

武汉大学 2016-2017 学年第二学期期末考试高等数学 B2 试题 (A) 解答

1、(8 分) 设  $\vec{a} = (2, -3, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, 3)$ ,  $\vec{c} = (2, 1, 2)$ , 求同时垂直于  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$ , 且在向量  $\vec{c}$  上投影是 14 的向量  $\vec{d}$ .

$$\text{解: 设 } \vec{d} = (x, y, z), \text{ 由条件可得 } \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 2x - 3y + z = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = x - 2y + 3z = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{d} = 2x + y + 2z = |\vec{c}| \cdot |\text{Pr } \vec{d}| = 42 \end{cases}, \text{ 解之得}$$

$$x = 14, y = 10, z = 2. \text{ 故 } \vec{d} = (14, 10, 2)$$

2、(10 分) 讨论极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$  的存在性, 若存在求出极限, 若不存在说明理由。

$$\text{解 由于 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} = 0 \quad \dots 5'$$

$$\lim_{\substack{x=y^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{12}}{(2y^4)^3} = \frac{1}{8} \quad \text{所以 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} \text{ 不存在。} \dots \dots 5'$$

$$(\text{或 } \lim_{\substack{x=ky^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k^4 y^{12}}{[(k^2 + 1)y^4]^3} = \frac{k^4}{(k^2 + 1)^3} \dots \dots 5')$$

3、(8 分) 过直线  $l: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$  作两个互相垂直的平面, 且其中一个过已知点  $M_1(0, 1, -1)$ , 求这两个平面的方程。

解 设过  $l$  的平面方程为  $x + y - z + \lambda(x + 2y + z) = 0$  由过  $M_1$  点, 解得:  $\lambda = -2$

故过  $l$  且过  $M_1$  的平面为  $\pi_1: x + 3y + 3z = 0$

设另一个平面为  $x + y - z + \mu(x + 2y + z) = 0$  由与  $\pi_1$  垂直, 解得  $\mu = -\frac{1}{10}$

故平面为  $9x + 8y - 11z = 0$

4、(10 分) 设函数  $f(u, v)$  由关系式  $f(xg(y), y) = x + g(y)$  确定, 其中函数  $g(y)$  可微, 且  $g(y) \neq 0$ , 求  $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ .

$$\text{解: 设 } \begin{cases} xg(y) = u \\ y = v \end{cases} \text{ 得 } f(u, v) = \frac{u}{g(v)} + g(v), \text{ 关于 } v \text{ 求得 } \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{g(v)}, \dots 5'$$

$$\text{因此 } \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = -\frac{g'(v)}{g^2(v)} \dots 5'$$

5、(8 分) 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $y = \ln x$ ,  $h(\sin x, e^y, z) = 0$ , 且  $\frac{\partial h}{\partial z} \neq 0$ , 求  $du$ .

解: 法一: 对  $y = \ln x$  两边对  $x$  求导数, 有  $y' = \frac{1}{x}$ , 对  $h(\sin x, e^y, z) = 0$  两边对  $x$  求导数,

有  $h_1 \cdot \cos x + h_2 \cdot e^y \cdot y' + h_3 \cdot z' = 0$ ，注意由  $y = \ln x$  可知  $e^y = x$ ，从而  $z' = -\frac{\cos x \cdot h_1 + h_2}{h_3}$ 。

对  $u = f(x, y, z)$  两边同时对  $x$  求导，得

$$du = (f_1 + f_2 \cdot y' + f_3 \cdot z') dx = \left( f_1 + f_2 \cdot \frac{1}{x} + f_3 \cdot \left( -\frac{\cos x \cdot h_1 + h_2}{h_3} \right) \right) dx$$

法二 由  $du = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz$

又  $e^y = x$ ， $dy = \frac{1}{x}dx$ ， $h_1 \cos x dx + h_2 e^y dy + h_3 dz = 0$  故  $dz = -\frac{h_1 \cos x dx + h_2 dx}{h_3}$

所以有  $du = \left( f_x + \frac{f_y}{x} - f_z \frac{h_1 \cos x + h_2}{h_3} \right) dx$

6、(10 分) 在椭球面  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上求一点，使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在该点沿方向  $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$  的方向导数最大。

解：函数  $f(x, y, z)$  的方向导数的表达式为  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$ 。

其中： $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\cos \gamma = 0$  为方向  $\vec{l}$  的方向余弦。因此  $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{2}(x - y)$ 。……5'

于是，按照题意，即求函数  $\sqrt{2}(x - y)$  在条件  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  下的最大值。设

$F(x, y, z, \lambda) = \sqrt{2}(x - y) + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$ ，则由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{2} + 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sqrt{2} + 4\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

得  $z = 0$  以及  $x = -y = \pm \frac{1}{2}$ ，即得驻点为  $M_1 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$  与  $M_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$ 。因最大值必存

在，故只需比较  $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_1} = \sqrt{2}$ ， $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{M_2} = -\sqrt{2}$  的大小。由此可知  $M_1 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$  为所求。……5'

7、(10 分) 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ ，计算二重积分  $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ 。

解：由于积分区域关于  $x$  轴对称，函数  $\frac{1}{1+x^2+y^2}$  是变量  $y$  的偶函数， $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$  是变量  $y$  的

奇函数，则  $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$ 。……5'

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \frac{r dr}{1+r^2} = \frac{\pi}{2} \ln 5,$$

其中  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$  ………5'

8、(8 分) 计算曲线积分  $\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ ，其中  $L$  是从坐标原点起，经曲线  $y = x^2$  到点  $(a, a^2)$  的路径。

解：因  $\frac{\partial}{\partial x}(-\sin y e^x) = -\sin y e^x = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y)$ ，所以积分与路径无关，取路径为如下折线  $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,a^2)$ ，则有

$$\int_L e^x (\cos y dx - \sin y dy) = \int_0^a e^x dx - \int_0^{a^2} e^a \sin y dy = e^a \cos a^2 - 1$$

9、(10 分) 试将函数  $f(x) = \ln(1+x+x^2)$  展开成  $x$  的幂级数。

解：由于  $f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$  利用  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1,1)$ .....5'

得  $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^{3k+1}}{3k+1} + \frac{x^{3k+2}}{3k+2} - \frac{2x^{3k+3}}{3(k+1)} \right) \quad x \in (-1, 1)$ .....5'

10、(10 分) 计算曲面积分  $I = \iint_S 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$ ，其中  $S$  是曲面

$z = 4 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$  的上侧。

解 补辅助面  $S_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ ，法向量向下，形成封闭曲面  $\Omega$ ，在  $\Omega$  上运用高斯公式可得

$$J = \iiint_{S \cup S_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dxdydz, \dots\dots 5'$$

作柱坐标变换得

$$J = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{1-r^2} (r^2 + z) r dz = 128\pi, \text{ 而}$$

$$J_1 = \iint_{S_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = -\iint_{S_1} 3 dxdy = -\iint_D -3 dxdy = 12\pi, \text{ 所以}$$

$$I = J - J_1 = 116\pi \dots\dots 5'$$

11、(8 分) 设  $a_n < b_n < c_n, n=1,2,\dots$ ，证明：若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛，则必有  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛，且

$$\text{有 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

证明：由  $a_n < b_n < c_n$  可得  $0 < b_n - a_n < c_n - a_n$ ，由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛知道  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$  收敛，由

正项级数比较判别法知道  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$  收敛，从而  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + (b_n - a_n)]$  收敛。另外设

$A_n, B_n, C_n$  分别是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  的部分和数列，则  $A_n < B_n < C_n$ ，由数列极限的性质知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$