数学分析 II

第 5 次参考解答

2025 年 4 月 17 日

一、基础题

1. 判断以下正项级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$　(5) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\sqrt{n+1}}{2+\sin\sqrt{n}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}\quad(x\ge 0, x\ne e)$　(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

解答：

(1) 收敛。因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故$n$充分大时 $\sqrt[n]{n}\le 2$，于是$\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}\le\frac{1}{2^{n-1}}$，由比较判别法，原级数收敛。

(2) 收敛。因为$\forall n\ge 1$，$\sin\frac{\pi}{3^n}\le\frac{\pi}{3^n}$，所以由比较判别法，原级数$\le\sum_{n=1}^{\infty}\pi(\frac{2}{3})^n$，故收敛。

(3) 收敛。因为$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\cdots\frac{n}{2n}\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，由比较判别法，原级数收敛。

(4) 收敛。因为当n充分大时，$\ln n\ge e^2$，所以$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\le\frac{1}{(e^2)^{\ln n}}=\frac{1}{n^2}$，由比较判别法，原级数收敛。

(5) 发散。对分母取对数得$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln\ln n\cdot\ln\ln n}}$，因为当$n$充分大时$\ln n\le\sqrt{n}$，所以$\frac{1}{e^{\ln\ln n\cdot\ln\ln n}}\ge\frac{1}{e^{\sqrt{\ln n}\sqrt{\ln n}}}$，于是$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}\ge\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$，由比较判别法，原级数发散。

(6) 发散。因为通项$\frac{2+\sin\sqrt{n+1}}{2+\sin\sqrt{n}}\ge\frac{1}{3}>0$，所以通项不趋于0，原级数发散。

(7) 发散。$R_n=n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{2n+2}{2n+1}-1)=\frac{n}{2n+1}<\frac{1}{2}$，由Raabe判别法，原级数发散。

(8) 当 $x<e$ 时收敛，$x>e$ 时发散。

方法一　$\frac{x_{n+1}}{x_n}=x(\frac{n}{n+1})^n=x(1-\frac{1}{n+1})^n$。我们知道$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1})^n=\frac{1}{e}$，所以当 $x<e$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}x(1-\frac{1}{n+1})^n<1$，当 $x>e$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}x(1-\frac{1}{n+1})^n>1$，由检比法的极限形式可得结论。

方法二　由Stirling公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$，有$\frac{x^n n!}{n^n}\sim(\frac{x}{e})^n\sqrt{2\pi n}$。由于指数函数比幂函数高阶，原级数与$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{e})^n$ 同敛散，故得结论。

注：　虽然题干明确了 $x\ne e$，但由方法二也可判断，当 $x=e$ 时原级数发散。

(9) 发散。由基本不等式，$n\ge 1$ 时 $\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n\cdot 1\cdot 1\cdots 1}\le\frac{n+(n-1)\cdot 1}{n}=\frac{2n-1}{n}$，故$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\ge\frac{1}{2n-1}$，由比较判别法，原级数发散。

2. 判断以下命题：

(1) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 发散

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则其部分和序列一定无界

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和序列有界，且 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定收敛

(4) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ， $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 一定都收敛

解答：

(1) 不一定。例如

$$a_n = \begin{cases} 1\ , & x = 2k-1 \\ 0\ , & x = 2k \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0\ , & x = 2k-1 \\ 1\ , & x = 2k \end{cases}$$

(2) 不一定，例如 $a_n = \cos n$。显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ 发散，而

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k = \cos 1 + \cos 2 + \cdots + \cos n = \frac{1}{2\sin 1}(\sin(n+1) + \sin n - \sin 1 - \sin 0)$$

显然有界。以上证明用到了和差化积公式

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

依次取 $\beta = 0, 1, \cdots, n-1$，对应每个 β 取 $\alpha = \beta + 2$ 即可。

(3) 不一定。可举出反例：

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \cdots$$

则 $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le 1$ 有界， $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不收敛。

(4) 正确。

因为 $|a_n b_n| \le \max\{a_n^2, b_n^2\}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛。因为 $(a_n+b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$， $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n$ 由于绝对收敛一定收敛。所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛。根据均值不等式，$a_n^2 + \frac{1}{n^2} \ge 2\cdot\frac{|a_n|}{n}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛。

