

武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 B2 参考解答

1、(8 分) 设  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4$ , 试求  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ .

解:  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 2(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 8$

2、(8 分) 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 - 2z = f(y^2 - 2z)$  所确定的隐函数, 其中  $f$  可微, 求证

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

解 令  $F(x, y, z) = x^2 - 2z - f(y^2 - 2z)$  则  $F_x = 2x, F_y = -2yf', F_z = -2 + 2f'$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-x}{f' - 1}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{yf'}{f' - 1} \quad \text{则} \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

3、(8 分) 设  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ , 计算二重积分  $\iint_D y^2 dx dy$ .

$$\text{解} \quad \iint_D y^2 dx dy = 4 \iint_{D_1} y^2 dx dy = 4 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = 4 \int_0^1 y^2 (1-y) dy = \frac{1}{3}$$

4. (8 分) 已知椭圆  $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  周长为  $b$ , 求  $\oint_L (4xy + 9x^2 + 4y^2) ds$ .

解 因为  $L$  关于  $x$  轴 ( $y$  轴) 对称,  $4xy$  关于  $y$  (关于  $x$ ) 为奇函数, 所以  $\oint_L 4xy ds = 0$ , 故

$$\oint_L (4xy + 9x^2 + 4y^2) ds = \oint_L (9x^2 + 4y^2) ds = 36 \int_L (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}) ds = 36b.$$

5、(8 分) 判断两直线  $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$  和  $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$  是否在同一平面内, 并求两直线的夹角。

解 1: 直线  $L_1$  与  $L_2$  的方向向量分别为  $s_1 = \{1, 1, 2\}, s_2 = \{1, 3, 4\}$ , 且分别过  $P(-1, 0, 1), Q(0, -1, 2)$

$$\text{从而 } (s_1 \times s_2) \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 故直线 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 为异面直线.}$$

$$\text{两直线之间的夹角余弦为 } \cos \varphi = \frac{12}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{12}{13}}, \text{ 故夹角为 } \varphi = \arccos \sqrt{\frac{12}{13}}$$

6、(10 分) 已知  $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$  为某函数的全微分, 求该函数并确定  $a$  的值.

解: 设该函数为  $u(x, y)$ , 则由全微分公式有  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ , 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x+ay)}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}, \text{ 分别对 } y, x \text{ 求偏导得 } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{-2y}{(x+y)^3},$$

由于  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  和  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  连续, 所以  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ , 则  $a = 2$ 。由曲线积分与路径无关可得

$$u(x, y) = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C$$

7、(10 分) 在椭球面  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上求一点, 使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \tan z^2$  在该点沿曲线  $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$  在点  $(1, -1, -2)$  处的切线方向的方向导数最大。

解: 由曲线  $x = t^2, y = 1 - 2t, z = t^3 - 3t$  在点  $(1, -1, -2)$  处的法线方向向量为:

$$\{2t, -2, 3t^2 - 3\}|_{t=1} = 2\{1, -1, 0\} \text{ 其单位向量为: } \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, -1, 0\}$$

函数  $f(x, y, z)$  的方向导数的表达式为  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ 。

$$\text{其中 } \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = 2\{x, y, z \sec^2 z\} \quad \text{因此 } \frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{2}(x - y)。$$

于是, 按照题意, 即求函数  $\sqrt{2}(x - y)$  在条件  $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$  下的最大值。设

$$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sqrt{2} + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \text{解之得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4\lambda} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } S \text{ 上的点为 } \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \text{ 此时 } \frac{\partial f}{\partial l} = -\sqrt{3}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } S \text{ 上的点为 } \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \text{ 此时 } \frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以, 所求的 } S \text{ 上的点为 } \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$$

8、(10 分) 求曲面积分  $I = \iint_S yzdzdx + 2dxdy$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  的外侧在  $z \geq 0$  的部分。

解: 添加辅助面  $S_1: z=0(x^2 + y^2 \leq 4)$ , 法向量乡下, 用 Gauss 公式得

$$I + \iint_{S_1} yzdzdx + 2dxdy = \iiint_{\Omega} z dV = \int_0^2 dz \iint_{D(z)} z dxdy = \int_0^2 z\pi(4 - z^2) dz = 4\pi, \text{ 于是}$$

$$I = -\iint_{S_1} yzdzdx + 2dxdy + 4\pi = \iint_{D_{xy}} 2dxdy + 4\pi = 12\pi$$

9、(8 分) 设  $f(u)$  连续, 区域  $\Omega$  由  $0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq t^2$  围成,

$$f(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2})] dV, \text{ 求 } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2}。$$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(t) &= \iiint_{\Omega} \left[ z^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}) \right] dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho d\rho \int_0^1 [z^2 + f(\rho)] dz \\ &= \frac{\pi}{3} t^2 + 2\pi \int_0^t \rho f(\rho) d\rho \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \frac{\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t \rho f(\rho) d\rho}{t^2} = \frac{\pi}{3} + \pi \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \frac{\pi}{3} \quad (\because f(0) = 0)$$

10、(8 分) 已知  $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx, (n=1, 2, 3, \dots)$ , 试判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1}$  敛散性并求其和。

解 由  $b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} (n=1,2,3,\dots)$ , 而  $\left| \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} \right| = \frac{1}{\pi n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$

由比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n(n+1)}$  收敛

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} b_n}{n+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{且 } S_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \text{ 所以级数的和 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\pi}.$$

11、(8分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + (-2)^n} x^n$  的收敛区间与收敛域。

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}}{\frac{n}{3^n + (-2)^n}} = \frac{1}{3}, \text{ 所以收敛半径 } R=3, \text{ 收敛区间为 } (-3, 3),$$

在  $x = \pm 3$  处, 原级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + (-2)^n} (\pm 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n n}{1 + (-\frac{2}{3})^n}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + (-\frac{2}{3})^n} = \infty$ , 所以发散,

因此收敛域也为  $(-3, 3)$ 。

12、(6分) 设  $a, b$  为任意常数,  $f(x)$  在  $x=0$  的邻域内具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(x) \geq m > 0, \text{ 试讨论级数:}$$

$$af\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) - bf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + af\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - bf\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + af\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) - bf\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \cdots \text{的敛散性。}$$

解 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  得:  $f(0) = f'(0) = 0$ , 再由  $f''(x) \geq m > 0$  知: 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ,  $f(x)$

是单调增函数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 故  $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  单调减且趋于 0, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  收敛。

当  $a = b$  时, 级数  $= a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ , 收敛。

$$\text{当 } a \neq b \text{ 时, } S_{2n} = af\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) - bf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + af\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - bf\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + af\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) - bf\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$= a[f\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)]$$

$$+ (a-b)[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)] = a\sigma_{2n} + (a-b)\delta_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{2x^2} = \frac{f''(0)}{4} > \frac{m}{4} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \text{ 不存在,}$$

由 (1) 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n}$  存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$  不存在, 级数发散。