, \quad (3.7)$$

(3.6) 式与 (3.7) 式就推出, 对任何  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(s_1, t) - \alpha(0, t) &> \delta, \\ \alpha(s_3, t) - \alpha(s_2, t) &> \delta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

又因为  $\alpha(s, t)$  对  $s \in [0, s_3]$  是单调增的, (3.8) 式推出

$$\delta \leq \alpha(s, t) \leq \pi - \delta, \quad \text{当 } s \in [s_1, s_2], \quad t \geq 0. \quad (3.9)$$

在区域  $[s_1, s_2] \times [0, T]$  上对方程 (3.4) 积分, 就得到

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin \alpha(s, t) ds dt &= \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \alpha_{st} ds dt \\ &= \alpha(s_2, T) - \alpha(s_1, T) - \alpha(s_2, 0) + \alpha(s_1, 0). \end{aligned}$$

利用 (3.9) 式, 有

$$\begin{aligned} \alpha(s_2, T) - \alpha(s_1, T) &= \alpha(s_2, 0) - \alpha(s_1, 0) + \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin \alpha(s, t) ds dt \\ &\geq \alpha(s_2, 0) - \alpha(s_1, 0) + (s_2 - s_1)T \sin \delta. \end{aligned}$$

上式的左边  $< \pi$ , 令  $T \rightarrow \infty$ , 就得到矛盾. 证毕.

事实上, 当  $\Sigma$  是完备时, 可以证明  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \Sigma$  是  $\Sigma$  上整体定义的 Chebyshev 参数网 (详见 de Carmo M P. Differential Geometry of Curves



and Surfaces. New Jersey: Prentice-Halls Inc, 1976 ). 结合这个事实与下面的引理, 也可以给出定理 3.1 的另一个证明.

**引理 3.3** Gauss 曲率为  $-1$  的曲面上由 Chebyshev 参数曲线构成的任意曲边四边形的面积  $< 2\pi$ .

**证明** 设  $D \subset \Sigma$  是 Chebyshev 参数  $s_1 \leq s \leq s_2, t_1 \leq t_2$  构成的四边形, 由 (3.3) 式, 曲面的面积元为  $dA = \sin \alpha \, ds \wedge dt$ ,

$$\begin{aligned} D \text{ 的面积} &= \int_D \sin \alpha \, ds \wedge dt = \int_D \alpha_{st} ds \wedge dt \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \alpha_{st} \, ds dt \\ &= \alpha(s_2, t_2) - \alpha(s_1, t_2) - \alpha(s_2, t_1) + \alpha(s_1, t_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

如果记四边形  $D$  的四个内角分别为  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$  和  $\beta_4$ , 那么

$$D \text{ 的面积} = \beta_1 + \beta_3 - (\pi - \beta_2) - (\pi - \beta_4) = \sum_{i=1}^4 \beta_i - 2\pi < 2\pi, \quad (3.11)$$

其中最后一个不等式是因为每个  $\beta_i < \pi$ . 证毕.

我们知道, Gauss 曲率等于  $-1$  的完备单连通曲面的面积是无限的, 如果  $E^3$  中有这样的曲面, 则它有整体定义的 Chebyshev 参数网, 引理 3.3 得出它的面积小于  $2\pi$ , 矛盾.

**注** 可以证明, Hilbert 定理对  $C^2$  阶的曲面也成立, 但对  $C^1$  阶的曲面不成立, Kuiper 曾经给出了双曲平面到  $E^3$  的无奇点  $C^1$  阶等距嵌入 ( Kuiper N H. On  $C^1$ -isometric imbeddings I,II. Indag Maths, 1955(17): 545-556, 683-689).

## §8.4 Bäcklund 变换

尽管  $E^3$  中不存在完备的常负 Gauss 曲率曲面, 通过研究 Sine-Gordon 方程的解, 人们可以得到许多常负 Gauss 曲率的曲面片. 由于 Sine-Gordon 方程是一个非线性方程, 不具备线性微分方程所具有的叠加原理. 1880 年左右, Bäcklund 在研究一般非线性微分方程时, 给出了一种从已知解生成新解的方法, 这就是通常所说的 Bäcklund 变换.

下面我们将给出 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换的一个几何解释, 首先我们引进线汇的概念.

### 1. 线汇与焦曲面

所谓线汇, 是关于两个参数  $(u, v)$  的直线族, 一般可以写为

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}(u, v) + \lambda \mathbf{y}(u, v), \quad (4.1)$$

其中  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  是向量值函数,  $|\mathbf{y}| = 1$ ,  $\lambda$  是每个直线族的参数.

方程

$$u = u(t) \quad v = v(t) \quad (u_t^2 + v_t^2 \neq 0) \quad (4.2)$$

确定了一个直纹面, 这个直纹面为可展曲面的充分必要条件是

$$(\mathbf{y}, d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = 0. \quad (4.3)$$

这是一个关于  $du$ 、 $dv$  的二次方程, 如果它有两个相异的实解, 则经过线汇 (4.1) 的每条直线有两个可展曲面, 因此整个线汇有两族可展曲面, 每族可展曲面的脊(准)线构成一个曲面, 称作线汇 (4.1) 的焦曲面.

将线汇 (4.1) 的两个焦曲面分别记为  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$ , 线汇是焦曲面的公切线. 因此, 从线汇出发, 我们自然导出焦曲面  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  之间的变换:  $l: \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$ ,  $l$  将焦曲面  $\Sigma$  上的点映为焦曲面  $\bar{\Sigma}$  上对应的切点.

如果线汇很一般, 焦曲面  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  之间不一定有简单的关系, 但下面所定义的伪球线汇, 构成了 Bäcklund 变换的几何基础.

**定义 4.1** 设  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  是线汇的两个焦曲面,  $l: \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$  是相应的变换, 称线汇是伪球线汇, 如果对  $\forall P \in \Sigma$ , 它满足

- (1)  $|P - l(P)| =$  与  $P$  无关的常数  $r$ ,
- (2) 对应点  $P$  与  $l(P)$  的法向量  $\mathbf{e}_3$  与  $\bar{\mathbf{e}}_3$  间的夹角为常量  $\tau$ .

下面是经典的 Bäcklund 定理.

**定理 4.2(Bäcklund)** 伪球线汇的两个焦曲面  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$ , 有相同的负常 Gauss 曲率  $K = -\frac{\sin^2 \tau}{r^2}$ .

**证明** 在曲面  $\Sigma$  上取活动标架  $\{\mathbf{r}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 使得  $\mathbf{e}_1$  是  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  的公切线方向,  $\mathbf{e}_3$  是  $\Sigma$  的法向. 不难写出曲面  $\bar{\Sigma}$  相应的活动标架

$$\bar{\mathbf{r}} = l(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + r\mathbf{e}_1, \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1, \quad (4.5)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \cos \tau \mathbf{e}_2 + \sin \tau \mathbf{e}_3, \quad (4.6)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = -\sin \tau \mathbf{e}_2 + \cos \tau \mathbf{e}_3. \quad (4.7)$$

我们可以利用这一组方程式来计算  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  的 Gauss 曲率.

设曲面  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  相应的诸微分形式分别为  $\{\omega_i, \omega_{ij}\}$  和  $\{\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_{ij}\}$ , 由曲面的结构方程式,

$$d\bar{\mathbf{r}} = \bar{\omega}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{\mathbf{e}}_2,$$

但由 (4.4) 式,

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{r}} &= d\mathbf{r} + r d\mathbf{e}_1 \\ &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + r(\omega_{12} \mathbf{e}_2 + \omega_{13} \mathbf{e}_3), \end{aligned}$$

比较以上两式, 我们得到以下关系式

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1, \quad (4.8)$$

$$\bar{\omega}_2 \cos \tau = \omega_2 + r\omega_{12}, \quad (4.9)$$

$$\bar{\omega}_2 \sin \tau = r\omega_{13}. \quad (4.10)$$

注意到

$$\bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{23} = \bar{K} \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2, \quad (4.11)$$

设  $\omega_{\alpha 3} = h_{\alpha 1} \omega_1 + h_{\alpha 2} \omega_2$  ( $\alpha = 1, 2$ ), 从 (4.8)、(4.10) 两式可得

$$\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 = \frac{r}{\sin \tau} \omega_1 \wedge \omega_{13} = \frac{r h_{12}}{\sin \tau} \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (4.12)$$

而由 (4.9)、(4.10) 两式,

$$\bar{\omega}_{13} = \langle d\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle = -\sin \tau \omega_{12} + \cos \tau \omega_{13} = \frac{1}{r} \sin \tau \omega_2, \quad (4.13)$$

$$\bar{\omega}_{23} = \langle d\bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = \omega_{23}, \quad (4.14)$$

因此

$$\bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{23} = \frac{1}{r} \sin \tau \omega_2 \wedge \omega_{23} = -\frac{1}{r} h_{21} \sin \tau \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (4.15)$$

将 (4.12)、(4.15) 两式代入到 (4.11) 式两边, 由  $h_{12} \neq 0$  可得曲面  $\bar{\Sigma}$  的 Gauss 曲率为

$$\bar{K} = -\frac{\sin^2 \tau}{r^2}. \quad (4.16)$$

用同样的方法, 或交换曲面  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  的地位, 可知  $\Sigma$  的 Gauss 曲率亦为  $-\frac{\sin^2 \tau}{r^2}$ . 证毕.

## 2. Bäcklund 变换

Bäcklund 定理告诉我们: 伪球线汇的焦曲面  $\Sigma$ 、 $\bar{\Sigma}$  具有相同的常负 Gauss 曲率, 它们分别对应 Sine-Gordon 方程的解. 由此可见, 从 Sine-Gordon 方程的已知解求新解的问题可以归结为从一个常负 Gauss 曲率曲面  $\Sigma$  出发构造一个伪球线汇的问题, 这便是 Bäcklund 变换的几何表述.

在曲面  $\Sigma$  上取活动标架  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , 如果  $e_1$  方向的切线构成伪球线汇, 由方程 (4.9)、(4.10) 知道,

$$\omega_2 + r\omega_{12} = r \cot \tau \omega_{13}, \quad (4.17)$$

或者

$$\langle dr, e_2 \rangle + r \langle de_1, e_2 \rangle = r \cot \tau \langle de_1, e_3 \rangle. \quad (4.18)$$

这是一个关于向量场  $e_1$  的全微分方程式. 可以证明: 方程式 (4.18) 有解的充分必要条件是曲面  $\Sigma$  的 Gauss 曲率  $K = -\frac{\sin^2 \tau}{r^2}$ .

需要注意的是, 方程 (4.17) 实际上就是 Bäcklund 变换, 为明显起见, 我们将它改写为参数的形式.

取  $(u, v)$  为曲率线参数,  $a_1$ 、 $a_2$  为坐标曲线的单位切向量, 它们互相垂直, 设

$$e_1 = \cos \psi a_1 + \sin \psi a_2, \quad (4.19)$$

$$e_2 = -\sin \psi a_1 + \cos \psi a_2,$$

则  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3\}$ 、 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是  $\Sigma$  上两组活动标架, 将它们对应的诸微分形式分别记为  $\{\theta_i, \theta_{\alpha\beta}\}$  与  $\{\omega_i, \omega_{\alpha\beta}\}$ , 通过简单计算, 有

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \langle d\mathbf{r}, \mathbf{e}_2 \rangle = -\sin \psi \theta_1 + \cos \psi \theta_2, \\ \omega_{12} &= \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = d\psi + \theta_{12}, \\ \omega_{13} &= \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = \cos \psi \theta_{13} + \sin \psi \theta_{23},\end{aligned}\tag{4.20}$$

代入到方程 (4.17) 中, 得到

$$\begin{aligned}d\psi + \theta_{12} &= -\frac{1}{r} \left( -\sin \psi \theta_1 + \cos \psi \theta_2 \right) \\ &\quad + \cot \tau \left( \cos \psi \theta_{13} + \sin \psi \theta_{23} \right).\end{aligned}\tag{4.21}$$

另一方面, 设  $2\varphi$  是曲面  $\Sigma$  上两个渐近方向间的夹角, 我们可以取曲率线参数使得 (2.7) 成立, 那么

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \sin \varphi du, & \theta_2 &= \cos \varphi dv, \\ \theta_{13} &= \cos \varphi du, & \theta_{23} &= -\sin \varphi dv, \\ \theta_{12} &= -\psi_v du - \psi_u dv,\end{aligned}\tag{4.22}$$

其中  $\varphi$  满足 Sine-Gordon 方程 (2.9). 代入到 (4.21) 式, 就得到关于未知函数  $\psi$  的一组方程. 为简单起见, 我们设  $K = -1$ , 即  $r = \sin \tau$ , 则有

$$\begin{cases} \sin \tau (\psi_u - \varphi_v) = \cos \tau \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi, \\ \sin \tau (\psi_v - \varphi_u) = -\cos \tau \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi, \end{cases}\tag{4.23}$$

其中  $\tau$  是常数,  $\varphi$  为 Sine-Gordon 方程的已知解,  $\psi$  为未知函数. 容易证明,  $2\psi$  是新曲面  $\bar{\Sigma}$  的渐近线之间的夹角, 因此它也是 Sine-Gordon 方程的解. 这样, 我们可以由 Sine-Gordon 方程的已知解  $\varphi$ , 通过求解 (4.23), 得到新解  $\psi$ . 注意到方程 (4.23) 只是关于未知函数  $\psi$  的一阶拟线性偏微分方程组, 可化为常微分方程求解. (4.23) 就是通常所称的 Bäcklund 变换.