3. (1) 举出一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，但$a_n \ne o(\frac{1}{n})$

(2) 举出一个发散的交错级数，使得其通项趋于0

(3) 举出一个收敛的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，但$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$发散

解答：

(1) 取 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}\ , n = 2^k \\ \\ \frac{1}{n^2}\ , n \ne 2^k \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}^*$ 满足要求，证明略。

注： 结合提高题 1 (1) 知，需要 a_n 单调递减才可推出 $a_n = o(\frac{1}{n})$

(2) 可构造 $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \ , n = 2k-1 \\ \\ -\dfrac{1}{n^2} \ , n = 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}^*$ 满足要求，证明略。

注： 该反例说明Leibniz判别法中若缺少单调性条件，该判别法不成立。

(3) 取 $a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ , n = 3k-2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ , n = 3k-1 \\ \dfrac{2}{\sqrt[3]{n}} \ , n = 3k \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}^*$ 满足要求，证明略。

注： 该反例说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛一般不能推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 收敛，需要是正项级数。

4. 设 $a_1 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，$a_{n+1} = \sin a_n \ (n \geq 1)$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 的敛散性

解答：

对于 $a_1 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，$a_{n+1} = \sin a_n \ (n \geq 1)$ ，我们在上学期讨论题中证明过 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^2 = 3$，证明过程如下：
首先易证 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ，则

$$\lim_{n\to+\infty} na_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 \sin^2 a_n}{a_n^2 - \sin^2 a_n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x \cdot \frac{1}{6}x^3} = 3$$

所以 $a_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$。根据阶的估计法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 在 $p > 2$ 时收敛，在 $p \leq 2$ 时发散。

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明当$p > \dfrac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$收敛，并举例说明$p = \dfrac{1}{2}$时该级数不一定收敛

解答：

因为 $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p} \leq \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{n^{2p}})$，当 $p > \dfrac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2p}}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛。

根据积分判别法易证 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛(原函数$-\dfrac{1}{\ln x}$)，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ 发散(原函数$\ln\ln x$)，于是定义

$$a_n = \begin{cases} 1 \ , n = 1 \\ \dfrac{1}{n \ln^2 n} \ , n \geq 2 \end{cases}$$

得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 即为本题反例。

二、提高题

1. 设 $a_n>0$ 且单调递减，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛

(3) 若 na_n 也单调递减，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln n\cdot a_n=0$

解答：

(1) 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由Cauchy准则，$\forall\varepsilon>0,\exists N_0\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\forall N>N_0$

$$|a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{2N}|<\varepsilon$$

由 $a_n>0$ 且单调递减，有

$$Na_{2N}\le|a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{2N}|<\varepsilon$$

即

$$2Na_{2N}<2\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$

(2) 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 展开：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=a_1-a_2+2a_2-2a_3+3a_3-3a_4+\cdots+na_n-na_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-na_{n+1}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛。

(3) 令 $b_n=na_n$，于是 b_n 单调递减且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛。由Cauchy准则，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，$\forall n>N,p\in\mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{n+1}+\frac{b_{n+2}}{n+2}+\cdots+\frac{b_{n+p}}{n+p}\right|<\varepsilon$$

由 $b_n>0$ 且单调递减有

$$b_{n+p}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p})\le\left|\frac{b_{n+1}}{n+1}+\frac{b_{n+2}}{n+2}+\cdots+\frac{b_{n+p}}{n+p}\right|<\varepsilon$$

注意到

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\ge\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}\,dx+\int_{n+2}^{n+3}\frac{1}{x}\,dx+\cdots+\int_{n+p}^{n+p+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_{n+1}^{n+p+1}\frac{1}{x}\,dx=\ln\frac{n+p+1}{n+1}$$

所以

$$b_{n+p}\cdot\ln\frac{n+p+1}{n+1}<\varepsilon$$

由 p 的任意性，取 $p=n^2-n$ 得

$$\varepsilon>b_{n^2}\cdot\ln\frac{n^2+1}{n+1}\ge b_{n^2}\cdot\ln(n-1)=\frac{1}{2}b_{n^2}\cdot\ln(n-1)^2=\frac{1}{2}b_{n^2}\cdot\ln n^2\cdot\frac{\ln(n-1)}{\ln n}$$

