Задания

18 апреля 2021 г.

1. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

   Пусть $U : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

   (a) Если U является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.
   Пусть $f : X \to Y$ – моно. Пусть в следующей диаграмме $U(f) \circ g = U(f) \circ h$.

   $$A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$$

   $\phi^{-1}(U(f) \circ g) = \phi^{-1}(U(f) \circ h)$
   $f \circ \phi^{-1}(g) = f \circ \phi^{-1}(h) \Rightarrow \phi^{-1}(g) = \phi^{-1}(h) \Rightarrow f = g$

   (b) Если U является строгим, то обратное верно, то есть если $U(f)$ – мономорфизм, то f также является мономорфизмом.

   $$A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

   $f \circ g = f \circ h,\ U$ строгий $\Rightarrow U(f \circ g) = U(f \circ h) \Rightarrow U(f) \circ U(g) = U(f) \circ U(h) \Rightarrow U(g) = U(h) \Rightarrow \phi^{-1}(U(g)) = \phi^{-1}(U(h)) \Rightarrow g = h$

2. Докажите, что у забывающего функтора $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$, сконструированного в 5 ДЗ, существует левый сопряженный.

   Построим левый обратный F.
   Пусть $F(\ (V, E)\ ) = C$, где
   $Ob(C) = V$
   $Hom(v_a, v_b) = \{[v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, ..., v_b] \mid v_i \in V\}$ — произвольные конечные пути (если $v_a = v_b$, то $[v_a] \in Hom(v_a, v_b)$ – нейтральный элемент)

$F_V(v) = v$
$F_E(e^{a \to b}) = [a, e^{a \to b}, b]$
Композиция морфизмов — композиция путей.

Покажем, что $Hom(A, U(B)) \simeq Hom(F(A), B)$.
Пусть $f \in Hom(A, U(B))$, тогда ему можно однозначно сопоставить $g \in Hom(F(A), B)$:
$g(V) = f(V)$
$g([v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, ..., v_b]) = f(E(v_a, v_1)) \circ f(E(v_1, v_2))...$
$g([v_a]) = [f(v_a)]$

3. Докажите, что левый сопряженный к некоторому функтору U уникален с точностью до изоморфизма, то есть если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то $F \simeq F'$.

   Пусть $\alpha_A = \epsilon_{F'A} \circ F\eta'_A, \quad \beta_A = \epsilon'_{FA} \circ F'\eta_A$

   Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F_{\eta'_A}"] \arrow[dd, bend right=60, dashed, "\alpha_A"'] & FGF(A) \arrow[d, "F\eta'_{GFA}"] \arrow[dr, "id"] & \\
FGF'(A) \arrow[r, "FGF'\eta_A"'] \arrow[d, "\epsilon_{F'A}"] & FGF'GF(A) \arrow[r, "FG\epsilon'_{FA}"'] \arrow[d, "\epsilon_{F'GFA}"] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{FA}"] \\
F'(A) \arrow[r, "F'\eta_A"'] \arrow[rr, bend right=40, dashed, "\beta_A"'] & F'GF(A) \arrow[r, "\epsilon'_{FA}"'] & F(A)
\end{tikzcd}
$$

   Верхний квадрат коммутирует по натуральности η', два нижних – по натуральности ϵ. Правый верхний треугольник – так как $F' \dashv U$. Композиция стрелок $F(A) \to FGF(A) \to FGF(A) \to F(A)$ равна id, так как $F \dashv U$. Значит $\beta_A \circ \alpha_A = id$. Если построить симметричную диаграмму (меняем F, F'), то получится, что $\alpha_A \circ \beta_A = id$.
   То есть α — изоморфизм функторов F, F'.

4. Есть ли у забывающего функтора U : **Grp** $\to$ **Set** правый сопряженный? Докажите это.

   Рассмотрим копроизведение абелевых групп. Оно равно произведению этих групп. Однако копроизведение множеств — это размеченное объединение, которое не изоморфно произведению. Раз он не сохраняет копроизведения, то он не левый сопряженный.

5. Есть ли у забывающего функтора U : **Grp** $\to$ **Mon** правый сопряженный? Докажите это.

   Рассмотрим функтор F : **Mon** $\to$ **Grp**, который оставляет только обратимые элементы моноида.

Пусть $f : U(A) \to B$. $f(a) * f(a^{-1}) = f(0) = 0 \Rightarrow f(a) = f(a^{-1})^{-1} \Rightarrow f(A) \subset F(B)$. Значит можно смотреть на f как на гомоморфизм групп. В обратную сторону тоже верно.
Значит $Hom(U(A), B) \simeq Hom(A, F(B))$, где гомоморфизмы переходят в себя же.

6. Пусть **rGraph** – категорий рефлексивных графов. Объекты этой категории – это графы, в которых для каждой вершины x выбрана петля id_x в этой вершине. Морфизмы – морфизмы графов, сохраняющие тождественные петли.

   Категория графов в данном упражнении не будет работать, но вместо **rGraph** можно взять категорию малых группоидов или категорию малых категорий; решение при этом не изменится.

   Докажите, что у функтора Γ : **rGraph** $\to$ **Set**, сопоставляющего каждому рефлексивному графу множество его вершин, существует правый сопряженный C : **Set** $\to$ **rGraph** и левый сопряженный D : **Set** $\to$ **rGraph**, и у D существует левый сопряженный Π_0 : **rGraph** $\to$ **Set**. Таким образом, мы получаем следующую цепочку сопряженных функторов:
$$\Pi_0 \dashv D \dashv \Gamma \dashv C$$

   Определим C : **Set** $\to$ **rGraph**, который по множеству возвращает граф, вершины которого – элементы этого множества и между любой парой вершин существует ровно одно ребро.

