Задания

29 апреля 2021 г.

1. Докажите, что если мы добавим в лямбда исчисление тип натуральных чисел $\mathbb{N}$ с термами и аксиомами, приведенными ниже, то такое лямбда исчесление можно проинтерпретировать в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{zero} : \mathbb{N}} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathrm{suc}(n) : \mathbb{N}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathrm{rec}(z, s, n) : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D}{\Gamma \vdash \mathrm{rec}(z, s, \mathrm{zero}) \equiv z : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathrm{rec}(z, s, \mathrm{suc}(n)) \equiv s[x := n, r := \mathrm{rec}(z, s, n)] : D}$$

Интерпретация:
$[\![zero]\!] = zero \circ\, !$
$[\![suc(n)]\!] = suc \circ [\![n]\!]$
$[\![rec(z, s, n)]\!] = \pi_3 \circ h \circ \langle id, [\![n]\!] \rangle$, где h :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\langle id{,}zero \rangle"] \arrow[dr, "\langle id{,}zero{,}z \rangle"'] & \Gamma \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle id{,}suc \rangle"] \arrow[d, dashed, "h"] & \Gamma \times \mathbb{N} \arrow[d, dashed, "h"] \\
& \Gamma \times \mathbb{N} \times D \arrow[r, "\langle id{,}suc{,}s \rangle"'] & \Gamma \times \mathbb{N} \times D
\end{tikzcd}$$

2. Определите структуру монады на функторе Term_Σ для любой сигнатуры Σ.

   $\eta = id' : 1 \to T$ — естественное преобразование, которое возвращает функтор, переводящий переменную в терм из одной переменной

   $\mu = id'' : T \circ T \to T$ — естественное преобразование, которое интерпретирует терм с переменными-термами как один терм

   Поскольку μ, η не влияют на структуру терма, диаграммы из определения монады для них коммутируют

3. Определите регулярную теорию, моделями которой являются малые категории.

   $\mathcal{S} = \{a, h\}$
   $\mathcal{F} = \{src : h \to a,\ dst : h \to a,\ id :\ a \to h\}$
   $\mathcal{P} = \{comp : h \times h \times h\}$
   $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$
   $\mathcal{A} :$

   $$comp(f, g, t) \vdash_{f,g,t:h} src\ f = dst\ g\ \wedge\ dst\ f = dst\ t\ \wedge\ src\ g = src\ t$$

   $$src\ f = dst\ g \vdash_{f,g:h} \exists(t : h) comp(f, g, t)$$

   $$comp(f, g, t_1) \wedge comp(f, g, t_2) \vdash_{f,g,t_1,t_2:h} t_1 = t_2$$

   $$comp(f, g, t_1) \wedge comp(t_1, r, w_1) \wedge \\ \wedge comp(g, r, t_2) \wedge comp(f, t_2, w_2) \vdash_{f,g,r,t_1,t_2,w_1,w_2:h} w_1 = w_2$$

   $$\top \vdash_{x:a} src\ (id\ x) = x\ \wedge\ dst(id\ x) = x$$

   $$comp(f, id\ x, g) \vdash_{x:a,f,g:h} f = g$$

   $$comp(id\ x, f, g) \vdash_{x:a,f,g:h} f = g$$

   $\mathcal{T} = \{\Sigma, \mathcal{A}\}$ – регулярная теория

4. Опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства в **Set**.

   $[\![a \to b]\!] = [\![\neg a \vee b]\!]$

   $[\![a = b]\!] = [\![(a \to b) \wedge (b \to a)]\!]$

   $[\![\forall a\ \phi(a)]\!] = \bigcap_a [\![\phi(a)]\!]$

   $[\![\exists a\ \phi(a)]\!] = [\![\neg(\forall a\ \neg\phi(a))]\!]$

5. Докажите корректность следующего правила вывода

$$\frac{\varphi \vdash^{V} a = b \qquad \varphi \vdash^{V} \psi[x := a]}{\varphi \vdash^{V} \psi[x := b]}$$

Добавим к пулбэку из интерпретации подстановки пулбэк из интерпретации $\wedge$

$$\begin{tikzcd}
d_{\psi_{[x:=b]} \wedge a=b} \arrow[r, hook, "g"'] \arrow[d, hook, "h"] & d_{\psi_{[x:=b]}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\llbracket \psi_{[x:=b]} \rrbracket"] & d_{\psi} \arrow[d, hook, "\llbracket \psi \rrbracket"] \\
E \arrow[r, hook, "\llbracket a=b \rrbracket"'] & \llbracket V \rrbracket \arrow[r, "\langle id, \llbracket b \rrbracket \rangle"'] & \llbracket V \rrbracket \times \llbracket s \rrbracket
\end{tikzcd}$$

Тогда и внешний прямоугольник является пулбэком:

$$\begin{tikzcd}
d_{\psi_{[x:=b]} \wedge a=b} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "h"] & d_{\psi} \arrow[d, hook, "\llbracket \psi \rrbracket"] \\
E \arrow[r, hook, "\llbracket a=b \rrbracket \circ \langle id, \llbracket b \rrbracket \rangle"'] & \llbracket V \rrbracket \times \llbracket s \rrbracket
\end{tikzcd}$$

Но у нас есть такое (левый квадрат – не пулбэк):

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "e"] & d_{\psi_{[x:=a]}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\llbracket \psi_{[x:=a]} \rrbracket"] & d_{\psi} \arrow[d, hook, "\llbracket \psi \rrbracket"] \\
E \arrow[r, hook, "\llbracket a=b \rrbracket"'] & \llbracket V \rrbracket \arrow[r, "\langle id, \llbracket a \rrbracket \rangle"'] & \llbracket V \rrbracket \times \llbracket s \rrbracket
\end{tikzcd}$$

Значит есть такое

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "e"] & d_{\psi} \arrow[d, hook, "\llbracket \psi \rrbracket"] \\
E \arrow[r, hook, "\llbracket a=b \rrbracket \circ \langle id, \llbracket a \rrbracket \rangle"'] & \llbracket V \rrbracket \times \llbracket s \rrbracket
\end{tikzcd}$$

Но $\llbracket a = b \rrbracket \circ \langle id, \llbracket a \rrbracket \rangle = \llbracket a = b \rrbracket \circ \langle id, \llbracket b \rrbracket \rangle$

Значит $\exists! f : \varphi \to d_{\psi_{[x:=b]} \wedge a=b}$ такой, что ... (если совместить последнюю диаграмму с пуллбэком из второй). Так как $h \circ f = e$, и e – моно, значит f – моно. Значит $g \circ f : \varphi \to d_{\psi_{[x:=b]}}$ – моно, то есть $\varphi \vdash^{V} \psi[x := b]$.