数学分析 II

第 3 次参考解答

2025 年 3 月 27 日

一、基础题

improper integral.

1. 判断以下函数在定义域内是否可积：

(1) 狄利克雷函数$D(x)$，$x \in [0,1]$　　(2) 黎曼函数$R(x)$，$x \in [0,1]$

(3) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$，$x \in (0, 2\pi)$　　(4) $g(x) = e^{-x^2}$，$x \in (0,4)$

解答：

(1) $D(x)$不可积，因为其在任意小区间内振幅 ω 始终为1。 $\omega_\delta(x) \longrightarrow 0.\quad \delta \to 0.$

(2) $R(x)$可积，因为$\forall \varepsilon > 0$，$\boxed{\text{只有有限个}x\text{满足}R(x) > \varepsilon}$，因此振幅不能无限小的区间长度可以无限小，满足可积的第三充要条件。

(3) $f(x)$可积，此题易犯错。$\forall \varepsilon \in (0, 2\pi)$，可取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$，则 $\sum \omega_i \Delta x_i \le 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$，由可积第二充要条件知$f(x)$在$(0,\delta)$上可积。而 $f(x)$在$[\delta, 2\pi]$上连续，故$f(x)$在$[\delta, 2\pi)$上可积。

(4) $g(x)$可积，因为$g(x)$在$[0,4]$上连续，故在$(0,4)$上可积。

$\delta = \boxed{\dfrac{\varepsilon}{2N}}$

$\sum w_i \Delta x_i \le \sum 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon$

2. 分别举例说明，函数$f(x)$可积与$f(x)$具有原函数之间没有必然联系

解答：

可积不一定存在原函数，如$\dfrac{\sin x}{x}, \sin x^2, e^{-x^2}$在$[0,\pi]$上连续，故可积，但它们没有初等形式的原函数。

存在原函数也不一定可积。考虑 $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}, & (x \ne 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$，则$F(x)$在$\mathbb{R}$上可导，可求得其导函数为$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\cos\frac{1}{x^2}}{x}, & (x \ne 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$，所以$f(x)$有原函数$F(x)$，但其在0附近无界，显然不可积。

$x \to 0^+.\quad f(x) \to \infty$

3. (1) 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

(2) 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}x^2 - \int_{x^3}^{x} e^{-t}\,dt}{x - \sin x}$

(3) 计算$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, n \in \mathbb{N}$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

$f(\xi_i)$.

解答：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\boxed{\dfrac{1}{n}}}_{\Delta x}\left(\dfrac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \dfrac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \cdots + \dfrac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = f(x, b(x))\,b'(x) - f(x, a(x))\,a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

(2) 所求为$\frac{0}{0}$型极限，使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{2}x^2-\boxed{\int_{x^3}^{x}e^{-t}\,dt}}{x-\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x-\boxed{e^{-x}+3x^2e^{-x^3}}}{1-\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-1+e^{-x}+(6x-9x^4)e^{-x^3}}{\sin x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-e^{-x}+(6-36x-18x^3+27x^6)e^{-x^3}}{\cos x}=\frac{-1-1+6}{1}=4$$

(3) 分部积分：$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,d(sin^{n-1}x)$

$$=0+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx=(n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

故$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，由于$I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1$，迭代得Wallis公式 $n=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \boxed{I_n=\begin{cases}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & (n=2k, k\in\mathbb{Z}^+)\\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}=\frac{(n-1)!!}{n!!}, & (n=2k+1, k\in\mathbb{Z}^+)\end{cases}}$$

由于$\frac{(n-1)!!}{n!!}=\begin{cases}\frac{1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdots\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{4}\cdots\frac{\sqrt{n-1}}{n}\cdot\le\frac{\sqrt{n-1}}{n}, & (n=2k)\\ \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}{3}\cdots\frac{\sqrt{n-1}}{n}\le\sqrt{2}\frac{\sqrt{n-1}}{n}, & (n=2k+1)\end{cases}$

故由夹挤定理，$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)!!}{n!!}=0$，故 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$

Jense' inequality.

