Задания

14 февраля 2021 г.

Если M – моноид, то мы будем обозначать $\mathbf{C}_M$ категорию с одним объектом $*$ и множеством морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_M}(*,*) = M$, операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в M.

Предпорядок $(X, \leq)$ – это множество X с рефлексивным и транзитивным бинарным отношением $\leq$. Задать структуру предпорядка на множестве – это то же самое, что и задать на нем структуру категории, в которой между любой парой объектов существует максимум один морфизм. Если $(X, \leq)$ – предпорядок, то мы будем обозначать соответствующую ему категорию как $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$. Множество объектов этой ктаегории равно X, а множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{(X,\leq)}}(x, y)$ состоит из одного элемента, если $x \leq y$, и пусто в противном случае.

1. Изоморфны ли следующие объекты категории Λ_{ID}? Если да, напишите функции, устанавливающие изоморфизм.

   (a) Bool и Maybe Bool.

   (b) Either Bool Bool и Bool $\times$ Bool.

   (c) Nat и Maybe Nat.

   (d) Nat и List Nat.

   Решение

   (a) Нет

   (b) Нет

   (c) Нет

   (d) Нет

2. Пусть M – некоторый моноид. Определим тогда категорию $\mathbf{C}_M$ как категорию с одним объектом и множеством морфизмов равным M. Композиции и тождественный морфизм определяются из структуры моноида. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?

   (a) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N},+)}$.

(b) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N},*)}$.

(c) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},+)}$.

(d) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},*)}$.

(e) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},+)}$.

(f) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},*)}$.

3. Предпорядок называется частичным порядком, если из условия, что $x \le y$ и $y \le x$, следует, что $x = y$. Чему в категориальных терминах соотвествует это свойство? (Другими словами, утверждается, что предпорядок $(X, \le)$ является порядком тогда и только тогда, когда категория $\mathbf{C}_{(X,\le)}$ обладает некоторым свойством, которое обсуждалось на лекции. Что это за свойство?)

4. Опишите следующие моноиды и группы:

   (a) $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Set}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.

   (b) $\mathrm{Aut}_{\mathbf{FinSet}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.

   (c) $\mathrm{Endo}_{\mathbf{C}_M}(*)$, где M – некоторый моноид.

   (d) $\mathrm{Endo}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$.

   (e) $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$.

   (f) $\mathrm{Endo}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z})$, где **Ring** – категория колец с единицей.
   $\forall f \in \mathrm{Endo}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}):$
   $\forall z \in \mathbb{Z}. f(z) = z \cdot f(1)$
   $\forall z \in \mathbb{Z}. z \cdot f(1) = f(z) = f(1 \cdot z) = f(1) \cdot z \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \vee f(1) = 1$
   Значит $f(.) \equiv 0 \vee f = id$

   (g) $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$, где $\mathbf{C}$ – скелетная категория, и X – произвольный объект $\mathbf{C}$.

   Просто группа (??)

   (h) $\mathrm{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$.
   $\forall f \in \mathrm{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n):$
   $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор
   $\mathrm{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$ *изоморфен моноиду из матриц* $n \times n$ *с операцией умножения*

   (i) $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Num}}(n)$.
   $\forall f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Num}}(n) : f \in [0..n]^n$ — изоморфизм
   Значит $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Num}}(n)$ — *множество перестановок из n элементов*

   (j) $\mathrm{Endo}_{\mathbf{C}_{(X,\le)}}(x)$, где x – произвольный элемент X.
   $\mathrm{Endo}_{\mathbf{C}_{(X,\le)}}(x) = \{x \le x\}$ операцией композиции по транзитивности

5. Какие из следующих категорий являются скелетными: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ, **Mat**, **Num**?

(a) **Set** — нет, так как $\{0\}$ изоморфен $\{1\}$, но не равны

(b) **FinSet** — нет, аналогично **Set**

(c) **Grp** — нет, $(\mathbb{R}, +)$ изоморфна $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$

(d) **Vec** — нет, $i\mathbb{R}$ изоморфен $\mathbb{R}$, но не равен

(e) Λ — нет, $a \to a \to b \to a$ изоморфен $a \to b \to a \to a$:
$f = \lambda\ h\ a\ b.\ h\ b\ a$
$f \circ f = \lambda\, x.\ f(fx) = \lambda\, x.\ f(\lambda\, b\, a.\ x\ a\ b) = \lambda\, x\ a\ b.\ x\ a\ b = \lambda\, x.\ x = id$

(f) **Mat** — да

(g) **Num** — да

6. Какие из следующих категорий являются группоидами: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ, **Mat**, **Num**?

   (a) **Set** — нет, есть инъекции, например

   (b) **FinSet** — нет, есть инъекции, например

   (c) **Grp** — нет, можно построить гомоморфизм в группу из одного нейтрального элемента

   (d) **Vec** — нет, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

   (e) Λ — нет, есть терм с типом $(a \to a \to b) \to (a \to b \to b)$

   (f) **Mat** — нет, есть необратимые матрицы

   (g) **Num** — нет, $(2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Num}}(1, 2)$ не является изоморфизмом, так как $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Num}}(2, 1) = \{(1, 1)\}$

7. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?

   (a) Дискретные категории.
   Всегда скелетные

   (b) Категории вида $\mathbf{C}_M$.
   Всегда скелетные

   (c) Категории предпорядка.
   Если это частичный порядок

   (d) Группоиды.
   Когда $\mathrm{Hom}(A, B) \neq \emptyset \Rightarrow A = B$

8. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?

   (a) Дискретные категории.
   Всегда группоиды.

   (b) Категории вида $\mathbf{C}_M$.
   Когда M — группа

(c) Категории предпорядка.
Когда это дискретные категории

(d) Скелетные категории.
Когда это дискретные категории

9. Пусть $f, f' : X \to Y$ и $g, g' : Y \to X$ – морфизмы в некоторой категории **C**. Докажите, что если диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_X"'] & & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f'"] & \\ Y \arrow[ur, "g'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

коммутируют и $f = f'$, то X и Y изоморфны.

Перевернем первый треугольник и склеим со вторым.
Так как они коммутировали, то полученная диаграмма будет коммутировать.
Отсюда: $id_X \circ g' = g \circ id_Y \Rightarrow g = g'$
$g \circ f = id_X, \; f \circ g = id_Y \Rightarrow X$ *изоморфен* Y

10. Приведите пример, показывающий, что условие $f = f'$ в предыдущем задании является необходимым.

11. Какие из следующих категорий являются малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ, **Mat**, **Num**, $\mathbf{C}_M$, $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$?

    Все, кроме: **Set**, **FinSet**, **Grp**

12. Какие из следующих категорий являются локально малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ, **Mat**, **Num**, $\mathbf{C}_M$, $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$?

    Все