Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

1 отчёт по методам вычислений

# Решение жестких систем

Выполнил:
студент 4 курса Жарков М. С.

Санкт-Петербург 2020

# 1 Постановка задачи

Дана задача Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$Y' = A * Y; \qquad Y(t_0) = Y_0;$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}; \qquad Y_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Система дифференциальных уравнений называется жесткой, если, во-первых, все собственные значения $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть и, во-вторых:

$$\frac{\min_{1 \leqslant i \leqslant n}(Re\lambda_i)}{\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(Re\lambda_i)} \gg 1$$

# 2 Метод Рунге – Кутты

Четырёх стадийный метод Рунге–Кутты реализуется подсчётом 4 коэффицентов:

$$k_1 = hAY_i; \qquad k_2 = hA(Y_i + \frac{k_1}{2});$$

$$k_3 = hA(Y_i + \frac{k_2}{2}); \qquad k_4 = hA(Y_i + k_3);$$

которые нужно подставить в формулу:

$$Y_i + 1 = Y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Этот метод является методом четвертого порядка, это означает, что локальная ошибка усечения имеет порядок $O(h^5)$, в то время как общая накопленная ошибка составляет порядок $O(h^4)$. Функция устойчивости: $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$. Этот метод A-устойчивый.

# 3 Неявный метод Адамса третьего порядка

В этом методе потребуется явный метод Адамса:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{hA}{12}(23Y_i - 16Y_{i-1} + 5Y_{i-2}) \tag{1}$$

Неявный метод записывается следующим образом (в правую часть нужно подставить $Y_{i+1}$ из 1):

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{hA}{12}(5Y_{i+1} + 8Y_i - Y_{i-1})$$

Воспользуемся методом Рунге–Кутты для поиска $Y_1$ и $Y_2$.

Теоретический порядок точности $O(h^3)$, и этод метод А-устойчивый.

# 4 Метод CROS1

Формула по кторой нужно считать:

$$Y_{i+1} = Y_i + hRe(w)$$

,где $w$ находится из решения системы уравнений:

$$(E - \frac{1+i}{2}hA)w = AY_i$$

Функция устойчивости: $R(z) = \frac{1}{1-z+\frac{z^2}{2}}$. Схема А-устойчива. И поскольку $R(z) = O(z^{-2})$ при $z \longrightarrow \infty$, то она L2-устойчива. Также схема t-монотонна.

Теоретический порядок точности $O(h^2)$

# 5 Контроль точности

Воспользуемся глобальным сгущением сетки для гарантий оценки погрешности расчета. Способ основан на методе Ричардсона. Строим последовательность равномерных сеток с шагами $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \ldots$. Решам задачу любым методом. Рассматриваем решение на соседних сетках. По правилу Ричардсона оценка огрешности $\Delta(t) = \frac{v_2 - v_1}{2^p - 1}$, где $v_2$, $v_2$ - решения соседних сеток, а $p$ - теоретический порядок точности численного метода. Для нечётных узлов берём полусумму в соседних узлах. Анализировать погрешность в каждом узле нецелесообразно. Лучше рассматривать нормы погрешности:

$$||\Delta||_C = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} |\Delta(t_n)|$$

