

# Задания

23 апреля 2021 г.

1. Докажите, что если мы добавим в лямбда исчисление тип натуральных чисел  $\mathbb{N}$  с термами и аксиомами, приведенными ниже, то такое лямбда исчисление можно проинтерпретировать в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \mathbb{N}} \quad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{suc}(n) : \mathbb{N}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{rec}(z, s, n) : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D}{\Gamma \vdash \text{rec}(z, s, \text{zero}) \equiv z : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{rec}(z, s, \text{suc}(n)) \equiv s[x := n, r := \text{rec}(z, s, n)] : D}$$

2. Определите структуру монады на функторе  $\text{Term}_\Sigma$  для любой сигнатуры  $\Sigma$ .

$\eta = id' : 1 \rightarrow T$  — естественное преобразование, которое возвращает функтор, переводящий переменную в терм из одной переменной

$\mu = id'' : T \circ T \rightarrow T$  — естественное преобразование, которое интерпретирует терм с переменными-термами как один терм

Поскольку  $\mu, \eta$  не влияют на структуру терма, диаграммы из определения монады для них коммутируют

3. Определите регулярную теорию, моделями которой являются малые категории.

$$\mathcal{S} = \{a, h\}$$

$$\mathcal{F} = \{src : h \rightarrow a, dst : h \rightarrow a, id : a \rightarrow h\}$$

$$\mathcal{P} = \{comp : h \times h \times h\}$$

$$\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$$

$$\mathcal{A} :$$

$$comp(f, g, t) \vdash^{f, g, t : h} src\ f = dst\ g \ \wedge \ dst\ f = dst\ t \ \wedge \ src\ g = src\ t$$

$$src\ f = dst\ g \vdash^{f, g : h} \exists(t : h) comp(f, g, t)$$

$$comp(f, g, t_1) \wedge comp(f, g, t_2) \vdash^{f, g, t_1, t_2 : h} t_1 = t_2$$

$$comp(f, g, t_1) \wedge comp(t_1, r, w_1) \wedge \\ \wedge comp(g, r, t_2) \wedge comp(f, t_2, w_2) \vdash^{f, g, r, t_1, t_2, w_1, w_2 : h} w_1 = w_2$$

$$\top \vdash^{x : a} src\ (id\ x) = x \ \wedge \ dst\ (id\ x) = x$$

$$comp(f, id\ x, g) \vdash^{x : a, f, g : h} f = g$$

$$comp(id\ x, f, g) \vdash^{x : a, f, g : h} f = g$$

$$\mathcal{T} = \{\Sigma, \mathcal{A}\} - \text{регулярная теория}$$

4. Опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства в **Set**.

$$\llbracket a \rightarrow b \rrbracket = \llbracket \neg a \vee b \rrbracket$$

$$\llbracket a = b \rrbracket = \llbracket (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \rrbracket$$

$$\llbracket \forall a\ \phi(a) \rrbracket = \bigcap_a \llbracket \phi(a) \rrbracket$$

$$\llbracket \exists a\ \phi(a) \rrbracket = \llbracket \neg(\forall a\ \neg\phi(a)) \rrbracket$$

5. Докажите корректность следующего правила вывода

$$\frac{\varphi \vdash^V a = b \quad \varphi \vdash^V \psi[x := a]}{\varphi \vdash^V \psi[x := b]}$$