## 第九章 常平均曲率曲面

所谓  $E^3$  中的常平均曲率曲面是指平均曲率  $H$  为非零常数的那些曲面,  $H = 0$  的曲面通称极小曲面, 我们将在下一章专门讨论.

关于常平均曲率曲面系统研究的历史不是很长, 它与非线性偏微分方程有着密切的联系. 1950 年前后 Hopf 证明了  $E^3$  中亏格为零的紧致常平均曲率曲面一定是球面. Alexsandrov(1956) 证明了  $E^3$  中具有常平均曲率的嵌入 (即没有自交点) 紧致曲面必为球面. Hopf 曾问:  $E^3$  中是否存在亏格大于 0 的常平均曲率紧致曲面. 1984 年 Wente 利用可积偏微分方程的双周期解, 构造出  $E^3$  的常平均曲率环面.

这一章我们主要介绍上述结果, 进一步的研究可以参见本章后面所列的参考文献.

### §9.1 Hopf 微分与 Hopf 定理

设  $\Sigma$  是  $E^3$  的曲面,  $\Delta_\Sigma$  是  $\Sigma$  的 Laplace 算子.

**命题 1.1** 设  $\mathbf{r}$  是曲面  $\Sigma$  的位置向量, 则

$$\Delta_\Sigma \mathbf{r} = 2H\mathbf{n},$$

其中  $H$  是曲面的平均曲率,  $\mathbf{n}$  是曲面的单位法向量场.

**证明** 取  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  是  $\Sigma$  的正交标架. 设  $\mathbf{a} \in E^3$  是一个常向量, 令  $f = \langle \mathbf{r}, \mathbf{a} \rangle$ , 则

$$df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2,$$

其中  $f_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle$ 、 $f_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a} \rangle$ ,  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  是相应的微分形式.

依照  $\Delta_\Sigma$  的定义, 有

$$Df_1 = df_1 + f_2\omega_{21} = f_{11}\omega_1 + f_{12}\omega_2,$$

$$Df_2 = df_2 + f_1\omega_{12} = f_{21}\omega_1 + f_{22}\omega_2,$$

$$\Delta_\Sigma f = f_{11} + f_{22},$$



但利用曲面的结构方程,

$$\begin{aligned} Df_1 &= df_1 + f_2\omega_{21} = \langle de_1, \mathbf{a} \rangle + f_2\omega_{21} \\ &= \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a} \rangle\omega_{12} + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a} \rangle\omega_{13} + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a} \rangle\omega_{21} \\ &= \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a} \rangle\omega_{13} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a} \rangle(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2), \end{aligned}$$

所以  $f_{11} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a} \rangle h_{11}$ . 同理,  $f_{22} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a} \rangle h_{22}$ . 因此我们有  $\Delta_\Sigma f = 2H\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a} \rangle$ , 由  $\mathbf{a}$  的任意性可得  $\Delta_\Sigma \mathbf{r} = 2H\mathbf{e}_3$ . 证毕.

设  $z = u + iv$  是  $\Sigma$  的局部等温坐标,  $\Sigma$  的度量为

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2 dz d\bar{z}. \quad (1.1)$$

利用命题 1.1, 我们可以求曲面  $\Sigma$  在参数  $z, \bar{z}$  下的标架  $\{\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{\bar{z}}, \mathbf{n}\}$  的运动方程.

因为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z \rangle &= \frac{1}{4} \langle \mathbf{r}_u - i\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u - i\mathbf{r}_v \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle - 2i\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle), \end{aligned}$$

注意这里内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  关于复数亦是线性的, 所以  $(u, v)$  是等温坐标等价于

$$\langle \mathbf{r}_z, \mathbf{r}_z \rangle = 0 \quad (1.2)$$

或者

$$\langle \mathbf{r}_{\bar{z}}, \mathbf{r}_{\bar{z}} \rangle = 0. \quad (1.3)$$

同时不难求出在等温参数  $z = u + iv$  下,

$$\langle \mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{\bar{z}} \rangle = \frac{\lambda^2}{2}, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{r}_z, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_{\bar{z}}, \mathbf{n} \rangle = 0. \quad (1.4)$$

由于在等温坐标下,

$$\Delta_\Sigma = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.5)$$



由命题 1.1 就推出

$$\mathbf{r}_{z\bar{z}} = \frac{\lambda^2}{2} H \mathbf{n}. \quad (1.6)$$

令

$$Q = \langle \mathbf{r}_{zz}, \mathbf{n} \rangle, \quad (1.7)$$

则  $Q$  是一个在  $\Sigma$  的局部定义的复函数.

对 (1.2) – (1.4) 式求微分, 有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{zz} \rangle &= \langle \mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{z\bar{z}} \rangle = 0, & \langle \mathbf{r}_{zz}, \mathbf{r}_{\bar{z}} \rangle &= \lambda \lambda_z, \\ \langle \mathbf{n}_z, \mathbf{r}_z \rangle &= -\langle \mathbf{r}_{zz}, \mathbf{n} \rangle = -Q, & \langle \mathbf{n}_z, \mathbf{r}_{\bar{z}} \rangle &= -\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{z\bar{z}} \rangle = -\frac{\lambda^2}{2} H, \\ \langle \mathbf{n}_z, \mathbf{n} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

据此, 可以得到标架  $\{\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_{\bar{z}}, \mathbf{n}\}$  的运动方程

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{zz} &= \frac{2}{\lambda} \lambda_z \mathbf{r}_z + Q \mathbf{n}, \\ \mathbf{r}_{z\bar{z}} &= \frac{\lambda^2}{2} H \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_z &= -H \mathbf{r}_z - 2\lambda^{-2} Q \mathbf{r}_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

由于  $\mathbf{r}_{zz\bar{z}} = \mathbf{r}_{z\bar{z}z}$ , 利用 (1.9) 式不难得到 Gauss-Codazzi 方程的复形式:

$$\begin{aligned} (\ln \lambda)_{z\bar{z}} &= \frac{|Q|^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{4} H^2, & (\text{Gauss 方程}) \\ Q_{\bar{z}} &= \frac{\lambda^2}{2} H_z. & (\text{Codazzi 方程}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

上述方程组与第四章所讨论的 Gauss-Codazzi 方程是完全一样的. 事实上, 利用曲面第二基本形式在自然标架下的系数

$$L = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle, \quad M = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u \rangle, \quad N = -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle,$$

有

$$\begin{aligned}
 Q &= -\langle \mathbf{r}_z, \mathbf{n}_z \rangle = -\frac{1}{4} \langle \mathbf{r}_u - i\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u - i\mathbf{n}_v \rangle \\
 &= -\frac{1}{4} \left( \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v \rangle - 2i \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v \rangle \right) \\
 &= \frac{L - N - 2iM}{4},
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

代入到 (1.10)，容易得到等价性.

虽然  $Q$  不是曲面  $\Sigma$  上整体定义的函数，二次微分

$$\Psi = -\langle \mathbf{r}_z, \mathbf{n}_z \rangle (dz)^2 = Q (dz)^2 \tag{1.12}$$

是整体定义的二次微分，称为曲面  $\Sigma$  的 Hopf 微分，它与局部等温坐标系的选取无关. 这是因为，如果  $w = x + iy$  是  $\Sigma$  的另一个与  $z = u + iv$  定向一致的局部等温坐标， $w = w(z)$  是它们间的坐标变换，则  $w$  是  $z$  的解析函数，因此

$$\begin{aligned}
 \Psi &= -\langle \mathbf{r}_w, \mathbf{n}_w \rangle (dw)^2 = -\langle \mathbf{r}_z, \mathbf{n}_z \rangle \left( \frac{dz}{dw} \right)^2 (dw)^2 \\
 &= -\langle \mathbf{r}_z, \mathbf{n}_z \rangle (dz)^2.
 \end{aligned}$$

下面两个命题反映了 Hopf 微分的几何含义.

**命题 1.2** 曲面是全脐点的当且仅当它的 Hopf 微分  $\Psi \equiv 0$ .

**证明** 从 (1.11) 式不难看出， $Q = 0$  当且仅当  $L = N$ 、 $M = 0$ ，这等价于曲面是全脐点的.

**命题 1.3** 曲面  $\Sigma$  具有常平均曲率当且仅当它的 Hopf 微分是全纯二次微分.

**证明**  $H = \text{常数}$  当且仅当  $H_z = 0$ ，根据 Codazzi 方程 (1.10)， $H_z = 0$  等价于  $Q$  是局部全纯函数，这证明了结论.

利用 Hopf 微分，我们可以得到如下结论：

**命题 1.4** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  的常平均曲率曲面， $H^2 - K \neq 0$ ，则

$$\Delta_{\Sigma} \ln(H^2 - K) = 4K.$$

**证明** 在等温坐标 (1.1) 下,

$$H = \frac{\lambda^{-2}(L+N)}{2}, K = \lambda^{-4}(LN - M^2).$$

从 (1.11) 式可得

$$|Q|^2 = \frac{(L-N)^2 + 4M^2}{16} = \frac{\lambda^4}{4}(H^2 - K).$$

但由于  $Q$  是全纯函数,

$$\Delta_{\Sigma} \ln |Q|^2 = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln |Q|^2 = 0,$$

所以由 Gauss 方程,

$$\Delta_{\Sigma} \ln(H^2 - K) = -\Delta_{\Sigma} \ln \frac{\lambda^4}{4} = -4\Delta_{\Sigma} \ln \lambda = 4K.$$

得证.

现在我们容易得到 Hopf 关于常平均曲率曲面的惟一性定理:

**定理 1.5(Hopf)** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中闭的常平均曲率曲面, 如果  $\Sigma$  的亏格为零, 则  $\Sigma$  一定是球面.

**证明** 我们要证明  $\Sigma$  的 Hopf 微分  $\psi \equiv 0$ . 根据 Riemann-Koebe 单值化定理,  $\Sigma$  共形等价于单位球面  $S^2$ , 因此我们只需证明  $S^2$  上的全纯二次微分式一定为零.

设  $\pi_1: S^2 \setminus \{\text{北极}\} \rightarrow \mathbf{R}^2$  和  $\pi_2: S^2 \setminus \{\text{南极}\} \rightarrow \mathbf{R}^2$  是球极投影坐标,  $\pi_1 = (u, v)$ ,  $\pi_2 = (x, y)$ , 则  $z = u + iv$  和  $w = x - iy$  都是  $S^2$  的局部等温坐标系. 不难验证, 这两个等温坐标系之间的变换关系为  $z = \frac{1}{w}$  (见第七章例 1.4).

设  $\psi$  是  $S^2$  上全纯的二次微分式, 在等温参数  $z$  下,  $\psi = Q_1(z)(dz)^2$ , 在等温参数  $w$  下,  $\psi = Q_2(w)(dw)^2$ . 显然  $Q_1$  和  $Q_2$  分别是  $z$  平面和  $w$  平面上的全纯函数. 利用  $w = \frac{1}{z}$  可得

$$Q_1(z)(dz)^2 = Q_2(w)(dw)^2 = Q_2(w(z)) \frac{1}{z^2} (dz)^2,$$

所以  $Q_1(z) = \frac{Q_2(w)}{z^2}$ . 令  $z \rightarrow \infty$ , 则  $w \rightarrow 0$ ,  

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Q_1(z) = Q_2(0) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} = 0,$$

由 Liouville 定理,  $Q_1 \equiv 0$ , 即 Hopf 微分  $\psi \equiv 0$ . 证毕.

## §9.2 Alexandrov 惟一性定理

在叙述并证明 Alexandrov 定理之前, 我们先讨论曲面的 Laplace 算子与外围空间  $E^3$  的 Laplace 算子的关系.

设  $\Sigma$  是  $E^3$  的曲面,  $\mathbf{r}$  是  $\Sigma$  的位置向量,  $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是  $\Sigma$  的正交标架. 考虑  $\Sigma$  的平行曲面族

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r} + t\mathbf{e}_3, \quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{e}_3$  是曲面  $\Sigma$  的法向量. 可以视曲面族  $\mathbf{r}_t$  为  $E^3$  在  $\Sigma$  附近的一个参数表示. 在  $E^3$  中取标架  $\{\mathbf{r}_t; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 并用  $\{\theta_i, \theta_{ij} : i, j = 1, 2, 3\}$  记  $E^3$  中的诸微分形式, 用  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$  记曲面  $\Sigma$  上的诸微分形式.

