数学分析I

第2次讨论班

2024 年 11 月 13 日

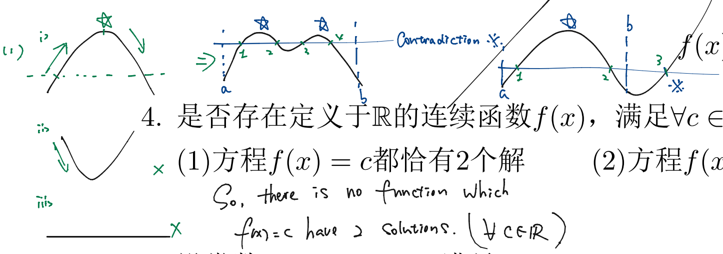
1. 讨论下列几种叙述能否作为函数极限 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 的等价定义? They are all equivalent.
   (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall x : 0 < |x-a| < \delta$, 总有 $|f(x) - A| \le \varepsilon$.
   (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall x : 0 < |x-a| < \delta$, 总有 $|f(x) - A| < k\varepsilon$ (k 为与 ε 无关的正常数).
   (3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall x : 0 < |x-a| < \delta$, 总有 $|f(x) - A| < \frac{1}{n}$.
   (4) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$, 使得对于 $\forall x : 0 < |x-a| < \frac{1}{n}$, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. (1) 设 $\lim_{x\to 0} f(x^3) = A$, 是否成立 $\lim_{x\to 0} f(x) = A$. √
   (2) 设 $\lim_{x\to 0} f(\overset{\ge 0}{x^2}) = A$, 是否成立 $\lim_{x\to 0} f(x) = A$? ×
   (3) 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A (a \ge 0)$,证明: $\lim_{x\to\sqrt{a}} f(x^2) = A$. √

3. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x) = f(x)$，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$,证明 $f(x) \equiv A, x \in (0, +\infty)$.

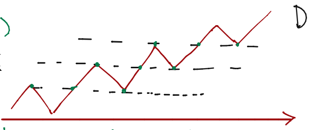
3. Method 1: $\{2^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$
$\lim_{n\to\infty} f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(2^n x_0) \xlongequal[\text{theorem}]{\text{Heine}} \lim_{x\to\infty} f(x)$
Method 2: proof by contradiction

Definition of function limit.



4. 是否存在定义于 $\mathbb{R}$ 的连续函数 $f(x)$，满足 $\forall c \in \mathbb{R}$
   (1)方程 $f(x) = c$ 都恰有2个解 (2)方程 $f(x) = c$ 都恰有3个解

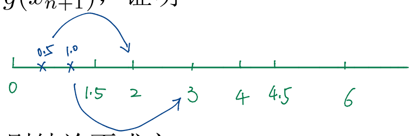
So, there is no function which $f(x)=c$ have 2 solutions. ($\forall c \in \mathbb{R}$)



So, there exist function $f(x)=c$ has 3 solutions. ($\forall c \in \mathbb{R}$)

5. 设常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. 求证:
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k} = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k} - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k (\sin\sqrt{x+k} - \sin\sqrt{x}) \to 0 \ (x\to\infty)$$

6. 已知 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，无穷点集 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $x_n \in [0, 1]$ 且 $f(x_n) = g(x_{n+1})$，证明
$$\exists\ \xi \in [0, 1] \quad s.t. \quad f(\xi) = g(\xi)$$



7. 证明：非常值的连续周期函数必有最小正周期。举例说明若没有连续条件则结论不成立

8. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且满足 $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$，分别在下述条件下证明
$$f(x) = f(1)x,\ x \in \mathbb{R}$$
   (1)若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续
   (2)若 $\exists [a, b] \in \mathbb{R}$，使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调
   (3)若 $\exists [a, b] \in \mathbb{R}$，使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

9. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的每点极限都存在，记 $g(x) = \lim_{t\in[a,b], t\to x} f(t)$ ，证明：
   (1) $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
   (2) $\forall \varepsilon > 0$，集合 $E = \{x \in [a, b]; |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}$ 是有限集