数学分析 I

第 7 次讨论班

2024 年 12 月 15 日

1. 利用 Taylor 公式计算极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\left(\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(2\pi n!e)$

解答.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{(-\frac{3}{2}x^2+o(x^2))x^2}=-\dfrac{1}{12}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{24}x^2+o(x^2)}=-3$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x+o(\sin^4 x)-6\left((1+1-\cos x)^{\frac{1}{3}}\right)-1\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left(-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)-6\left(-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)\right)\\
=&-\frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\
=&\lim_{n\to+\infty} n\left[e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]\\
=&\lim_{n\to+\infty} n\left[e-e^{\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right]\\
=&\lim_{n\to 0^+}\frac{e}{n}\left[1-e^{\left(-\frac{n}{2}+o(n)\right)}\right]\\
=&\frac{e}{2}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(2\pi n!e\right)\\
=&\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(2\pi n!\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!}\right)\right),\theta\in(0,1)\\
=&\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right)\right)\\
=&2\pi
\end{aligned}
$$

2. 设 f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中 n 次可微, 且 $f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 证明: 当 $0<|h|<\delta$ 时, 成立 $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h), 0<\theta<1$, 且成立

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

解答.

由 Peano 余项的 Taylor 公式可得

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+o(h^{n-1})$$

代入题设等式有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^n+o(h^n) \tag{1}$$

再用 Peano 余项的 Taylor 公式展开 $f(x_0+h)$ 可得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n) \tag{2}$$

对比 (1) 与 (2) 式有

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}h^n\left(\theta^{n-1}-\frac{1}{n}\right)=o(h^n)$$

即

$$\theta^{n-1}-\frac{1}{n}=o(1)$$

移项开方之后即为所求.

3. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二次连续可微, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 存在, 且 $\varphi''(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 试证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$.

解答.

要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$, 即要证明: $\forall\varepsilon>0,\exists\Delta>0$, 当 $x>\Delta$ 时, $|\varphi'(x)|<\varepsilon$. 利用 Taylor 公式有

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\varphi'(x)h+\frac{1}{2}\varphi''(\xi)h^2,\forall h>0,$$

即

$$\varphi'(x) = \frac{1}{h}\left[\varphi(x+h) - \varphi(x)\right] - \frac{1}{2}\varphi''(\xi)h. \tag{1}$$

不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = A$. 又因 φ'' 有界, 所以 $\exists M > 0$, 使得 $|\varphi''(x)| < M(\forall x \geqslant 0)$. 故由 (1) 知

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{h}\left[|\varphi(x+h) - A| + |A - \varphi(x)|\right] + \frac{1}{2}Mh. \tag{2}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 首先可令 h 足够小, 使得 $\frac{1}{2}Mh < \frac{\varepsilon}{2}$. 然后固定 h, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = A$, 可知 $\exists \Delta > 0$, 当 $x > \Delta$ 时,

$$\frac{1}{h}\left[|\varphi(x+h) - A| + |A - \varphi(x)|\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

再代入 (2) 式即可得证.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三次可导, 试证: $\exists c \in (a,b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f'''(c)(b-a)^3.$$

解答.

法一: 设 k 为使下式成立的实数:

$$f(b) - f(a) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) - \frac{1}{24}k(b-a)^3 = 0.$$

此时, 问题转化成证明: $\exists c \in (a,b)$, 使得

$$k = f'''(c).$$

令

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a) - \frac{k}{24}(x-a)^3. \tag{1}$$

则有

$$g(a) = g(b) = 0.$$

根据 Rolle 中值定理, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 由 (1) 式得

$$f'(\xi) - f'\left(\frac{a+\xi}{2}\right) - f''\left(\frac{a+\xi}{2}\right)\frac{\xi-a}{2} - \frac{k}{8}(\xi-a)^2 = 0. \tag{2}$$

再写出 $f'(\xi)$ 在 $\frac{a+\xi}{2}$ 处的 Taylor 公式:

$$f'(\xi) = f'\left(\frac{a+\xi}{2}\right) + f''\left(\frac{a+\xi}{2}\right)\frac{\xi-a}{2} + \frac{1}{2}f'''(c)\left(\frac{\xi-a}{2}\right)^2. \tag{3}$$

对比 (2) 与 (3) 式即可得证.

法二: 分别把 $f(a),f(b)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 处展开有

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

两式相减有

$$f(b)-f(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)](b-a)^3$$

再由 Darboux 定理, $\exists\xi\in(a,b),f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$, 代入即可得证.

5. 设 $f(x)$ 二次可微, 且 $f(0)=f(1)=0,\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$, 试证: $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant -16$.

解答.

因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故有最大最小值. 又因题设条件知最大值在 $(0,1)$ 内部达到. 所以, $\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$, 由 Fermat 定理, 有 $f'(x_0)=0$.

分别把 $f(0),f(1)$ 在 x_0 处展开有

$$0=f(0)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=2+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2,$$
$$0=f(1)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0^2)=2+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2.$$

因此

$$\min_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant\min\{f''(\xi),f''(\eta)\}\leqslant\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}.$$

故

$$x_0\in\left[\frac{1}{2},1\right],\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}=-\frac{4}{(1-x_0)^2}\leqslant -16,$$
$$x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}=-\frac{4}{x_0^2}\leqslant -16.$$

即为所证.

6. (选做) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|<2$. 试证: 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f'(x)\leqslant 3$.

解答.

分别把 $f(1),f(1)$ 在 x 点处作展开有

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2,$$
$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(-x)^2.$$

所以有

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\eta)x^2,$$

取绝对值有

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leqslant |f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|(1-x^2)+\frac{1}{2}|f''(\eta)|x^2\\ &\leqslant 2+(1-x)^2+x^2\leqslant 2+1=3.\end{aligned}$$

7. (选做) 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为二次可微函数,

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\ (k=0,2),$$

试证:

$$M_1=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f'(x)|<+\infty\text{且}M_1^2\leqslant 2M_0M_2,$$

$f^{(0)}$ 表示 $f(x)$.

解答.

分别把 $f(x+h),f(x-h)$ 在 $f(x)$ 处展开有

$$\begin{aligned}f(x+h)&=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2,\xi\in(x,x+h)\\ f(x-h)&=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\eta)h^2,\eta\in(x-h,x)\end{aligned}$$

两式相减有

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}\left[f''(\xi)-f''(\eta)\right]$$

即

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}\left[f''(\xi)-f''(\eta)\right]$$

取绝对值有

$$\begin{aligned}2|f'(x)|h&\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{1}{2}\left(|f''(\xi)|+|f''(\eta)|\right)\\ &\leqslant 2M_0+h^2M_2\end{aligned}$$

移项有

$$M_2h^2-2|f'(x)|h+2M_0\geqslant 0,\forall h$$

将其看成关于 h 的二次函数, 故有判别式条件

$$\Delta=4\left(|f'(x_0)|^2-2M_0M_2\right)\leqslant 0$$

即有 $|f'(x)|^2\leqslant 2M_0M_2$ 对一切 x 成立, 所以有 $M_1=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f'(x)|<+\infty\text{且}M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.