数学分析 II

第 7 次讨论班

2025 年 5 月 9 日

一、基础题

1. 计算下列广义积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\,dx$

解答

(1) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{0}^{1-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\arcsin(-1+\varepsilon)\right]+\lim_{\varepsilon'\to+0}\arcsin(1-\varepsilon')\\&=\pi.\end{aligned}$$

因此，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi.$$

(2) 令 $x=\tan t$，$dx=\sec^2 t\ dt$

$$\int\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{t\sec^2 t}{\sec^3 t}dt=\int t\cos t\ dt$$

利用分部积分法 $\displaystyle\int t\cos t\ dt=t\sin t+\cos t+C$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x\to+\infty$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\left[t\sin t+\cos t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

(3) 由于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上是关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称的, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x.$$

又由于 $\sin x$ 自身在 $[0,\pi]$ 上是关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称的, 所以

$$\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

结合上两式, 可得

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$, 即为所求.

(4) 一般来说, 倒数代换 $x = \frac{1}{t}$ 会改变积分范围, 但 $(0, +\infty)$ 变换后仍为 $(0, +\infty)$. 另一方面, 多项式 (分式) 作倒数代换后依然为多项式 (分式). 这些情况说明了本题的思路应考虑倒数代换. 令 $x = \frac{1}{t}$, 可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2025}}{(1+t^2)(1+t^{2025})}\mathrm{d}t,$$

从而

$$\begin{aligned}
2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{x^{2025}}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$, 即为所求.

2. 已知无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛，在以下条件下能否证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(1) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调　　(2) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续　　(3) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续

(4) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 可导，且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f'(x)$ 收敛

解答：

(1) 能。不妨设 $f(x)$ 单调递减，首先能证明 $f(x)$ 非负，否则，若存在 x_0 使得 $f(x_0) < 0$，则

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{x_0}^{+\infty} f(x_0)\mathrm{d}x \to -\infty$$

于是 $f(x)$ 单减有下界，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$。若 $A \ne 0$，由单调递减，有

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \ge \int_{x_0}^{+\infty} A\ \mathrm{d}x \to +\infty$$

与无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛矛盾。所以 $A = 0$。

(2) 不能。可举出反例：$f(x)$ 为在所有正整数点取 1，在 $(n - \frac{1}{2^n}, n)$ 与 $(n, n + \frac{1}{2^n})$ 分别取两条连接 $(n, 1)$ 与 $(n - \frac{1}{2^n}, 0)$ 和 $(n + \frac{1}{2^n}, 0)$ 的直线段，其他点取 0。该函数与 x 轴围成的面积构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，故 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 收敛，但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ne 0$

(3) 能，反证。若 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\not\to 0$，则 $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\forall A>0,\exists x_1>A,|f(x_1)|\geq\varepsilon_0$。因为 $f(x)$ 一致连续，对 $\dfrac{\varepsilon_0}{2}>0,\exists\delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$。故当 $x\in[x_1,x_1+\delta)$ 时，有

$$||f(x)|\geq|f(x_1)|-|f(x_1)-f(x)||>\frac{\varepsilon_0}{2}$$

并且 $f(x)$ 与 $f(x_1)$ 同号。若 $f(x_1)>0$，则 $f(x)>0$，故由上式知 $f(x)>\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，于是

$$\left|\int_{x_1}^{x_1+\delta}f(x)\mathrm{d}x\right|\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\delta$$

同理，当 $f(x_1)<0$ 也能得到该结论。根据 Cauchy 准则，$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)$ 发散，矛盾，故假设不成立。

(4) 能。要证明 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，根据 Heine 定理，只需证明 $\forall\{x_n\}\to+\infty$，恒有 $f(x_n)$ 收敛。已知 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)$ 收敛, 根据 Cauchy 准则，$\forall\varepsilon>0,\exists A>a,\forall x_1,x_2>A$ 都有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

