

# Задания

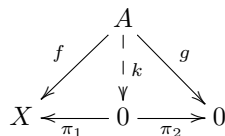
28 февраля 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
  - (a) Начальные объекты.
  - (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:
  - (a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.
  - (b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.
3. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:
  - (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.
  - (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.
4. Докажите, что если  $A \amalg B$  существует, то  $B \amalg A$  тоже существует и изоморфен  $A \amalg B$ .
5. Начальный объект  $0$  произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида  $X \rightarrow 0$  является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

Докажите, что в произвольной категории начальный объект  $0$  является строгим тогда и только тогда, когда для любого  $X$  произведение  $X \times 0$  существует и  $X \times 0 \simeq 0$ .

$\Rightarrow$ ) 0 – строгий.

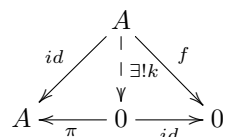
Рассмотрим диаграмму



Так как 0 строгий, то  $g, \pi_2$  – изо. Значит  $\exists k = \pi_2^{-1} \circ g$ . Так как  $k$  – изо, а 0 начальный, то  $k^{-1}$  – уникальный. Значит  $k$  – уникальный. Так как 0 – начальный объект, то  $\pi_1$  – уникальный, а значит  $\pi_1 \circ k$  – уникальный. Значит  $f = \pi_1 \circ k$ . Таким образом, вся диаграмма коммутует и  $k$  – уникальный.

$\Leftrightarrow$ )  $X \times 0 \simeq 0$ .

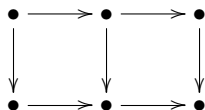
Пусть  $f : A \rightarrow 0$ . Рассмотрим  $A \times 0$



$$f = k \wedge \pi \circ k = id \Rightarrow \pi \circ f = id$$

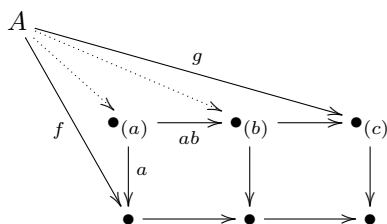
$f \circ \pi = id$ , так как это стрелка из начального объекта.

6. Пусть в диаграмме вида



правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

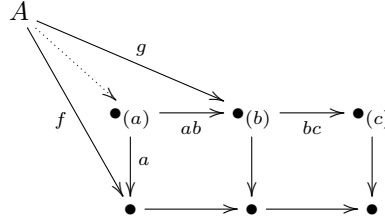
$\Rightarrow$ ) Левый квадрат – пулбэк.



Пусть есть  $A, f, g$ . Так как правый квадрат – пулбэк, то  $\exists! h : A \rightarrow \bullet_{(b)}$  такой, что диаграмма коммутует. Так как левый квадрат

является пулбэком, то  $\exists! k : A \rightarrow \bullet_{(a)}$  такой, что левая половина диаграммы коммутует. Если существует  $k' : A \rightarrow \bullet_{(a)}$ , при котором коммутативен подграф, состоящий из него, внешнего прямоугольника и  $f, g$ . Но тогда  $ab \circ k' = h$ , так как  $h$  — единственный, для которого соответствующий подграф коммутативен. Но раз так, то  $k = k'$ , так как с  $k', a, f$  коммутует левый пулбэк. Получается, что для  $\forall f, g \exists! k$  такой, что внешний прямоугольник коммутует, значит прямоугольник — пулбэк.

$\Leftrightarrow$ ) Внешний прямоугольник — пулбэк.

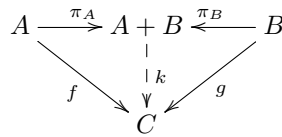


Пусть есть  $f, g$ , с которыми левый квадрат коммутативен. Тогда и вся диаграмма коммутативна, а значит  $\exists! k : A \rightarrow \bullet_{(a)}$ , для которого внешний прямоугольник коммутативен. Так как правый квадрат — пулбэк, то  $g$  — единственный, для которого вся диаграмма коммутует. Значит  $ab \circ k = g$ . Но тогда с  $k$  коммутует и левый квадрат. Пусть  $\exists k'$ , обладающий теми же свойствами, что и  $k$ . Но тогда  $bc \circ ab \circ k' = f$  подставим в определение для пулбэка для внешнего прямоугольника и получим, что  $k = k'$ .

7. Пусть  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$  — морфизмы в некоторой категории, а  $D \hookrightarrow C$  — некоторый подобъект  $C$ . Докажите, что  $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$ .

Пусть  $h$  — вложение  $D \rightarrow C$ . Нужно доказать, что  $(g \circ f)^{-1} \circ h = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h$ . Так как  $h$  — моно, это верно.

8. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.



$$A + B = (A \times e_B \cup e_A \times B, \langle *_{A}, *_{B} \rangle)$$

$$\pi_A(a) = (a, e_B), \quad \pi_B(b) = (e_A, b)$$

$$\forall f : A \rightarrow C, \forall g : B \rightarrow C :$$

$$k((a, b)) := f(a) *_{C} g(b) \quad : \quad A + B \rightarrow C$$

Единственность:

Пусть  $\exists k' : A + B \rightarrow C$ .

$$k' \circ \pi_B = g$$

Любая функция  $A + B \rightarrow C$  будет иметь вид  $(a, b) \mapsto f'(a) * g'(b)$  для некоторых  $f, g$ .

$$\text{Тогда } \forall b \in B : \quad g(b) = (k' \circ \pi_B)(b) = k'((e_A, b)) = f'(e_A) * g'(b) = g'(b) \Rightarrow g = g'.$$

Аналогично  $f = f'$ . Значит  $k = k'$ .

9. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех  $A$  и  $B$  существуют сумма и произведение и  $A \amalg B \simeq A \times B$ .

Категория предпордка, в которой  $\leq$  есть отношение эквивалентности.

10. Идемпотентный морфизм  $h : B \rightarrow B$  является расщепленным, если существуют  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$  такие, что  $g \circ f = id_A$  и  $f \circ g = h$ . Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.

11. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэк, то в ней существуют все конечные пределы.

12. Пусть  $J = (V, E)$  – некоторый граф,  $D$  – диграмма формы  $J$  в категории  $\mathbf{C}$ , и  $A$  – конус диаграммы  $D$ . Мы будем говорить, что конус  $A$  является *слабым пределом*, если для него выполняется уникальность, но не обязательно существование стрелки из определения предела. Обратите внимание, что слабые пределы не обязательно уникальны. Например, любой пулбэк  $A \times_C B$  – это слабый предел дискретной диаграммы, состоящей из объектов  $A$  и  $B$ .

Докажите, что если для некоторой диаграммы существует предел  $L$ , то некоторый конус является слабым пределом тогда и только тогда, когда он является подобъектом  $L$ .