$N$ - количество точек сетки

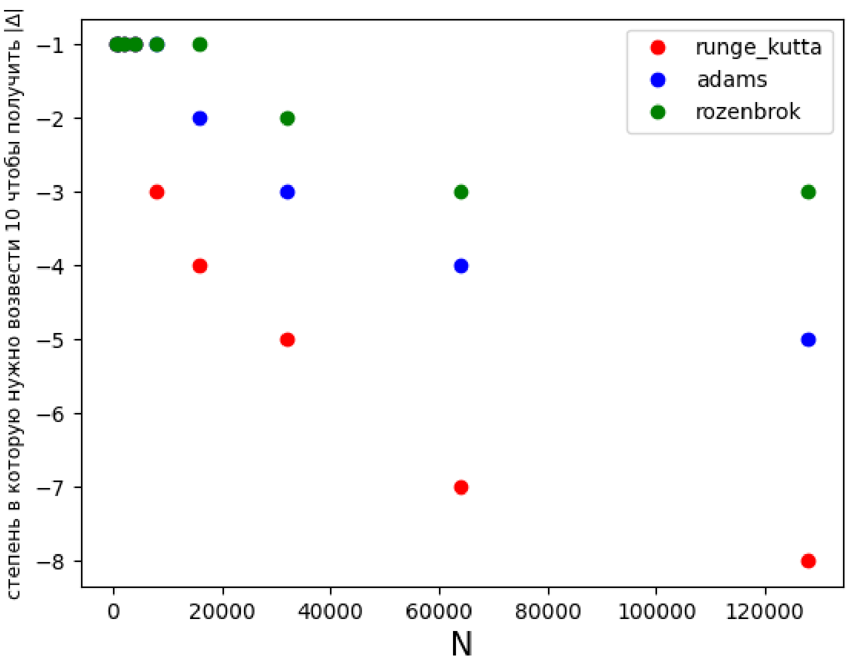
При достижении точности $\varepsilon$ получим погрешность $d$, не относящуюся кпоследнему решению. И для получения ответа ещё раз уменьшим сетку и выведем ответ учитывая погрешность $d$.

# 6 Тесты

## 6.1 1 тест

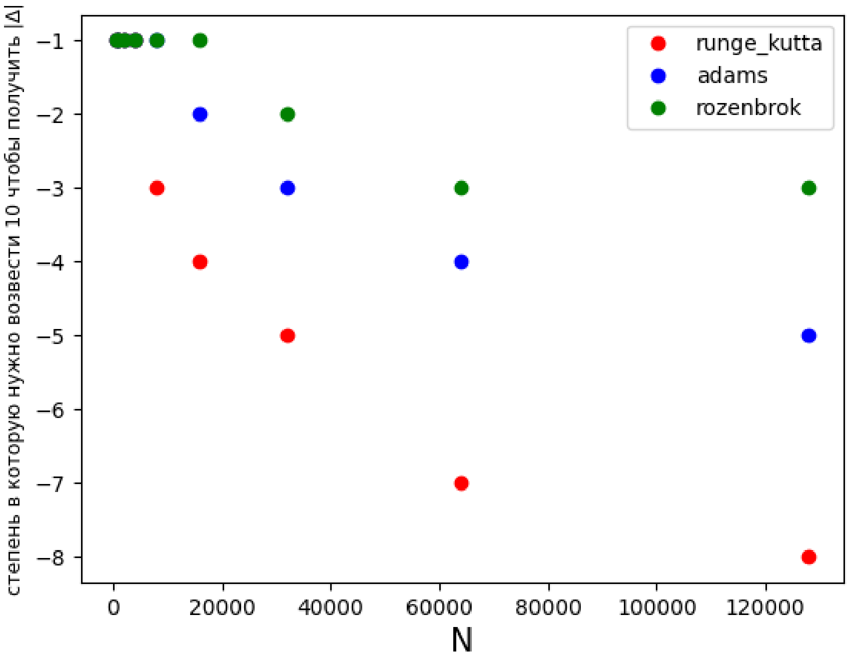
$$A = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_0 - \mu_1 & \mu_1 + \nu_1 & -\nu_1 & 0 & 0 \\ \mu_0 - \mu_1 - \nu_1 & 2\nu_1 & \mu_1 - \nu_1 & 0 & 0 \\ \mu_0 - \mu_1 - \nu_1 & 2\nu_1 & \mu_1 - \nu_1 - \mu_2 & \mu_2 + \nu_2 & -\nu_2 \\ \mu_0 - \mu_1 - \nu_1 & 2\nu_1 & \mu_1 - \nu_1 - \mu_2 - \nu_2 & 2\nu_2 & \mu_2 - \nu_2 \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

Подставляем в 2 $\mu 0 = -100, \mu_1 = -1, \nu_1 = 1, \mu_2 = -10000, \nu_2 = 10$ и имея начальные условия $Y_0 = (10, 11, 11, 111, 111)^T$ решаем задачу.



