## Задания

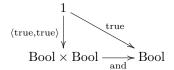
## 10 марта 2021 г.

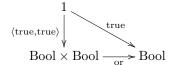
- При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?
- 2. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.
  - Пусть объекты логические формулы (в какой-нибудь логике). Определим  $x \leq y$  как выполнение x влечет выполнение y, а произведение как конъюнкцию. Тогда  $\forall X,Y: X^Y = XYtoX$ , где " $\rightarrow$ " есть импликация.  $ev = X^Y \times Y \leq X$ . Если  $X^Y \times Y$  выполнимо, то X выполнимо по Modus ponens. Кроме того, если  $\Gamma \wedge A \to B$ , то  $\Gamma \to (A \to B)$ . Он единственный по построению, а значит экспонента определена верно.
- 3. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
  - (а) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
  - (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).
  - (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

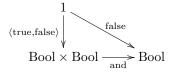
## Решение

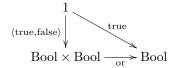
(c) Во всех этих категориях есть объект, состоящий из одного нейтрального элемента. Он и будет нулевым. Так как нейтральный должен переходить в нейтральный, то отображение из него в другие объекты единственно. Обратное тоже верно — все отображается в 0. Очевидно, что 0 не строгий, так как ядро у композиции отображений между 0 и некоторым объектом будет совпадать с тем объектом. Значит эти категории не декартово замкнуты.

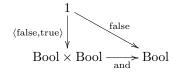
4. Пусть в категории С есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в  $\mathbf{C}$  морфизмы and, or : Bool  $\times$  Bool  $\to$  Bool, такие что следующие диаграммы коммутируют

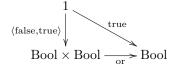


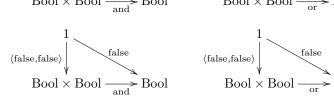


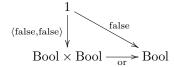












- 5. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.
  - Пусть С категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
  - (а) С категория предпорядка.
  - (b) В C терминальный объект является булевским.
  - (c) В **С** существует булевский объект, такой что true = false.

## Решение

- $a \Rightarrow b$ ) Так как в категории предпорядка морфизм между двумя объектами единственный, то можно взять Bool = 1, true = false = id. Тогда  $\forall f, g: A \to B \ \exists h = f \circ \pi_2$
- $b\Rightarrow c)$  В терминальный объект существует только одна стрелка
- $c\Rightarrow a)$  В определении Bool  $\langle true \circ !, id \rangle = \langle false \circ !, id \rangle$ . Значит для любых
- 6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории С выполнены следующие утверждения:

- (а) Для любого объекта A существует изоморфизм  $A^1 \simeq A$ . Пусть есть стрелка  $f: A \times 1 \to B$ . Тогда всегда существует уникальная стрелка  $A \times 1 \to B \times 1 \langle f, id \rangle$  такая, что  $\pi_1 \circ \langle f, id \rangle = f$ . Значит пара  $(B, \pi_1)$  является эеспонентой  $B^1$  (по определению экспоненты). То есть  $B^1 \simeq B$
- (b) Для любых объектов  $A,\,B$  и C существует изоморфизм  $A^{B\times C}\simeq (A^B)^C.$

Определим  $ev:(A^B)^C\times (B\times C)\to A$  следующим образом:  $(A^B)^C\times (B\times C)\to_{iso}((A^B)^C\times C)\times B\to_{\langle ev_1,id\rangle}A^B\times B\to_{ev_2}A$  Если  $f:\Gamma\times (B\times C)\to A$ , то  $\exists!g:\Gamma\times C\to A^B$ , который коммутирует с  $ev_2$ . Значит  $\exists!h:\Gamma\to (A^B)^C$ , который коммутирует с  $ev_1$ . Из построению ev следует, что h— единственный, который коммутирует с  $ev_1$ .

