

# Задания

13 апреля 2021 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.
2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если  $a, b$  – объекты  $\mathbf{C}$  такие, что  $b^a$  существует, то  $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$  тоже существует и определяется как  $\mathbf{y}(b^a)$ .
3. Докажите, что коллекция объектов вида  $\mathbf{y}a$  является генератором для категории предпучков.

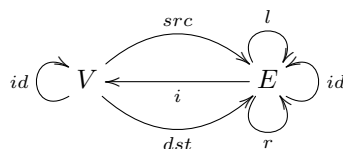
$$\mathbf{y}a \xrightarrow{s} F \xrightleftharpoons[g]{f} G$$

$$\text{Hom}(\mathbf{y}a, F) \simeq F_a, \quad \text{Hom}(\mathbf{y}a, G) \simeq G_a.$$

$$f \simeq f' : F_a \rightarrow G_a, \quad g \simeq g' : F_a \rightarrow G_a$$

$$\forall s' \in F_a : f'(s') = g'(s') \Rightarrow f' = g' \Rightarrow f = g$$

4. Определите категорию  $\mathbf{C}$ , такую что  $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  эквивалентна категории рефлексивных графов.



$G_E$  – ребра,  $G_V$  – вершины.

$$\text{dst}, \text{src} : G_E \rightarrow G_V$$

$$i : G_V \rightarrow G_E$$

$$\text{dst} \circ i = \text{id}$$

$$\text{src} \circ i = \text{id}$$

$$i \circ \text{dst} = r$$

$$i \circ \text{src} = l$$

$$\text{src} \circ l = \text{src}$$

$$\text{dst} \circ l = \text{src}$$

$$\text{dst} \circ r = \text{dst}$$

$$\text{src} \circ r = \text{dst}$$

$$l \circ i = i$$

$$r \circ i = i$$

5. Докажите, что функтор  $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{D}$  является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.

Достаточно доказать, что если он сохраняет копределы, то он левый сопряженный.

Пусть  $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ . Тогда по ко-лемме  $X = \text{colim}_a \mathbf{y} a$ .

$$\begin{aligned} \text{Hom}(F(X), Y) &= \text{Hom}(F(\text{colim}_a \mathbf{y} a), Y) = \\ &= \text{Hom}(\text{colim}_a F(\mathbf{y} a), Y) = \lim_a \text{Hom}(F(\mathbf{y} a), Y) = \\ &= \lim_a \text{Hom}(\mathbf{y} a, \text{Hom}(F(\mathbf{y} \_), Y)) = \\ &= \text{Hom}(\text{colim}_a \mathbf{y} a, \text{Hom}(F(\mathbf{y} \_), Y)) = \text{Hom}(X, \text{Hom}(F(\mathbf{y} \_), Y)) = \\ &=: \text{Hom}(X, U(Y)) \end{aligned}$$

$$U = \text{Hom}(F(\mathbf{y} \_), \_) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \text{ — правый сопряженный}$$

6. Докажите, что функтор  $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$  является свободным копополнением  $\mathbf{C}$ , то есть, что для любой кополной категории  $\mathbf{D}$  и любого функтора  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  существует уникальный (с точностью до изоморфизма) функтор  $\tilde{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ , сохраняющий копределы, и такой, что следующая диаграмма коммутует (с точностью до изоморфизма функторов):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \mathbf{y} \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} & & \end{array}$$

Пусть такой  $\tilde{F}$  существует и пусть  $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} = \text{colim}_a \mathbf{y} a$ . Тогда  $\tilde{F}(X) = \tilde{F}(\text{colim}_a \mathbf{y} a) = \text{colim}_a (\tilde{F}(\mathbf{y} a)) = \text{colim}_a F_a$ .

Тогда можно взять  $\tilde{F}(X) = \text{colim}_a F_a$  как определение  $\tilde{F}$ . Оно корректно, так как в  $\mathbf{D}$  существуют копределы.