

Задания

24 марта 2021 г.

1. Пусть **C** – категория предпорядка, а **D** – нет.
 - (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
 - (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
2. Пусть **C** – категория с одним объектом, а **D** – нет.
 - (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
 - (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
3. Пусть **C** – дискретная категория, а **D** – нет.
 - (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
 - (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
4. Пусть **C** – группоид, а **D** – нет.
 - (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
 - (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
5. Докажите, что **Num** эквивалентна **FinSet**. Изоморфны ли эти категории?

Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Num} \rightarrow \mathbf{FinSet}$

$$F(n) = \{1, 2, \dots, n\} =: A_n$$

$$F((a_1, \dots, a_n)) = \lambda x. \text{ case } x \text{ of } \{i \Rightarrow a_i\} : A_n \rightarrow A_k$$

Так как $|Hom_{\mathbf{Num}}(n, k)| = k^n = |Hom_{\mathbf{FinSet}}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, k\})|$ и $F : Hom_{\mathbf{Num}}(n, k) \rightarrow Hom_{\mathbf{FinSet}}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, k\})$ — инъекция, то F — сюръекция. Значит F строгий и полный.

$\forall S \in \mathbf{Set} \exists A_{|S|} \simeq S$, так как равномощные множества изоморфны. Значит $\forall F(|S|) \simeq S$. F существенно сюръективен. Получается, что F — экви.

FinSet не изоморфен **Num**, так как первый состоит из континуального множества объектов, а второй — из счетного.

6. Докажите, что \mathbf{Mat} эквивалентна \mathbf{Mat}^{op} . Изоморфны ли эти категории?

7. Докажите, что \mathbf{FinSet} не эквивалентна \mathbf{Set} .

Пусть $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{FinSet}$ — экви.

Тогда $|Hom_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, \{0\})| = |Hom_{\mathbf{FinSet}}(F(\mathbb{N}), F(\{0\}))| < \infty$, что неверно.

8. Пусть $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ — пара функторов. Естественное преобразование $\alpha : F \rightarrow G$ называется *естественным изоморфизмом*, если для любого объекта X в \mathbf{C} морфизм $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$ является изоморфизмом. Докажите, что $\alpha : F \rightarrow G$ — естественный изоморфизм тогда и только тогда, когда α — изоморфизм в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightleftharpoons[\beta_X]{\alpha_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightleftharpoons[\beta_Y]{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

Если $\forall X : \alpha_X$ — изо, то возьмем $\beta_X := \alpha_X^{-1}$. Для такого β диаграмма выше коммутует, значит β — естественное преобразование. Кроме того, $(\alpha \circ \beta)_X = \alpha_X \circ \beta_X = id_{G(X)}$, а $(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X = id_{F(X)}$. Значит $\beta = \alpha^{-1}$ в $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Если $\beta = \alpha^{-1}$ в $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, то $(\alpha \circ \beta)_X = \alpha_X \circ \beta_X = id_{G(X)}$ (и симметрично с другой стороны). Значит $\forall X : \beta_X = \alpha_X^{-1}$, то есть $\forall X : \alpha_X$ — изо.

9. Пусть \mathbf{C} — декартова категория. Докажите, что функтор $- \times 1$ изоморфен тождественному функтору в $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} X \times 1 & \xrightleftharpoons[\langle id, ! \rangle]{\pi_1} & X \\ \langle f, ! \rangle \downarrow & & \downarrow \langle f, ! \rangle \\ Y \times 1 & \xrightleftharpoons[\langle id, ! \rangle]{\pi_1} & Y \end{array}$$

Поскольку диаграмма выше коммутует, то $\pi_1 : - \times 1 \rightarrow id$ и $\langle id, ! \rangle$ — естественные преобразования, причем взаимно обратные. То есть π_1 — изоморфизм этих функторов.

