Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

2 отчёт по методам вычислений

Решение СЛАУ. Точные методы.

Выполнил:
студент 4 курса Жарков М. С.

Санкт-Петербург 2020

1 Постановка задачи

Необходимо решить СЛАУ $Ax = b$ двумя точными методами.

2 LU – разложение

Будем искать такое разложение $A = LU$, L — нижняя треугольная с 1 на диагонали, U — верхняя треугольная. Для общей $n \times n$ - матрицы A мы предполагаем, что LU-разложение существует, и явно пишем форму L и U.

$$U_{i,k} = A_{i,k} - \sum_{j=0}^{i}(L_{i,j}U_{j,k}); \qquad L_{i,k} = (A_{i,k} - \sum_{j=0}^{i}(L_{i,j}U_{j,k}))/U_{k,k}$$

3 QR – разложение

QR-разложение позволяет отобразить матрицу как произведение двух отдельных матриц Q и R, где Q - ортогональная матрица, а R - треугольная матрица. Буду искать разложение методом вращений.

Элементарное (плоское) вращение задается матрицей $T_{i,j}$, которая является единичной матрицей, но у которой месте $i, i = \cos(\phi_{i,j}); j, j = i, i; i, j = \sin(\phi_{i,j}); j, i = -i, j$, где $\phi_{i,j} = \arctan\left(\frac{-A^{(k)}_{i,j}}{A^{(k)}_{j,j}}\right)$. $A^{(k)}$ - матрица, которую уже повернули k раз. После всех поворотов получаем:

$$Q = T^{-1}_{1,2}T^{-1}_{1,3}\dots T^{-1}_{1,n}T^{-1}_{2,3}T^{-1}_{2,4}\dots T^{-1}_{2,n}\dots T^{-1}_{n-1,n-2}T^{-1}_{n-1,n}T^{-1}_{n,n-1}$$

$$R = Q^T A$$

4 Расчёт и погрешности

Проверять будем на матрице Гильберта порядка 15, 20, 25. Нас интересует эта матрица потому что она плохо обусловлена и будут появляться большие погрешности.

Возьмём $e = (1, 1, \dots)^T$, и вычислим $b = He$, а затем численно решим систему $Hx = b$ точным методом.

При решении через LU-разложение необходимо будет решить систему:

$$\begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y \end{cases}$$

При решении QR–разложением решаем систему $Rx = Q^T b$.

Найдя x ищем погрешность, равную норме разностии x и e.

Также исследуем влияние параметра регуляризации α: изменять его в некотором диапазоне и вычислять норму погрешности. Задача с α выглядит следующим образом:

$$(A + \alpha E)x = b + \alpha x_0$$

Эта система обусловлена лучше исходной из-за добавки αE. Параметр α подбирают, начиная с малого, увеличивая, пока обусловленность системы не станет приемлемой.

5 Тесты

5.1 Тест 1

Расмерность матрицы Гильберта: 15.

Погрешность у LU-метода: 44.5, у QR-метода: 33.46 .

При введении α наименьшая погрешность LU-метода: 1.16e-05 при $\alpha = 1.6e-11$, наименьшая погрешность QR-метода: 1.4e-05 при $\alpha = 4.2e-11$. Графики погрешностей:

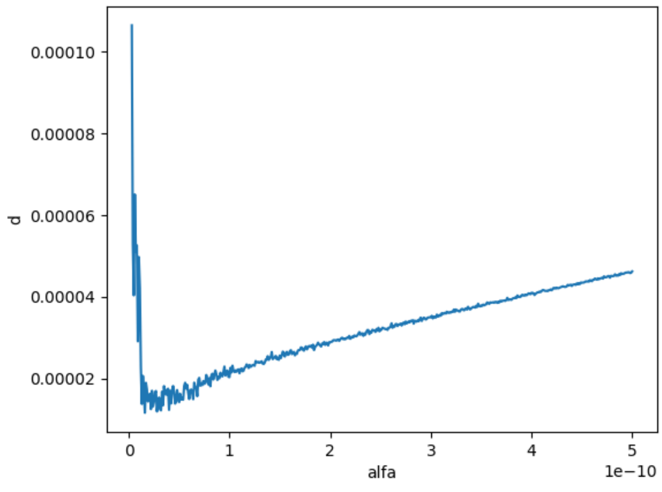

Рисунок 1 — LU-метод

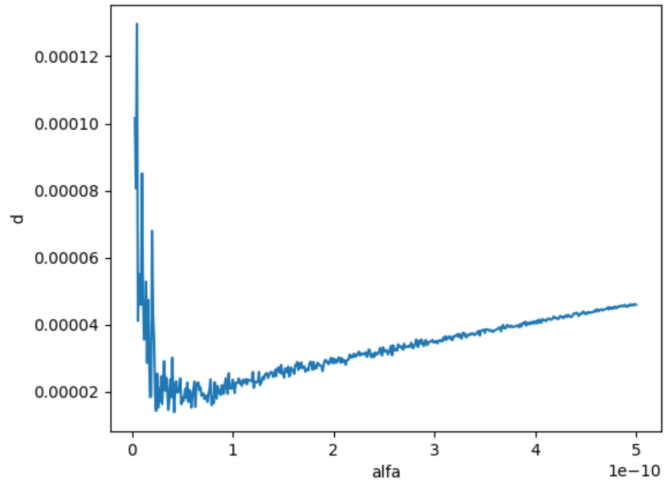

Рисунок 2 — QR-метод

5.2 Тест 2

Расмерность матрицы Гильберта: 20.