微分 (2.1) 式, 得

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_t &= d\mathbf{r} + (dt)\mathbf{e}_3 + t d\mathbf{e}_3 \\ &= (\omega_1 + t\omega_{31})\mathbf{e}_1 + (\omega_2 + t\omega_{32})\mathbf{e}_2 + (dt)\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

因此

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1 + t\omega_{31}, \\ \theta_2 &= \omega_2 + t\omega_{32}, \\ \theta_3 &= dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

对 (2.3) 式再取外微分, 并由  $E^3$  与  $\Sigma$  的结构方程式可知, 他们的联络形式的关系为

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= \omega_{12}, \\ \theta_{31} &= \omega_{31}, \\ \theta_{32} &= \omega_{32}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

由此, 我们可以计算  $\Sigma$  的 Laplace 算子  $\Delta_\Sigma$  与  $E^3$  的 Laplace 算子  $\Delta$  的联系. 为简单起见, 将 (2.3) 式改写为

$$\theta_i = \omega_i + t\omega_{3i} = \sum_{j=1}^2 (\delta_{ij} - th_{ij}) \omega_j, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

这里  $\omega_{3i} = -\sum_{j=1}^2 h_{ij}\omega_j$  是曲面  $\Sigma$  的第二基本形式.

设  $f$  是  $E^3$  的函数,  $f$  在  $E^3$  和  $\Sigma$  上的导数和协变微分分别记作  $\{\tilde{f}_i, \tilde{f}_{ij} : i, j = 1, 2, 3\}$  与  $\{f_i, f_{ij} : i, j = 1, 2\}$ . 我们有

$$\begin{aligned} df &= \tilde{f}_1\theta_1 + \tilde{f}_2\theta_2 + \tilde{f}_3\theta_3 \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \tilde{f}_i(\delta_{ij} - th_{ij})\omega_j + \tilde{f}_3dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

据此不难看出

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{i=1}^2 \tilde{f}_i(\delta_{ij} - th_{ij}), \quad j = 1, 2, \\ \tilde{f}_3 &= \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中  $\frac{\partial f}{\partial t}$  表示  $f$  关于  $\mathbf{e}_3$  的方向导数.

再由关于  $\tilde{f}_1$ 、 $\tilde{f}_2$ 、 $\tilde{f}_3$  的协变导数的公式,

$$d\tilde{f}_i + \sum_{j=1}^3 \tilde{f}_j\theta_{ji} = \sum_{j=1}^3 \tilde{f}_{ij}\theta_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

利用 (2.4)、(2.7) 两式, 并令  $t = 0$ , 可得

$$d\tilde{f}_i = df_i + \sum_{j=1}^2 f_j h_{ji} dt \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

因此, 结合 (2.8)、(2.9) 两式, 就有

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11} &= f_{11} - h_{11}\frac{\partial f}{\partial t}, \\ \tilde{f}_{22} &= f_{22} - h_{22}\frac{\partial f}{\partial t}, \\ \tilde{f}_{33} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

于是我们最终得到

$$\Delta f = \Delta_{\Sigma} f - 2H\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e}_3^2}. \quad (2.11)$$

这里  $H$  是曲面  $\Sigma$  的平均曲率,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_3}$  表示函数  $f$  沿  $\mathbf{e}_3$  的方向导数.

下面我们给出的 Alexandrov 定理的证明是属于 R. Reilly[6] 的.

**定理 2.1**(Alexsandrov) 设  $\Sigma$  为  $E^3$  的嵌入 (即没有自交点) 紧致曲面, 如果  $\Sigma$  的平均曲率  $H$  为常数, 则  $\Sigma$  是球面.

**证明** 由于  $\Sigma$  是嵌入的紧致曲面,  $\Sigma$  包围一个有界区域  $D$ . 设  $\mathbf{e}_3$  是  $\Sigma$  的单位内法向 (指向  $D$  内部的法向量), 不难发现, 曲面  $\Sigma$  关于  $\mathbf{e}_3$  的平均曲率  $H$  是正常数. 令  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$  是曲面  $\Sigma$  的外法向, 将 (2.11) 式改写为

$$\Delta f = \Delta_{\Sigma} f + 2H \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n}^2}. \quad (2.12)$$

在区域  $D$  上考虑下列 Poisson 方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 1, & \text{在 } D \text{ 上;} \\ f = 0, & \text{在 } \partial D = \Sigma \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.13)$$

根据椭圆型偏微分方程理论, 问题 (2.13) 有惟一解  $f$ . 将  $f$  代入到 (2.12), 因为  $f$  在  $\Sigma$  上恒为零, 所以  $\Delta_{\Sigma} f = 0$ , 我们有

$$2H \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n}^2} = 1. \quad (2.14)$$

上式两边同乘  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$  并在  $\Sigma$  上积分, 得到

$$2H \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 dA + \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n}^2} dA = \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dA. \quad (2.15)$$

由 Green 公式,

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dA = \int_D \Delta f dV = \int_D dV = V(D \text{ 的体积}), \quad (2.16)$$

这里利用了  $\Delta f = 1$ .

现在我们估计 (2.15) 式的左端两项. 对第一项利用 Schwarz 不等式

$$\left( \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dA \right)^2 \leq \int_{\Sigma} 1 \cdot dA \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 dA,$$

可以得到

$$2H \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 dA \geq 2H \frac{\left( \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dA \right)^2}{A} = \frac{2HV^2}{A}, \quad (2.17)$$

这里最后一个等式利用了 (2.16) 式,  $A$  是  $\Sigma$  的面积.

另一方面, 由于  $\Delta|\mathbf{r}|^2 = \Delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 6$ , 利用 Green 公式有

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \int_D \Delta \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle dV = \frac{1}{6} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle dA \\ &= \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dA = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \varphi dA, \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中  $\varphi = -\langle \mathbf{r}, \mathbf{e}_3 \rangle$  是曲面  $\Sigma$  的支撑函数. 根据第七章的积分公式 (4.5), 可得

$$V = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \varphi dA = \frac{1}{3H} \int_{\Sigma} H \varphi dA = \frac{A}{3H}. \quad (2.19)$$

将 (2.19) 式代入到 (2.17) 式, 即得

$$2H \cdot \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 dA \geq \frac{2}{3} V. \quad (2.20)$$

我们来估计 (2.15) 式左端的第二项. 令

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2, \quad (2.21)$$

因为  $f$  在  $\Sigma$  上恒为零, 所以在  $\Sigma$  上有

$$|\nabla f|^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)^2. \quad (2.22)$$

因此根据 Green 公式, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n}^2} dA &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} |\nabla f|^2 dA \\ &= \frac{1}{2} \int_D \Delta |\nabla f|^2 dV, \end{aligned} \quad (2.23)$$



但

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right) \\
 &= \sum_{i=1}^3\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f) + \sum_{i,j=1}^3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2,
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

更进一步, 利用 Schwarz 不等式有

$$\sum_{i,j=1}^3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 \geq \sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)^2 = \frac{1}{3}. \tag{2.25}$$

综合以上三式我们得到

$$\int_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}dA \geq \frac{1}{3}V. \tag{2.26}$$

将 (2.20) 式和 (2.26) 式代入到 (2.15) 式中, 可得

$$V \geq \frac{2}{3}V + \frac{1}{3}V = V, \tag{2.27}$$

所以上所有不等式必须为等式. 特别, (2.25) 式中的不等式均成为等式, 这意味着

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} &= 0, \quad \text{当 } i \neq j; \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

(2.28) 式表明  $f$  为二次函数, 即

$$f = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^3x_i^2 + \sum_{i=1}^3a_ix_i + b. \tag{2.29}$$

但  $f$  在  $\Sigma$  上恒为零, 所以  $\Sigma$  满足方程

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^3x_i^2 + \sum_{i=1}^3a_ix_i + b = 0, \tag{2.30}$$

这恰好说明  $\Sigma$  是  $E^3$  的球面. 定理得证.

## §9.3 附录：常平均曲率环面

最后我们简要介绍如何利用可积非线性偏微分方程，构造  $E^3$  中的常平均曲率环面。

设  $\Sigma$  是  $E^3$  的一个紧致曲面，如果  $\Sigma$  的亏格为 1，则

$$\Sigma = \mathbf{C}/\Gamma, \quad (3.1)$$

其中  $\Gamma = \{ma + nb : m, n \in \mathbf{Z}, a, b \text{ 是给定的非零复数}, a/b \notin \mathbf{R}\}$  是复平面的格子群。

设  $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \Sigma$  是覆盖映射，则  $\pi$  在格子群  $\Gamma$  作用下不变，即  $\pi$  满足  $\pi(z + z_0) = \pi(z)$ ,  $\forall z_0 \in \Gamma$ . 如果视  $\pi = \pi(u, v)$  ( $z = u + iv$ )，则  $\pi$  是一个关于  $(u, v)$  的双周期映射。因此，曲面  $\Sigma$  有定义在复平面  $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$  上的参数表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \Sigma \subset E^3, \quad (3.2)$$

其中  $\mathbf{r}$  的每一个分量函数都是双周期的。

以下设曲面  $\Sigma$  具有常平均曲率，由命题 1.3， $\Sigma$  的 Hopf 微分  $\Psi = Q(dz)^2$  是环面上的全纯二次微分式，因此  $Q$  是  $\mathbf{C}$  上的解析函数。但由于  $Q$  也是双周期的，所以  $Q$  是常数。显然  $Q$  不能为 0，因为  $\Sigma$  不是全脐点曲面。

不妨设  $Q = \frac{1}{2}$ ， $H = 1$ ，令  $\Sigma$  的度量  $ds^2 = e^{2f}|dz|^2$ ，在 (1.10) 的 Gauss 方程中取  $\lambda = e^f$ ，可得

$$f_{uu} + f_{vv} = (e^{-2f} - e^{2f}) = -2 \sinh 2f. \quad (3.3)$$

因此，如果  $\Sigma$  是  $E^3$  的常平均曲率环面，它的度量  $ds^2 = e^{2f}|dz|^2$ ，则  $f$  是定义在平面上的双周期函数，且满足方程 (3.3)。

反之，我们可以通过如下步骤，构造  $E^3$  的常平均曲率环面：

(1) 求方程 (3.3) 的双周期解  $f$ ；

(2) 在标架运动方程 (1.9) 中取  $\lambda = e^f, Q = \frac{1}{2}, H = 1$ ，并求它在格子群  $\Gamma$  作用下不变的解，

这样将得到一个  $E^3$  的常平均曲率环面。

Wente[5] 正是遵循这条路子构造出常平均曲率环面。下面我们将简要介绍如何求满足条件 (1) 和 (2) 的一个特解。事实上，如果假设曲面  $\Sigma$  有一族曲率线是平面曲线，则方程 (3.3) 可约化为常微分方程组求解之。

在运动方程 (1.9) 中令  $\lambda = e^f$ ,  $Q = \frac{1}{2}$ ,  $H = 1$ , 则  $M = 0$ , 这意味着  $(u, v)$  是曲率线坐标, 可将方程 (1.9) 改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= f_u \mathbf{r}_u - f_v \mathbf{r}_v + (e^{2f} + 1) \mathbf{n}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= f_v \mathbf{r}_u + f_u \mathbf{r}_v, \\ \mathbf{r}_{vv} &= f_u \mathbf{r}_u - f_v \mathbf{r}_v + (e^{2f} - 1) \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_u &= -(1 + e^{-2f}) \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{n}_v = -(1 - e^{-2f}) \mathbf{r}_v. \end{aligned} \quad (3.4)$$

设  $v$  线是平面曲线, 则  $(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_{vvv}) = 0$ , 利用 (3.4) 可得

$$(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_{vvv}) = \left[ 2e^{2f} f_u f_v - (e^{2f} - 1)(f_{uv} - f_u f_v) \right] (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}),$$

所以我们有  $\cosh f f_u f_v = \sinh f f_{uv}$ , 这等价于

$$\left( \ln \tanh \frac{f}{2} \right)_{uv} = 0. \quad (3.5)$$

对 (3.5) 式积分, 就有

$$\tanh \frac{f}{2} = p(u) \cdot q(v), \quad (3.6)$$

其中  $p, q$  是两个待定函数. 由于  $f$  同时满足方程 (3.3), 将 (3.6) 式代入方程 (3.3), 经过一些计算可得到函数  $p, q$  满足下列常微分方程

$$(p')^2 = -\lambda p^4 + ap^2 + \mu, \quad (3.7)$$

$$(q')^2 = -\mu q^4 + bq^2 + \lambda, \quad (3.8)$$

这里  $a, b, \lambda, \mu$  是常数, 且

$$a + b + 4 = 0. \quad (3.9)$$

方程 (3.7) 与 (3.8) 的通解可用椭圆积分表示, 由此出发去求解曲面标架的运动方程将非常复杂. 但在  $v$  曲线是平面曲线的假设下, 曲面本身具有如下两个几何特性:

(a) 所有的  $u$  曲线是球面曲线, 且  $u$  线所在球面的球心落在同一条直线  $l$  上;

(b) 直线  $l$  与  $v$  线所在的平面平行, 利用这两个性质, 可以给出常平均曲率环面位置向量的一个简单表示. 进而利用椭圆积分的性质, 可以求出  $E^3$  的一族常平均曲率环面, 详细过程请参见文献 [2].