4. 证明下凸函数的Hadamard定理：若$f(x)$为定义域I内的可积下凸函数，则$\forall x_1,x_2\in I$，都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

解答：

根据下凸函数性质，只需证明 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt$ 和 $\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

令 $t=x_1+\lambda(x_2-x_1),\lambda\in(0,1)$，则有 $x_1\to x_2$

$dt=(x_2-x_1)\,d\lambda$

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt=\int_0^1 f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]\,d\lambda}$$

x_1 x_2

同理，令 $t=x_2-\lambda(x_2-x_1),\lambda\in(0,1)$，有 $x_2\to x_1$

$dt=(-)(x_2-x_1)\,d\lambda$

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt=\int_0^1 f[x_2-\lambda(x_2-x_1)]\,d\lambda}$$

于是 $\int_{x_1}^{x_2}=\int_1^0(-)=\int_0^1$

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1\{f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]+f[x_2-\lambda(x_2-x_1)]\}\,d\lambda$$

注意到 $x_1+\lambda(x_2-x_1)$ 和 $x_2-\lambda(x_2-x_1)$ 关于中点 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称，根据下凸函数性质

$$\frac{1}{2}\{f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]+f[x_2-\lambda(x_2-x_1)]\}\ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

所以

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,dt}\ge\int_0^1 f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)d\lambda=\boxed{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}$$

另一边，应用下凸函数性质

$$\boxed{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt} = \int_0^1 f[x_1+\lambda(x_2-x_1)]\,d\lambda = \int_0^1 f[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]\,d\lambda \le \int_0^1 [\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)]\,d\lambda$$
$$= f(x_2)\cdot\frac{\lambda^2}{2}\,|_0^1 + f(x_1)\cdot[-\frac{(1-\lambda)^2}{2}]\,|_0^1 = \boxed{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}}$$

5. 设$f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，且$f(x),g(x)$均在$[a,b]$上连续，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}[\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx]^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

A trick in functional analysis, to calculate operator norm.

解答：

若$f(x)\equiv 0$，则结论显然成立。下证 $f(x)\not\equiv 0$ 的情形。

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间连续函数最值定理，设 $\boxed{\max_{x\in[a,b]} f(x) = M > 0}$，那么

$$[\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx]^{1/n} \le [\int_a^b M^n g(x)\,dx]^{1/n} \le M[\int_a^b g(x)\,dx]^{1/n}$$

取极限，根据极限保序性

$$\lim_{n\to+\infty}[\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx]^{1/n} \le \lim_{n\to+\infty} M[\int_a^b g(x)\,dx]^{1/n} = M$$

c

另一边，根据连续函数介值定理，$\forall\varepsilon>0$，$\exists[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ 使得

$$M-\varepsilon \le f(x) \le M,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

于是

$$[\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx]^{1/n} \ge [\int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n g(x)\,dx]^{1/n} \ge \underline{(M-\varepsilon)}[\int_\alpha^\beta g(x)\,dx]^{1/n} = M-\varepsilon$$

c

取极限得

$$\lim_{n\to+\infty}[\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx]^{1/n} \ge M-\varepsilon$$

由 ε 的任意性和夹挤定理得到结论。

6. 已知$f(x)$定义在$[A,B]$，$g(x)$定义在$[a,b]$，且$[A,B]$包含$g(x)$的值域，令$h(x)=f(g(x))$，$x\in[a,b]$

(1) 若$f(x),g(x)$均在定义域内可积，能否证明$h(x)$在定义域内可积

(2) 若$f(x),g(x)$均在定义域内连续，能否证明$h(x)$在定义域内可积

(3) 若$f(x)$在定义域内连续，<u>$g(x)$在定义域内可积</u>，能否证明$h(x)$在定义域内可积

$f\circ g$.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

解答：

(1) $h(x)$不一定可积：

设$f(x),g(x)$为定义在$[0,1]$上的函数，$f(x)=\begin{cases}1, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，<u>$g(x)$为黎曼函数$R(x)$</u>，则显然$f(x)$和$g(x)$均在各自定义域内可积，但 $h(x)=f(g(x))=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 为狄利克雷函数，在$[0,1]$上不可积。

