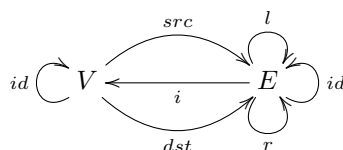


Задания

9 апреля 2021 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.
2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если a, b – объекты \mathbf{C} такие, что b^a существует, то $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$ тоже существует и определяется как $\mathbf{y}(b^a)$.
3. Докажите, что коллекция объектов вида $\mathbf{y}a$ является генератором для категории предпучков.
4. Определите категорию \mathbf{C} , такую что $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ эквивалентна категории рефлексивных графов.



G_E – ребра, G_V – вершины.

$dst, src : G_E \rightarrow G_V$

$i : G_V \rightarrow G_E$

$dst \circ i = id$

$src \circ i = id$

$i \circ dst = r$

$i \circ src = l$

$src \circ l = src$

$dst \circ l = src$

$dst \circ r = dst$

$src \circ r = dst$

$l \circ i = i$

$r \circ i = i$

5. Докажите, что функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{D}$ является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.
6. Докажите, что функтор $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ является свободным копополнением \mathbf{C} , то есть, что для любой кополной категории \mathbf{D} и любого функтора

$F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ существует уникальный (с точностью до изоморфизма) функтор $\tilde{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{D}$, сохраняющий копределы, и такой, что следующая диаграмма коммутрует (с точностью до изоморфизма функторов):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ y \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} & & \end{array}$$