### 参考文献:

- [1] Hopf H. Differential geometry in the large (Lect.Notes Math.1000). 2nd editon. Berlin-Heidelberg: Springer, 1989
- [2] Walter R. Explicit examples to the H-problem of Heinz Hopf. Geometriae Dedicata, 23: 187-213
- [3] Bobenko A I. All constant mean curvature tori in  $\mathbf{R}^3, S^3, H^3$  in terms of theta-functions. Math Ann, 290: 209-245
- [4] Pinkall U, Sterling I. On the classification of constant mean curvature tori. Ann Math, 130: 407-451
- [5] Wente H C. Counterexample to a conjecture of H.Hopf. Pacific J. Math, 121: 193-243
- [6] Reilly R. Applications of the Hessian operator in a Riemannian Manifold. Indiana Univ Math J, 26: 459-472

## 第十章 极小曲面

极小曲面是一类非常重要的曲面，关于极小曲面的一个背景是肥皂泡问题：将一条铁丝弯成空间简单闭曲线，放入到肥皂溶液中，再将铁丝取出时，铁丝上会张成一张肥皂膜并以铁丝为边界。由于表面张力的作用，肥皂膜的面积最小。这个问题的数学提法是所谓的经典 Plateau 问题：给定空间的一条可求长 Jordan 曲线  $C$ ，是否存在一个以  $C$  为边界的曲面  $\Sigma$ ，它在所有以  $C$  为边界的曲面中面积最小？

Lagrange 最早研究了这个问题，他将极小曲面与曲面面积的变分问题联系起来，开始引起几何学家与分析学家的注意。关于极小曲面的研究从那时起一直持续到当代，它涉及到数学的许多方面。要全面介绍有关极小曲面的理论，或许需要许多本专著，我们这里只能介绍有关完备极小曲面的几个主要问题，有兴趣的读者，可以参阅有关著作，见本章后面所列的参考文献 [1]-[3]。

### §10.1 极小图

$E^3$  中平均曲率处处恒为零的曲面称为极小曲面，这一节我们只讨论一种简单的情形：极小曲面是一个函数的图。

设曲面  $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  是函数  $f(x, y)$  的图，为方便起见，记

$$p = f_x, \quad q = f_y, \quad r = f_{xx}, \quad s = f_{xy}, \quad t = f_{yy}, \quad (1.1)$$

曲面  $\Sigma$  的第一基本形式为

$$I = ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = (1 + p^2)dx^2 + 2pq \, dx dy + (1 + q^2)dy^2, \quad (1.2)$$

另记

$$W = |\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad (1.3)$$

则曲面  $\Sigma$  的单位法向量场

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y|} = \frac{1}{W}(-p, -q, 1), \quad (1.4)$$

因此  $\Sigma$  的第二基本形式可写为

$$\text{II} = -\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{e}_3 \rangle = \frac{1}{W} (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2). \quad (1.5)$$

利用 (1.2)、(1.4) 两式, 可求出  $\Sigma$  的平均曲率

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{tr} \text{II} \text{I}^{-1} = \frac{1}{2W^3} \text{tr} \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2W^3} [(1+q^2)r - 2pq s + (1+p^2)t] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{W} \right) \right]. \end{aligned}$$

所以曲面  $\Sigma$  是极小曲面当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{W} \right) = 0. \quad (1.6)$$

容易验证, 这等价于

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0. \quad (1.7)$$

方程 (1.7) 称为极小曲面方程.

在继续讨论极小曲面之前, 我们先来看一些古典极小曲面的例子.

**例 1.1** 函数  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  满足极小曲面方程, 相应的极小曲面

$$\mathbf{r}(x, y) = \left( x, y, \arctan \frac{y}{x} \right)$$

称为螺旋面 (Helicoid), 它是惟一的直纹极小曲面.

**例 1.2** 函数  $f(x, y) = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$  满足极小曲面方程, 相应的极小曲面

$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z$$

称为悬链面 (Catenoid), 它是惟一的旋转极小曲面.

**例 1.3** 极小曲面方程满足  $f(x, y) = h(x) + k(y)$  的解为

$$f(x, y) = \ln \frac{\cos x}{\cos y},$$

相应的极小曲面称为 Scherk 曲面, 它是惟一的双周期平移极小曲面.

### 1. 极小图的等温坐标系

记极小图  $\Sigma$  的 Laplace 算子为  $\Delta_\Sigma$ ，因为  $\Sigma$  的第一基本形式的系数矩阵  $\mathbf{g}$  和它的逆  $\mathbf{g}^{-1}$  分别为

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{bmatrix},$$

由第五章 §6 可知，对曲面  $\Sigma$  上的任意函数  $F$ ，

$$\Delta_\Sigma F = \frac{1}{W} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+q^2}{W} F_x - \frac{pq}{W} F_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{pq}{W} F_x + \frac{1+p^2}{W} F_y \right) \right\}. \quad (1.8)$$

另一方面，由第九章的命题 1.1，曲面  $\Sigma$  的位置向量  $\mathbf{r}$  满足

$$\Delta_\Sigma \mathbf{r} = (\Delta_\Sigma x, \Delta_\Sigma y, \Delta_\Sigma f) = 2H \mathbf{e}_3 = 0.$$

将  $F = x$  和  $F = y$  分别代入 (1.8) 式，可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1+q^2}{W} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{-pq}{W} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{-pq}{W} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1+p^2}{W} = 0. \quad (1.10)$$

(读者可以验证，将  $F = f$  代入 (1.8) 式将得到方程 (1.6).)

当参数  $(x, y)$  的定义域是单连通时，从 (1.9) 式可推出方程

$$\xi_x = \frac{1+p^2}{W}, \quad \xi_y = \frac{pq}{W} \quad (1.11)$$

有解  $\xi = \xi(x, y)$ ；同样从 (1.10) 式可以推出方程

$$\eta_x = \frac{pq}{W}, \quad \eta_y = \frac{1+q^2}{W} \quad (1.12)$$

有解  $\eta = \eta(x, y)$ ；又由于  $\xi_y = \eta_x$ ，所以存在函数  $\varphi = \varphi(x, y)$  满足

$$\varphi_x = \xi, \quad \varphi_y = \eta. \quad (1.13)$$



容易验证, 函数  $\varphi$  满足

$$\varphi_{xx} = \frac{1+p^2}{W}, \quad \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \frac{pq}{W}, \quad \varphi_{yy} = \frac{1+q^2}{W}, \quad (1.14)$$

因此函数  $\varphi$  的 Hessian 矩阵

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+p^2}{W} & \frac{pq}{W} \\ \frac{pq}{W} & \frac{1+q^2}{W} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

是正定矩阵, 且

$$\det H_\varphi = \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{W^2} - \frac{p^2q^2}{W^2} = 1. \quad (1.16)$$

考虑如下 Levy 变换

$$u = x + \xi(x, y), \quad v = y + \eta(x, y). \quad (1.17)$$

由于

$$\begin{aligned} du &= dx + \xi_x dx + \xi_y dy = \left(1 + \frac{1+p^2}{W}\right) dx + \frac{pq}{W} dy, \\ dv &= dy + \eta_x dx + \eta_y dy = \frac{pq}{W} dx + \left(1 + \frac{1+q^2}{W}\right) dy, \end{aligned}$$

Levy 变换的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{W} & \frac{pq}{W} \\ \frac{pq}{W} & 1 + \frac{1+q^2}{W} \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

由此易得  $\det \mathbf{J} = 2 + \frac{2+p^2+q^2}{W} > 0$ , 因此  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  是参数变换.

**命题 1.4**  $(u, v)$  是极小曲面  $\Sigma$  的等温参数.

**证明** 利用以上各式直接计算可得

$$du^2 + dv^2 = \left(\frac{1+W}{W}\right)^2 \left[ (1+p^2)dx^2 + 2pq \, dx dy + (1+q^2)dy^2 \right], \quad (1.19)$$

所以在参数  $(u, v)$  下, 极小曲面  $\Sigma$  的第一基本形式 (1.2) 可写为

$$I = \left(\frac{W}{1+W}\right)^2 (du^2 + dv^2). \quad (1.20)$$

这表明  $(u, v)$  是曲面  $\Sigma$  的等温参数. 证毕.

**命题 1.5** 如果  $f$  是定义在全平面  $\mathbf{R}^2$  上极小曲面方程的解, 则 Levy 变换  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  是  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  的 1-1 对应.

**证明** 记 Levy 变换  $(u, v) = L(x, y)$ , 设  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1)$  是  $xy$  平面的任意两点,

$$\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0, 1]$$

是联结这两点的直线.

考虑函数  $h(t) = \varphi \circ \gamma(t)$ , 其中  $\varphi$  由 (1.13) 定义. 由于

$$h'(t) = (x_1 - x_0)\varphi_x(\gamma(t)) + (y_1 - y_0)\varphi_y(\gamma(t)),$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= (x_1 - x_0)^2\varphi_{xx}(\gamma(t)) + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\varphi_{xy}(\gamma(t)) \\ &\quad + (y_1 - y_0)^2\varphi_{yy}(\gamma(t)), \end{aligned}$$

由此可见,  $h''(t)$  是一个以矩阵  $H_\varphi$  (见 (1.15) 式) 为系数的二次型, 它必是正定的. 因此  $h'(1) \geq h'(0)$ . 由于  $\varphi_x = \xi, \varphi_y = \eta$ , 有

$$\begin{aligned} h'(1) - h'(0) &= (x_1 - x_0)(\varphi_x(P_1) - \varphi_x(P_0)) \\ &\quad + (y_1 - y_0)(\varphi_y(P_1) - \varphi_y(P_0)) \\ &= (x_1 - x_0)(\xi(P_1) - \xi(P_0)) \\ &\quad + (y_1 - y_0)(\eta(P_1) - \eta(P_0)) \geq 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

于是利用上式可得

$$\begin{aligned} \|L(P_1) - L(P_0)\|^2 &= (u(P_1) - u(P_0))^2 + (v(P_1) - v(P_0))^2 \\ &= \left( (x_1 - x_0) + \xi(P_1) - \xi(P_0) \right)^2 \\ &\quad + \left( (y_1 - y_0) + (\eta(P_1) - \eta(P_0)) \right)^2 \\ &\geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \|P_1 - P_0\|^2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

所以 Levy 变换是单射.

(1.22) 式还表明, Levy 变换是使平面的欧氏距离增加的变换, 这说明  $uv$  平面的任意有界集合在 Levy 变换下的原像是有界集合, 所以 Levy 变换的像集是整个  $uv$  平面, 即 Levy 变换是满射. 命题证毕.

## 2. Bernstein 定理

**定理1.6(Bernstein)** 设  $f(x, y)$  是定义在全平面  $\mathbf{R}^2$  上的极小曲面方程的解, 则  $f$  为线性函数.

Bernstein 定理等价于: 如果  $f$  是定义在全平面上的极小曲面方程的一个解, 则相应的极小图是全测地曲面<sup>1</sup>. 下面我们将介绍两个证明.

**证明一(陈省身)** 设  $f(x, y): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  是极小曲面方程的一个解, 曲面  $\Sigma$  是  $f$  的极小图, 由  $\Sigma$  第一基本形式的表达式 (1.2) 可以看出,  $\Sigma$  是一个完备曲面. 设  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  是 Levy 变换 (1.17), 则  $(u, v)$  是  $\Sigma$  的等温参数,  $\Sigma$  的第一基本形式为  $ds^2 = \left(\frac{W}{1+W}\right)^2 (du^2 + dv^2)$ , 且  $(u, v)$  定义在全平面  $\mathbf{R}^2$  上.

由 Gauss 方程, 在等温参数  $(u, v)$  下, 极小曲面  $\Sigma$  的 Gauss 曲率

$$K = -\left(\frac{1+W}{W}\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \ln \frac{W}{1+W}.$$

但极小曲面的 Gauss 曲率  $K \leq 0$ , 所以

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \ln \frac{W}{1+W} \geq 0.$$

这表明函数  $\ln \frac{W}{1+W} = -\ln \left(1 + \frac{1}{W}\right)$  是全平面  $\mathbf{R}^2$  上负的次调和函数. 根据椭圆方程的 Liouville 定理,  $\ln \left(1 + \frac{1}{W}\right) = \text{常数}$ , 即  $W = \text{常数}$ , 于是  $\Sigma$  的 Gauss 曲率  $K = 0$ . 由  $\Sigma$  是极小曲面容易推出它是全测地的. 证毕.