(2) $h(x)$可积：由于$f(x), g(x)$均连续，则$h(x) = f(g(x))$在$[a, b]$上连续，故可积。

(3) $h(x)$可积：
由于$f(x)$在$[A, B]$上连续，根据闭区间连续函数的最值定理和一致连续性定理，设$m \le f(x) \le M$，且有$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [A, B], |x - y| < \delta$，有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(B-A)}$$

记$\gamma = \delta$，$g(x)$在$[a, b]$上可积，由可积第三充要条件（振幅不能无限小的区间长度总和可以无限小），存在分划$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使得

$$\sum_{\omega_g > \gamma} \Delta x < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$$

ω_g表示$g(x)$的振幅，ω_h表示$h(x)$的振幅，那么对于$h(x)$

$$\boxed{\sum_T \omega_h \Delta x} = \sum_{\omega_g > \gamma} \omega_h \Delta x + \sum_{\omega_g \le \gamma} \omega_h \Delta x$$

→ 0.

Suppress

其中

$$\sum_{\omega_g > \gamma} \omega_h \Delta x \le (M - m) \boxed{\sum_{\omega_g > \gamma} \Delta x} < (M - m) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{\omega_g \le \gamma} \omega_h \Delta x \le (B - A) \boxed{\sum_{\omega_g \le \gamma} \omega_h} < (B - A) \cdot \frac{\varepsilon}{2(B-A)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

→ suppress.

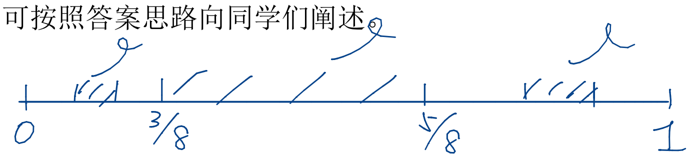
于是

$$\sum_T \omega_h \Delta x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

根据可积第二充要条件，$h(x)$可积。

二、提高题

请各位小导师们注意： 本周提高题整体难度偏大，**请有能力的小组选择完成**。虽然题目较难，但**并未超纲**，小导师们在解释时无需提及“测度”、“稠密”等概念，可按照答案思路向同学们阐述。



1. 续基础题第6题，
(4*) 若$f(x)$在定义域内可积，$g(x)$在定义域内连续，能否证明$h(x)$在定义域内可积

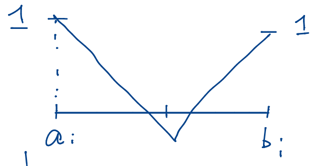
解答： $h(x)$不一定可积：
首先按照如下方法构造集合A：对于集合$[0, 1]$，首先去掉其正中间长度为$\frac{1}{4}$的开区间，即$(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$，之后对于剩下的2个区间$[0, \frac{3}{8}]$和$[\frac{5}{8}, 1]$，各自去掉其正中间长度为$\frac{1}{16}$的开区间，之后对于剩下的4个区间，各自去掉其正中间长度为$\frac{1}{64}$的开区间，以此类推，对于剩下的 2^k 个区间，各自去掉其正中间长度为 $(\frac{1}{2})^{2k+2}$ 的开区间。定义集合A为$[0, 1]$上无法被去掉的点组成的集合。

注意：以上构造方法与Cantor三分集不同，因为按照以上方法，去掉的区间长度总和为

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = \boxed{\frac{1}{2}}$$

故集合A的区间长度总和为$\frac{1}{2}$。集合A一般称作**“类cantor集”**或**“Smith-Volterra-Cantor集合”**

$mA = 1/2$.