10. Пусть \Rightarrow – категория, состоящая из двух объектов $\{v, e\}$ и четырех морфизмов $\{id_v : v \rightarrow v, id_e : e \rightarrow e, d : v \rightarrow e, c : v \rightarrow e\}$. Докажите, что категории **Graph** (эта категория определяется в предыдущем ДЗ) и $\mathbf{Set}^{\Rightarrow^{op}}$ эквивалентны. Изоморфны ли эти категории?

Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Graph} \rightarrow \mathbf{Set}^{\Rightarrow^{op}}$.

$F((V, E)) = g$, где g – функтор $\Rightarrow^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ определенный следующим образом:

$$\begin{aligned} g(v) &:= V \\ g(e) &:= \{(x, y, e) \mid x, y \in V, e \in E(x, y)\} \\ g(c^{op}) &:= \pi_1 \\ g(d^{op}) &:= \pi_2 \\ g(id) &:= id \end{aligned}$$

Далее $g(e)$ буду обозначать как (x, y, Exy)

Пусть (f_V, f_E) – морфизм графов. Тогда должно быть $F((f_V, f_E)) = \alpha$, где α – какое-то Е.П. функторов $\Rightarrow^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Пусть $\alpha_v = f_V$, $\alpha_e = \langle f_V, f_V, f_E \rangle$. Докажем, что α – Е.П. Пусть $F((V, E)) = g_1$, $F((f_V(V), f_E(E))) = g_2$ тогда $\alpha : g_1 \rightarrow g_2$. Так как в \Rightarrow^{op} все стрелки направлены от e к v , достаточно рассмотреть диаграмму

$$\begin{array}{ccc} g_1(e) & \xrightarrow{\langle f_V, f_V, f_E \rangle} & g_2(e) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ g_1(v) & \xrightarrow{f_V} & g_2(v) \end{array}$$

Или точнее

$$\begin{array}{ccc} (x, y, Exy) & \xrightarrow{\langle f_V, f_V, f_E \rangle} & (f_V(x), f_V(y), f_E(Exy)) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ V & \xrightarrow{f_V} & f_V(V) \end{array}$$

Так как данная диаграмма коммутует для $\pi_{[1,2]}$, α – Е.П.

Кроме того, если применить F к композиции морфизмов $(f_V^1, f_E^1) \circ (f_V^2, f_E^2) = (f_V^1 \circ f_V^2, f_E^1 \circ f_E^2)$, то полученное естественное преобразование будет в точности композицией естественных преобразований (нужно просто к диаграмме выше добавить еще один квадрат справа). То есть $F(x \circ y) = F(x) \circ F(y)$. Значит F – корректный функтор.

Очевидно, что есть биекция между парой (f_V, f_E) и парой (α_v, α_e) . Значит $\text{Hom}(X, Y) \simeq \text{Hom}(F(X), F(Y))$. То есть F – строгий и полный.

Пусть $f : \rightrightarrows^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ – некоторый функтор. Возьмем граф (V, E) , где $V = f(v)$
 $E(x, y) = \{e \mid e \in f(e), f(c^{op})(e) = x, f(d^{op})(e) = y\}$

Тогда $F((V, E))$ будет равен g
 $g(v) := V = f(v)$
 $g(e) := \{(f(c^{op})(e), f(d^{op})(e), e) \mid e \in f(e)\}$
 $g(c^{op}) := \pi_1$
 $g(d^{op}) := \pi_2$
 $g(id) := id$

Рассмотрим пару естественных преобразований α, β , где $\alpha_v = \beta_v = id$, $\alpha_e = \langle f(c^{op}), f(d^{op}), id \rangle$, $\beta_e = \pi_3$. Так как $\alpha_v \circ \beta_v = id$, $\beta_v \circ \alpha_v = id$, $\alpha_e \circ \beta_e = id$, $\beta_e \circ \alpha_e = id$, данные преобразования являются изоморфизмами. То есть $F((V, E)) \simeq f$. Значит F существенно сюръективен.

Таким образом, F — экви.

Про изоморфность надо еще подумать.