   Тогда $Hom(A, C(B))$ состоит из морфизмов, у которых дествие на ребрах однозначно задается действием на вершинах – они склеивают ребра между одинаковыми парами вершин. Тогда
   $Hom(A, C(B)) \simeq Hom(\Gamma(A), B) \Rightarrow \Gamma \dashv C$.

   Определим D : **Set** $\to$ **rGraph**, который по множеству возвращает граф, вершины которого – элементы этого множества, а из ребер есть только петли.

   Тогда $Hom(D(A), B)$ состоит из морфизмов, у которых дествие на ребрах однозначно задается действием на вершинах (так как морфизмы сохраняют выделденные петли). Тогда
   $Hom(D(A), B) \simeq Hom(A, \Gamma(B)) \Rightarrow D \dashv \Gamma$.

   Рассмотрим $Hom(A, D(B))$. Если в А было ребро $a \to b$, то оно будет отображено в ребро $D(a) \to D(b)$. Это означает, что все вершины, между которыми есть ребра, должны быть отображены в одну, а все рабра между ними – в петлю. Тогда $Hom(A, D(B)) \simeq Hom(\Pi_0(A), B)$, где Π_0 : **rGraph** $\to$ **Set** по рефлексивному графу возвращает множество из компонент слабой связности данного графа.

7. Докажите, что категории $\mathbf{Fam}_I$ и $\mathbf{Set}/I$ эквивалентны.

   Пусть $f, g : I \to Set$ – объекты $\mathbf{Fam}_I$, $\mathfrak{f} \in Hom(f, g)$.
   Определим F:

$F(f) = (A, fst)$, где $A = \{(i, f(i)) \mid i \in I\}$
$F(\mathfrak{f}) = \lambda(A, fst).\ (B, fst) \quad : \quad F(f) \to F(g)$, где
$B = \{(i, \mathfrak{f}\ i\ f_i) \mid (i, f_i) \in A\}$
(если смотреть на $\mathfrak{f}$ как на функцию $\prod\limits_{i:I} \to f\ i \to g\ i$)
Коммутативность диаграммы ($fst = fst \circ F(\mathfrak{f})$) очевидна.
Очевидно, что $F(id) = id$.
Если $\mathfrak{g} \in Hom(g, h)$, то $F(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) = F(\mathfrak{g}) \circ F(\mathfrak{f})$, так как $\mathfrak{g}\ i\ (\mathfrak{f}\ i\ (f\ i)) = (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f})\ i\ (f\ i)$.

Таким образом, F – функтор.
$Hom(f, g) \simeq Hom(F(f), F(g))$, так как $Hom(F(f), F(g))$ — множество функций, которые сохраняют первый элемент пары (так как диаграмма из определения $\mathbf{Set}/I$ коммутирует), а значит оно эквивалентно семейству функций $f\ i \to g\ i$.

Получается, что F полный и строгий. Осталось проверить существенную сюръективность.

Пусть $w : (A, f : A \to I),\ A \in \mathbf{Set}$.
Возьмем $g = f^{-1} : I \to A$, который по индексу возмращает множество прообразов.

$F(g) = (B, fst)$, где $B = \{(i, f^{-1}(i)) \mid i \in I\}$
Так как $B \simeq A$, то по $fst^{B \to I}$ можно построить $f^{A \to I}$ и наоборот, а значит $F(g) \simeq w$. То есть для F существенно сюръективна.

Значит F – экви.

8. Пусть $\mathbf{C}$ – декартовая категория. Если A – объект $\mathbf{C}$, то мы можем определить функтор $A^* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/A$ как $A^*(B) = (A \times B, \pi_1)$ и $A^*(f) = \mathrm{id}_A \times f$.

   (a) Докажите, что у A^* есть левый сопряженный.
   Возьмем $(X, f) \in \mathbf{C}/A,\ Y \in \mathbf{C}$.
   $Hom((X, f), A^*(Y))$ состоит из функций $\langle h_1, h_2 \rangle : X \to A \times Y$ таких, что $\pi_1 \circ \langle h_1, h_2 \rangle = f$. То есть $h_1 = f$, а $h_2 : X \to Y$ – произвольная
   Значит $Hom((X, f), A^*(Y)) \simeq Hom(X, Y)$.
   Тогда можно определить забывающий функтор $F((X, f)) = X$, который будет левым сопряженным. (морфизмы $X \to Y$ переводятся в себя же).

   (b) Докажите, что если $\mathbf{C}$ декартово замкнута и в $\mathbf{C}$ есть уравнители, то у A^* есть правый сопряженный.
   Пусть $X \in \mathbf{C},\ (Y, g) \in \mathbf{C}/A$.
   $Hom(A^*(X), (Y, g)) = Hom((A \times X, \pi_1), (Y, g))$ состоит из функций таких $h : A \times X \to Y$, что $\pi_1 = g \circ h$.

Так как **C** декартово замкнута, то в ней существуют экспоненты. По универсальному свойству для экспонент существует уникальная стрелка $f : X \to Y^A$ такая, что $ev \circ \langle f, id \rangle = h$.
Значит существует инъекция $Hom(A^*(X), (Y, g)) \hookrightarrow Hom(X, Y^A)$

В обратную сторону: todo