下面定义函数$f(x)$和$g(x)$如下：

$$f(x)=\begin{cases}1\,, & x=1\\ 0\,, & 0\le x<1\end{cases}$$

$x=a_i$ $\left|\frac{1}{2}(a_i-b_i)\right|$

$$g(x)=\begin{cases}1\,, & x\in A\\ 1-\dfrac{1}{2}(b_i-a_i)+\left|x-\dfrac{1}{2}(a_i+b_i)\right|\,, & x\in(a_i,b_i)\end{cases}$$

其中(a_i,b_i)为A的邻接区间。函数$g(x)$可理解为，在A上取值为1，而在被去掉的区间内，用一组对称折线将两相邻点连接。容易证明$g(x)$在$[0,1]$连续，因为$\forall x_1,x_2\in[0,1]$，都有

$$|g(x_1)-g(x_2)|\le|x_1-x_2|$$

而显然$f(x)$在$[0,1]$上可积，这样定义的$f(x)$和$g(x)$均符合条件。于是复合函数

$$h(x)=f(g(x))=\begin{cases}1\,, & x\in A\\ 0\,, & x\notin A\end{cases}$$

根据集合A的构造方法，$\forall x\in A$，x的任意邻域$N(x,\delta)$中一定存在不属于A的点。于是对于$[0,1]$上的任意分划$T:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，只要$[x_{i-1},x_i]$中存在A中的点，$[x_{i-1},x_i]$中$h(x)$的振幅就为1。而由于A的区间长度总和为$\frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{\omega_i=1}\Delta x\ge\frac{1}{2}$$

根据可积第三充要条件，$h(x)$不可积。

$\bar{\sum}\omega\delta x\to 0$

有能力的小组可进一步补充：

(5*) 在(4)的基础上加上条件：$g(x)$在定义域内可导，$g'(x)$连续且$g'(x)\neq 0$，证明$h(x)$在定义域内可积

解答：

根据闭区间连续函数的最值、介值定理，可设$g(x)$的值域为闭区间$[\alpha,\beta]$，由题设，$[\alpha,\beta]\subseteq[A,B]$

由于$f(x)$可积，$\forall\varepsilon>0$，$\exists[\alpha,\beta]$的分划$T:\alpha=y_0<y_1<\cdots<y_n=\beta$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_{fk}\Delta y_k<\varepsilon$$

由于$g'(x)$连续且$g'(x)\neq 0$，不妨设在$[a,b]$上 $g'(x)>0$ 且 $\min\limits_{x\in[a,b]}g'(x)=m>0$

于是$g(x)$单增，故$\exists[a,b]$的一个分划$T':a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得

$$g(x_k)=y_k$$

这时，设 ω_{fk} 为$f(x)$在$[y_{k-1},y_k]$上的振幅，ω_{hk} 为$h(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上的振幅，则有

$$\boxed{\omega_{fk}=\omega_{hk},}\quad k=1,2,\cdots,n$$

$X\xrightarrow{g}Y\xrightarrow{f}\mathbb{R}$.

由Lagrange中值定理，$\exists\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$使得

$$g'(\xi_k)=\frac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}=\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_{hk}\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_{fk}\frac{\Delta y_k}{\underbrace{g'(\xi_k)}_{\ge m}}\le\frac{1}{m}\overbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n}\omega_{fk}\Delta y_k}}^{<\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{m}$$

所以$h(x)$可积。

f is integrable

2. 设$f(x),g(x)$是$[0,1]$上有正下界的可积函数，且有

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx\ ,\quad \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx>0$$

(1) 用Schwarz积分不等式证明：$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^1\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx$

(2*) 若$f(x),g(x)$为分段常值函数，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1$，$\displaystyle\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx=\frac{3}{2}$，求 $\displaystyle\inf_{f,g}\{\int_0^1\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\}$