**证明二(Nitsche)** 从 Levy 变换 (1.17) 出发, 我们将证明函数

$$F(u, v) = \left(x - \xi(x, y)\right) - i\left(y - \eta(x, y)\right) \quad (1.23)$$

<sup>1</sup>  $E^3$  的全测地曲面是指第二基本形式恒为零的曲面.

是  $w = u + iv$  的复解析函数, 即要证明函数

$$\begin{aligned}\alpha(u, v) &= x - \xi(x, y) = 2x - u, \\ \beta(u, v) &= -(y - \eta(x, y)) = -(2y - v)\end{aligned}\quad (1.24)$$

关于  $(u, v)$  满足 Cauchy-Riemann 方程.

设函数  $\varphi = \varphi(x, y)$  由方程 (1.13) 定义, 由 (1.18) 式, Levy 变换的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & 1 + \varphi_{yy} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

由 (1.14) 式可得

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1,$$

因此  $\det \mathbf{J} = 2 + \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$  且

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} 1 + \varphi_{yy} & -\varphi_{xy} \\ -\varphi_{xy} & 1 + \varphi_{xx} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

由此可以直接验证

$$\alpha_u = \beta_v = \frac{2}{\det \mathbf{J}}(1 + \varphi_{yy}) - 1, \quad \alpha_v = -\beta_u = -\frac{2\varphi_{xy}}{\det \mathbf{J}}. \quad (1.27)$$

这就证明了  $\alpha$ 、 $\beta$  满足 Cauchy-Riemann 方程.

利用 (1.27) 式直接计算, 可得

$$F'(w) = (\alpha + i\beta)_w = \alpha_u - i\alpha_v = \frac{\varphi_{yy} - \varphi_{xx} + 2i\varphi_{xy}}{\mathbf{J}},$$

所以我们有

$$|F'(w)|^2 = \frac{(\varphi_{yy} - \varphi_{xx})^2 + 4\varphi_{xy}^2}{(2 + \varphi_{xx} + \varphi_{yy})^2} = 1 - \frac{4}{2 + \varphi_{xx} + \varphi_{yy}} < 1,$$

这说明  $F'(w)$  是全平面上的有界解析函数, 根据解析函数的 Liouville 定理可知  $F'(w)$  是常数. 这推出

$$\varphi_{xx} = \frac{|1 - F'|^2}{1 - |F'|^2}, \quad \varphi_{xy} = i \frac{\bar{F}' - F'}{1 - |F'|^2}, \quad \varphi_{yy} = \frac{|1 + F'|^2}{1 - |F'|^2}$$

均为常数. 由此利用 (1.14) 式不难得出  $p = f_x$ 、 $q = f_y$  均为常数, 所以  $f$  是线性函数. 证毕.

**注** 证明二事实上源于如下的 Jorgens 定理:

**定理(Jorgens)** 如果定义在整个  $xy$  参数平面上的函数  $\varphi(x, y)$  满足

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1,$$

且  $\varphi_{xx} > 0$ , 则  $\varphi_{xx}$ 、 $\varphi_{xy}$ 、 $\varphi_{yy}$  必为常数.

## §10.2 极小曲面的 Weierstrass 表示

现在起我们考虑  $\Sigma$  是  $E^3$  的一般极小曲面.

对  $E^3$  的一般曲面而言, 要证明等温参数的存在性十分困难, 但对于极小曲面, 可以很容易证明等温参数存在.

**命题 2.1**  $E^3$  的任何极小曲面上存在局部等温参数.

**证明** 当极小曲面是非参数曲面时, 由 (1.20) 式我们已经证明这类极小曲面存在等温参数. 当极小曲面是参数曲面时, 曲面上的每一点都有一个邻域, 使得这个邻域可以表示某个函数的图, 所以命题成立. 证毕.

设  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  是极小曲面  $\Sigma$  的位置向量, 从第九章的命题 1.1 可得  $\Delta_\Sigma \mathbf{r} = 0$ . 如果取  $\Sigma$  的等温坐标参数  $(u, v)$ , 则第一基本形式为

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \quad (2.1)$$

此时

$$\Delta_\Sigma = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right), \quad (2.2)$$

因此  $\Sigma$  的坐标函数  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  是关于参数  $(u, v)$  的调和函数.

令

$$\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

不难看出  $\varphi_k (k = 1, 2, 3)$  是  $z = u + iv$  的解析函数, 且

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0. \quad (2.4)$$

事实上,

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi_k}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) x_k = 0;$$

如果令

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} - i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad (2.5)$$

则

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= \langle \Phi, \Phi \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_u - i \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u - i \mathbf{r}_v \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle - \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle - 2i \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

这里最后一个等式是因为  $(u, v)$  是等温坐标.

将 (2.4) 式改写为

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2. \quad (2.6)$$

因为  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \neq \mathbf{0}$ , 不妨设

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}. \quad (2.7)$$

则从 (2.6) 式得

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -f g^2. \quad (2.8)$$

再结合 (2.7)、(2.8) 两式可得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} f (1 - g^2), \\ \varphi_2 &= \frac{i}{2} f (1 + g^2), \\ \varphi_3 &= f g. \end{aligned} \quad (2.9)$$

从  $\varphi_k$  的定义 (2.3) 可以知道, 曲面的坐标函数

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int f(1 - g^2) dz, \\ x_2 &= \operatorname{Re} \frac{i}{2} \int f(1 + g^2) dz, \\ x_3 &= \operatorname{Re} \int fg dz, \end{aligned} \quad (2.10)$$

这里 “Re” 表示实部.

公式 (2.10) 称为极小曲面的 Weierstrass 表示. 下面我们对公式 (2.10) 做进一步的解释.

首先, 曲面  $\Sigma$  的第一基本形式为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{2} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) |dz|^2 \\ &= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

由此可得  $\Sigma$  的 Gauss 曲率为

$$K = - \left\{ \frac{4|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right\}^2. \quad (2.12)$$

其次, 我们来讨论  $g$  的几何意义. 由 (2.5) 式,

$$\bar{\Phi} = \mathbf{r}_u + i\mathbf{r}_v,$$

因此

$$\begin{aligned} \Phi \wedge \bar{\Phi} &= (\mathbf{r}_u - i\mathbf{r}_v) \wedge (\mathbf{r}_u + i\mathbf{r}_v) \\ &= 2i\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = 2i|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.13)$$

这里  $\mathbf{e}_3$  为曲面  $\Sigma$  的单位法向量. 利用  $\varphi_k$  的表达式 (2.3), 不难求出

$$\begin{aligned} \Phi \wedge \bar{\Phi} &= (\varphi_2 \bar{\varphi}_3 - \bar{\varphi}_2 \varphi_3, -\bar{\varphi}_3 \varphi_1 + \varphi_3 \bar{\varphi}_1, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \varphi_2) \\ &= \frac{i}{2} |f|^2 (1 + |g|^2) (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, 1 - |g|^2), \end{aligned} \quad (2.14)$$



于是得到

$$e_3 = \left( \frac{2 \operatorname{Re} g}{1 + |g|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{1 + |g|^2}, \frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2} \right). \quad (2.15)$$

(2.15) 式表明,  $g$  为单位法向量的球极投影.

下面我们通过 Weierstrass 表示来讨论一些例子.

**例 2.2**  $f = 1$ ,  $g = 0$ , 相应的极小曲面为平面.

**例 2.3**  $f = 1$ ,  $g = z$ , 定义域为复平面  $\mathbf{C}$ , 相应的极小曲面为 Enneper 曲面.

**例 2.4**  $f = 1$ ,  $g = \frac{1}{z}$ , 定义域为  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ , 相应的极小曲面为螺旋面.

**例 2.5**  $f = i$ ,  $g = \frac{1}{z}$ , 定义域为  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ , 相应的极小曲面为悬链面.

**例 2.6**  $f = \frac{1}{1 - z^4}$ ,  $g = z$ , 定义域为  $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ , 相应的极小曲面是 Scherk 曲面.

在以上这些例子中, 平面、螺旋面、悬链面和 Scherk 曲面都是嵌入曲面 (没有自相交的曲面), Enneper 是浸入曲面. 很长一段时间以来, 有人认为嵌入的完备极小曲面只能是上述例子之一, 直到 1980 年左右, 巴西青年数学家 Costa 构造出一个亏格为 1 的完备极小曲面的例子, 其后由 Hoffman 与 Meeks 证明了它是嵌入的 (见 [4]).

**例 2.7 (Costa 曲面)** 可以利用 Weierstrass 椭圆函数给出 Costa 曲面的 Weierstrass 表示. 设  $\bar{\Sigma} = \mathbf{C}/\Gamma$ ,  $\Gamma = \{m + ni : m, n \in \mathbf{Z}\}$ , 是标准环面,  $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \bar{\Sigma}$  是投射. 以  $\Gamma$  为周期的 Weierstrass 函数定义为

$$\mathfrak{B}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left( \frac{1}{(z - m - ni)^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right).$$

因此可以定义函数  $\bar{\mathfrak{B}} : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ , 满足  $\bar{\mathfrak{B}} \circ \pi = \mathfrak{B}$ .

$z = 0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}$  是  $\mathfrak{B}'$  的零点. 令  $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \{\pi(0), \pi(\frac{1}{2}), \pi(\frac{i}{2})\}$ , 在  $\Sigma$  上定义  $g(z) = A/\bar{\mathfrak{B}}'(z)$ ,  $f(z) = \bar{\mathfrak{B}}(z)$  或者

$$g(\pi(z)) = A/\mathfrak{B}'(z), \quad f(\pi(z)) = \mathfrak{B}(z), \quad (\text{其中 } A \text{ 是实常数})$$

代入 Weierstrass 表示公式 (2.10), 所得到的极小曲面称为 Costa 曲面. 关于 Costa 曲面的详细讨论可见 [12].

从以上的讨论可以看出, Weierstrass 表示建立了极小曲面理论与单复变函数理论的联系, 因而可以利用复变函数理论研究极小曲面问题.

**定理 2.8**(Heinz 估计) 设  $z = \psi(x, y)$  是定义在圆盘  $D(r) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$  上的极小曲面方程的解,  $P_0 = (0, 0, \psi(0, 0))$ , 则极小曲面  $\Sigma = \{x, y, \psi(x, y)\}$  在  $P_0$  点的 Gauss 曲率满足

$$|K(P_0)| \leq \frac{16}{r^2}.$$

**证明** 设  $(u, v) = L(x, y)$  是 Levy 变换 (1.17), 记  $z = u + iv$ . 我们继续使用上一节的记号:

$$p = \psi_x, \quad q = \psi_y, \quad W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

下面我们求极小曲面  $\Sigma$  的 Weierstrass 表示. 因为

$$\varphi_1 - i\varphi_2 = x_u - ix_v - i(y_u - iy_v),$$

$$\varphi_3 = \psi_u - i\psi_v,$$

利用 Levy 变换的 Jacobi 矩阵 (1.25), 不难求出

$$x_u - ix_v - i(y_u - iy_v) = \frac{q^2 - p^2 + 2ipq}{(1 + W)^2} = \frac{(q + ip)^2}{(1 + W)^2}, \quad (2.16)$$

$$\psi_u - i\psi_v = \frac{p - iq}{1 + W}, \quad (2.17)$$

所以由 (2.7) 式可知,  $\Sigma$  的 Weierstrass 表示由

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 = \frac{(q + ip)^2}{(1 + W)^2}, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{p + iq}{1 - W} \quad (2.18)$$

给出.

由上式可见,  $g$  是全纯函数且

$$|g|^2 = \frac{p^2 + q^2}{(1 - W)^2} = \frac{W^2 - 1}{(W - 1)^2} = \frac{W + 1}{W - 1} > 1. \quad (2.19)$$

令  $h = \frac{1}{g}$ ，利用 Gauss 曲率的表达式 (2.12) 并结合 (2.18) 式，可得  $\Sigma$  的 Gauss 曲率

$$\begin{aligned} K &= -\left\{ \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right\}^2 \\ &= -\left\{ \frac{4|h'| |g|^2}{|f|(1+|g|^2)^2} \right\}^2 \\ &= -|h'|^2 \left(1 + \frac{1}{W}\right)^4. \end{aligned} \quad (2.20)$$

另一方面，记  $\Omega = L(D(r))$  是 Levy 变换的像集，不妨设  $L(0,0) = (0,0)$ ，由 (1.22) 式知  $\Omega \supset D(r) = \{u^2 + v^2 < r^2\}$ 。由于  $h(z)$  是  $\Omega$  上的解析函数且  $|h| < 1$ ，令

$$G(z) = \frac{h(rz) - c_0}{1 - \bar{c}_0 h(rz)}, \quad (2.21)$$

其中  $c_0 = h(0)$ 。  $G(z)$  是映射  $z \rightarrow w = h(rz)$  与映射  $w \rightarrow \frac{w - c_0}{1 - \bar{c}_0 w}$  的复合，因此  $G(z)$  是单位圆盘  $D(1)$  到自身的解析映射，根据 Schwarz 引理 (见 [11])， $|G'(0)| \leq 1$ 。

因为  $G'(0) = \frac{1}{1 - |c_0|^2} \cdot h'(0) \cdot r$ ，所以我们有

$$|h'(0)| \leq \frac{1}{r}. \quad (2.22)$$

从 (2.20) 式就得出

$$|K(0)| \leq \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{1}{W(0)}\right)^4 \leq \frac{16}{r^2}. \quad (2.23)$$

证毕。

**注** 定理 2.8 说明，当极小图的半径越大时，它的中心就越平坦。如果极小图是定义在全平面上，在定理 2.8 中令  $r \rightarrow \infty$ ，就得到了 Bernstein 定理的另一个证明。

### §10.3 极小曲面的 Gauss 映射

这一节我们将深入研究极小曲面的 Gauss 映射。

首先,我们必须指出,极小曲面的 Gauss 映射的值分布与亚纯函数的值分布有着自然的联系,为此,我们先简单介绍一些必要的概念.