如此，$\forall\{x_n\}\to+\infty,\exists N>0$，当 $n,m>N$ 时，$x_n,x_m>A$，从而

$$\left|\int_{x_n}^{x_m}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$$

于是 $f(x_n)$ 收敛，根据 Heine 定理，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$ 存在，现证 $\alpha=0$。

若 $\alpha>0$，由保号性，$\exists\Delta>0$，当 $x>\Delta$ 时，$f(x)>\dfrac{\alpha}{2}>0$，于是 $A>\Delta$ 时，

$$\int_A^{2A}f(x)\mathrm{d}x\geq\frac{\alpha}{2}A\to+\infty\quad(A\to+\infty)$$

$\alpha<0$ 时同理。

3. 判断 (讨论) 以下广义积分的绝对收敛性和条件收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax}{x^n}\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$

解答 (1) 使用积分变量替换公式, 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 从而 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t}\mathrm{d}t$. 该广义积分条件收敛.

注: 本题的方法不唯一.

(2) 使用 Taylor 展式. 首先考虑以 0 为瑕点的瑕积分, 由 Taylor 展式

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left[\frac{1}{3!}x^2+o\left(x^2\right)\right]^{-\frac{1}{3}},\ x\to 0,$$

这与 $\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ 同阶, 从而可知瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$ 收敛, 又因其是不变号的, 故而也是绝对收敛.

再考虑无穷积分, 由 Taylor 展式

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to+\infty,$$

其中, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛, $\displaystyle\int_1^{+\infty}o\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 故无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$ 条件收敛.

综上, 原积分条件收敛.

(3) 由于 $\arctan ax = -\arctan(-ax)$，故可设 $a > 0$。

先考虑积分 $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x^n} dx$。由于

$$\lim_{x\to+0} x^{n-1}\frac{\arctan ax}{x^n} = \lim_{x\to+0}\frac{\arctan ax}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{a}{1+a^2x^2}}{1} = a$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x^n} dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx$。由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\frac{\arctan ax}{x^n} = \frac{\pi}{2}, (\text{当 } x\to+\infty \text{ 时})$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛。

于是，当 $1<n<2$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^n} dx (a\neq 0)$ 收敛。

(4) 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$。由于 $\frac{x^m}{1+x^n} \sim x^m$（当 $x\to+0$ 时），故积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 仅当 $-m<1$，即仅当 $m>-1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$。由于 $\frac{x^m}{1+x^n} \sim x^{m-n}$（当 $x\to+\infty$ 时），故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛。

于是，当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx (n\geq 0)$ 收敛。

4. 判断以下命题：

(1) 若无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)$ 收敛，函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 有界，则 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

(2) 若无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)$ 绝对收敛，函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 有界，则 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛

(3) 若非负的无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)$，$\int_1^{+\infty} g(x)$ 均发散，则 $\int_1^{+\infty} \min\{f(x),g(x)\}\mathrm{d}x$ 发散

(4) 若非负的无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)$，$\int_1^{+\infty} g(x)$ 均发散，$f(x),g(x)$ 单调递减，则 $\int_1^{+\infty} \min\{f(x),g(x)\}\mathrm{d}x$ 发散

解答 (1) 不一定，反例可举 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$g(x)=\sin x$。易见 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，而 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散。

(2) 如果条件加强为 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，则 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 一定收敛。事实上，不妨设有界函数 $|g(x)|\leq M$，则由不等式

$$\int_1^{+\infty} |f(x)g(x)|dx \leq M\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$$

以及非负函数广义积分的比较判别法，可知 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 绝对收敛，故而一定收敛。

(3) 不一定, 反例可举

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 2k-1\leq x<2k, \\ 0, & 2k\leq x<2k+1, \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} 0, & 2k-1\leq x<2k, \\ 1, & 2k\leq x<2k+1, \end{cases} \quad k=1,2,\cdots.$$