解答：

本题改编自第十五届全国大学生数学竞赛决赛-数学分析试题

(1) 由于$f(x),g(x)$均有正的下界，故可定义

$$h(x)=\sqrt{g(x)},\quad x\in[0,1]$$

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}},\quad x\in[0,1]$$

则$h(x),\varphi(x)$均为$[0,1]$上的可积函数，根据Schwarz积分不等式

$|\langle h,\varphi\rangle|^2\le\|h\|^2\|\varphi\|^2$

$$\left(\int_0^1 h(x)\varphi(x)\,dx\right)^2\le\left(\int_0^1\varphi^2(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 h^2(x)\,dx\right)$$

即

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\le\left(\int_0^1\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)$$

又由于$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx>0$，不等式两边同时约去$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$和$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$，即得

$$\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^1\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\qquad(*)$$

证毕。

(2*) 记集合$E=\{x\in[0,1]|f(x)\ge g(x)\}$，集合$F=[0,1]/E$，由于$f(x),g(x)$均为分段常值函数，则$E,F$均为**有限个**区间和**有限个**单点集的并，因此f,g都是E,F上的Riemann可积函数。记

$$A=\int_E f(x)\,dx,\quad B=\int_E g(x)\,dx$$

则

$$\int_F f(x)\,dx=1-A,\quad \int_F g(x)\,dx=1-B$$

令 $\displaystyle\delta=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx=\frac{3}{2}$，则

$A: A-B$

$F: (1-B)-(1-A)=A-B$

$$\underline{\delta=2(A-B)},\quad 0<B=A-\frac{\delta}{2}<A<1$$

$A-(A-B)$

需要求 $\displaystyle\inf_{f,g}\{\int_0^1\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\}$，注意到

$$\int_0^1\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx=\int_E\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx+\int_F\frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx=\frac{A^2}{B}\int_E\frac{(A^{-1}f(x))^2}{B^{-1}g(x)}\,dx+\frac{(1-A)^2}{(1-B)}\int_F\frac{((1-A)^{-1}f(x))^2}{(1-B)^{-1}g(x)}\,dx$$

而由(1)，有

$$\int_E\frac{(A^{-1}f(x))^2}{B^{-1}g(x)}\,dx\ge\int_E A^{-1}f(x)\,dx=1$$

$(*)$

(*)

$$\int_F \frac{((1-A)^{-1}f(x))^2}{(1-B)^{-1}g(x)}\,dx \geq \int_F (1-A)^{-1}f(x)\,dx = 1$$

所以

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx \geq \frac{A^2}{B} + \frac{(1-A)^2}{1-B} = \frac{(B+\frac{\delta}{2})^2}{B} + \frac{(1-B-\frac{\delta}{2})^2}{1-B} = 1 + \frac{\delta^2}{4B} + \frac{\delta^2}{4(1-B)}$$

令$h(t) = 1 + \dfrac{\delta^2}{4t} + \dfrac{\delta^2}{4(1-t)}$，注意$0 < B = A - \dfrac{\delta}{2} < A < 1$，所以$h(t)$的定义域为 $t \in (0, 1-\dfrac{\delta}{2}) = (0, \dfrac{1}{4})$。

$h(t)$ 对 t 求导，发现在$(0, \dfrac{1}{4}]$上 $h'(t) < 0$，于是

$$h(t) > h(\frac{1}{4}) = 4, \quad t \in (0, \frac{1}{4})$$

于是 $\boxed{\inf\limits_{f,g}\{\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\} = 4}$，下面进行验证：

不难发现，令

$$f(x) = \begin{cases} 2\,, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0\,, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}\,, \qquad g(x) = \begin{cases} 1/2\,, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 3/2\,, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

则 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx = 4$，但其中$f(x)$不符合具有正下界的条件，所以进一步地，对于取定的 $t \in (0, \dfrac{1}{4})$，定义

$$f(x) = \begin{cases} 2t + \frac{3}{2}\,, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} - 2t\,, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}\,, \qquad g(x) = \begin{cases} 2t\,, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2 - 2t\,, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

于是 $\displaystyle\lim_{t \to \frac{1}{4}} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx = 4$。所以 $\displaystyle\inf_{f,g}\{\int_0^1 \frac{f^2(x)}{g(x)}\,dx\} = 4$。