Задания

10 марта 2021 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?

2. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.

   Пусть объекты — логические формулы (в какой-нибудь логике). Определим $x \leq y$ как выполнение x влечет выполнение y, а произведение как конъюнкцию. Тогда $\forall X, Y : \quad X^Y = XYtoX$, где "$\to$" есть импликация. $ev = X^Y \times Y \leq X$. Если $X^Y \times Y$ выполнимо, то X выполнимо по Modus ponens. Кроме того, если $\Gamma \wedge A \to B$, то $\Gamma \to (A \to B)$. Он единственный по построению, а значит экспонента определена верно.

3. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.

   (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.

   (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).

   (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

   Решение

   (c) Во всех этих категориях есть объект, состоящий из одного нейтрального элемента. Он и будет нулевым. Так как нейтральный должен переходить в нейтральный, то отображение из него в другие объекты единственно. Обратное тоже верно — все отображается в 0. Очевидно, что 0 не строгий, так как ядро у композиции отображений между 0 и некоторым объектом будет совпадать с тем объектом. Значит эти категории не декартово замкнуты.

4. Пусть в категории $\mathbf{C}$ есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в $\mathbf{C}$ морфизмы $\mathrm{and}, \mathrm{or} : \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{true},\mathrm{true} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{true},\mathrm{true} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{true},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{true},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{true} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{true} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

5. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

   Пусть $\mathbf{C}$ – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) $\mathbf{C}$ – категория предпорядка.

   (b) В $\mathbf{C}$ терминальный объект является булевским.

   (c) В $\mathbf{C}$ существует булевский объект, такой что $\mathrm{true} = \mathrm{false}$.

   Решение

$a \Rightarrow b$) Так как в категории предпорядка морфизм между двумя объектами единственный, то можно взять $Bool = 1, true = false = id$. Тогда $\forall f, g : A \to B \;\; \exists h = f \circ \pi_2$

$b \Rightarrow c$) В терминальный объект существует только одна стрелка

$c \Rightarrow a$) В определении Bool $\langle true \circ !, id \rangle = \langle false \circ !, id \rangle$. Значит для любых

6. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории $\mathbf{C}$ выполнены следующие утверждения:

(a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.
Пусть есть стрелка $f : A \times 1 \to B$. Тогда всегда существует уникальная стрелка $A \times 1 \to B \times 1$ — $\langle f, id\rangle$ такая, что $\pi_1 \circ \langle f, id\rangle = f$. Значит пара (B, π_1) является эспонентой B^1 (по определению экспоненты). То есть $B^1 \simeq B$

(b) Для любых объектов A, B и C существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$.
Определим $ev : (A^B)^C \times (B \times C) \to A$ следующим образом:
$(A^B)^C \times (B \times C) \to_{iso} ((A^B)^C \times C) \times B \to_{\langle ev_1, id\rangle} A^B \times B \to_{ev_2} A$
Если $f : \Gamma \times (B \times C) \to A$, то $\exists! g : \Gamma \times C \to A^B$, который коммутирует с ev_2. Значит $\exists! h : \Gamma \to (A^B)^C$, который коммутирует с ev_1. Из построению ev следует, что h — единственный, который коммутирует с ev.
По универсальному свойству $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$

(c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов A, B и C морфизм

$$[\langle \pi_1, \mathrm{inj}_1 \circ \pi_2\rangle, \langle \pi_1, \mathrm{inj}_2 \circ \pi_2\rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \to A \times (B \amalg C)$$

является изоморфизмом, где $\mathrm{inj}_1 : B \to B \amalg C$ и $\mathrm{inj}_2 : C \to B \amalg C$ – канонические морфизмы копроизведения, и если $f : B \to X$, $g : C \to X$, то $[f, g] : B \amalg C \to X$ – уникальный морфизм, удовлетворяющий $[f, g] \circ \mathrm{inj}_1 = f$ и $[f, g] \circ \mathrm{inj}_2$.

(d) Если в $\mathbf{C}$ существует начальный объект 0, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.
$\forall X : Hom(X, A^0) \simeq Hom(X \times 0, A) \simeq Hom(0, A) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall X |Hom(X, A^0)| = 1 \Rightarrow A^0 = 1$

(e) Если в $\mathbf{C}$ существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.