根据 Riemann-Koebe 单值化定理,任何一个曲面的万有覆盖空间必共形等价于复平面  $\mathbf{C}$ 、单位圆盘  $D(1)$ 、单位球面  $S^2$  三者之一.  $E^3$  的任意一个极小曲面  $\Sigma$  可通过下述复合映射,视作定义在它的万有覆盖空间  $\tilde{\Sigma}$  上的曲面,

$$\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\text{覆盖映射}} \Sigma \longrightarrow E^3. \quad (3.1)$$

由于极小曲面一定是非紧的,它的万有覆盖空间只能是  $\mathbf{C}$  或  $D(1)$ . 因此任何  $E^3$  的极小曲面都有定义在  $\mathbf{C}$  或者  $D(1)$  上的 Weierstrass 表示.

在 Weierstrass 表示公式 (2.10) 中,  $f$  是全纯函数、 $g$  是亚纯函数,  $g$  只有有限阶极点; 而且从 (2.8) 式可以看出,在  $g$  的  $m$  阶极点处,  $f$  有  $2m$  阶零点. 反过来,如果给定了  $f$ 、 $g$  满足上述要求,则公式 (2.10) 定义了  $E^3$  的一个极小曲面.

(2.15) 式表明,亚纯函数  $g$  是 Gauss 映射与球极投影的复合,即

$$g : \Sigma \xrightarrow{\text{Gauss 映射}} S^2 \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}, \quad (3.2)$$

这里  $\pi : S^2 \setminus (0,0,1) \rightarrow \mathbf{C}$ , 表示以原点为球心的单位球面关于北极的球极投影. 这说明 Gauss 映射的值分布与亚纯函数  $g$  的值分布是一致的.

Bernstein 定理是说完备的极小图一定是平面,从 (1.4) 式可以发现,极小图的 Gauss 映射像一定包含在  $S^2$  的某个开半球中. 据此 Nirenberg 猜测 (1950): 对  $E^3$  的完备极小曲面,如果 Gauss 映射像不取  $S^2$  上一个开集,则必为平面. 1959 年, R.Osserman 证明了这个猜测,并以此为起点开始了对  $E^3$  中完备极小曲面 Gauss 映射值分布的研究.

**定理 3.1** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中的一个完备极小曲面,如果  $\Sigma$  的 Gauss 映射像不取  $S^2$  的某一个开集,则  $\Sigma$  必是平面.

**证明** 设  $\Sigma$  的 Weierstrass 表示由函数  $f, g$  给出. 通过旋转变换,可以设 Gauss 映射不取的开集包含北极,这时  $g$  是有界的解析函数,  $f$  是非零解析函数,不妨设  $|g| \leq C$ .

因为通过 (3.1) 式拉到  $\Sigma$  的万有覆盖空间上看,极小性、完备性和 Gauss 映射的值分布不变,所以不妨设  $\Sigma$  是单连通的,因此  $\Sigma$  共形等价于  $\mathbf{C}$  或  $D(1)$ .

如果  $\Sigma \approx \mathbf{C}$ , 由 Liouville 定理,  $g$  必为常数, 从而  $\Sigma$  是平面. 如果  $\Sigma \approx D(1)$ , 这时由 (2.11) 式,  $\Sigma$  的度量

$$ds^2 = |f|^2(1 + |g|^2)^2 |dz|^2 \leq (1 + C^2)^2 |f|^2 |dz|^2, \quad (3.3)$$

而  $|f|^2 |dz|^2$  是平坦度量,  $D(1)$  上这样的度量是不完备的, (3.3) 式表明  $\Sigma$  的度量  $ds^2$  不完备, 与假设矛盾.

上述定理说明, 非平面的完备极小曲面的 Gauss 像在  $S^2$  一定是稠密的. 关于 Gauss 映射值分布的进一步结果由巴西数学家 Xavier[5] 得到, 他证明了: 如果  $\Sigma$  是  $E^3$  的非平面完备极小曲面, 则它的 Gauss 映射至多不取  $S^2$  上 6 个点. 1987 年, 日本数学家 Fujimoto[6] 得到了下面的最佳结果:

**定理 3.2**(Fujimoto) 设  $\Sigma$  是  $E^3$  的非平面完备极小曲面, 则  $\Sigma$  的 Gauss 映射至多不取  $S^2$  上 4 个点.

说 Fujimoto 的结果是最佳的, 是因为其余的情形都有现成的例子:

Schwarz 曲面	Gauss 映射取遍所有点;
Enneper 曲面	Gauss 映射不取 1 个点;
悬链面	Gauss 映射不取 2 个点;
Scherk 曲面	Gauss 映射不取 4 个点.

另外, Gauss 映射不取 3 个点的例子可见 [7].

Fujimoto 的证明基本遵循 Osserman 证明 Nirenberg 猜测的思想, 并用到了复变函数论的深刻结果. 下面我们将给出一个较为简单的证明, 首先介绍一些引理.

**定义 3.3** 设  $\Omega$  是复平面  $\mathbf{C}$  的一个区域,  $\Omega$  内的一条曲线  $\gamma(t)$  ( $t \geq 0$ ) 称为是发散路径(divergent path), 如果对  $\Omega$  的任意一个紧致子集  $\Omega_1$ , 存在  $t_0 > 0$  使得当  $t > t_0$  时,  $\gamma(t) \in \Omega \setminus \Omega_1$ .

可以证明:  $\Omega$  上的度量  $ds^2 = \lambda^2 dz d\bar{z}$  是完备的当且仅当对任意的发散路径  $\gamma(t)$ , 它的长度

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^{\infty} \lambda \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \infty.$$

**引理 3.4(Schwarz)** 设  $w = f(z)$  是圆盘  $D(R) = \{z : |z| < R < \infty\}$  上的解析函数,  $f$  的值域为  $U \subset \mathbf{C}$ ,  $ds = \frac{2R}{R^2 - |z|^2} |dz|$  是  $D(R)$  上的 Poincaré 度量. 设在  $U$  上有度量  $d\sigma = \lambda |dw|$ , 它的 Gauss 曲率  $K_\sigma$  有负的上界, 即  $K_\sigma < -B < 0$ , 则存在常数  $A$  使得

$$f^*(d\sigma) = (\lambda \circ f) |df| \leq A ds.$$

**证明** 考虑圆盘  $D(r)$  ( $r < R$ ) 上的 Poincaré 度量  $ds_r = \frac{2r}{r^2 - |z|^2} |dz|$ , 在  $D(r)$  上定义函数

$$F(z) = \frac{f^*(d\sigma)}{ds_r} = \frac{(\lambda \circ f) |f'|}{2r} (r^2 - |z|^2),$$

$F(z)$  在  $D(r)$  上非负、在边界上恒为零, 所以  $F$  在  $D(r)$  的内点  $z_0$  达到极大值, 于是

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln F(z) \right|_{z=z_0} \leq 0.$$

利用在等温坐标下的 Gauss 曲率公式, 展开上式可得

$$F(z_0) \leq B^{-\frac{1}{2}},$$

从而有

$$F(z) \leq F(z_0) \leq B^{-\frac{1}{2}},$$

令  $r \rightarrow R$  即证明了结论.

**引理 3.5** 设  $h$  是定义在  $D(R)$  上的解析函数, 且  $h$  不取 4 个值  $w_1$ 、 $w_2$ 、 $w_3$  和  $w_4$ , 则对  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4}$  有

$$\frac{(1 + |h(z)|^2)^{\frac{3}{2}-\varepsilon} |h'(z)|}{\prod_{j=1}^4 |h(z) - w_j|^{1-\varepsilon'}} \leq B \cdot \frac{2R}{R^2 - |z|^2},$$

其中  $B > 0$  为常数.

**证明** 假设  $h(z)$  不取  $m$  个点

$$w_1, w_2, \dots, w_m \quad (m \geq 4),$$



在区域  $U = \mathbf{C} \setminus \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  上构造度量

$$d\sigma = \prod_{j=1}^m \frac{(1 + |w - w_j|^{2\beta})^\gamma}{|w - w_j|^\alpha} |dw|,$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  是正常数. 不难算得, 当  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  满足条件

$$(1) \quad \alpha + \beta = 1,$$

$$(2) \quad m(\alpha - 2\beta\gamma) \geq \beta + 1$$

时, 度量  $d\sigma$  的 Gauss 曲率有负的上界.

对  $w = h(z)$  应用引理 3.4, 可得

$$\prod_{j=1}^m \frac{(1 + |h(z) - w_j|^{2\beta})^\gamma}{|h(z) - w_j|^\alpha} |h'(z)| \leq A \cdot \frac{2R}{R^2 - |z|^2}. \quad (3.4)$$

因为函数  $\prod_{j=1}^m (1 + |h(z) - w_j|^{2\beta})^\gamma$  与函数  $(1 + |h(z)|^2)^{m\beta\gamma}$  在  $h(z)$  趋于无穷时有相同的阶, 所以存在常数  $C$  使得

$$\prod_{j=1}^m (1 + |h(z) - w_j|^{2\beta})^\gamma \geq C(1 + |h(z)|^2)^{m\beta\gamma},$$

代入到 (3.4) 式得不等式

$$\frac{(1 + |h(z)|^2)^{m\beta\gamma}}{\prod_{j=1}^m |h(z) - w_j|^\alpha} |h'(z)| \leq B \cdot \frac{2R}{R^2 - |z|^2}. \quad (3.5)$$

特别, 在条件 (2) 中取等号并令  $\beta = \varepsilon'$ , 就有

$$m\beta\gamma = \frac{m-1}{2} - \frac{m+1}{2}\varepsilon',$$

取  $m = 4$  就得到引理的结论.

**注** 若记  $p = \left(\frac{m-1}{2} - \varepsilon\right)^{-1}$ , 可以看出, 只有当  $m \geq 4$  时才能取到充分小的  $\varepsilon$  使得  $p < 1$ .  $p < 1$  的条件在以下的证明中是本质的.

**引理 3.6** 设  $f(z)$  是单位圆盘  $D(1)$  上无零点的解析函数, 则度量

$$ds = |f(z)| \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^p |dz|$$



在  $p < 1$  时不完备.

**证明** 定义全纯函数

$$w = F(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi,$$

因为  $F'(z) = f(z) \neq 0$ ,  $F$  有逆映射  $z = G(w)$  使得  $G(0) = 0$  且  $|G(w)| = |z| < 1$ . 设  $R$  是  $G(w)$  在  $F$  的值域中定义的最大半径, 由 Liouville 定理可知  $R < \infty$ . 于是存在  $w_0$  使  $|w_0| = R$ ,  $G(w)$  不能延拓到  $w_0$  的邻域. 设  $\gamma$  是联结 0 和  $w_0$  的线段, 那么  $c = G \circ \gamma$  是单位圆盘  $D(1)$  上的发散路径, 其长度

$$L = \int_c |f(z)| \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^p |dz| = \int_0^{w_0} \left( \frac{2}{1 - |G(w)|^2} \right)^p |dw|.$$

由于  $G$  是解析函数且  $\lim_{w \rightarrow w_0} |G(w)| = 1$ , 所以当  $p < 1$  时上面的积分收敛, 从而度量  $ds$  不完备. 证毕.

**定理 3.2 的证明** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  的完备极小曲面, 它的 Gauss 映射不取  $S^2$  上 5 个点, 不妨设  $\Sigma$  单连通. 由单值化定理,  $\Sigma$  共形等价于  $\mathbf{C}$  或  $D(1)$ . 如果  $\Sigma$  的 Gauss 映射不取  $S^2$  上 5 个点, 经过适当的旋转, 使 Gauss 映射不取北极, 这样, 在 Weierstrass 表示中, 函数  $f$  和  $g$  都是解析函数, 且  $f$  无零点,  $g$  的值域不取  $\mathbf{C}$  上 4 个点.

