数学分析 I

第 5 次讨论班

2024 年 11 月 28 日

1. 完整叙述Rolle, Lagrange, Cauchy中值定理的内容.

   解答. 略.

2. (1) 若 I 为区间, $f \in C(I)$, 且在区间 I 中所有内点处的导数都为 0, 证明: f 为 I 上的常值函数.
   (2) 若 I 为区间, $f, g \in C(I)$, 且最多除有限点外已知有 $f'(x) = g'(x)$, 则存在常数 C, 使得在区间 I 上成立 $f(x) = g(x) + C$. 试证明此结论.

   解答.
   (1) 任取 $a, b \in I$, 且设 $a < b$. 则可以在闭区间 $[a, b]$ 上对 f 用 Lagrange 中值定理, 知道存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

   $$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b).$$

   由于 $f'(\xi) = 0$, 就有 $f(a) - f(b)$. 这样就证明了函数 f 在区间 I 中的任意两个点上的值相等, 因此 f 是区间 I 上的常值函数.
   (2) 作辅助函数

   $$F(x) = f(x) - g(x),$$

   并将区间按所指出的有限个例外点分成有限段子区间, 然后对每一子区间上的函数 F 分别利用上一问的结论, 知道 F 在每一个子区间上为常数, 最后从 $F \in C(I)$ 推出 $F(x)$ 在整个区间上是常值函数.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导 $(0 \leqslant a < b), f(a) \neq f(b)$. 试证: $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ 使得

   $$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

   解答.
   用 $(b - a)$ 乘题中所给式子两端, 可以得到

   $$\frac{f'(\xi)}{1}(b - a) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2 - a^2).$$

   为证此式, 只要取 $g(x) = x$ 和 x^2, 在 $[a, b]$ 上分别应用 Cauchy 中值定理, 则

   $$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{1} \cdot (b - a) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2 - a^2), \xi, \eta \in (a, b).$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 问是否对任意的 $\xi \in (a,b)$, 总存在 $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < \xi < x_2$, 使得 $f(x_2) - f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$? 进一步, 若加入 $f''(x) > 0$ 的条件, 结论是否成立?

解答.

不一定成立, 比如考虑区间 $[-1,1], f(x) = x^3$. 对于 $\xi = 0$, 则 $f'(\xi) = 0$. 由于 x^3 单调增, 故不存在 $x_1 < 0 < x_2$, 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$.

如果加上 $f''(x) > 0$ 的条件, 则结论成立. 参考课本上证明 Lagrange 中值定理的思路, 我们尝试构造辅助函数将其转化为与 Rolle 中值定理类似的情形.

对于任意给定的 $\xi \in (a,b)$, 构造 $g(x) = f(x) - f'(\xi)x$. 则题目转化为: 已知 $g''(x) > 0, g'(\xi) = 0$, 求证存在 $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < \xi < x_2$, 使得 $g(x_1) = g(x_2)$. 下面给出证明.

事实上, 由 $g''(x) > 0$ 可知: $g(x)$ 单调递增, 又由于 $g'(\xi) = 0$, 从而存在 $a < z_1 < \xi, \xi < z_2 < b$, 使得

$$g'(x) < 0, \forall x \in (z_1, \xi),$$
$$g'(x) > 0, \forall x \in (\xi, z_2).$$

如果 $g(z_1) = g(z_2)$, 则即为所求. 如果 $g(z_1) \neq g(z_2)$, 我们取其中较大者对应的 z, 不妨设为 z_2. 在 (ξ, z_2) 上运用介质定理, 则存在 $\eta \in (\xi, z_2)$, 使得 $g(\eta) = g(z_1)$, 结论得证.

5. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

解答.

要证 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, 即要证: $\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta > 0$, 使得 $x > \Delta$ 时有

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

已知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. 所以对此 $\varepsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $x > A$ 时有

$$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

由 Lagrange 中值定理, 对 $x > A, \exists \xi : A < \xi < x$ 使得 $f(x) = f(A) + f'(\xi)(x - A)$. 故

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leqslant \left| \frac{f(A)}{x} \right| + |f'(\xi)| \cdot \frac{x - A}{x} < \frac{|f(A)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

但 $x \to +\infty$ 时 $\dfrac{|f(A)|}{x} \to 0$. 可见要式(1)成立, 只要取 $\Delta = \max\left\{A, \dfrac{2|f(A)|}{\varepsilon}\right\}$, 则当 $x > \Delta$ 时, 从(3)可以推得(1)成立.

6. 设函数在 $[a,b]$ 可导, 其中 $a \geqslant 0$, 证明存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

如果题中不限制 $a \geqslant 0$, 结论是否成立?

解答.

令 $g(x) = x^2$, 对 $f(x), g(x)$ 运用 Cauchy 中值定理有 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

移项即有结论.

如果不限制 $a \geqslant 0$, 结论依然成立. 由于无法保证 $g(x) \neq 0$, 则无法直接使用 Cauchy 中值定理. 我们可以借助课本上对 Cauchy 中值定理的证明过程作类似推导.

令 $g(x) = x^2$. 如果 $g(a) = g(b)$, 则令 $\xi = 0$ 即可. 对于 $g(a) \neq g(b)$, 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)], \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

显然有 $F(a) = F(b) = 0$, 则由 Rolle 中值定理有 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 移项得到结论.

7. 设 $f \in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 可微, 并且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 又设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 1$ 的 n 个正数. 证明: 在 $(0,1)$ 中存在 n 个互不相同的数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 使得

$$\frac{k_1}{f'(t_1)} + \frac{k_2}{f'(t_2)} + \cdots + \frac{k_n}{f'(t_n)} = 1.$$

解答.

由 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 和 k_i 是正数, 根据介质定理, 我们可以选择 $(0,1)$ 中的 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 使得

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

同时满足

$$f(x_1) = k_1, f(x_2) = k_1 + k_2, \cdots, f(x_{n-1}) = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}.$$

在区间 $[x_{i-1}, x_i]\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 上用 Lagrange 定理, 有 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得

$$k_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1}), i = 1, 2, \cdots, n.$$

这样就有

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{f'(t_1)} + \frac{k_2}{f'(t_2)} + \cdots + \frac{k_n}{f'(t_n)} &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 = 1. \end{aligned}$$

8. (选做)设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 并设有实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, 试证明在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

解答. 因 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 利用 Lagrange 中值定理有

$$|f(x)| = |f(0) + f'(\xi_1)(x - 0)| = |f'(\xi_1)x| \leqslant A|f(\xi)|x.$$

当限制 $x \in \left(0, \dfrac{1}{2A}\right]$ 时有

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)|, 0 < \xi_1 < x.$$

重复使用此式得

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{2^2}|f(\xi_2)| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|,$$

这里 $0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x \leqslant \dfrac{1}{2A}$.
由 $f(x)$ 的连续性, $\exists M > 0$, 使得在 $\left[0, \dfrac{1}{2A}\right]$ 上 $|f(x)| \leqslant M$. 故

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{2^n}\,(n = 1, 2, \cdots).$$

从而在 $\left[0, \dfrac{1}{2A}\right]$ 上 $f(x) \equiv 0$. 用数学归纳法, 可以证明在一切 $\left[\dfrac{i-1}{2A}, \dfrac{i}{2A}\right]$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 上恒有 $f(x) \equiv 0$. 所以 $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$.