11. Пусть \mathbf{D} – рефлексивная подкатегория \mathbf{C} .

(а) Докажите, что рефлексор $\text{Ob}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{D})$ является функтором
 $R : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.

Определим действие R на морфизмах. Пусть $f : X \rightarrow Y$. Тогда $R(f) = f'$ из диаграммы ниже.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ R(X) & \xrightarrow{\exists! f'} & R(Y) \end{array}$$

$R(id) = id :$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id} & X \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_X \\ R(X) & \xrightarrow{\exists! h = id} & R(X) \end{array}$$

$R(f \circ g) = R(f) \circ R(g) :$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y & & \downarrow \eta_Z \\ R(X) & \xrightarrow{\exists! g'} & R(Y) & \xrightarrow{\exists! f'} & R(Z) \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\exists! h}$

- (b) Докажите, что η является естественным преобразованием между $\text{Id}_{\mathbf{C}}$ и $i \circ R$, где $i : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ – функтор вложения.

Следующая диаграмма коммутует и является определением для Е.П между $\text{Id}_{\mathbf{C}}$ и $i \circ R$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i \circ \eta_X} & i(R(X)) \\ f \downarrow & & \downarrow \exists! h = (i \circ R)(f) \\ Y & \xrightarrow{i \circ \eta_Y} & i(R(Y)) \end{array}$$

12. Пусть $F : \mathbf{CMon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ – рефлексор вложения $i : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{CMon}$.

- (a) Приведите пример конечного нетривиального коммутативного моноида X , такого что $|F(X)| = |X|$.

Можно взять любую нетривиальную абелеву группу (ее вложение в \mathbf{CMon}).

- (b) Приведите пример конечного коммутативного моноида X , такого что $|F(X)| < |X|$.

Рассмотрим моноид $M = \{0, 1\}$ с операцией \max .

Докажем, что $F(M) = \{0\}$. Пусть $f : M \rightarrow G$.

Тогда $f(0) = 0$, $f(1) = f(1 \max 1) = f(1) * f(1)$

$0 = f(0) = f(1) * f(1)^{-1} = f(1) * f(1) * f(1)^{-1} = f(1)$.

То есть $f(M) = \{0\}$. Тогда единственный существующий гомоморфизм $F(M) \rightarrow G$ заставит коммутировать диаграмму из определения рефлексора.

$$|M| = 2, |F(M)| = 1$$

- (c) Приведите пример коммутативного моноида X , такого что $\eta_X : X \rightarrow i(F(X))$ – не сюръективна.

$$X = (\mathbb{N}, +)$$

$$F(X) = (\mathbb{Z}, +)$$

$$i(F(X)) = (\mathbb{Z}, +)$$

$$\eta_X(x) = x \text{ – не сюръекция}$$

- (d) Докажите, что для любого конечного коммутативного моноида X функция $\eta_X : X \rightarrow i(F(X))$ является сюръективной. В частности $|F(X)| \leq |X|$.

Пусть дан некоторый коммутативный моноид M . Возьмем группу Гротендика $G(M)$, соответствующую этому моноиду.

(нашел вот тут https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_group, решил не переписывать определение).

Докажем, что $M \rightarrow i(G(M))$ – сюръекция.

Пусть $(a, b) \in G(M)$.

Если $\exists b^{-1}$, то $(a, b) \sim (a * b^{-1}, 0) = G(a * b^{-1})$.

Если это не так, то, поскольку моноид конечный, $\exists n, m \in \mathbb{N}, n > m : b^n = b^m$. Тогда $(a, b) \sim (a * b^{m+1}, b^{m+1}) = (a * b^{n+1}, b^{m+1}) = (a * b^{m+1} * b^{n-m}, b^{m+1}) \sim (a * b^{n-m}, 0) = G(a * b^{n-m})$.

Таким образом, $i \circ G$ — сюръекция, а значит η_X — сюръекция, так как F изоморфен G .