数学分析 II

第 9 次讨论班

2025 年 5 月 20 日

1. 判断以下函数项级数在对应区间内的一致收敛性:
   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上
   (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上
   (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $[0,\lambda]$ 和 $[\lambda,+\infty)$ 上，其中 $\lambda>0$

2. 设 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，定义

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots$$

   证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0

3. 设 $\alpha_n>0, \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$，$\forall x\in I$ 有 $|u_n(x)|\le\alpha_n$，且 $i>0,j>0,i\ne j$ 时 $u_i(x)u_j(x)=0$，证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

4. 设 $h(x), f_n'(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\forall x_1,x_2\in[a,b], n\in\mathbb{N}^*$ 有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le\frac{M}{n}|x_1-x_2|$$

   其中 $M>0$ 为常数，证明：
   (1) $f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h(x)f_n'(x)\mathrm{d}x=0$

5. (1) 证明函数列 $\phi_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n, f_n(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛
   (2) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}$

6. 给出如下定义：称函数族 $\{f_n(x)\}\in I\ (n\in\mathbb{N}^*)$ 在 I 上**等度连续**，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}^*$ 都有

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$$

   现已知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $f(x)$，证明：
   (1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续　　　(2) $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$