## 6.2 2 тест

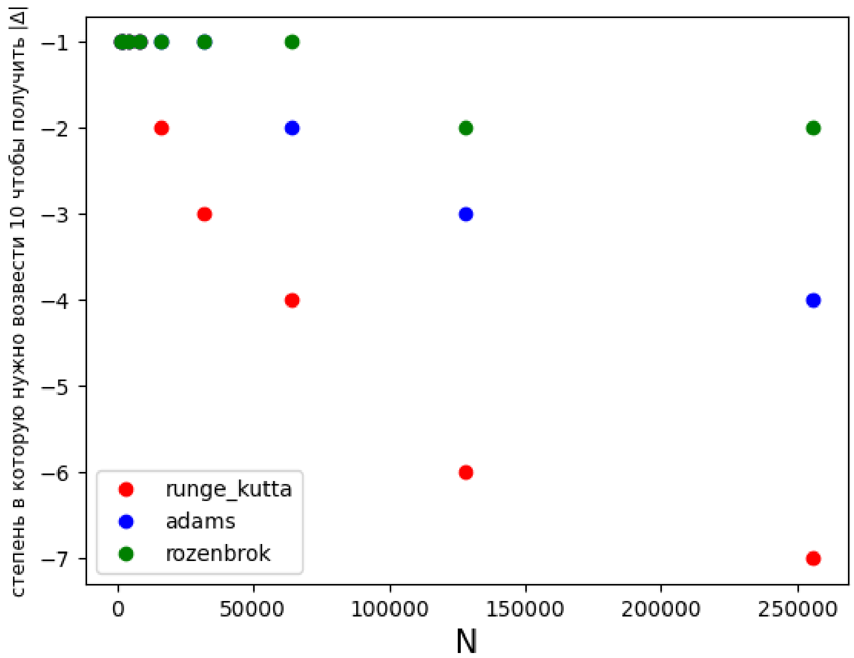
Подставляем в 2 $\mu 0 = -10000, \mu_1 = 1, \nu_1 = 1, \mu_2 = -100, \nu_2 = 1000$ и имея начальные условия $Y_0 = (100, 101, 101, 201, 201)^T$ решаем задачу.




## 6.3 3 тест

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -10000 \end{pmatrix};$$

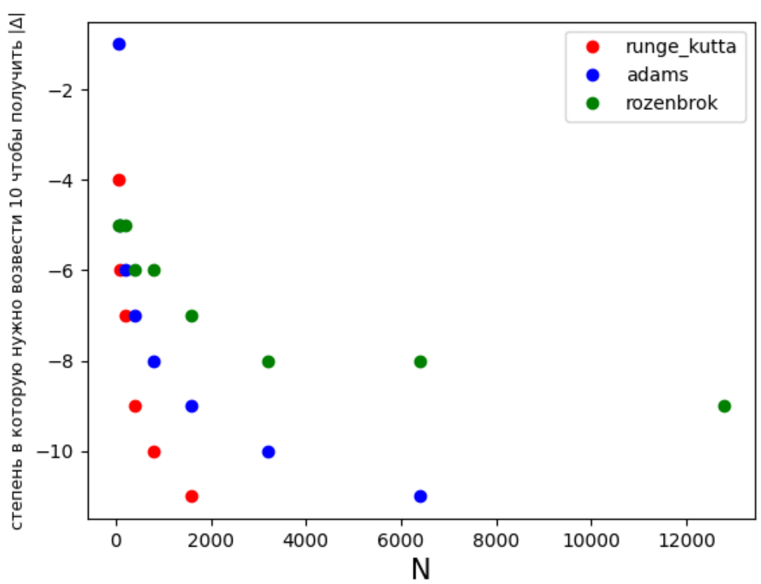
$Y_0 = (1, 1, 1000, 1000, 1000, 1000)^T$




## 6.4 4 тест

$$A = \begin{pmatrix} -125 & 123.1 \\ 123.1 & -123 \end{pmatrix};$$

$Y_0 = (1, 1, 1000, 1000, 1000, 1000)^T$



# 7 Вывод

Были написанны 3 метода решение задачи Коши для жесткой системы дифференциальных уравнений с точностью $\varepsilon = e^{-10}$. Я выполнял только первые десять итераций уменьшения сетки, поэтому в приверах нужная точность достигнута не была, но это потому что небыло произведено достаточного количества итераций. Из графиков видно, что самый точный метод Рунге–Кутты, менее точный метод Адамса и самый неточный метод CROS1.