Задания

15 апреля 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \to T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T.

2. Докажите, что категория Клейсли $\mathbf{Kl}_T$ эквивалентна полной подкатегории T-**alg** на свободных T-алгебрах.

Определим функтор $F : \mathbf{Kl}_T \to T\text{-}\mathbf{alg}^{free}$, где $T\text{-}\mathbf{alg}^{free}$ – полная подкатегория T-**alg** на свободных алгебрах.

$F(A) = (T\ A, \mu_A)$
$F(f) = T\ f$

Определение корректно, так как данная диаграмма коммутирует по нитуральности μ:

$$\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "TTf"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ TTTB \arrow[r, "\mu_{TB}"] & TB \end{tikzcd}$$

$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, $\quad F(id) = id$, так как T – функтор

Докажем, что F – полный и строгий. Следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ TB & TTB \arrow[l, "\mu_B"] \end{tikzcd}$$

так как $\mu_B \circ Tf \circ \eta_A = f \circ_{\mathbf{Kl}_T} \eta_A = f \circ_{\mathbf{Kl}_T} id_A = f$.
А значит $Hom(A, TB) \to Hom((TA, \mu_A), (TB, \mu_B))$ – биекция.
Так как F существенно сюръективен (прообраз $(T\ A, \mu_A)$ есть A), то F – эквивалентность категорий.

3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

   $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
   $\mathcal{S} = \{v, e\}$
   $\mathcal{F} = \{src\ :\ e \to v,\ \ dst\ :\ e \to v,\ \ id\ :\ v \to e\}$
   $\mathcal{A} = \{src\ (id\ x) = x,\ \ dst\ (id\ x) = x\}$

4. Докажите, что для любой малой категории $\mathbf{C}$ категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.

   $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
   $\mathcal{S} = \{f, c, ch, s\}$
   $\mathcal{F}$:
   $app_{Ob}\ :\ f \to c \to s$
   $app_{Hom}\ :\ f \to ch \to (s \to s)$
   $\circ_c\ :\ ch \to ch \to ch$
   $id_c\ :\ c \to ch$
   $src\ :\ ch \to c$
   $dst\ :\ ch \to c$
   $\mathcal{A}$:
   $app_{Hom}\ F\ (f\ \circ_c\ g)\ x = app_{Hom}\ F\ f\ (app_{Hom}\ F\ g\ x)$
   $app_{Hom}\ F\ (id_c\ c)\ x = x$
   $src\ (id\ c) = c$
   $dst\ (id\ c) = c$
   $(f\ \circ_c\ g)\ \circ_c\ h = f\ \circ_c\ (g\ \circ_c\ h)$

5. Докажите, что категория Mon-**Mod**(Mon-**Mod**) моноидов в категории моноидов (в **Set**) изоморфна категории коммутативных моноидов (в **Set**).

6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.

7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$

- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
   - $0 \cdot x = 0$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

   $$\mathit{data}\ \mathit{Term}\ a \ = \ \mathit{Var}\ a \mid \mathit{App}\ (\mathit{Term}\ a)\ (\mathit{Term}\ a) \mid \mathit{Lam}\ (\mathit{Term}\ (\mathit{Maybe}\ a))$$

   Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.