Задания

19 марта 2021 г.

1. Пусть **C** – категория предпорядка, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
2. Пусть **C** – категория с одним объектом, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
3. Пусть **C** – дискретная категория, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
4. Пусть **C** – группоид, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
5. Докажите, что **Num** эквивалентна **FinSet**. Изоморфны ли эти категории?

   Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Num} \to \mathbf{FinSet}$
   $F(n) = \{1, 2, ...n\} =: A_n$
   $F((a_1, ..., a_n)) = \lambda x.\ case\ x\ of\{i \Rightarrow a_i\}\ : A_n \to A_k$

   Так как $|Hom_{\mathbf{Num}}(n, k)| = k^n = |Hom_{\mathbf{FinSet}}(\{1, ..., n\}, \{1, ..., k\})|$ и $F : Hom_{\mathbf{Num}}(n, k) \to Hom_{\mathbf{FinSet}}(\{1, ..., n\}, \{1, ..., k\})$ — инъекция, то F — сюръекция. Значит F строгий и полный.

   $\forall\ S \in \mathbf{Set}\ \exists A_{|S|} \simeq S$, так как равномощные множества изоморфны. Значит $\forall F(|S|) \simeq S$. F существенно сюръективен.
   Получается, что F — экви.

   FinSet не изоморфен **Num**, так как первый состоит из континуального множества объектов, а второй — из счетного.

6. Докажите, что **Mat** эквивалентна $\mathbf{Mat}^{op}$. Изоморфны ли эти категории?

7. Докажите, что **FinSet** не эквивалентна **Set**.

   Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{FinSet}$ — экви.
   Тогда $|Hom_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, \{0\})| = |Hom_{\mathbf{FinSet}}(F(\mathbb{N}), F(\{0\}))| < \infty$, что неверно.

8. Пусть $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – пара функторов. Естественное преобразование $\alpha : F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если для любого объекта X в $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ является изоморфизмом.

   Докажите, что $\alpha : F \to G$ – естественный изоморфизм тогда и только тогда, когда α – изоморфизм в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, shift left, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[l, shift left, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] \\
F(X) \arrow[r, shift left, "\alpha_Y"] & G(Y) \arrow[l, shift left, "\beta_Y"]
\end{tikzcd}$$

   Если $\forall X :\ \alpha_X$ – изо, то позьмем $\beta_X := \alpha_X^{-1}$. Для такого β диаграмма выше коммутирует, значит β – естественное проеобразование. Кроме того, $(\alpha \circ \beta)_X = \alpha_X \circ \beta_X = id_{G(X)}$, а $(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X = id_{F(X)}$. Значит $\beta = \alpha^{-1}$ в $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

   Если $\beta = \alpha^{-1}$ в $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, то $(\alpha \circ \beta)_X = \alpha_X \circ \beta_X = id_{G(X)}$ (и симметрично с другой стороны). Значит $\forall X :\ \beta_X = \alpha_X^{-1}$, то есть $\forall X :\ \alpha_X$ – изо.

9. Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория. Докажите, что функтор $- \times 1$ изоморфен тождественному функтору в $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
X \times 1 \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, "\langle f, ! \rangle"'] & X \arrow[l, shift left, "\langle id, ! \rangle"] \arrow[d, "\langle f, ! \rangle"] \\
Y \times 1 \arrow[r, shift left, "\pi_1"] & X \arrow[l, shift left, "\langle id, ! \rangle"]
\end{tikzcd}$$

   Поскольку диаграмма выше коммутирует, то $\pi_1 : - \times 1 \to id$ и $\langle id, ! \rangle$ — естественные преобразования, причем взаимно обратные. То есть π_1 — изоморфизм этих функторов.

10. Пусть $\rightrightarrows$ – категория, состоящая из двух объектов $\{v, e\}$ и четырех морфизмов $\{id_v : v \to v, id_e : e \to e, d : v \to e, c : v \to e\}$. Докажите, что категории **Graph** (эта категория определяется в предыдущем ДЗ) и $\mathbf{Set}^{\rightrightarrows^{op}}$ эквивалентны. Изоморфны ли эти категории?

Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Graph} \to \mathbf{Set}^{\rightrightarrows^{op}}$.
$F((V,E)) = g$, где g — функтор $\rightrightarrows^{op} \to \mathbf{Set}$ определененный следующим образом:
$g(v) := V$
$g(e) := E(V \times V)$
$g(c^{op}) := \pi_1 \circ E^{-1}$
$g(d^{op}) := \pi_2 \circ E^{-1}$

$F((f_V, f_E)) = \alpha$, где $\alpha_v = f_V, \alpha_e = f_E$

$$\begin{tikzcd}
E(V^2) \arrow[r, "f_E"] \arrow[d] & f_E(E)(f_V(V)^2) \arrow[d] \\
V \arrow[r, "f_V"'] & f_V(V)
\end{tikzcd}$$

Так как $g(c^{op}), g(d^{op})$ – функции, сопоставляющие ребрам их начала и концы, а f_E сохраняет их (переводит ребро $x \to y$ в ребро $f_V(x) \to f_V(y)$), то данная диаграмма коммутирует (при любых значениях на ребрах, идущих вниз, подходящих под определение ЕП), а значит α — естественное преобразование.

Кроме того, можно заметить, что $F((f_V, f_E) \circ (h_V, h_E)) = \beta$, где $\beta_v = f_V \circ h_V, \beta_e = f_E \circ h_E$, при этом, если обозначить $\alpha^f_x = f_X, \alpha^h_x = h_X$, где $(x, X) \in \{(v, V), (e, E)\}$, то $\beta = \alpha^f \circ \alpha^h = F((f_V, f_E)) \circ F((h_V, h_E))$ а значит F — корректный функтор.

Рассмотрим теперь функтор $G : \mathbf{Set}^{\rightrightarrows^{op}} \to \mathbf{Graph}$
$G(f) = (f(v), E')$, где $E'(x, y) := (f(c^{op}))^{-1}(x) \cap (f(d^{op}))^{-1}(y)$
$G(\alpha) = (\alpha_v, \alpha_e)$
Из диаграммы выше следует также, что $G(\alpha \circ \beta) = ((\alpha \circ \beta)_v, (\alpha \circ \beta)_e) = (\alpha_v \circ \alpha_e) \circ (\beta_v, \beta_e) = G(\alpha) \circ G(\beta)$, то есть G корректный.

$F \circ G$ и $G \circ F$ тождественны, так как F переводит функцию для ребер в функцию, которая по ребру возвращает его начало или конец, а G — наоборот.

Категории изоморфны, а значит и тождественны.

11. Пусть $\mathbf{D}$ – рефлективная подкатегория $\mathbf{C}$.
    (a) Докажите, что рефлектор $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ является фнуктором $R : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
    (b) Докажите, что η является естественным преобразованием между $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ и $i \circ R$, где $i : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – функтор вложения.
12. Пусть $F : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Ab}$ – рефлектор вложения $i : \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$.

(a) Приведите пример конечного нетривиального коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| = |X|$.

(b) Приведите пример конечного коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| < |X|$.

(c) Приведите пример коммутативного моноида X, такого что $\eta_X : X \to i(F(X))$ – не сюръективна.

(d) Докажите, что для любого конечного коммутативного моноида X функция $\eta_X : X \to i(F(X))$ является сюръективной. В частности $|F(X)| \leq |X|$.