Задания

29 марта 2021 г.

1. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

   Пусть $U : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

   (a) Если U является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.

   Пусть $f : X \to Y$ – моно. Пусть в следующей диаграмме $U(f) \circ g = U(f) \circ h$.

   $$A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$$

   $\phi^{-1}(U(f) \circ g) = \phi^{-1}(U(f) \circ h)$
   $f \circ \phi^{-1}(g) = f \circ \phi^{-1}(h) \Rightarrow \phi^{-1}(g) = \phi^{-1}(h) \Rightarrow f = g$

   (b) Если U является строгим, то обратное верно, то есть если $U(f)$ – мономорфизм, то f также является мономорфизмом.

   $$A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

   $f \circ g = f \circ h,\ U$ строгий $\Rightarrow U(f \circ g) = U(f \circ h) \Rightarrow U(f) \circ U(g) = U(f) \circ U(h) \Rightarrow U(g) = U(h) \Rightarrow \phi^{-1}(U(g)) = \phi^{-1}(U(h)) \Rightarrow g = h$

2. Докажите, что у забывающего функтора $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$, сконструированного в 5 ДЗ, существует левый сопряженный.

   Построим левый обратный F.
   Пусть $F(\ (V, E)\ ) = C$, где
   $Ob(C) = V$
   $Hom(v_a, v_b) = \{[v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, ..., v_b] \mid v_i \in V\}$ — произвольные конечные пути (если $v_a = v_b$, то $[v_a] \in Hom(v_a, v_b)$ – нейтральный элемент)

$F_V(v) = v$
$F_E(e^{a \to b}) = [a, e^{a \to b}, b]$
Композиция морфизмов — композиция путей.

Покажем, что $Hom(A, U(B)) \simeq Hom(F(A), B)$.
Пусть $f \in Hom(A, U(B))$, тогда ему можно однозначно сопоставить $g \in Hom(F(A), B)$:
$g(V) = f(V)$
$g([v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, ..., v_b]) = f(E(v_a, v_1)) \circ f(E(v_1, v_2))...$
$g([v_a]) = [f(v_a)]$

3. Докажите, что левый сопряженный к некоторому функтору U уникален с точностью до изоморфизма, то есть если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то $F \simeq F'$.

   Пусть $\alpha_A = \epsilon_{F'A} \circ F\eta'_A, \quad \beta_A = \epsilon'_{FA} \circ F'\eta_A$

   Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F_{\eta'_A}"] \arrow[dd, bend right=60, dashed, "\alpha_A"'] & FGF(A) \arrow[d, "F\eta'_{GFA}"] \arrow[dr, "id"] & \\
FGF'(A) \arrow[r, "FGF'\eta_A"'] \arrow[d, "\epsilon_{F'A}"] & FGF'GF(A) \arrow[r, "FG\epsilon'_{FA}"'] \arrow[d, "\epsilon_{F'GFA}"] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{FA}"] \\
F'(A) \arrow[r, "F'\eta_A"'] \arrow[rr, bend right=30, dashed, "\beta_A"'] & F'GF(A) \arrow[r, "\epsilon'_{FA}"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

   Верхний квадрат коммутирует по натуральности η', два нижних – по натуральности ϵ. Правый верхний треугольник – так как $F' \dashv U$. Композиция стрелок $F(A) \to FGF(A) \to FGF(A) \to F(A)$ равна id, так как $F \dashv U$. Значит $\beta_A \circ \alpha_A = id$. Если построить симметричную диаграмму (меняем F, F'), то получится, что $\alpha_A \circ \beta_A = id$.
   То есть α — изоморфизм функторов F, F'.

4. Есть ли у забывающего функтора U : **Grp** $\to$ **Set** правый сопряженный? Докажите это.

5. Есть ли у забывающего функтора U : **Grp** $\to$ **Mon** правый сопряженный? Докажите это.

6. Пусть **rGraph** – категорий рефлексивных графов. Объекты этой категории – это графы, в которых для каждой вершины x выбрана петля id_x в этой вершине. Морфизмы – морфизмы графов, сохраняющие тождественные петли.

   Категория графов в данном упражнении не будет работать, но вместо **rGraph** можно взять категорию малых группоидов или категорию малых категорий; решение при этом не изменится.

Докажите, что у функтора $\Gamma : \mathbf{rGraph} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющего каждому рефлексивному графу множество его вершин, существует правый сопряженный $C : \mathbf{Set} \to \mathbf{rGraph}$ и левый сопряженный $D : \mathbf{Set} \to \mathbf{rGraph}$, и у D существует левый сопряженный $\Pi_0 : \mathbf{rGraph} \to \mathbf{Set}$. Таким образом, мы получаем следующую цепочку сопряженных функторов:

$$\Pi_0 \dashv D \dashv \Gamma \dashv C$$

7. Докажите, что категории $\mathbf{Fam}_I$ и $\mathbf{Set}/I$ эквивалентны.

8. Пусть $\mathbf{C}$ – декартовая категория. Если A – объект $\mathbf{C}$, то мы можем определить функтор $A^* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}/A$ как $A^*(B) = (A \times B, \pi_1)$ и $A^*(f) = \mathrm{id}_A \times f$.

   (a) Докажите, что у A^* есть левый сопряженный.

   (b) Докажите, что если $\mathbf{C}$ декартово замкнута и в $\mathbf{C}$ есть уравнители, то у A^* есть правый сопряженный.