По универсальному свойству  $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$ 

(c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов  $A,\,B$  и C морфизм

$$[\langle \pi_1, \operatorname{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \operatorname{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \to A \times (B \amalg C)$$

является изоморфизмом, где  $\operatorname{inj}_1: B \to B \amalg C$  и  $\operatorname{inj}_2: C \to B \amalg C$  – канонические морфизмы копроизведения, и если  $f: B \to X$ ,  $g: C \to X$ , то  $[f,g]: B \amalg C \to X$  – уникальный морфизм, удовлетворяющий  $[f,g] \circ \operatorname{inj}_1 = f$  и  $[f,g] \circ \operatorname{inj}_2$ .

- (d) Если в **C** существует начальный объект 0, то для любого объекта A существует изоморфизм  $A^0 \simeq 1$ .  $\forall X: Hom(X,A^0) \simeq Hom(X\times 0,A) \simeq Hom(0,A) \Rightarrow \forall X|Hom(X,A^0)|=1 \Rightarrow A^0=1$
- (e) Если в **C** существует копроизведение  $B \coprod C$ , то для любого объекта A существует изоморфизм  $A^{B \coprod C} \simeq A^B \times A^C$ .

Определим  $ev:(A^B\times A^C)\times (B\amalg C)\to A$  следующим образом:  $(A^B\times A^C)\times (B\amalg C)\to_{iso}(A^B\times A^C\times B)\amalg (A^B\times A^C\times C)\to \to_{[inj_1\circ\pi_{1,3},inj_2\circ\pi_{2,3}]}(A^B\times B)\amalg (A^C\times C)\to_{[ev_1,ev_2]}A\amalg A\to_{[id,id]}A$  Пусть  $f:\Gamma\times (B\amalg C)\to A$ . Тогда существует изоморфная пара морфизмов  $g_1:Gamma\times B\to A, g_2:\Gamma\times C\to A$  (которые получаются композицией с  $inj_1,inj_2$ ). Для  $g_1,g_2$  существует единственная пара морфизвом  $\Gamma\to A^B$  и  $\Gamma\to A^C$  такая, что первый коммутирует с  $ev_1$ , а второй — с  $ev_2$  (точнее не сами морфизмы, а  $\langle\cdot,id\rangle$ ). Тогда существует единственный морфизм  $h:\Gamma\to (A^C\times A^B)$ , что  $\langle h,id\rangle$  коммутирует с ev.

По универсальному свойству  $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$ 

7. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.

$$2 \times A = (1 \coprod 1) \times A \simeq (1 \times A) \coprod (1 \times A) \simeq A \coprod A$$

Тогда в определении для Bool можно взять стрелку из определения копроизведения f,g. Она будет уникальной по универсальному свойству копроизведения.

8. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

$$K:A\to A^B$$
 
$$S:(C^B)^A\to (C^A)^{(B^A)}$$

- $\exists \pi_1 : A \times B \to A \Rightarrow \exists ! K : A \to A^B$
- Есть стрелка  $ev_1: B^A \times A \to B$ Есть стрелка  $ev_2: (C^B)^A \times A \to C^B$ Есть стрелка  $ev_3: C^B \times B \to C$

Значит есть стрелка  $(C^B)^A \times B^A \times A \to C$ 

Ее можно построить так:  $(C^B)^A \times B^A \times A \to (C^B)^A \times B^A \times A \times A \to (C^B)^A \times A) \times (B^A \times A) \to C^B \times B \to C$ 

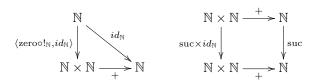
(так как категория декартова, все переходу существуют)

Тогда существует уникальная стрелка  $(C^B)^A \times B^A \to C^A$ 

Тогда существует уникальная стрелка  $(C^B)^A o (C^A)^{(B^A)}$ 

- 9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.
- 10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что zero =  $\operatorname{suc}(x)$ . В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.
  - (а) С категория предпорядка.
  - (b) В  ${\bf C}$  терминальный объект является объектом натуральных чисел.
  - (c) В  ${\bf C}$  существует объект натуральных чисел, такой что для любого  $x:1 \to \mathbb{N}$  верно, что zero = suc  $\circ x$ .
  - (d) В C существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого  $x:1\to\mathbb{N}$  верно, что zero = suc  $\circ x$ .
- 11. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все малые копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.

12. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ , удовлетворяющий следующим условиям:



Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

