数 学 分 析 II

第 6 次 讨 论 班

2025 年 4 月 21 日

1. 求解下列敛散性问题.

(a) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

(b) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是否同收敛.

(c) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 当 $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时条件收敛.

解答.

(a) $a_n = \frac{1}{n} na_n$, 由 Abel 判别法即知原级数收敛.

(b) 第一个级数由 Leibniz 判别法即知原级数收敛. 对于第二个级数有 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{1}{n}$, 由此知第二个级数是发散的.

(c) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的部分和有界和 Dirichlet 判别法即知原级数收敛. 另一方面, 利用 $|a_n \sin nx| \geqslant a_n \sin^2 nx = \frac{a_n}{2}(1-\cos 2nx)$, 由此知其不绝对收敛.

2. 证明下列问题.

(a) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个数项级数, 对它的一些项加上括号之后得到的新级数为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. 假定对每个 k, A_k 中的每个加数具有相同的符号. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛.

(b) 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

解答.

(a) 必要性由 Cauchy 准则显然. 下证充分性, 设两个级数的部分和为 $S_n(a_n), T_k(A_k)$, 由于 A_k 中的每个加数具有相同的符号, 所以 S_n 总是介于 T_{k-1} 和 T_k 之间, 再由夹挤定理即可得证.

(b) 将级数中相邻的同号项合并, 从而组成一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k/n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left[(2n+1)-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

由此即可知 $\{a_n\}$ 为无穷小量, 且至少当 n 充分大时单调减少:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

这表明原级数加括号之后得到的级数收敛, 由于括号中的项符号相同, 由上一问的结果可知原级数收敛.

3. 设 $\{a_n\}$ 单调递减收敛于0, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\sin n|$ 发散, 试证:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n$ 收敛.

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$, 其中 $u_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k\sin k|+a_k\sin k)$, $v_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k\sin k|-a_k\sin k)$.

解答.

(a) 由 1.(c) 知其收敛.

(b) 记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k\sin k|$, $B_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin k$, 由条件和 (a) 则可得到:

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{A_n+B_n}{A_n-B_n}=\frac{1+\frac{B_n}{A_n}}{1-\frac{B_n}{A_n}}\to 1\,(n\to\infty)$$

4. 若对任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n$ 都是收敛的, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

解答. 用反证法. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$.

对 $M=1$, 必存在 k_1, 使得 $\sum_{n=1}^{k_1}a_n>1$. 取 $y_n=1$, 其中 $1\leqslant n\leqslant k_1$,

对 $M=2$, 必存在 k_2, 使得 $\sum_{n=k_1+1}^{k_2}a_n>2$. 取 $y_n=\frac{1}{2}$, 其中 $k_1+1\leqslant n\leqslant k_2$, $\cdots$,

对 $M=m$, 必存在 k_m, 使得 $\sum_{n=k_{m-1}+1}^{k_m}a_n>m$. 取 $y_n=\frac{1}{m}$, 其中 $k_{m-1}+1\leqslant n\leqslant k_m$, $\cdots$.

令 $x_n = y_n \cdot sgn(a_n)$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y_n \cdot sgn(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| y_n = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k_{m-1}+1}^{k_m} |a_n| y_n\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=k_{m-1}+1}^{k_m} |a_n|\right) > \sum_{m=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

与条件矛盾, 从而可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

5. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right), p>0$ 的绝对收敛性与条件收敛性.

解答. 因 $p>0$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p} = 0$, 故

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)}{\frac{(-1)^n}{n^p}}\right| = 1,$$

故 $p>1$ 时原级数绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{n^p} - \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)}{\left[\frac{(-1)^n}{n^p}\right]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

则由上式可知, 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, 原级数收敛, 而 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 原级数发散.

6. (提高题) 对 $p>0$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ 的绝对收敛性与条件收敛性.

解答. 当 $p>1$ 且 $n>1$ 时,

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n^p-1}\right| = \frac{1}{n^p-1},$$

故知此时原级数是绝对收敛的.

当 $0<p\leqslant 1$ 且 $n>1$ 时, 取 $n=8k+2$ 的部分项求和, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}\right| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(8k+2)^p+1},$$

故此时原级数不是绝对收敛的.

又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p+\sin\frac{n\pi}{4}\right)},$$

由 Dirichlet 判别法知等式右边的第一个级数收敛.
当 $p > \dfrac{1}{2}$, 且 $n > 1$ 时,

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin \frac{n\pi}{4}\right)} \leqslant \frac{1}{n^p(n^p - 1)},$$

故此时等式右边的第二个级数也收敛.
当 $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$ 且 $n > 1$ 时, 取 $n = 8k + 2$ 的部分项求和, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin \frac{n\pi}{4}\right)} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(8k+2)^p((8k+2)^p + 1)}$$

故此时等式右边的第二个级数发散.