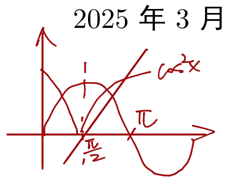
数学分析 II

第 4 次讨论班

2025 年 3 月 30 日



1. 计算下列各题.

   (a) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$

   (b) $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}\xlongequal{x=\ln t}\int_1^e\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=[\ln t-\ln(1+t)]\Big|_1^{\mathrm{e}}=1-\ln(1+\mathrm{e})+\ln 2$

   $t=e^x$

   $=2\sin x^2\cos x^2$

   (c) $I=\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\frac{x\sin 2x^2}{1+\sin x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\frac{\sin 2x^2}{1+\sin x^2}\mathrm{d}x^2=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\sin t}\mathrm{d}\sin t=1-\ln 2$

   (d) $I=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}$

   (e) $I=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}-I+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow I=\frac{\sqrt{2}}{2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\cos t}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}(x<\xi<x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\xi}{x}+\frac{\cos\xi}{x}}}=1$

2. 变动上(下)限积分.

   (a) 设 $x=\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u, y=\int_0^{t^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

   (b) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{x^4}$

   (c) 设函数 $f(x)$ 为连续正值函数, 证明: 当 $x>0$ 时, 函数 $\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 单调递增.

解答. $\frac{dy}{dt}$ $\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

(a) $\mathrm{d}y=2t\cdot\frac{\sin t^2}{t^2}\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2\mathrm{e}^{t^2}\sin t^2}{t}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{x^4}\xlongequal{L'Hospital}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\frac{1}{2}$

(c) 计算 $\varphi(x)$ 的导数有

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\\&=\frac{\overset{>0}{f(x)}\int_0^x\overset{>0}{(x-t)}\overset{>0}{f(t)}\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\geqslant 0\end{aligned}$$

故 $x>0$ 时, $\varphi(x)$ 单调递增.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=0$. 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解答. 由 $f(a)=0$ 可得

$\langle f,g\rangle = \int fg$

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

$\|\langle f,g\rangle\|^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2$

由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 &\leqslant \int_a^x 1^2\mathrm{d}t\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t \\ &\leqslant (x-a)\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x \end{aligned}$$

两边同时在 $[a,b]$ 上积分即可得到结果.

4. 设 $f\in C[a,b]$, 且满足条件

$$\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k=0,1,\cdots,n),$$

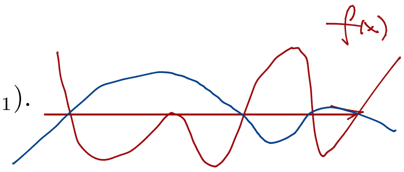
证明: 函数 f 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点.

$\leq n$

解答. 用反证法. 设有一个 f 满足题设条件, 但其零点个数不超过 n. 这时 f 不会恒等于零, 又由条件可知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 f 在区间 $[a,b]$ 上一定变号. 利用 f 的所有零点或其中一部分, 可以作出区间 $[a,b]$ 的一个分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$, 其中 $x_0=a, x_k=b$, 中间 $k-1$ 个分点都是 f 的零点, f 在每个子区间上不变号, 而在相邻的子区间上符号相反. 由反证法前提可知 $k-1\leqslant n$. 构造辅助多项式

$\deg g(x) \leq n.$

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1}).$$



此时有 $f\cdot g$ 在整个区间上不变号, 故有

$f\cdot g \leq 0.$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq 0.$$

$\int_a^b fg = 0$

又由于 $g(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 与题设矛盾.

5. 设 $f\in C[0,2\pi]$, 证明

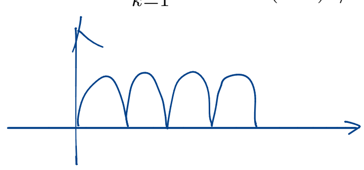
$$\lim_{n\to\infty}\boxed{\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

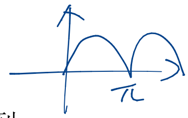
解答. 先将积分区间 $[0,2\pi]$ 划分为 $\sin nx$ 的定号区间, 再用积分第一中值定理有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n \int_{2(k-1)\pi/n}^{2k\pi/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\int_{2(k-1)\pi/n}^{2k\pi/n} |\sin nx|\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

continuous

integrable + positive/negative definite function...





