Задания

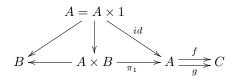
23 февраля 2021 г.

- 1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - (a) Терминальные объекты. *Наибольший элемент*
 - (b) Произведения объектов. Точная нижняя граница
- 2. Пусть в категории ${\bf C}$ существует терминальный объект 1. Докажите, что для любого объекта A в ${\bf C}$ существует произведение $A\times 1$.

$$A \times 1 = A, \pi_1 = id, \pi_2 = (e$$
динственный морфизм $A \to 1)$ $\forall C, f_1: C \to A, f_2: C \to 1$

 $\exists h=f_1.$ Одна половина коммутирует, так как $id\circ f_1=f_1$, вторая — так как там терминальный объект. h единственный, так как $id\circ h=f_1\Rightarrow h=f_1$

- 3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.
 - В терминальный объект существует только одна стрелка из другого объекта.
- 4. Пусть в категории ${\bf C}$ существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \to B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1: A \times B \to A$ является эпиморфизмом.



5. Докажите, что в Аb существуют все произведения.

$$(A_1, *) \times (A_2, +) = (A_1 \times A_2, \langle *, + \rangle)$$

проекции тривиальные. свойство выполняется для функции h(x)=(f(x),g(x)). Она единственная, так как любую функцию, действующую в множество пар можно разбить на 2 функции и тогда $id\circ f=f,id\circ g=g$

- 6. Докажите, что два определения уравнителей, приводившихся в лекции, эквивалентны.
 - $\Rightarrow e$ моно $\Rightarrow \exists!ke$ если е моно, то k единственный, для которого диаграмма коммутирует ($e \circ k = h = e \circ k' \Rightarrow k = k'$)
 - \Leftarrow) $\exists ! k \Rightarrow e \text{моно}$ Пусть $e \circ w = e \circ t$ для неких t, w. Тогда $e \circ w$ можно подставить вместо h в определение уравнителя. Тогда $\exists ! k : e \circ k = e \circ w$. Получается, что k = w = t. Значит e моно.
- 7. Докажите, что уравнитель пары стрелок $f,g:A\to B$ уникален с точностью до изоморфизма. То есть, если $e_1:E_1\to A$ и $e_2:E_2\to A$ два уравнителя f и g, то существует уникальный изоморфизм $i:E_1\to E_2$ такой, что $e_2\circ i=e_1$.

По определению уравнителя: $\exists !\ k_1.\ e_1\circ k_1=e_2,\ \exists !\ k_2.\ e_2\circ k_2=e_1.$ Так как уравнители — мономорфизмы, то:

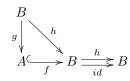
$$e_1 \circ k_1 \circ k_2 = e_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 \circ k_2 = id$$

$$e_2 \circ k_2 \circ k_1 = e_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 \circ k_1 = id$$

Значит k_1, k_2 — изоморфизмы, причем единственные

- 8. Морфизм $h: B \to B$ называется *идемпотентным*, если $h \circ h = h$. Докажите следующие факты:
 - (a) Если $f:A\to B$ и $g:B\to A$ такие, что $g\circ f=id_A$, то $h=f\circ g$ является идемпотентным. $h\circ h=(f\circ g)\circ (f\circ g)=f\circ (g\circ f)\circ g=f\circ g=h$
 - (b) Если в категории есть уравнители, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма $h: B \to B$ существуют $f: A \to B$ и $g: B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$.

Построим уравнитель для h, id. Так как $h \circ h = id \circ h$, то $\exists f, \exists ! g$



$$f\circ g=h$$
 $f\circ g\circ f=h\circ f$ Но $h\circ f=id\circ f$ м f — моно, а значит $f\circ g\circ f=f$ $g\circ f=id$

9. Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.

Пусть f — регулярный моно и $g \circ f = id$. Рассмотрим диаграмму

$$C$$

$$g \circ h \mid \qquad h$$

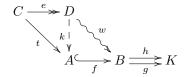
$$A \stackrel{\text{f} \circ g}{\rightleftharpoons} B \stackrel{f \circ g}{\Longrightarrow} B$$

Достаточно проверить, что эта диаграмма коммутирует для любого h (точнее даже нужно проверить только треугольник). $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h \circ id = h$

10. Мономорфизм $f:A\to B$ называется *сильным*, если для любой коммутативного квадрата, где $e:C\to D$ является эпиморфизмом,



существует стрелка $D \to A$ такая, что диаграмма выше коммутирует. Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.



Чтобы доказать существование k, достаточно показать, что $h\circ w=g\circ w$ $h\circ f\circ t=g\circ f\circ t$ — тк f — уравнитель $h\circ w\circ e=g\circ w\circ e$ — тк квадрат коммутативен $h\circ w=g\circ w$ — тк e— эпи

11. Мономорфизм $f:A\to B$ называется экстремальным, если для любого эпиморфизма $e:A\to C$ и любого морфизма $g:C\to B$ таких, что $g\circ e=f$, верно, что e – изоморфизм.

Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.

Так как f — сильный, то для любых e, g, для которых квадрат коммутативен, надется соответствующий h



```
h\circ e=id e\circ h\circ e=e e\circ h=id — так как e — эпи Получается, что e,h — изо
```

12. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?

Если f — регулярный моно- эпиморфизм, то он является уравнителем для неких g, h. Причем, так как f — эпи, то g = h. Тогда по определению уравнителя $\exists !k: f \circ k = id$, то есть f — расщепленный моно- эпи-, а значит изо.

13. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.

Пусть $f:A\to B$ — моно. Если f — эпи, то f — изо, а значит расщепленный, а значит регулярен (пункт 9). Если f — не эпи, то f — уравнитель для $\mathbb{1}_B$ и $\mathbb{1}_{f(A)}$

14. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.

Пусть $f:A\to B$ — моно. ${\bf f}$ — уравнитель для ${\bf 0}$ и некоторого g, где $g:B\to C,\ ker(g)=f(A)$ Так как B — абелева, значит f(A) — нормальная, значит можно определить g так: $g(b)=b\cdot f(A)$: $B\to B/f(A)$

Бонусные задания:

- 1. Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.
- 2. Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального n>1 существует $x\in M$ такой, что $x\neq 1$ и $x^n=1$.
- 3. Приведите пример нетривиального моноида M такого, что в категории \mathbf{C}_M существует бинарные произведения.