# Задания

10 марта 2021 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?

2. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.

   Пусть объекты — логические формулы (в какой-нибудь логике). Определим $x \leq y$ как выполнение $x$ влечет выполнение $y$, а произведение как конъюнкцию. Тогда $\forall X, Y : \quad X^Y = XYtoX$, где "$\rightarrow$" есть импликация. $ev = X^Y \times Y \leq X$. Если $X^Y \times Y$ выполнимо, то $X$ выполнимо по Modus ponens. Кроме того, если $\Gamma \wedge A \rightarrow B$, то $\Gamma \rightarrow (A \rightarrow B)$. Он единственный по построению, а значит экспонента определена верно.

3. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.

   (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.

   (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).

   (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

   *Решение*

   (c) Во всех этих категориях есть объект, состоящий из одного нейтрального элемента. Он и будет нулевым. Так как нейтральный должен переходить в нейтральный, то отображение из него в другие объекты единственно. Обратное тоже верно — все отображается в 0. Очевидно, что 0 не строгий, так как ядро у композиции отображений между 0 и некоторым объектом будет совпадать с тем объектом. Значит эти категории не декартово замкнуты.

4. Пусть в категории $\mathbf{C}$ есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в $\mathbf{C}$ морфизмы $\mathrm{and}, \mathrm{or} : \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

5. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

   Пусть $\mathbf{C}$ – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) $\mathbf{C}$ – категория предпорядка.

   (b) В $\mathbf{C}$ терминальный объект является булевским.

   (c) В $\mathbf{C}$ существует булевский объект, такой что $\mathrm{true} = \mathrm{false}$.

   *Решение*

$a \Rightarrow b$) Так как в категории предпорядка морфизм между двумя объектами единственный, то можно взять $Bool = 1, true = false = id$. Тогда $\forall f, g : A \to B \;\; \exists h = f \circ \pi_2$

$b \Rightarrow c$) В терминальный объект существует только одна стрелка

$c \Rightarrow a$) В определении Bool $\langle true \circ !, id \rangle = \langle false \circ !, id \rangle$. Значит для любых

6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории $\mathbf{C}$ выполнены следующие утверждения:

(a) Для любого объекта $A$ существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.
Пусть есть стрелка $f : A \times 1 \to B$. Тогда всегда существует уникальная стрелка $A \times 1 \to B \times 1$ — $\langle f, id \rangle$ такая, что $\pi_1 \circ \langle f, id \rangle = f$. Значит пара $(B, \pi_1)$ является эеспонентой $B^1$ (по определению экспоненты). То есть $B^1 \simeq B$

(b) Для любых объектов $A$, $B$ и $C$ существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$.

$ev_1 : A^{B\times C} \times (B \times C) \to A$
$(A^{B\times C} \times C) \times B \to A$
$A^{B\times C} \times C \to A^B$
$A^{B\times C} \to (A^B)^C$

$ev_2 : (A^B)^C \times C \to A^B$
$((A^B)^C \times C) \times B \to A$
$(A^B)^C \times (B \times C) \to A$
$(A^B)^C \to A^{B\times C}$

(c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов $A$, $B$ и $C$ морфизм

$$[\langle \pi_1, \mathrm{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \mathrm{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \to A \times (B \amalg C)$$

является изоморфизмом, где $\mathrm{inj}_1 : B \to B \amalg C$ и $\mathrm{inj}_2 : C \to B \amalg C$ – канонические морфизмы копроизведения, и если $f : B \to X$, $g : C \to X$, то $[f, g] : B \amalg C \to X$ – уникальный морфизм, удовлетворяющий $[f, g] \circ \mathrm{inj}_1 = f$ и $[f, g] \circ \mathrm{inj}_2$.

$Hom((A \times C) \amalg (B \times C), D) \simeq Hom(A \times C, D) \amalg Hom(B \times C, D) \simeq$
$\simeq Hom(A, D^C) \amalg Hom(B, D^C) \simeq Hom(A \amalg B, D^C) \simeq$
$\simeq Hom((A \amalg B) \times C, D)$
То есть, если есть стрелки $A \times C \to D, B \times C \to D$, то есть уникальная стрелка $(A \times C) \amalg (B \times C) \to D$. Но тогда есть стрелок из $A \times C$ и $B \times C$ в $(A \amalg B) \times C$ (объявленных через композицию пары истекок из определения копроизведения + стелки из условия). Кроме того, существует стрелка из $Hom((A \amalg B) \times C, D)$ такая, что диаграмма для копроизведения коммутирует. Значит по универсальному свойству, $(A \times B) \amalg (A \times C) \simeq A \times (B \amalg C)$

(d) Если в $\mathbf{C}$ существует начальный объект 0, то для любого объекта $A$ существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.
$\forall X : Hom(X, A^0) \simeq Hom(X \times 0, A) \simeq Hom(0, A) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall X |Hom(X, A^0)| = 1 \Rightarrow A^0 = 1$

(e) Если в $\mathbf{C}$ существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта $A$ существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.
$A^{B\amalg C} \times (B \amalg C) \to A$

$(B \times A^{B \amalg C}) \amalg (A^{B \amalg C} \times C) \to A$
$(A^{B \amalg C} \times B) \to A, (A^{B \amalg C} \times C) \to A$
$A^{B \amalg C} \to A^B, A^{B \amalg C} \to A^C$
$A^{B \amalg C} \to A^B \times A^C$

$A^B \times A^C \to A^{B \amalg C}$

7. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.

   $2 \times A = (1 \amalg 1) \times A \simeq (1 \times A) \amalg (1 \times A) \simeq A \amalg A$
   Тогда в определении для Bool можно взять стрелку из определения копроизведения $f, g$. Она будет уникальной по универсальному свойству копроизведения.

8. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы $K$ и $S$, то есть следующие морфизмы:

$$K : A \to A^B$$
$$S : (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

   - $\exists \pi_1 : A \times B \to A \Rightarrow \exists! K : A \to A^B$
   - Есть стрелка $ev_1 : B^A \times A \to B$
     Есть стрелка $ev_2 : (C^B)^A \times A \to C^B$
     Есть стрелка $ev_3 : C^B \times B \to C$
     Значит есть стрелка $(C^B)^A \times B^A \times A \to C$
     Ее можно построить так: $(C^B)^A \times B^A \times A \to (C^B)^A \times B^A \times A \times A \to$
     $\to ((C^B)^A \times A) \times (B^A \times A) \to C^B \times B \to C$
     (так как категория декартова, все переходу существуют)
     Тогда существует уникальная стрелка $(C^B)^A \times B^A \to C^A$
     Тогда существует уникальная стрелка $(C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.

10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого $x$ не верно, что zero = suc($x$). В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

    (a) **C** – категория предпорядка.

    (b) В **C** терминальный объект является объектом натуральных чисел.

(c) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

(d) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

11. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все малые копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.

12. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "\langle \mathrm{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"] & \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\mathrm{suc} \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathrm{suc}"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "+ \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times +"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rr, "+"'] & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$