

# Задания

31 марта 2021 г.

1. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

Пусть  $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

- (а) Если  $U$  является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.

Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – моно. Пусть в следующей диаграмме  $U(f) \circ g = U(f) \circ h$ .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(U(f) \circ g) &= \phi^{-1}(U(f) \circ h) \\ f \circ \phi^{-1}(g) &= f \circ \phi^{-1}(h) \Rightarrow \phi^{-1}(g) = \phi^{-1}(h) \Rightarrow f \circ \phi^{-1}(g) = f \circ \phi^{-1}(h) \Rightarrow f = g \end{aligned}$$

- (б) Если  $U$  является строгим, то обратное верно, то есть если  $U(f)$  – мономорфизм, то  $f$  также является мономорфизмом.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} X \xrightarrow{f} Y$$

$$\begin{aligned} f \circ g = f \circ h, \quad U \text{ строгий} &\Rightarrow U(f \circ g) = U(f \circ h) \Rightarrow U(f) \circ U(g) = U(f) \circ U(h) \\ U(f) \circ U(g) &\Rightarrow U(g) = U(h) \Rightarrow \phi^{-1}(U(g)) = \phi^{-1}(U(h)) \Rightarrow g = h \end{aligned}$$

2. Докажите, что у забывающего функтора  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$ , сконструированного в 5 ДЗ, существует левый сопряженный.

Построим левый обратный  $F$ .

Пусть  $F( (V, E) ) = C$ , где

$$Ob(C) = V$$

$Hom(v_a, v_b) = \{ [v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, \dots, v_b] \mid v_i \in V \}$  – произвольные конечные пути (если  $v_a = v_b$ , то  $[v_a] \in Hom(v_a, v_b)$  – нейтральный элемент)

$$F_V(v) = v$$

$$F_E(e^{a \rightarrow b}) = [a, e^{a \rightarrow b}, b]$$

Композиция морфизмов — композиция путей.

Покажем, что  $\text{Hom}(A, U(B)) \simeq \text{Hom}(F(A), B)$ .

Пусть  $f \in \text{Hom}(A, U(B))$ , тогда ему можно однозначно сопоставить  $g \in \text{Hom}(F(A), B)$ :

$$g(V) = f(V)$$

$$g([v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, \dots, v_b]) = f(E(v_a, v_1)) \circ f(E(v_1, v_2)) \dots$$

$$g([v_a]) = [f(v_a)]$$

3. Докажите, что левый сопряженный к некоторому функтору  $U$  уникален с точностью до изоморфизма, то есть если  $F \dashv U$  и  $F' \dashv U$ , то  $F \simeq F'$ .

$$\text{Пусть } \alpha_A = \epsilon_{F'A} \circ F\eta'_A, \quad \beta_A = \epsilon'_{FA} \circ F'\eta_A$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & FGF(A) & & \\
 \downarrow F\eta'_A & & \downarrow F\eta'_{GFA} & \searrow id & \\
 FGF'(A) & \xrightarrow{FGF'\eta_A} & FGF'GF(A) & \xrightarrow{FG\epsilon'_{FA}} & FGF(A) \\
 \downarrow \epsilon_{F'A} & & \downarrow \epsilon_{F'GFA} & & \downarrow \epsilon_{FA} \\
 F'(A) & \xrightarrow{F'\eta_A} & F'GF(A) & \xrightarrow{\epsilon'_{FA}} & F(A) \\
 & \dashrightarrow \beta_A & & & 
 \end{array}$$

Верхний квадрат коммутует по натуральности  $\eta'$ , два нижних — по натуральности  $\epsilon$ . Правый верхний треугольник — так как  $F' \dashv U$ . Композиция стрелок  $F(A) \rightarrow FGF(A) \rightarrow FGF'(A) \rightarrow F(A)$  равна  $id$ , так как  $F \dashv U$ . Значит  $\beta_A \circ \alpha_A = id$ . Если построить симметричную диаграмму (меняем  $F, F'$ ), то получится, что  $\alpha_A \circ \beta_A = id$ .

То есть  $\alpha$  — изоморфизм функторов  $F, F'$ .

4. Есть ли у забывающего функтора  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  правый сопряженный? Докажите это.

Рассмотрим копроизведение абелевых групп. Оно равно произведению этих групп. Однако копроизведение множеств — это размеченное объединение, которое не изоморфно произведению. Раз он не сохраняет копроизведения, то он не левый сопряженный.

5. Есть ли у забывающего функтора  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Mon}$  правый сопряженный? Докажите это.

Рассмотрим функтор  $F : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Grp}$ , который оставляет только обратимые элементы моноида.

