2015-2016 高等数学 B2 期末试题解

一、（9 分）设长方体三条棱长$|OA|=5,|OB|=4,|OC|=3$，$|OM|$为对角线。求$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OM}$上的投影。

解：以$\overrightarrow{OA}$延长为 x 轴，$\overrightarrow{OB}$延长为 y 轴，$\overrightarrow{OC}$延长为 z 轴，建立直角坐标系。

$$\overrightarrow{OA}=\{5,0,0\},\overrightarrow{OM}=\{5,4,3\},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=25,\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{5^2+4^2+3^2}=5\sqrt{2}$$

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

二、（10 分）设函数$f(u,v)$可微且$f(1,1)=0$，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(y,z)$所确定。求$dz\big|_{(0,1)}$和$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}$。

解：$(x,y)=(0,1)$代入$(x+1)z-y^2=x^2f(y,z)$得$z=1$。

$(x+1)z-y^2=x^2f(y,z)$两边微分得

$$(x+1)dz+zdx-2ydy=2xf(y,z)dx+x^2(f_1(y,z)dy+f_2(y,z)dz)$$

解得$dz=\dfrac{2xf(y,z)-\mathrm{z}}{x+1-x^2f_2(y,z)}dx+\dfrac{x^2f_1(y,z)+2\,\mathrm{y}}{x+1-x^2f_2(y,z)}dy$。

$$dz\big|_{(0,1)}=\left.\frac{2xf(y,z)-\mathrm{z}}{x+1-x^2f_2(y,z)}\right|_{(0,1,1)}dx+\left.\frac{x^2f_1(y,z)+2\,\mathrm{y}}{x+1-x^2f_2(y,z)}\right|_{(0,1,1)}dy=-1dx+2dy。$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xf(y,z)-\mathrm{z}}{x+1-x^2f_2(y,z)},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(2f(y,z)+2xf_2(y,z)\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(x+1-x^2f_2(y,z)\right)-\left(2xf(y,z)-z\right)\left(1-2xf_2(y,z)-x^2f_{22}(y,z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(x+1-x^2f_2(y,z)\right)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}=\left.\frac{\left(2f(y,z)+2xf_2(y,z)\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(x+1-x^2f_2(y,z)\right)-\left(2xf(y,z)-z\right)\left(1-2xf_2(y,z)-x^2f_{22}(y,z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(x+1-x^2f_2(y,z)\right)^2}\right|_{(0,1,1)}$$

$$=2$$

三、（7 分）求函数$u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$在点$A(1,0,1)$处沿点$A$指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数。

解：$du\Big|_A = \left.\dfrac{dx + \dfrac{ydy+zdz}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_A = \dfrac{1}{2}dx + 0dy + \dfrac{1}{2}dz$，$\overrightarrow{gradu}\Big|_A = \left\{\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$。

$\overrightarrow{AB} = \{2, -2, 1\}$，$\vec{e}_{\overrightarrow{AB}} = \left\{\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right\}$。

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}}\right|_A = \overrightarrow{gradu}\Big|_A \cdot \vec{e}_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{1}{2}$。

四、（9 分）求函数 $z = 2x^2 + 3y^2 + 4x - 8$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \le 4$ 上的最大值和最小值。

解：（1）在边界上，$z = -x^2 + 4x + 4(-2 \le x \le 2)$。

让 $\dfrac{dz}{dx} = -2x + 4 = 0$ 得唯一解 $x = 2$。$z(2) = 8, z(-2) = -8$。

在 D 的内部解方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6y = 0 \end{cases}$ 得唯一 $(-1, 0)$。$z(-1, 0) = -10$。

故，$\max\limits_D z = 8, \min\limits_D z = -10$。

五、（9 分）设 Ω 是由 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 及 $z = 0$ 所围的闭区域。试将 $\iiint\limits_\Omega f(x^2 + y^2)dV$ 分别化成球面坐标、柱面坐标下的三次积分式。

解：$\iiint\limits_\Omega f(x^2 + y^2)dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 f(r^2 \sin^2\varphi) r^2 \sin\varphi dr$。

$\iiint\limits_\Omega f(x^2 + y^2)dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho^2)dz$。

六、（8 分）计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 ydxdy$ 其中 D 是由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = 1$ 所围成的平面区域。

解：$\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int_0^1 ydy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} x^2 dx = 2\int_0^1 ydy \int_0^{\sqrt{1+y^2}} x^2 dx$