Определим $ev : (A^B \times A^C) \times (B \amalg C) \to A$ следующим образом:
$(A^B \times A^C) \times (B \amalg C) \to_{iso} (A^B \times A^C \times B) \amalg (A^B \times A^C \times C) \to$
$\to_{[inj_1 \circ \pi_{1,3}, inj_2 \circ \pi_{2,3}]} (A^B \times B) \amalg (A^C \times C) \to_{[ev_1, ev_2]} A \amalg A \to_{[id, id]} A$
Пусть $f : \Gamma \times (B \amalg C) \to A$. Тогда существует изоморфная пара морфизмов $g_1 : Gamma \times B \to A$, $g_2 : \Gamma \times C \to A$ (которые получаются композицией с inj_1, inj_2). Для g_1, g_2 существует единственная пара морфизвом $\Gamma \to A^B$ и $\Gamma \to A^C$ такая, что первый коммутирует с ev_1, а второй — с ev_2 (точнее не сами морфизмы, а $\langle \cdot, id\rangle$). Тогда существует единственный морфизм $h : \Gamma \to (A^C \times A^B)$, что $\langle h, id\rangle$ коммутирует с ev.
По универсальному свойству $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$

7. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.

$2 \times A = (1 \amalg 1) \times A \simeq (1 \times A) \amalg (1 \times A) \simeq A \amalg A$
Тогда в определении для Bool можно взять стрелку из определения копроизведения f, g. Она будет уникальной по универсальному свойству копроизведения.

8. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

$$K : A \to A^B$$
$$S : (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

- $\exists \pi_1 : A \times B \to A \Rightarrow \exists ! K : A \to A^B$
- Есть стрелка $ev_1 : B^A \times A \to B$
Есть стрелка $ev_2 : (C^B)^A \times A \to C^B$
Есть стрелка $ev_3 : C^B \times B \to C$
Значит есть стрелка $(C^B)^A \times B^A \times A \to C$
Ее можно построить так: $(C^B)^A \times B^A \times A \to (C^B)^A \times B^A \times A \times A \to$
$\to ((C^B)^A \times A) \times (B^A \times A) \to C^B \times B \to C$
(так как категория декартова, все переходу существуют)
Тогда существует уникальная стрелка $(C^B)^A \times B^A \to C^A$
Тогда существует уникальная стрелка $(C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "zero"] \arrow[dr, "\langle zero, zero \rangle"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "suc"] \arrow[d, "\exists ! h"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\exists ! h"] \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \pi_2, suc \circ \pi_2 \rangle"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Тогда h имеет вид $\langle f, id \rangle$. $\langle f \circ suc, suc \rangle = \langle id, suc \rangle$
Получается, что $f \circ suc = id$

10. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что zero $=$ suc(x). В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

   (a) $\mathbf{C}$ – категория предпорядка.

   (b) В $\mathbf{C}$ терминальный объект является объектом натуральных чисел.

(c) В **C** существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

(d) В **C** существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

11. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все малые копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.

    Положим $\mathbb{N} = \amalg_i 1_i$, $zero = inj_1$. suc — уникальная стрелка такая, что $suc \circ inj_i = inj_{i+1}$.
    Пусть есть $f : 1 \to A,\quad g : A \to A$. Тогда положим $f_0 = f, f_{i+1} = g \circ f_i$ и возьмем уникальную стрелку $t : \mathbb{N} \to A$ из определения копроизведения ($t \circ inj_{i-1} = f_i$). Тогда диаграмма для $\mathbb{N}$ коммутирует.
    Пусть есть другая стрелка h. Тогда $h \circ zero = f_0, \quad h \circ inj_{i+1} = h \circ s \circ inj_i = g \circ h \circ inj_i = g \circ f_i = f_{i+1} = t \circ inj_{n+1}$
    Получается, что $\forall i : h \circ inj_{n+1} = t \circ inj_{n+1}$. Так как t — стрелка из определения копроизведения, то отсюда следует, что $h = t$.

12. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "\langle \mathrm{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"] & \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\mathrm{suc} \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathrm{suc}"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

    Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "+ \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times +"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rr, "+"'] & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$