# Задания

9 апреля 2021 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.

2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если $a$, $b$ – объекты $\mathbf{C}$ такие, что $b^a$ существует, то $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$ тоже существует и определяется как $\mathbf{y}(b^a)$.

3. Докажите, что коллекция объектов вида $\mathbf{y}a$ является генератором для категории предпучков.

4. Определите категорию $\mathbf{C}$, такую что $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ эквивалентна категори рефлексивных графов.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop left, "id"] \arrow[r, bend left, "src"] \arrow[r, bend right, "dst"'] & E \arrow[l, "i"] \arrow[loop above, "l"] \arrow[loop below, "r"] \arrow[loop right, "id"] \end{tikzcd}$$

$G_E$ – ребра, $G_V$ – вершины.
$dst, src:\ G_E \to G_V$
$i:\ G_V \to G_E$
$dst \circ i = id$
$src \circ i = id$
$i \circ dst = r$
$i \circ src = l$
$src \circ l = src$
$dst \circ l = src$
$dst \circ r = dst$
$src \circ r = dst$
$l \circ i = i$
$r \circ i = i$

5. Докажите, что функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{D}$ является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.

6. Докажите, что функтор $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ является свободным копополнением $\mathbf{C}$, то есть, что для любой кополной категории $\mathbf{D}$ и любого функтора

$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ существует уникальный (с точностью до изоморфизма) функтор $\widetilde{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{D}$, сохраняющий копределы, и такой, что следующая диаграмма коммутирует (с точностью до изоморфизма функторов):

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathbf{y}"'] & \mathbf{D} \\
\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"'] &
\end{tikzcd}$$