Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 7

Проекционные методы для краевой задачи ОДУ второго порядка

Выполнил:
студент 4 курса Жарков М.С.

Санкт-Петербург 2020

1 Постановка задачи

Проекционные методы широко применяются для решения краевых задач. Одним из их преимуществ является нахождение значений функций не просто в определенных точках области, а сразу непрерывно на всей области.

Общий вид решаемой задачи

$$Lu = f(x)$$

Заданы краевые условия:

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = \alpha(t), \alpha_1\alpha_2 \geq 0, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = \beta(t), \beta_1\beta_2 \geq 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

Суть проекционных методов заключается в выборе определенной линейно-независимой координатной систеы функций: $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$. По данным функциям строится приближенное решение:

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i(x)$$

Коэффициенты рахложения c_i являются решением следующей системы:

$$\sum_{1=1}^{n} a_{ij}c_j = f_i, i = 1, \ldots, n$$

Компоненты a_{ij} матрицы A и f_i задаются конкретным используемым проекционным методом

2 Метод Ритца

Рассмотренное уравнеие:

$$Ly = (-p(x)y')' + r(x)y = f(x)$$

Основная идея заключается в переходе от решения краевой задачи к решению вариационной задачи приближенными методами.

Координатные функции $\omega_i(x)$ берем из энергетического пространства H_L.

Коэффициенты разложения находим из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = f_i, i = 1, \ldots, n$$

где $a_{ij} = [\omega_i, \omega_j]$, $f_i = (f, \omega_i)$ - скалярное произведение в L_2.
$[\omega_i, \omega_j] = (L\omega_i, \omega_j)$

3 Метод коллокаций

Суть метода - невязка $L(u) - f(x)$ должна обращаться в ноль в некотором наборе точек промежутка $[a, b]$. Также накладывается требование на координатные функции - они должны удовлетворять заданным краевым условиям.

После выбора узлов коллокаций система принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} L(\omega_j)|_{x=t_i} c_j = f_i, i = 1, \ldots, n$$

В качестве узлов коллокации можем взять узлы многочлена Чебышева первого рода.

4 Расчет

Будем рассматривать максимальные отклонения от точного решения на некоторой сетке. Исследуем поведение решений при разный значениях n. Количество точек на графике 1000.

5 Тесты

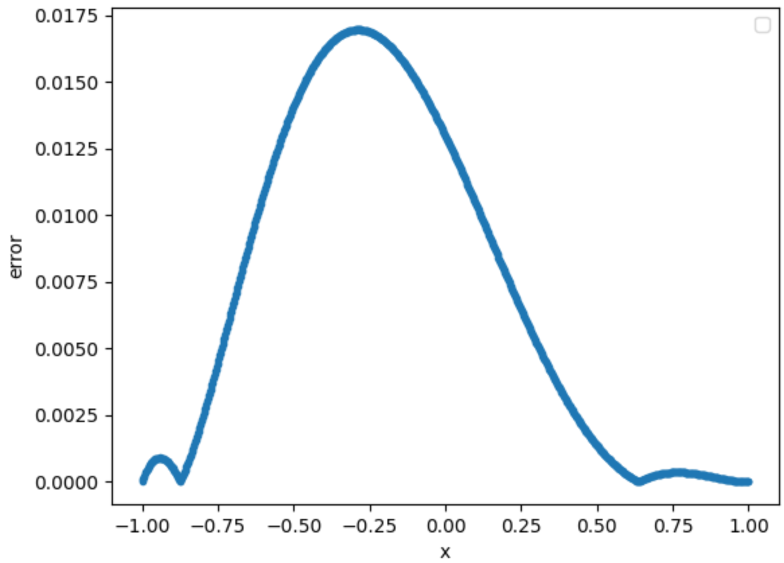
5.1 Тест 1.

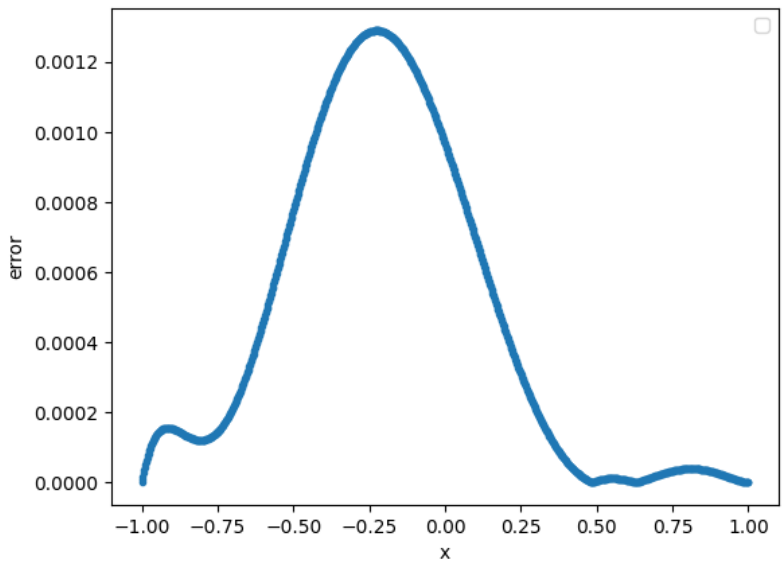
Рассмотрим следующую краевую задачу:

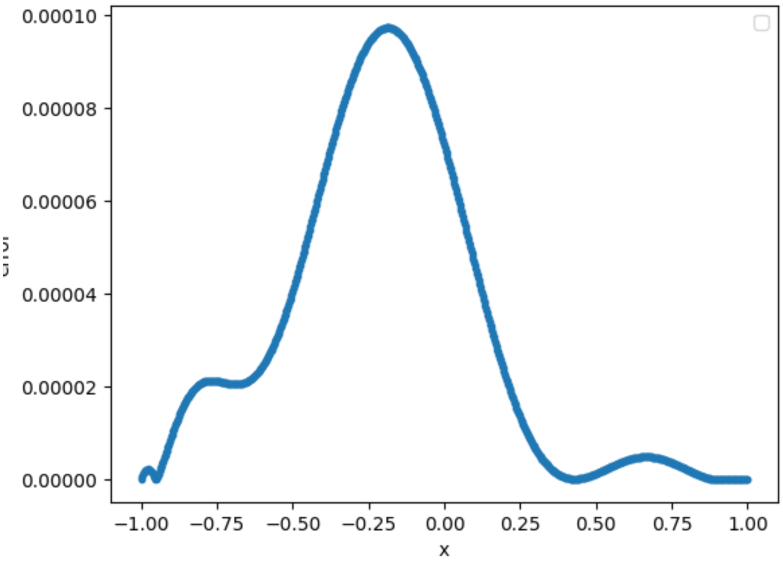
$$-(xu')' + u = \log(2 + x) * (x - 1) - \frac{(3 * x^2 + 7 * x + 2 * (x + 2)^2 * \log(x + 2) - 4)}{(x + 2)^2}$$