即

$$b_{n^2}\cdot\ln n^2<2\varepsilon\cdot\frac{\ln n}{\ln(n-1)}$$

而当 $n\ge3$ 时，$\frac{\ln n}{\ln(n-1)}<2$，故 $b_{n^2}\cdot\ln n^2<4\varepsilon$。结论证毕。

2. 设 $a_n > 0$ ，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ，证明：

(1) 当 $\lambda > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\lambda}$ 收敛

(2) 当 $\lambda \le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\lambda}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 具有相同的敛散性

解答：

(1) **方法一：放缩级数为积分近似判断**

$$0 < \frac{a_n}{S_n^\lambda} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\lambda} = \frac{1}{S_n^\lambda}\int_{S_{n-1}}^{S_n} dx \le \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\lambda}\, dx$$

所以 $\forall N > 2$ 都有

$$0 < \sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{S_n^\lambda} \le \int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\, dx < +\infty$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\lambda}$ 的部分和有界，所以收敛。

注： 因同学们尚未学到无穷积分，各位小导师们可简要介绍$\int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\, dx$的意义，也可介绍**方法二**。

方法二：利用Lagrange中值定理判断

由Lagrange中值定理，对每个 $n \ge 2$，$\exists \xi_n \in (S_{n-1}, S_n)$，使得

$$S_n^{1-\lambda} - S_{n-1}^{1-\lambda} = \frac{1-\lambda}{\xi_n^\lambda}(S_n - S_{n-1})$$

则

$$\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{S_n^{\lambda-1}} - \frac{1}{S_{n-1}^{\lambda-1}}\right) = \frac{1}{\xi_n^\lambda}(S_n - S_{n-1}) = \frac{a_n}{\xi_n^\lambda} \ge \frac{a_n}{S_n^\lambda}$$

因此

$$0 < \sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{S_n^\lambda} \le \frac{1}{1-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{S_n^{\lambda-1}} - \frac{1}{S_{n-1}^{\lambda-1}}\right) = \frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{1}{S_1^{\lambda-1}} - \frac{1}{S_N^{\lambda-1}}\right) \le \frac{1}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{S_1^{\lambda-1}}$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\lambda}$ 的部分和有界，所以收敛。

(2) 分四种情况分别讨论 (i) $\lambda = 1$ (ii) $0 < \lambda < 1$ (iii) $\lambda = 0$ (iv) $\lambda < 0$

(i) 当 $\lambda = 1$ 时：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，首先有 $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{\sum_{n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n \to +\infty$ 所以 $\forall n$，当 p 充分大时，$\frac{S_n}{S_{n+p}} \le \frac{1}{2}$，所以 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{2}$，由Cauchy准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由 $S_n \ge S_1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \le \frac{1}{S_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也收敛。

(ii) 当 $0<\lambda<1$ 时：

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，因为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}} \geq \frac{1}{S_N^{\lambda}}\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{S_N^{\lambda}} S_N = S_N^{1-\lambda} \to +\infty \ (N\to+\infty)$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 发散。

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \to S$，则

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}} &= \sum_{n=2}^{N}\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\lambda}} = \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{S_n^{\lambda}}\int_{S_{n-1}}^{S_n} dx \leq \sum_{n=2}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^{\lambda}}\,dx \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n} dx^{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(S_N^{1-\lambda} - a_1^{1-\lambda}) \leq \frac{S}{1-\lambda} \end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 收敛。

(iii) 当 $\lambda=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，显然同时敛散。

(iv) 当 $\lambda<0$ 时：

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在$M>0$，当 $n>M$ 时，$S_n>1$ 且 $S_n^{-\lambda}>1$，故

$$\sum_{n=M+1}^{N}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}} = \sum_{n=M+1}^{N} a_n S_n^{-\lambda} \geq \sum_{n=M+1}^{N} a_n \to +\infty \ (N\to+\infty)$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 发散。

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 有上界，设 $0<S_n<M$，于是

$$0 < \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}} \leq \sum_{n=1}^{N} a_n M^{-\lambda} \leq M^{-\lambda}\sum_{n=1}^{N} a_n \leq M^{-\lambda}\cdot M = M^{1-\lambda}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 收敛。证毕。