Задания

6 апреля 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор
$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$
является правым сопряженным к
$$F^T : \mathbf{C} \to T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$
и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T.

2. Докажите, что категория Клейсли $\mathbf{Kl}_T$ эквивалентна полной подкатегории T-$\mathbf{alg}$ на свободных T-алгебрах.

3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.
$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
$\mathcal{S} = \{v, e\}$
$\mathcal{F} = \{src\ :\ e \to v,\ \ dst\ :\ e \to v,\ \ id\ :\ v \to e\}$
$\mathcal{A} = \{src\ (id\ x) = x,\ \ dst\ (id\ x) = x\}$

4. Докажите, что для любой малой категории $\mathbf{C}$ категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.
$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
$\mathcal{S} = \{Ob_C, Hom_C, Ob_S, Hom_S, F\}$
$\mathcal{F}$:
$src_C\ :\ Hom_C \to Ob_C$ $\quad dst_C\ :\ Hom_C \to Ob_C$
$id_C\ :\ Ob_C \to Hom_C$ $\quad \circ_C\ :\ Hom_C \to Hom_C \to Hom_C$

$src_S\ :\ Hom_S \to Ob_S$ $\quad dst_S\ :\ Hom_S \to Ob_S$
$id_S\ :\ Ob_S \to Hom_S$ $\quad \circ_S\ :\ Hom_S \to Hom_S \to Hom_S$

$F_{Ob}\ :\ F \to Ob_C \to Ob_S$ $\quad F_{Hom}\ :\ F \to Hom_C \to Hom_S$

(далее $src, dst, \circ$ используются как полиморфные функции)

$\mathcal{A}:$

$$
\begin{array}{ll}
src\ (id\ x) = x & -\ \ id : a \to a \\
dst\ (id\ x) = x & \\
src\ (x \circ y) = src\ x & -\ \ \circ : (a \to b) \to (b \to c) \to \\
dst\ (x \circ y) = dst\ y & \qquad\qquad \to a \to c \\
 & \\
z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y & -\ \ \circ\, assoc \\
z \circ id\ (dst\ z) = z & -\ \ id\ is\ id \\
id\ (src\ z) \circ z = z & \\
 & \\
src\ (F_{Hom}\ f\ h) = F_{ob}\ f\ (src\ h) & -\ \ F:\ (a \to b) \to F(a) \to \\
dst\ (F_{Hom}\ f\ h) = F_{ob}\ f\ (dst\ h) & \qquad\qquad\qquad \to F(b) \\
F_{Hom}\ f\ (h \circ g) = F_{Hom}\ f\ h \circ F_{Hom}\ f\ g & -\ \ F(a \circ b) = F\ a \circ F\ b
\end{array}
$$

5. Докажите, что категория Mon-**Mod**(Mon-**Mod**) моноидов в категории моноидов (в **Set**) изоморфна категории коммутативных моноидов (в **Set**).

6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.

7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
   - $0 \cdot x = 0$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

   $$data\ Term\ a\ =\ Var\ a \mid App\ (Term\ a)\ (Term\ a) \mid Lam\ (Term\ (Maybe\ a))$$

   Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.