(4) 不一定发散, 反例可以通过构造分段函数实现,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x_{2k-1}\le x<x_{2k},\\ \dfrac{1}{x_{2k}^2}, & x_{2k}\le x<x_{2k+1},\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x_{2k-1}^2}, & x_{2k-1}\le x<x_{2k},\\ \dfrac{1}{x^2}, & x_{2k}\le x<x_{2k+1},\end{cases}\quad k=1,2,\cdots.$$

其中 $1=x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots$ 为分段界点, 由如下递推关系确定

$$x_{n+1}=x_n+x_n^2.$$

如此构造的函数, 一部分是 $\dfrac{1}{x^2}$, 另一部分是常函数, 且相互交替, 函数图像如下图蓝线和红线所示.

函数的走势可以看作是先 “下降一段”, 再 “平着一段”, 接着又 “下降一段”, 以此往复. 其中的关键在于每个 “平着一段” 围成的局部面积始终为 1, (只要将 “平着一段” 进行充分的延长, 这总是可以做到的), 分段界点 $\{x_n\}$ 的递推关系式即是为了满足这一点.

由于 “平着一段” 始终会带来一段积分值为 1, 由柯西收敛准则可知, $f(x)$ 和 $g(x)$ 确实都是发散的. 但是另一方面 $\min\{f(x),g(x)\}$ 显然恰好等于 $\dfrac{1}{x^2}$, 因而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\min\{f(x),g(x)\}\mathrm{d}x$ 收敛, 此即为反例.

注: 两个发散函数取 min, 不一定仍然收敛, 非负性, 单调性都不能改变这一结论的本质. 此外, 这一结论和反例在级数中的形式也是完全类似的.

5. 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上都可积，且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$ 存在，证明：$\forall h>0$，都有广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛，并求出其值

解答 将这一广义积分的问题转换为一般积分问题, 即证明极限 $\lim\limits_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\displaystyle\int_\alpha^\beta[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x$ 存在, 并求其值. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x&=\int_\alpha^\beta f(x+h)\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\alpha+h}^{\beta+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha+h}^{\beta+h}f(x)\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_\beta^{\beta+h}f(x)\mathrm{d}x-\int_\alpha^{\alpha+h}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_\beta^{\beta+h}[A+(f(x)-A)]\mathrm{d}x-\int_\alpha^{\alpha+a}[B+(f(x)-B)]\mathrm{d}x\\&=Ah-Bh+\int_\beta^{\beta+h}(f(x)-A)\mathrm{d}x-\int_\alpha^{\alpha+h}(f(x)-B)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用已知条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$, 易知上式右端后两项当 $\alpha\to-\infty,\beta\to+\infty$ 时极限为零.

故 $\lim\limits_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\displaystyle\int_\alpha^\beta[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x=h(A-B)$, 即为所求.

二、提高题

1. 设 $f(x)\in C^1[0,+\infty)$ 是一个单调递增的正函数，证明对于任何非负整数 k，I 收敛当且仅当 J 收敛，其中

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{f(x)}\mathrm{d}x \quad , \quad J=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x$$

解答：

因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时 $f'(x)\geq 0$，所以由比较判别法知 I 收敛时 J 也收敛。现证明 J 收敛时，I 也收敛。使用数学归纳法。因为 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正连续函数，所以在此区间上达到正的极小，因此对任何非负整数 k，积分 $\int_0^1\frac{x^k}{f(x)}\mathrm{d}x$ 有限，从而只需判断 $\int_1^{+\infty}\frac{x^k}{f(x)}\mathrm{d}x$ 的敛散性。对于 $X>1$，有

$$\begin{aligned}\int_1^X\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x&=\int_1^X\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\int_1^X\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\mathrm{d}x\\&\leq\int_1^X\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\int_1^X\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_1^X\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{f(x)}\Big|_1^X\\&\leq\int_1^X\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(1)}\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{f(1)}$ 有限，所以当 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ 也收敛。所以 $k=0$ 时结论成立。现设对于某整数 $k\geq 0$ 结论成立，且 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x$ 收敛，那么由 $x^k<x^{k+1}$ $(x>1)$ 知