Погрешность у LU-метода: 39.3, у QR-метода: 171.5.

При введении α наименьшая погрешность LU-метода: 1.5e-05 при $\alpha = 4.5e-11$, наименьшая погрешность QR-метода:1.9e-05 при $\alpha = 5.7e-11$. Графики погрешностей:

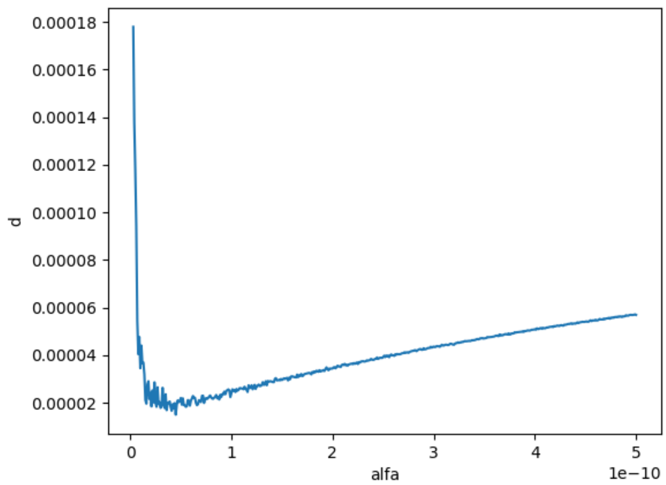

Рисунок 3 — LU-метод

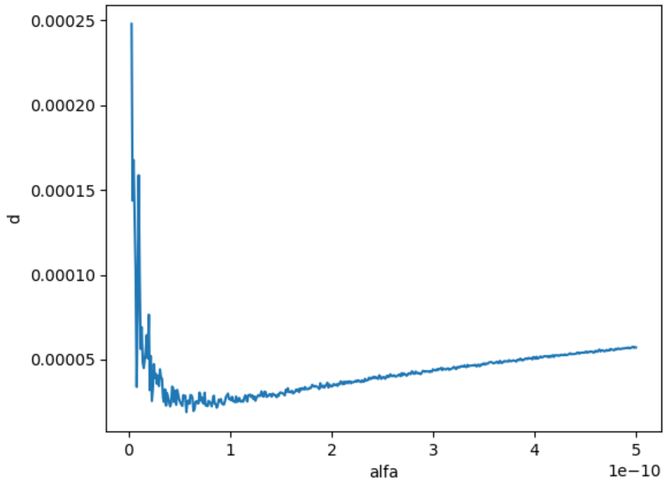

Рисунок 4 — QR-метод

5.3 Тест 3

Расмерность матрицы Гильберта: 25.

Погрешность у LU-метода: 223, у QR-метода: 830

При введении α наименьшая погрешность LU-метода: 2e-05 при $\alpha = 2.5e-11$, наименьшая погрешность QR-метода:2.5e-05 при $\alpha = 6.9e-11$. Графики погрешностей:

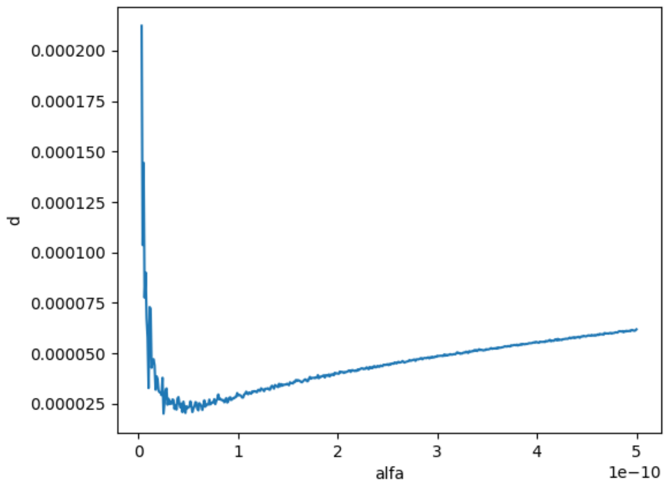

Рисунок 5 — LU-метод

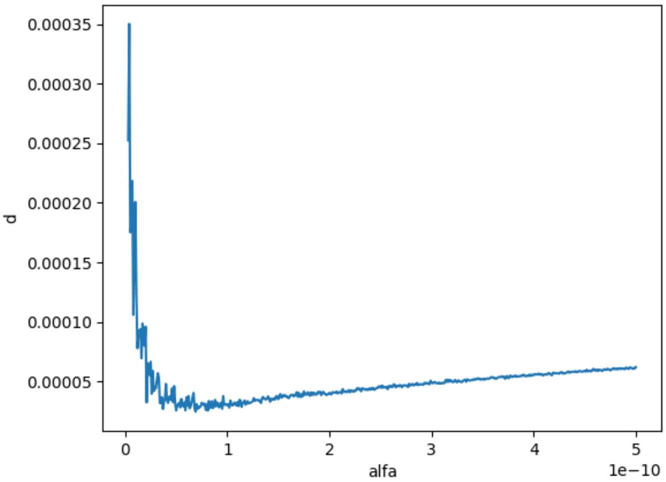

Рисунок 6 — QR-метод

6 Вывод

Если рассматривать решение матрицы Гильберта достаточно большого порядка, то будут появляться большие погрешности, потому что она плохо обусловлена. Но при введении параметра регуляризации погрешность может имеет порядок $1e^{-5}$.