武汉大学 2017-2018 学年第二学期期末考试高等数学 B2

1、（8 分）设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4$，试求 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})$.

2、（8 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-2z=f(y^2-2z)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，求证 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

3、（8 分）设 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4.（8 分）已知椭圆 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 周长为 b，求 $\oint_L(4xy+9x^2+4y^2)\mathrm{d}s$.

5、（8 分）判断两直线 L_1：$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ 和 L_2：$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ 是否在同一平面内，并求两直线的的夹角。

6、（10 分）已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，求该函数并确定 a 的值.

7、（10 分）在椭球面 $2x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+\tan z^2$ 在该点沿曲线 $x=t^2, y=1-2t, z=t^3-3t$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处的切线方向的方向导数最大。

8、（10 分）求曲面积分 $I=\iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧在 $z\ge 0$ 的部分。

9、（8 分）设 $f(u)$ 连续，区域 Ω 由 $0\le z\le 1$，$x^2+y^2\le t^2$ 围成，$f(t)=\iiint\limits_\Omega [z^2+f(\sqrt{x^2+y^2})]\,dV$，求 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^2}$。

10、（8 分）已知 $b_n=\int_0^1 x\sin n\pi x dx, (n=1,2,3,\cdots)$，试判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}b_n}{n+1}$ 敛散性并求其和。

11、（8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+(-2)^n}x^n$ 的收敛区间与收敛域。

12、（6 分）设 a，b 为任意常数，$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,\ f''(x)\ge m>0$，试讨论级数：

$$af(\frac{1}{\sqrt{1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2}})+af(\frac{1}{\sqrt{3}})-bf(\frac{1}{\sqrt{4}})+\cdots+af(\frac{1}{\sqrt{2n-1}})-bf(\frac{1}{\sqrt{2n}})+\cdots$$ 的敛散性。

由（1）知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{2n}$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 不存在，级数发散。