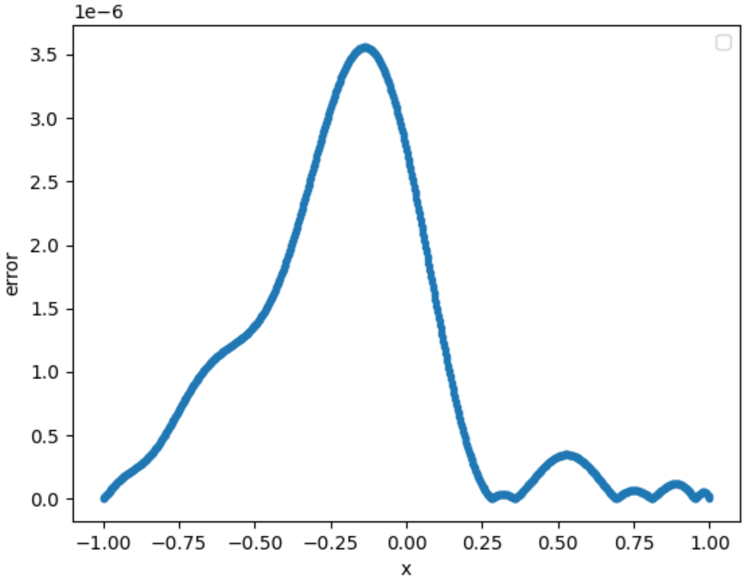
$$u(-1) = 0, u(1) = 0$$

графики для метода Ритца для $n = 3, 5, 7, 10$

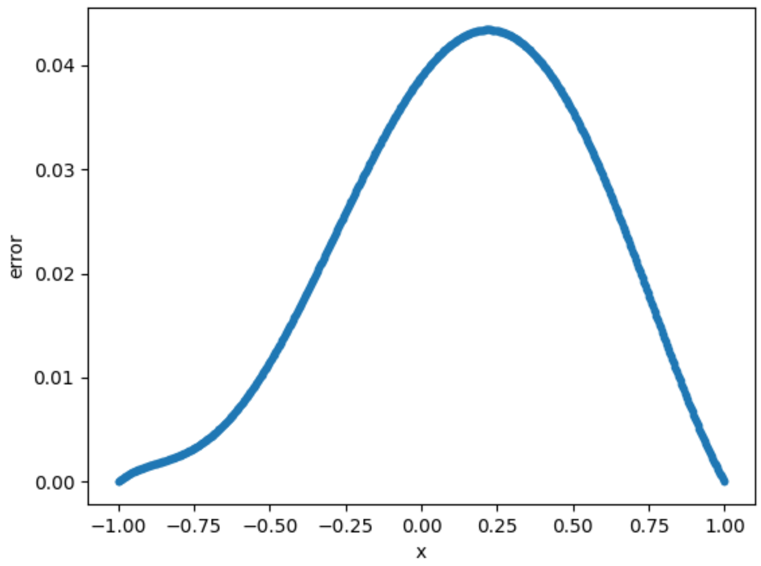


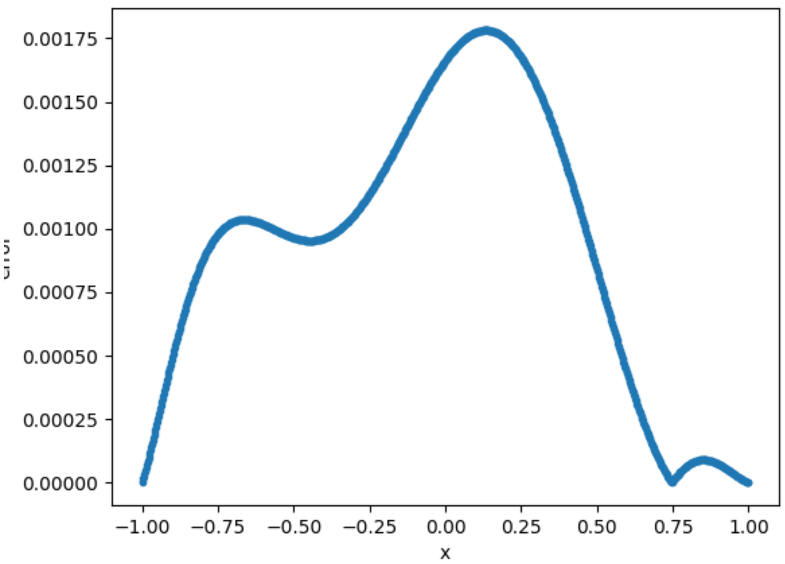


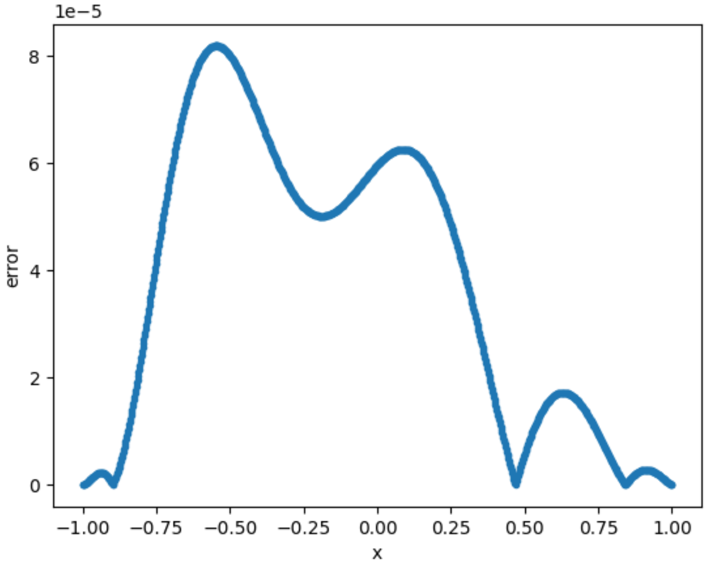

0.00010
0.00008
0.00006
0.00004
0.00002
0.00000
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x

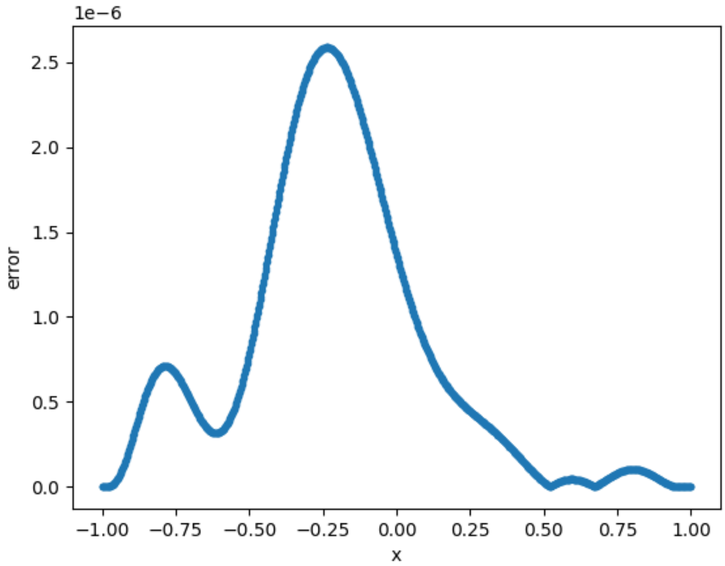

1e−6
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
error
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x

графики для метода Коллокаций для $n = 3, 5, 7, 10$









6 Вывод

По полученным графикам можно понять, что решение, полученное проекционными методами, оказывается достаточно близким к точному решению при увеличении количества координатных функций.