如果  $\Sigma \approx \mathbf{C}$ ,  $g$  是  $\mathbf{C}$  上的解析函数, 由 Picard 定理,  $g$  不可能不取 4 个点, 矛盾. 如果  $\Sigma \approx D(1)$ , 设  $g$  的值不取的 4 个点为  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , 由引理 3.5, 对解析函数  $g$  成立不等式

$$\frac{(1 + |g(z)|^2)^{\frac{1}{p}}}{\prod_{j=1}^4 |g(z) - w_j|^{1-\varepsilon'}} |g'(z)| \leq B \cdot \frac{2}{1 - |z|^2}, \quad (3.6)$$

其中  $p = \left( \frac{3}{2} - \varepsilon \right)^{-1}$ , 取  $\varepsilon$  充分小使得  $p < 1$ .

以下分两种情况讨论:

(1) 设在  $D(1)$  上  $g'(z) \neq 0$ . 这时由不等式 (3.6) 可得

$$|f|(1 + |g|^2) \leq |h| \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^p, \quad p < 1, \quad (3.7)$$

这里  $h$  为某个无零点的解析函数. 由引理 3.6 知  $D(1)$  上的度量  $|h(z)| \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^p |dz|$  不完备, 从而  $\Sigma$  的度量  $ds^2 = |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2$  不完备, 矛盾.

(2) 设在  $D(1)$  上  $g'(z)$  有零点, 零点集  $E = \{z \in D(1) : g'(z) = 0\}$ . 取万有覆盖  $\pi: \tilde{D} \rightarrow D(1) \setminus E$ , 则  $\tilde{D}$  一定是单位圆盘. 在  $D(1) \setminus E$  上定义无零点解析函数

$$\varphi(z) = f^{\frac{1}{1-p}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^4 (g(z) - w_j)^{\frac{p}{1-p}(1-\varepsilon')}}{(g'(z))^{\frac{p}{1-p}}}, \quad (3.8)$$

其中  $p, \varepsilon'$  定义如前,  $p < 1$ . 记  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ , 对  $w = \tilde{\varphi}(z)$  重复引理 3.6 证明的前半部分过程, 得到解析函数  $\tilde{G} = \tilde{G}(w)$ ,  $\tilde{G}$  定义域的最大半径  $R$ 、以及使  $\tilde{G}$  不能向其邻域延拓的点  $w_0$ ,  $|w_0| = R$ . 记  $G = \pi \circ \tilde{G}$ , 则  $G$  的值域是  $D(1) \setminus E$ .

设  $\tilde{\gamma}$  是联结 0 与  $w_0$  的线段,  $\gamma = G(\tilde{\gamma}) = (\pi \circ \tilde{G})(\tilde{\gamma})$  是  $D(1) \setminus E$  中的曲线, 则  $\gamma$  的长度

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} |f|(1 + \beta|g|^2)|dz| \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} |f \circ G|(1 + |g \circ G|^2) \frac{|dw|}{|\varphi \circ G|} \\ &\stackrel{*}{=} \int_0^{w_0} \left[ \frac{(1 + |h(w)|^2)^{\frac{1}{p}}}{\prod_{j=1}^4 |h(w) - w_j|^{1-\varepsilon'}} |h'(w)| \right]^p |dw| \\ &\leq B \int_0^{w_0} \left( \frac{1}{R^2 - |w|^2} \right)^p |dw| < \infty, \end{aligned}$$

其中  $h(w) = g \circ G(w)$ ,  $p = \left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)^{-1}$ ,  $\varphi$  的选取是为了使标有 (\*) 号的等式成立, 最后一个不等式利用了引理 3.6.

如果  $\gamma$  是  $D(1)$  中的发散路径, 定理就证明了. 否则  $\gamma$  趋向于  $E$  中某一点  $z_0$ , 这时  $g'(z)$  在  $z_0$  点有展开式

$$g'(z) = a(z - z_0)^k + o(z - z_0), \quad a \neq 0, \quad k \geq 1.$$

于是在  $z_0$  点附近

$$g'(z)^{\frac{p}{1-p}} \sim b(z - z_0)^q, \quad q = \frac{kp}{1-p} > 2.$$

由  $\gamma$  与  $\varphi$  的定义, 有

$$R = \int_{\tilde{\gamma}} |dw| = \int_{\gamma} |\varphi| |dz| > B \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z - z_0|^2} = +\infty,$$

得到矛盾.

## §10.4 面积的变分与稳定极小曲面

这一节我们讨论与面积变分相关的一些问题.

设  $\Sigma$  是  $E^3$  的曲面,  $\mathbf{e}_3$  是  $\Sigma$  的单位法向,  $D$  是  $\Sigma$  上的一个紧致区域; 设  $f$  是  $\Sigma$  上的函数, 并且在  $D$  以外  $f \equiv 0$ . 曲面族

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r} + t f \mathbf{e}_3, \quad -\varepsilon < t < \varepsilon \quad (4.1)$$

称为  $\Sigma$  的法向变分. 更一般地, 曲面  $\Sigma$  的一个变分是指连续可微地依赖于参数  $t$  的一族曲面  $\Sigma_t$ ,  $-\varepsilon < t < \varepsilon$ , 使得  $\Sigma_0 = \Sigma$ , 且在一个紧致子集以外  $\Sigma_t$  与  $\Sigma$  一致 ( $\forall t$ ).

记  $\mathbf{r}_t$  为曲面变分  $\Sigma_t$  的位置向量, 显然  $\left. \frac{d\mathbf{r}_t}{dt} \right|_{t=0}$  是曲面  $\Sigma = \Sigma_0$  上的一个向量场, 称为变分  $\Sigma_t$  的变分向量场. 对法向变分 (4.1) 而言, 它的变分向量场是  $f\mathbf{e}_3$ .

对固定的  $t$ ,  $\mathbf{r}_t$  是  $E^3$  的一个曲面. 我们需要计算法向变分  $\mathbf{r}_t$  的面积  $A_t$ . 为此设  $\{\mathbf{r}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是  $\Sigma$  上的活动标架, 其中  $\mathbf{e}_3$  是法向量;  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$  是相应的诸微分形式,

$$\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, \quad \omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \quad (4.2)$$

其中  $(h_{\alpha\beta}) (1 \leq \alpha, \beta \leq 2)$  是曲面  $\Sigma$  的第二基本形式. 对 (4.1) 式求微分并利用曲面的结构方程式, 就有

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_t &= d\mathbf{r} + t df \mathbf{e}_3 + t f d\mathbf{e}_3 \\ &= \left( \mathbf{e}_1 + t f_1 \mathbf{e}_3 + t f h_{11} \mathbf{e}_1 + t f h_{21} \mathbf{e}_2 \right) \omega_1 \\ &\quad + \left( \mathbf{e}_2 + t f_2 \mathbf{e}_3 + t f h_{12} \mathbf{e}_1 + t f h_{22} \mathbf{e}_2 \right) \omega_2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中  $f_1$ 、 $f_2$  由  $df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2$  定义.

注意到对于任何曲面而言, 如果  $d\mathbf{r} = \bar{\mathbf{e}}_1\bar{\omega}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2\bar{\omega}_2$ , 其中  $\bar{\mathbf{e}}_1$ 、 $\bar{\mathbf{e}}_2$  不一定规范正交, 那么它的面积元仍然为  $dA = |\bar{\mathbf{e}}_1 \wedge \bar{\mathbf{e}}_2|\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$ . 据此并由 (4.3) 式可得曲面  $\mathbf{r}_t$  的面积元为

$$dA_t = J_t \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned} J_t = & \left| \begin{aligned} & [(1 + tfh_{11})(1 + tfh_{22}) - t^2 f^2 h_{12}^2] \mathbf{e}_3 \\ & + [t^2 f f_1 h_{12} - (1 + tfh_{11})tf_2] \mathbf{e}_2 \\ & + [t^2 f f_2 h_{21} - (1 + tfh_{22})tf_1] \mathbf{e}_1 \end{aligned} \right|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

将 (4.5) 式按  $t$  展开到二次项, 则得

$$J_t \sim 1 + 2tHf + \frac{t^2}{2}(2Kf^2 + f_1^2 + f_2^2), \quad (4.6)$$

其中  $H$  和  $K$  分别是曲面  $\Sigma$  的平均曲率和 Gauss 曲率.

结合 (4.4)、(4.6) 两式, 曲面面积的一阶变分公式为

$$\left. \frac{dA_t}{dt} \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} J_t \right|_{t=0} \omega_1 \wedge \omega_2 = 2 \int_D Hf \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (4.7)$$

由此不难发现,  $\Sigma$  是极小曲面等价于对任意的法向变分, 它是面积泛函的临界点.

**命题 4.1**  $E^3$  的曲面  $\Sigma$  是极小曲面当且仅当对  $\Sigma$  的任意法向变分  $\Sigma_t$ ,  $A_t = \Sigma_t$  的面积, 均有

$$\left. \frac{dA_t}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

由此我们知道, 如果曲面  $\Sigma$  以一条 Jordan 曲线  $C$  为边界, 且在所有以  $C$  为边界的曲面中面积极小, 则  $\Sigma$  必是极小曲面. 需要指出的是, 一般极小曲面并不一定使面积变分达到极小, 而只是取临界值, 其名称仅是历史原因造成的.

对极小图而言, 有如下结论:

**定理 4.2** 设  $\Sigma$  是由函数  $z = f(x, y)$  确定的极小图,  $D$  是  $\Sigma$  上的任意一个紧致区域,  $\partial D = C$ , 则  $\Sigma$  在所有以  $C$  为边界的曲面中面积极小.

**证明** 记  $p = f_x, q = f_y$ , 则  $\Sigma$  的单位法向量为

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{W}(-p, -q, 1), \quad W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

设  $\bar{\Sigma}$  是  $E^3$  的任一曲面,  $\bar{\Sigma}$  与  $D$  有公共边界. 令  $\bar{\Sigma}$  的单位法向量为  $\bar{\mathbf{e}}_3$ , 在由  $\Sigma$  与  $\bar{\Sigma}$  包围的区域  $\Omega$  上考虑二阶外微分形式

$$\theta = \frac{1}{W}(-dx \wedge dy + p dy \wedge dz + q dz \wedge dx), \quad (4.8)$$

注意,  $\theta$  的系数  $\frac{1}{W}$  不依赖于  $z$ .

利用极小曲面方程 (1.6) 可得

$$d\theta = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{W} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{W} \right) dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

因此, 在  $\Omega$  上利用 Stokes 定理, 有

$$0 = \int_{\Omega} d\theta = \int_{\partial\Omega} \theta = \int_{\Sigma} \theta + \int_{\bar{\Sigma}} \theta. \quad (4.9)$$

但在  $\Sigma$  上  $z = f(x, y)$ , 所以

$$\theta = -\frac{1}{W}(1 + p^2 + q^2)dx \wedge dy = -W dx \wedge dy = -dA, \quad (4.10)$$

而在  $\bar{\Sigma}$  上,

$$\theta = \langle \mathbf{e}_3, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle d\bar{A} \leq d\bar{A}, \quad (4.11)$$

这里  $dA$ 、 $d\bar{A}$  分别是  $\Sigma$  和  $\bar{\Sigma}$  的面积元. 将 (4.10)、(4.11) 两式代入 (4.9) 式, 我们得到

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{\Sigma} dA = \int_{\bar{\Sigma}} \langle \mathbf{e}_3, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle d\bar{A} \leq \text{Area}(\bar{\Sigma}),$$

这就证明了定理.

回到关于曲面面积变分的讨论, 对法向变分的面积泛函求二阶导数, 并利用 (4.6) 式, 就得到曲面面积的二阶变分公式

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 A_t}{dt^2} \right|_{t=0} &= \int_D (f_1^2 + f_2^2 + 2K f^2) dA \\ &= \int_D (-f \Delta_{\Sigma} f + 2K f^2) dA. \end{aligned} \quad (4.12)$$

一个极小曲面称为稳定的, 如果对于它的任意法向变分, 面积的二阶变分均非负. 等价地说, 一个极小曲面  $\Sigma$  称为是稳定极小曲面, 如果对  $\Sigma$  上任意紧致区域  $D$  以及任意函数  $f$ ,  $f$  在  $D$  以外恒为零, 均有

$$\int_D (-f \Delta_{\Sigma} f + 2K f^2) dA \geq 0. \quad (4.13)$$

显然, 极小图是稳定的极小曲面. 下面的定理是 Bernstein 定理的一个推广.

**定理 4.3** 设  $\Sigma$  是  $E^3$  中完备的稳定极小曲面, 则  $\Sigma$  必是平面.

下面我们给出定理 4.3 证明的概要, 完整的证明可以参见文献 [8], 更一般的结果可见 [9].