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^k}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x$$

也收敛，由归纳假设知

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^k}{f(x)}\mathrm{d}x$$

收敛。因为当任何 $X>1$，

$$\begin{aligned}\int_1^X\frac{x^{k+1}}{f(x)}\mathrm{d}x&=\int_1^X\frac{x^{k+1}}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\int_1^X\frac{x^{k+1}f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\mathrm{d}x\\&\leq\int_1^X\frac{x^{k+1}}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\int_1^X\frac{x^{k+1}f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x\\&=\int_1^X\frac{x^{k+1}}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x-\frac{x^{k+1}}{f(x)}\Big|_1^X+\int_1^X\frac{(k+1)x^k}{f(x)}\mathrm{d}x\\&\leq\int_1^X\frac{x^{k+1}}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(1)}+\int_1^X\frac{(k+1)x^k}{f(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上式右边有界，于是完成归纳证明。

2. (1) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$f(0)=m,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=n$，$0<a<b$，计算 Froullani 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

(2) 判断积分 $\int_0^{+\infty}(\frac{\sin 3x}{3x^2}-\frac{\sin 2x}{2x^2})\mathrm{d}x$ 的敛散性，若收敛，求出其值，若发散，给出证明。

解答：

(1) 本题广义积分的收敛性将在下面的计算过程中建立。对 $0<r<R<+\infty$，成立

$$\begin{aligned}\int_r^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_r^R \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_r^R \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{ar}^{aR} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{br}^{bR} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由积分第一中值定理：

$$\int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = f(\xi)\int_{ar}^{br}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = f(\xi)\ln\frac{b}{a} \quad (ar<\xi<br)$$

$$\int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = f(\gamma)\int_{aR}^{bR}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = f(\gamma)\ln\frac{b}{a} \quad (aR<\gamma<bR)$$

在上式中令 $r\to 0^+$，$R\to+\infty$，这时 $\xi\to 0^+$，$\gamma\to+\infty$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 均存在，故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，代入得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = [f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}$$

(2) 我们由 Froullani 积分直接有

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(3x)}{3x^2}-\frac{\sin(2x)}{2x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin(2x)}{2x}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2}{3}.$$

即为所求。

注：

即使没有学过 Froullani 积分，也可以通过数分 III 的知识解出此题，有能力的小组可以补充以下方法：

任意给定 x，令 $g(y)=\dfrac{\sin xy}{x^2y}$，则

$$\int_0^{+\infty} g(3)-g(2)\mathrm{d}x$$

即为所求，其中 $g(3)-g(2)$ 视为 x 的函数，该式可化为

$$\int_0^{+\infty}\int_2^3 g'(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

代入 $g'(y)$ 该式化为

$$\int_0^{+\infty}\int_2^3 \frac{xy\cos xy-\sin xy}{(xy)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

进行换元：

$$u=xy,\quad v=y$$

则

$$x=\frac{u}{v},\quad y=v$$

计算得 Jacobi 行列式 $|J|=\dfrac{1}{v}$，于是

$$\int_0^{+\infty}\int_2^3 \frac{xy\cos xy-\sin xy}{(xy)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_2^3\frac{1}{v}\mathrm{d}v\int_0^{+\infty}\frac{u\cos u-\sin u}{u^2}\mathrm{d}u$$

其中右边第二个积分通过分部积分计算

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{u\cos u-\sin u}{u^2}\mathrm{d}u&=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}\sin u\mathrm{d}\ \frac{1}{u}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u+\frac{\sin u}{u}|_0^{+\infty}=-1\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\int_2^3\frac{xy\cos xy-\sin xy}{(xy)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\int_2^3\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\ln\frac{2}{3}$$

即为所求。