数学分析 II

第 8 次讨论班

2025 年 5 月 12 日

1. 分析下列函数项级数的一致收敛性.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $x \in (0, +\infty)$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin 3^{-n}x$, $x \in (0, +\infty)$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$

   解答.

   (a) 取 $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0, +\infty)$, 那么

   $$\sup_{p>0} \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} ke^{-kx_n} \right| \geqslant (n+1)e^{-(n+1)x_n} > \frac{1}{e}$$

   则由 Cauchy 收敛准则知其在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛的.

   (b) 取 $x_n = 3^{n+1} \in (0, +\infty)$, 那么

   $$\sup_{p>0} \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^k \sin(3^{-k}x_n) \right| \geqslant 2^{n+1} \sin(3^{-n-1}x_n) > 2\sin 1$$

   则由 Cauchy 收敛准则知其在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛的.

   (c) 由于 $\frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$, 后者是收敛的数项级数, 由M-判别法知原函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上是一致收敛的.

   (d) 若 $x \neq 2i\pi, i \in \mathbb{N}$, 则

   $$\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx = \sin x \cdot \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2} \cdot \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

   显然上式对于 $x = 2i\pi$ 也成立, 故有

   $$|sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx| = \left|\cos\frac{x}{2} \cdot \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right| \leqslant 2, \forall x \in [0, +\infty)$$

   故其部分和一致有界, 又有 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 一致收敛于0, 由 Dirichlet 判别法知原函数项级数一致收敛.

2. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x(p>0)$ 的敛散性, 对于收敛的情况还有判别是条件收敛还是绝对收敛.

解答. 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 显然 $x=0$ 不是瑕点. 此时原广义积分的收敛性由 Dirichlet 判别法易证. 对于其绝对收敛性的判断可参考书p267页中的证法, 在之前的讨论班也有提到.

当 $p>1$ 时, $x=0$ 是瑕点. 将原广义积分分成两部分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x=\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

对 I_2, 由 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}$ 知其绝对收敛. 对 I_1, 由 $\frac{\sin x}{x^p}\sim x^{1-p}(x\to 0^+)$ 知 I_1 在 $1<p<2$ 时绝对收敛, 在 $p\geqslant 2$ 时发散.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $x\to+\infty$ 时 $f'(x)$ 单调递增趋于 $+\infty$, 证明: $\int_a^{+\infty}\sin\left(f(x)\right)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}\cos\left(f(x)\right)\mathrm{d}x$ 都收敛.

解答. 由 $x\to+\infty$ 时 $f'(x)$ 单调递增趋于 $+\infty$, 因此存在 $b>a$, 使得 $x\in[b,+\infty)$ 时, 有 $f'(x)>0, y=f(x)$ 严格单调递增, 且有反函数 $x=g(y)$. 于是

$$I=\int_a^{+\infty}\sin\left(f(x)\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b+\int_b^{+\infty}\right)\sin\left(f(x)\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

其中, I_1 为正常积分, 对于 I_2 有

$$I_2=\int_b^{+\infty}\sin\left(f(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{f(b)}^{+\infty}\sin y\cdot g'(y)\mathrm{d}y=\int_{f(b)}^{+\infty}\sin y\cdot\frac{1}{f'(x)|_{x=g(y)}}\mathrm{d}y$$

则由 Dirichlet 判别法知 I_2 收敛, 另一个结果也类似可证.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>1)$ 上内闭可积, 且反常积分 $\int_a^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

解答. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>1)$ 上非负, 取 $A\in(a,+\infty)$, 则变上限积分函数 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^A xf(x)\mathrm{d}x$ 都是关于 A 的单调增加的函数, 且

$$0\leqslant\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^A xf(x)\mathrm{d}x$$

由于 $\int_a^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A xf(x)\mathrm{d}x$ 存在, 从而反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 类似地可以证明非正的情形. 下面说明变号的情形.

由于反常积分 $\int_a^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Cauchy 准则知, $\forall\varepsilon>0,\exists X>a$, 当 $X<A<A'$ 时, 有 $\left|\int_A^{A'}xf(x)\mathrm{d}x\right|<A\varepsilon$. 由于 $\frac{1}{x}$ 单调且非负, 由积分第二中值定理, 存在 $\xi\in(A,A')$, 使得

$$\left|\int_A^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_A^{A'}xf(x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{A}\int_A^{\xi}xf(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

由 Cauchy 准则知所证反常积分收敛.

5. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的敛散性.

解答. 由于被积函数在 $x>0$ 时大于0, 因此只需要研究变动上限积分

$$F(A)=\int_0^A\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$$

在 $[0,+\infty)$ 上的有界性, 只需要观察一列趋于无穷大的点上函数值是否有界即可.

取 $A=n\pi, n\in\mathbb{N}^+$, 则可以把积分分解成

$$\int_0^{n\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

其中

$$u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$$

下面估计 u_k 的值

$$\begin{aligned}u_k&\leqslant k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}=k\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\\&=2k\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\leqslant 2k\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+4(k-1)^6\pi^4\sin^2 x}\\&=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\sim\frac{1}{2k^2}\quad(k\to\infty)\end{aligned}$$

由于

$$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<2$$

与 n 无关, 可见 $\{F(n\pi)\}$ 有界, 从而可推导到原广义积分收敛.

6. 设一元函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域里有二阶连续导数, $f(0)=0, 0<f'(0)<1$. 函数 f_n 是 f 的 n 次复合, 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的领域里一致收敛.

解答. 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域里有二阶连续导数, 当 $\delta>0$ 充分小时, 在 $[-\delta,\delta]$ 上 $f''(x)$ 连续, 且由 Taylor 展式可知

$$f(x)=f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2$$

既然 $f''(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上连续, 故存在 $M>0$, 使得 $|f''(x)|\leqslant M$. 于是

$$|f(x)|\leqslant|x|\left(f'(0)+\frac{1}{2}M\delta\right)=q\cdot|x|$$

重复使用可有

$$|f_n(x)|\leqslant q|f_{n-1}(x)|\leqslant\cdots\leqslant q^n\delta$$

为使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^n\delta$ 收敛, 必须使得 $q<1$, 且又由于 $0<f'(0)<1$, *delta* 可以进一步放缩, 取 $\delta_1<\delta$, 使得 $\dfrac{1}{2}M\delta_1<1-f'(0)$, 则可以证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的领域里一致收敛.