$= \dfrac{2}{3}\int_0^1 y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy = \dfrac{1}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy^2 = \dfrac{1}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{1+t}\right)^3 dt$

$= \dfrac{2}{15}(1+t)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{15}\left(2^{\frac{5}{2}} - 1\right)$

七、（10 分）将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le h\\ 0, & h<x\le\pi\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数。

解：（1）展开成正弦级数。

$a_n=0$

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nxdx=-\dfrac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^h=\dfrac{2}{n\pi}\left(1-\cos nh\right)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos nh\right)\sin nx\quad\left(0<x\le\pi,x\ne h\right)$$

（2）展开成余弦级数。

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}dx=\dfrac{2h}{\pi}$

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nxdx=\dfrac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^h=\dfrac{2\sin nh}{n\pi}$

$b_n=0$

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nh}{n\pi}\cos nx\quad\left(0\le x\le\pi,x\ne h\right)$$

八、（9 分）求曲线 $\begin{cases}y^2+z^2=20\\ -2x^2-2y^2+z^2=-10\end{cases}$ 在点 $A(-3,2,4)$ 处的切线及法平面方程。

解：曲线 $\begin{cases}y^2+z^2=20\\ -2x^2-2y^2+z^2=-10\end{cases}$ 在点 $(-3,2,4)$ 附近的参数方程

$$\begin{cases}x=-\sqrt{15}\sqrt{-\cos2\theta}\\ y=\sqrt{20}\cos\theta\\ z=\sqrt{20}\sin\theta\end{cases}$$

在 A 点，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt5},\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt5}$，

$$x'=-\sqrt{15}\frac{\sin2\theta}{\sqrt{-\cos2\theta}}=-\sqrt{15}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-2\cos^2\theta}}=-\sqrt{15}\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{\frac{3}{5}}}=-4$$

$y'=-\sqrt{20}\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{20}}{\sqrt5}=-4,z'=\sqrt{20}\dfrac{1}{\sqrt5}=2$ 。

$\vec{\tau}=\{2,2,-1\}$

切线：$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-1}$；法平面：$2(x+3)+2(y-2)-z+4=0$ 即 $2x+2y-z=-6$。

九、（7 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_S (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\left(0\le z\le h\right)$ 的外侧。

解：补曲面 $S_1: x^2+y^2\le h^2, z=h$ 上侧。$S+S_1$ 围 Ω。

$$\iint\limits_{S+S_1} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy \overset{\text{高斯公式}}{=} \iiint\limits_{\Omega} 0dV=0$$

$$\iint\limits_S (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{S_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{S_1}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}(x^2-y)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}x^2dxdy=-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h \rho^3 d\rho=-\frac{\pi h^4}{4}$$

十、（7 分）试求函数 $f(x)=\arctan x$ 在点 $x_0=0$ 的泰勒级数展开式，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 之值。

解：$\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ $\left(-1<x<1\right)$。

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad\left(-1\le x\le 1\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$$

十一、（9 分）求二元可微函数 $\varphi(x,y)$，满足 $\varphi(0,1)=1$，并使曲线积分 $I_1=\int_L (3xy^2+x^3)dx+\varphi(x,y)dy$ 及 $I_2=\int_L \varphi(x,y)dx+(3xy^2+x^3)dy$ 都与积分路径无关。

解：$P_1=3xy^2+x^3, Q_1=\varphi(x,y), Q_2=3xy^2+x^3, P_2=\varphi(x,y)$。

$$\begin{cases} 6xy=\varphi_x \\ 3y^2+3x^2=\varphi_y \end{cases}$$

由前式得 $\varphi=3x^2y+C(y)$。结合后式得 $3y^2+3x^2=3x^2+C'(y), C(y)=\mathrm{y}^3+c$。

$\varphi=3x^2y+y^3+c$。由 $\varphi(0,1)=1$ 有 $c=0$。$\varphi(x,y)=3x^2y+y^3$。

十二、（6 分）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(a_n > 0\right)$收敛，试证明：当$\alpha > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n^{\alpha}}}$也收敛。

证：下面所涉及的级数都是正项级数。因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}$收敛；因为当$\alpha > 1$时$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\alpha}}$收敛。从而$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^{\alpha}}\right)$收敛。又因为$\sqrt{\frac{a_n}{n^{\alpha}}} \le \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^{\alpha}} (n > 0)$，故，$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n^{\alpha}}}$也收敛。