其中 $\xi_k \in (2(k-1)\pi/n, 2k\pi/n), k=1,2,\cdots,n$. 又直接计算得到

$$\frac{1}{n}\quad \int_{2(k-1)\pi/n}^{2k\pi/n} |\sin nx| \mathrm{d}\overset{nx}{x} = \boxed{\frac{1}{n}}\int_0^{2\pi} |\sin t| \mathrm{d}t = \frac{4}{n}\int_0^{\pi/2} \sin t \mathrm{d}t = \boxed{\frac{4}{n}},$$

$\frac{\pi}{n}$

因此有

$$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx| \mathrm{d}x = \frac{4}{n}\sum_{k=1}^n f(\xi_k) = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot \overset{\delta x}{\frac{2\pi}{n}}\right). \quad = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

等式右边可以看成 $[0,2\pi]$ 上的连续函数 f 在 $[0,2\pi]$ 的 n 等距划分下的一个 Riemann 和, 令 $n\to\infty$ 就得到所求证的结果.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. $\forall n\in\mathbb{N}$, 记 $A_n = \sum_{i=1}^n f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 试证: $\lim_{n\to\infty} nA_n = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$.

$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)) \sim O(\frac{1}{n})$

解答. 令 $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned} nA_n &= n\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= n\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_i)-f(x))\mathrm{d}x \\ &= n\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\eta_i)(x_i - x)\mathrm{d}x\ (\eta_i\in(x_{i-1},x_i)) \qquad (1)\end{aligned}$$

又因 $(x_i - x)$ 不变号, 导函数有介值性, 因此应用积分第一中值定理, 可得: $\exists \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得

$$\boxed{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \overset{m\le f(x)\le M}{f'(\underset{y_i(x)}{\eta_i})}(x_i-x)\mathrm{d}x = \overset{m\le f(x)\le M}{f'(\xi_i)}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\mathrm{d}x}$$

于是式(1)成为

$f'(x)$ Can we guarantee the continuity of $f'(x)$?

Absolutly NOT!

$$\begin{aligned} nA_n &= n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

7. (提高题)(积分第一中值定理的一种推广)证明: 设 f,g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 其中 f 在 $[a,b]$ 上有原函数, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$f\in C^0$

f' is not necessary continuous.

解答. 由 f 是 $[a,b]$ 上 Riemann 可积知, f 有界. 设其下确界为 m, 上确界为 M. 因为 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 不妨设 $g \geqslant 0$, 所以有

$f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

当 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 结论显然成立. $m \leq f \leq M$

当 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$ 时有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$$

若存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得 $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, 或不存在这样的 x_1 或 x_2. 由于 f 在 $[a,b]$ 上有原函数, 故由 Darboux 定理及确界定义知, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \boxed{f(\xi)}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

若 f 至多只在端点处取得上或下确界, 不妨只考虑 $f(a) = m, f(b) = M$ 时, 其余情况类似.

当 $m < \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} < M$ 时. 由 Darboux 定理即可得证. $\int fg = f(a)\int g$ $\quad f(x) \geq f(a)$

当 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = m = f(a)$ 时, $\displaystyle\int_a^b [f(x) - f(a)]g(x)\mathrm{d}x = 0$, 又因 $[f(x) - f(a)]g(x)$ 非负且 $f(x) - f(a)$ 只在 $x = a$ 处为0, 故 $g(x)$ 几乎处处为0, 则 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 与假设矛盾. 综上所述, 总能找到 $\xi \in (a,b)$ 使得

$\nexists \xi$ s.t. $f(\xi) = a$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$