Пусть  $f : U(A) \rightarrow B$ .  $f(a) * f(a^{-1}) = f(0) = 0 \Rightarrow f(a) = f(a^{-1})^{-1} \Rightarrow f(A) \subset F(B)$ . Значит можно смотреть на  $f$  как на гомоморфизм групп. В обратную сторону тоже верно. Значит  $Hom(U(A), B) \simeq Hom(A, F(B))$ , где гомоморфизмы переходят в себя же.

6. Пусть **rGraph** – категорий рефлексивных графов. Объекты этой категории – это графы, в которых для каждой вершины  $x$  выбрана петля  $id_x$  в этой вершине. Морфизмы – морфизмы графов, сохраняющие тождественные петли.

Категория графов в данном упражнении не будет работать, но вместо **rGraph** можно взять категорию малых группоидов или категорию малых категорий; решение при этом не изменится.

Докажите, что у функтора  $\Gamma : \mathbf{rGraph} \rightarrow \mathbf{Set}$ , сопоставляющего каждому рефлексивному графу множество его вершин, существует правый сопряженный  $C : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{rGraph}$  и левый сопряженный  $D : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{rGraph}$ , и у  $D$  существует левый сопряженный  $\Pi_0 : \mathbf{rGraph} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Таким образом, мы получаем следующую цепочку сопряженных функторов:

$$\Pi_0 \dashv D \dashv \Gamma \dashv C$$

7. Докажите, что категории **Fam** <sub>$I$</sub>  и **Set**/ $I$  эквивалентны.

Пусть  $f, g : I \rightarrow \mathbf{Set}$  – объекты **Fam** <sub>$I$</sub> ,  $\mathfrak{f} \in Hom(f, g)$ .

Определим  $F$ :

$F(f) = (A, fst)$ , где  $A = \{(i, f(i)) \mid i \in I\}$

$F(\mathfrak{f}) = \lambda(A, fst). (B, fst) : F(f) \rightarrow F(g)$ , где

$B = \{(i, \mathfrak{f} \ i \ f_i) \mid (i, f_i) \in A\}$

(если смотреть на  $\mathfrak{f}$  как на функцию  $\prod_{i \in I} f \ i \rightarrow g \ i$ )

Коммутативность диаграммы  $(fst = fst \circ F(\mathfrak{f}))$  очевидна.

Очевидно, что  $F(id) = id$ .

Если  $\mathfrak{g} \in Hom(g, h)$ , то  $F(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) = F(\mathfrak{g}) \circ F(\mathfrak{f})$ , так как  $\mathfrak{g} \ i \ (\mathfrak{f} \ i \ (f \ i)) = (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}) \ i \ (f \ i)$ .

Таким образом,  $F$  – функтор.

$Hom(f, g) \simeq Hom(F(f), F(g))$ , так как  $Hom(F(f), F(g))$  – множество функций, которые сохраняют первый элемент пары (так как диаграмма из определения **Set**/ $I$  коммутрует), а значит оно эквивалентно семейству функций  $f \ i \rightarrow g \ i$ .

Получается, что  $F$  полный и строгий. Осталось проверить существенную сюръективность.

Пусть  $w : (A, f : A \rightarrow I)$ ,  $A \in \mathbf{Set}$ .

Возьмем  $g = f^{-1} : I \rightarrow A$ , который по индексу возвращает множество

прообразов.

$F(g) = (B, fst)$ , где  $B = \{(i, f^{-1}(i)) \mid i \in I\}$

Так как  $B \simeq A$ , то по  $fst^{B \rightarrow I}$  можно построить  $f^{A \rightarrow I}$  и наоборот, а значит  $F(g) \simeq w$ . То есть для  $F$  существенно сюръективна.

Значит  $F$  – экви.

8. Пусть  $\mathbf{C}$  – декартова категория. Если  $A$  – объект  $\mathbf{C}$ , то мы можем определить функтор  $A^* : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/A$  как  $A^*(B) = (A \times B, \pi_1)$  и  $A^*(f) = \text{id}_A \times f$ .

- (а) Докажите, что у  $A^*$  есть левый сопряженный.

Возьмем  $(X, f) \in \mathbf{C}/A$ ,  $Y \in \mathbf{C}$ .

$\text{Hom}((X, f), A^*(Y))$  состоит из функций  $\langle h_1, h_2 \rangle : X \rightarrow A \times Y$  таких, что  $\pi_1 \circ \langle h_1, h_2 \rangle = f$ . То есть  $h_1 = f$ , а  $h_2 : X \rightarrow Y$  – произвольная

Значит  $\text{Hom}((X, f), A^*(Y)) \simeq \text{Hom}(X, Y)$ .

Тогда можно определить забывающий функтор  $F((X, f)) = X$ , который будет левым сопряженным. (морфизмы  $X \rightarrow Y$  переводятся в себя же).

- (b) Докажите, что если  $\mathbf{C}$  декартово замкнута и в  $\mathbf{C}$  есть уравниватели, то у  $A^*$  есть правый сопряженный.