数学分析 I

第 6 次讨论班

2024 年 12 月 9 日

1. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x\,(n>0)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解答.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\xlongequal{L'H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1,$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}\xlongequal{L'H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{-n}=0,$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\xlongequal{L'H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\xlongequal{L'H}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{x+2}{(1+x)^2}}=\dfrac{1}{2},$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln x}{1+\ln x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+\ln x}}\xlongequal{L'H}e,$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}\xlongequal{L'H}e^0=1.$

2. 计算下列极限并思考 L'Hospital 法则的使用技巧

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\frac{1}{2}\sin 2x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-x^3-1}{x^6}$

解答.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\frac{1}{2}\sin 2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin 2x}{2x}}=1,$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-x^3-1}{x^6}\xlongequal{x^3=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-t-1}{t^2}\xlongequal{L'H}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{2t}\xlongequal{L'H}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t}{2}=\dfrac{1}{2}.$

注.

(1) 如果直接用 L'Hospital 法则会发现极限不存在, 但要注意 L'Hospital 法则的前提是得出的结果必须是一个数或者 ∞, 故该问题不能直接用 L'Hospital 法则计算.

(2) 如果不经过化简直接使用 L'Hospital 法则计算会很复杂, 故能化简时一定先化简再计算.

3. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 试证: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解答.

由题设及 L'Hospital 法则有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}\xlongequal{L'H}\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=A.$$

再由极限的四则运算可知另一结论也成立.

4. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

解答.

显然有左连续性成立, 下考虑右连续是否成立即可.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x)&=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}\\ &=\lim_{x\to0^+} e^{\frac{\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}{x}}\\ &=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}{x}}\end{aligned}$$

又有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\xlongequal{L'H}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\xlongequal{L'H}\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$, 则右连续, 故在 $x=0$ 处连续.

5. 设 $a_1\in(0,\pi), a_{n+1}=\sin a_n(n\geqslant 1)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}a_n$.

解答.

由题设 $a_1\in(0,\pi), a_{n+1}=\sin a_n(n\geqslant 1)$ 知 $a_{n+1}\leqslant a_n, a_n>0$, 则由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在设为 $A\geqslant 0$. 再对 $a_{n+1}=\sin a_n$ 两边同时取极限有 $A=\sin A$, 再由 A 的非负性知 $A=0$.

下考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}$, 由 a_n 极限是 0 可对该极限使用 stolz 定理:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} na_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 a_n}-\frac{1}{a_n^2}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\sin^2 a_n}{a_n^2-\sin^2 a_n}\end{aligned}$$

由 Heine 定理和在 0 附近的等价无穷小可将问题转化成求下述极限: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^4}{x^2-\sin^2 x}$. 再连续使用

两次 L'Hospital 法则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{x^2-\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3}{2x-2\sin x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=3.\end{aligned}$$

再由 $\sqrt{n}a_n>0$ 知有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$.

6. 叙述并证明 Darboux 定理并考虑下述问题: 习题课上曾证明过导函数如果有间断点只能是第二类间断点, 考虑函数 $f(x)=|x|$, 这个函数是否满足上述结论呢? 为什么?

   解答. 叙述和证明略. 仍然满足, 因为 Darboux 定理需要应用在可导区间上, 而题中两个所谓的反例都是不可导点. 请各位小导师在讨论班的时候带同学们复习一下 Darboux 定理的证明和其衍生出的有关导函数的一些性质.

7. (单侧导数极限定理) 设 f 在 (a,b) 可微, 又在点 a 右连续. 若导函数 $f'(x)$ 在点 a 存在右极限 $f'(a^+)=A$, 则 f 在点 a 也一定存在右导数 $f'_+(a)$, 且有

$$f'_+(a)=f'(a^+)=A,$$

即 $f'(x)$ 在点 a 右连续. 此外, 这里的 A 除了为有限数外, 也可以为 $\pm\infty$.

解答. 令 $\Delta x=x-a,\Delta y=f(x)-f(a)$, 写出函数 $f(x)$ 在点 a 右侧的差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x},\Delta x>0.$$

在闭区间 $[a,a+\Delta x]$ 上应用 Lagrange 中值定理, 有 $0<\theta<1$, 使得

$$\Delta y=f'(a+\theta\Delta x)\Delta x.$$

因此在 $\Delta x>0$ 时有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a+\theta\Delta x).$$

现设有 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=A$, 其中 A 是有限数. 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $a<x<a+\delta$ 时有

$$|f'(x)-A|<\varepsilon.$$

若有 $0<\Delta x=x-a<\delta$, 则就有 $a<a+\theta\Delta x<x<a+\delta$, 则当 $0<\Delta x<\delta$ 时有

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}-A\right|=|f'(a+\theta\Delta)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了函数 $f(x)$ 在点 a 存在右侧导数且等于 A, 对于 A 不是有限数的情况下证明类似.

注.

若不只是考虑单侧情况, 就可以得到:

导数极限定理 设函数 f 在点 a 的某邻域 $O(a)$ 内连续, 在 $O(a)-\{a\}$ 内可导, 若导函数在 a 存在

极限, 则函数 f 在点 a 也可导, 而且 $f'(x)$ 在 a 连续.

由此可见, 若导函数在某点有极限, 则它就在该点连续. 这里甚至不要事先假定函数在该点可导. 回顾一般函数在某点存在极限时可以在该点不连续, 可见导函数的这个性质也是很独特的.

8. (a) 设 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上可导. 若存在 $\{x_n\}\to+\infty$, $\{y_n\}\to-\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}F(y_n)=c\in\mathbf{R}$. 证明: 存在 $\xi\in\mathbf{R}$, 使得 $F'(\xi)=0$.

   (b) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 且 $f'(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0(\forall x\in\mathbf{R})$. 若 $\{x_n\},\{x'_n\}\to+\infty$, $\{y_n\},\{y'_n\}\to-\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=B\in\mathbf{R},\ \lim_{n\to\infty}f(y_n)=A\in\mathbf{R},$$
$$\lim_{n\to\infty}g(x'_n)=b\in\mathbf{R},\ \lim_{n\to\infty}g(y'_n)=a\in\mathbf{R}.$$

   证明: 存在 $\xi\in\mathbf{R}$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{B-A}{b-a}$.

解答.

(a) 用反证法. 假设 $F'(x)\neq 0,\forall x\in\mathbf{R}$. 由导函数的介值性, 则 $F'(x)$ 要么恒正要么恒负, 故 F 严格单调, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}F(y_n)$, 矛盾.

(b) 记 $\dfrac{B-A}{b-a}=k, F(x)=f(x)-kg(x)$, 则问题转化成证明存在 $\xi\in\mathbf{R}$, 使得 $F'(\xi)=0$.
又已知 $g'(x)\neq 0$, 由导函数的介值性, 则 $g'(x)$ 要么恒正要么恒负, 故 F 严格单调, 则当 $x\to+\infty$ 时有

$$b=\lim_{n\to\infty}g(x'_n)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n),$$

故

$$F(x_n)=f(x_n)-kg(x_n)\to B-kb=\frac{Ab-Ba}{b-a}.$$

当 $y\to-\infty$ 时,同理有

$$F(y_n)=f(y_n)-kg(y_n)\to A-ka=\frac{Ab-Ba}{b-a}.$$

可见 $F(x)=f(x)-kg(x)$ 满足 (a) 中条件. 因此, 存在 $\xi\in\mathbf{R}$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $\dfrac{f'(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{B-A}{b-a}$, 结论得证.