**证明** 我们可以设  $\Sigma$  是单连通的, 则  $\Sigma$  共形等价于  $\mathbf{C}$  或  $D(1)$ ,  $\Sigma$  有整体定义的等温坐标  $z = u + iv$ , 设它的度量为  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ . 设  $\Delta$  和  $dA_E$  分别是  $\Sigma$  在平坦度量下的 Laplace 算子和面积元, 则

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \quad K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \ln \lambda, \\ dA_E &= \frac{1}{\lambda^2} dA, \quad \Delta_{\Sigma} = \frac{1}{\lambda^2} \Delta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

首先我们考虑  $\Sigma \approx D(1)$ , 对于在  $\Sigma$  的任意一个紧致子集以外为零的函数  $f$ , (4.13) 式可以改写为

$$\int_{D(1)} (f \Delta f + f^2 \Delta \ln \lambda^2) dA_E \leq 0. \quad (4.15)$$

用  $\nabla f = (f_u, f_v)$  表示函数  $f$  的梯度. 令  $\varphi = \lambda^{-1}$ , 在 (4.15) 式中以  $\varphi f$  代替  $f$ , 利用 Green 公式可以得到

$$\begin{aligned} 3 \int_{D(1)} |\nabla \varphi|^2 f^2 dA_E &\leq \int_{D(1)} \varphi^2 |\nabla f|^2 dA_E \\ &\quad - 2 \int_{D(1)} (f_u \varphi_u + f_v \varphi_v) dA_E. \end{aligned} \quad (4.16)$$

因为对任意  $\varepsilon > 0$ ,

$$|\varphi f (f_u \varphi_u + f_v \varphi_v)| \leq \varepsilon |\nabla \varphi|^2 f^2 + \frac{1}{\varepsilon} \varphi^2 |\nabla f|^2,$$



所以, 从 (4.16) 式容易得出, 存在常数  $C > 0$  使得

$$\int_{D(1)} |\nabla \varphi|^2 f^2 dA_E \leq C \int_{D(1)} \varphi^2 |\nabla f|^2 dA_E. \quad (4.17)$$

记  $\nabla_\Sigma f = \frac{1}{\lambda} \nabla f = \frac{1}{\lambda} (f_u, f_v)$ , 由 (4.17) 式我们最终得到

$$\int_\Sigma |\nabla_\Sigma \varphi|^2 f^2 dA \leq C \int_\Sigma \varphi^2 |\nabla_\Sigma f|^2 dA. \quad (4.18)$$

设  $B_r$  是  $\Sigma$  上以一固定点  $P$  为中心、 $r$  为半径的测地球,  $0 < \theta < 1$  为一定数. 现取  $\Sigma$  上函数  $f$  满足

$$f|_{B_{\theta r}} \equiv 1, \quad f|_{\Sigma \setminus B_r} \equiv 0,$$

$f$  在  $B_r \setminus B_{\theta r}$  上是关于定点  $P$  的曲面距离的线性函数, 将  $f$  代入 (4.18) 式, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\nabla_\Sigma \varphi|^2 dA &\leq \frac{C}{(1-\theta)^2 r^2} \int_\Sigma \varphi^2 dA \\ &= \frac{C}{(1-\theta)^2 r^2} \int_{D(1)} dA_E = \frac{\pi C}{(1-\theta)^2 r^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

在上式中令  $r \rightarrow \infty$ , 就得到  $|\varphi| \equiv 0$ , 即  $\lambda = \text{常数}$ , 则度量  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$  不可能是完备的, 矛盾.

如果  $\Sigma \approx \mathbf{C}$ , 令  $\psi = \Delta \ln \lambda^2$ , 则 (4.13) 式可以改写为

$$\int_{\mathbf{C}} \psi f^2 dA_E \leq \int_{\mathbf{C}} |\nabla f|^2 dA_E. \quad (4.20)$$

另一方面, 如果  $\Sigma$  的 Gauss 曲率  $K$  不恒为零, 则满足  $\Delta_\Sigma \ln(-K) = 4K$  (第九章命题 1.4), 这等价于  $\Delta \ln \psi + \psi = 0$ , 所以我们有

$$\psi \Delta \psi + \psi^3 = |\nabla \psi|^2. \quad (4.21)$$

在 (4.20) 式中以  $\psi f$  代替  $f$  可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}} \psi^3 f^2 dA_E &\leq \int_{\mathbf{C}} \psi^2 |\nabla f|^2 dA_E + \int_{\mathbf{C}} f^2 |\nabla \psi|^2 dA_E \\ &\quad + 2 \int_{\mathbf{C}} \psi f (f_u \psi_u + f_v \psi_v) dA_E. \end{aligned} \quad (4.22)$$



另一方面, 将 (4.21) 式两边乘以  $f^2$ , 在  $\mathbf{C}$  上积分, 就有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} |\nabla \psi|^2 f^2 dA_E &= \int_{\mathbf{C}} \psi^3 f^2 dA_E + \int_{\mathbf{C}} f^2 \psi \Delta \psi dA_E \\ &= \int_{\mathbf{C}} \psi^3 f^2 dA_E - \int_{\mathbf{C}} f^2 |\nabla \psi|^2 dA_E \\ &\quad - 2 \int_{\mathbf{C}} \psi f (f_u \psi_u + f_v \psi_v) dA_E,\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了 Green 公式. 将 (4.22) 代入上式可得

$$\int_{\mathbf{C}} |\nabla \psi|^2 f^2 dA_E \leq \int_{\mathbf{C}} \psi^2 |\nabla f|^2 dA_E. \quad (4.23)$$

对 (4.22) 式的最后一项应用不等式  $2ab \leq a^2 + b^2$ , 并结合 (4.23) 式, 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} \psi^3 f^2 dA_E &\leq 2 \int_{\mathbf{C}} \psi^2 |\nabla f|^2 dA_E + 2 \int_{\mathbf{C}} f^2 |\nabla \psi|^2 dA_E \\ &\leq 4 \int_{\mathbf{C}} \psi^2 |\nabla f|^2 dA_E.\end{aligned} \quad (4.24)$$

现在, 在 (4.24) 式的右边应用 Young 不等式

$$\psi^2 |\nabla f|^2 = f^2 \left( \psi^2 \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right) \leq f^2 \left( \frac{\alpha^s}{s} \psi^{2s} + \frac{\alpha^{-t}}{t} \left( \frac{|\nabla f|}{f} \right)^{2t} \right),$$

其中  $\alpha > 0, s, t > 1$  且  $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$ . 取  $s = \frac{3}{2}, t = 3$ ,  $\alpha$  充分小, 不难得到, 有正常数  $C_1$  使得

$$\int_{\mathbf{C}} \psi^3 f^2 dA_E \leq C_1 \int_{\mathbf{C}} \frac{|\nabla f|^6}{f^4} dA_E,$$

在上式中以  $f^3$  代替  $f$ , 最终我们有

$$\int_{\mathbf{C}} \psi^3 f^6 dA_E \leq C_2 \int_{\mathbf{C}} |\nabla f|^6 dA_E, \quad (4.25)$$

这里  $C_2$  是另一常数.

记  $D(r) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < r\}$ , 在 (4.25) 式中取  $f$  为

$$f \Big|_{D(r)} = 1, \quad f \Big|_{\mathbf{C} \setminus D(2r)} = 0, \quad f(z) \Big|_{D(2r) \setminus D(r)} = 2 - \frac{|z|}{r},$$

易得

$$\int_{D(r)} \psi^3 dA_E \leq C_2 \int_{D(2r)} \frac{1}{r^6} dA_E = \frac{C_2 \cdot \pi(2r)^2}{r^6},$$

令  $r \rightarrow \infty$ , 就得到  $\psi^3 \equiv 0$ , 这意味着 Gauss 曲率  $K \equiv 0$ , 所以  $\Sigma$  是平面. 证毕.

### 参考文献:

- [1] Osserman R. A Survey of Minimal Surfaces. New York: Van Nostrand, 1969
- [2] Nitsche J C. Lectures on Minimal Surfaces Vol.1. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1989
- [3] Dierkes U, Hildebrandt S, Küster A, Wohlrab O. Minimal Surfaces I & II. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1992
- [4] Hoffman D A, Meeks III W. A complete embedded minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$  with genus one and three ends. Jour Diff Geom, 21:109-127.
- [5] Xiavier F. The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points on sphere. Ann Math, 113: 211-214
- [6] Fujimoto H. On the number of exceptional values of Gauss maps of minimal surfaces. J Math Soc Japan, 40: 235-248
- [7] Voss K. Uber vollstandigo minimal flachen. L'Enseignement Math. 10:316-317
- [8] de Carmo M, Peng C K. Stable complete minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$  are planes. Bull of AMS, Vol.1: 903-906
- [9] Fischer-Colbrie D, Schoen R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Comm Pure Appl Math, 33: 199-211
- [10] 彭家贵, 童占业. 极小曲面的若干问题. 数学进展, 24 卷 (1 期): 1-27
- [11] 龚升. 简明复分析. 北京: 北京大学出版社, 1996
- [12] Barbosa M, Colares A. Minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$  (LNM 1195). Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1986

索引

B	
闭曲线	155
变分	
曲面	241
曲线	120
保角变换	109
C	
测地极坐标系	123
测地平行坐标系	122
测地曲率向量	115, 147
测地曲率	115, 147
测地射线	122
测地完备	192
测地线	117
测地圆	123
常平均曲率环面	219
常平均曲率曲面	209
常 Gauss 曲率曲面	197
从切平面	20
D	
等距变换	105
等温参数	
极小曲面	229
曲面	110
等周不等式	158
第二基本形式	43
第二类 Christoffel 符号	77
第一基本形式	39

定向	
$E^3$	9
曲面	167
E	
二阶变分公式	243
F	
法平面	20
法曲率	48
法向量	
曲面	35
曲线	20
法线	35
法坐标系	123
反向刚体运动	12
副法向量	20
副法线	20
G	
刚体运动	12
古典极小曲面	223
H	
合同变换群	12
合同变换	10
环面	34
活动标架	72
弧长	15

J		P	
极小曲面方程	223	抛物点	51
极小图	222	平点	51
简单闭曲线	155	平均曲率	55
角参数	160	平移	6, 114
结构方程		Q	
曲面	81, 99	脐点	58
正交标架	95	切平面	35
Riemann 度量	143	切向量场的指数	173
紧致曲面	168	切向量	15
渐近方向	51	切线	20
距离完备	192	切映射	109
绝对全曲率		球极投影坐标	33
曲面	176	曲率向量	20
		曲率	19, 20
K		曲面的运动方程	
可展曲面	65, 102	正交标架	87, 99
		自然标架	77
L		曲面	31
联络形式	111, 143	曲线	14
螺旋面	223	全脐点曲面	66
		全曲率	
M		曲线	180
面积元		S	
曲面	58, 100	三角剖分	169
Gauss 映射	100	三维欧氏空间	6
密切平面	20	散度	5
N		双曲点	51
挠率	21	四顶点定理	163
		T	
O		欧氏变换群	12
欧氏变换群	12	欧氏变换	10
欧氏变换	10	欧氏向量空间	3
欧氏向量空间	3	梯度	5, 134
		凸曲面	181

凸曲面			主曲率	54, 90, 101
刚性	185		柱面	42
凸曲线	160		自然标架	72
椭圆点	51		坐标切向量	35
		W	Alexsandrov 定理	216
伪球面	62		Bäcklund 变换	204, 207, 208
稳定极小曲面	247		Bäcklund 定理	205
		X	Bernstein 定理	227
向量场	5		Chebyshev 参数	201
协变微分	113		Christoffel 符号	77
悬链面	63, 223		Codazzi 方程	81, 96
旋度	5		Costa 曲面	232
旋转曲面	34		Delaunay 曲面	64
旋转指数	155		Euler 公式	56
		Y	Frenet 标架	73
一阶变分公式	246		Frenet 公式	21
圆点	58		Fujimoto 定理	236
圆柱螺旋线	22		Gauss 方程	81, 96
		Z	Gauss 绝妙定理	112
整体曲面	165		Gauss 曲率	55, 112, 127
正交标架			Gauss 映射	
$E^3$	8, 97		曲面	52, 58
曲面	72		曲线	18, 155, 160
正则曲线	14		Gauss-Bonnet 公式	
支撑函数			局部	130
曲面	183		整体	170
曲线	160		Green 公式	138
直纹面	64		Hadamard 定理	181
指数映射	122		Heinz 估计	233
主法向量	20		Hilbert 引理	197
主法线	20		Hopf 不变式	100
主方向	54		Hopf 定理	213
			Hopf 微分	212
			Hopf-Rinow 定理	193
			Jacobi 定理	175

Jorgens 定理	229	Nirenberg 猜测	235
Lagrange 恒等式	4	Poincarè 度量	142
Laplace 算子	136, 140	Riemann 度量	141
Laplace 算子		Riemann 记号	81
$E^3$	214	Scherk 曲面	223
Liouville 公式	116	Schwarz 引理	237
Minkowski 公式	183	Sine-Gordon 方程	200, 208
Minkowski 问题		Weierstrass 表示	231
曲面	187	Weingarten 变换	52
曲线	162	Willmore 猜想	179
Nabla 算子	5	Wirtinger 不等式	158