Задания

16 марта 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Начальные объекты.
   (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:
   (a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.
   (b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.
3. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:
   (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.
   (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.
4. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
5. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \to 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

   Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.

⇒) 0 – строгий.
Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & 0 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как 0 строгий, то g, π_2 — изо. Значит $\exists k = \pi_2^{-1} \circ g$. Так как k — изо, а 0 начальный, то k^{-1} — уникальный. Значит k — уникальный. Так как 0 — начальный объект, то π_1 — уникальный, а значит $\pi_1 \circ k$ — уникальный. Значит $f = \pi_1 \circ k$. Таким образом, вся диаграмма коммутирует и k — уникальный.

⇔) $X \times 0 \simeq 0$.
Пусть $f : A \to 0$. Рассмотрим $A \times 0$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! k"] \arrow[dr, "f"] & \\
A & 0 \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "id"'] & 0
\end{tikzcd}$$

$f = k \quad \wedge \quad \pi \circ k = id \Rightarrow \pi \circ f = id$
$f \circ \pi = id$, так как это стрелка из начального объекта.

6. Пусть в диаграмме вида

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

⇒) Левый квадрат — пулбэк.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[ddr, "f"'] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted] \arrow[drrr, "g"] & & & \\
 & \bullet_{(a)} \arrow[r, "ab"'] \arrow[d, "a"] & \bullet_{(b)} \arrow[r] \arrow[d] & \bullet_{(c)} \arrow[d] \\
 & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Пусть есть A, f, g. Так как правый квадрат — пулбэк, то $\exists ! h : A \to \bullet_{(b)}$ такой, что диаграмма коммутирует. Так как левый квадрат является пулбэком, то $\exists! k : A \to \bullet_{(a)}$ такой, что левая половина диаграммы коммутирует. Если существует $k' : A \to \bullet_{(a)}$, при котором коммутативен подграф, состоящий из него, внешнего прямоугольника и f, g. Но тогда $ab \circ k' = h$, так как h — единственный, для которого соответстующий подграф коммутативен. Но раз так, то $k = k'$, так как с k', a, f коммутирует левый пулбэк. Получается, что для $\forall f, g\ \ \exists! k$ такой, что внешний прямоугольник коммутирует, значит прямоугольник — пулбэк.

$\Leftrightarrow$) Внешний прямоугольник— пулбэк.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "f"'] & & & \\
& \bullet_{(a)} \arrow[r, "ab"'] \arrow[d, "a"] & \bullet_{(b)} \arrow[r, "bc"'] \arrow[d] & \bullet_{(c)} \arrow[d] \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Пусть есть f, g, с которыми левый квадрат коммутативен. Тогда и вся диаграмма коммутативна, а значит $\exists! k : A \to \bullet_{(a)}$, для которого внешний прямоугольник коммутативен. Так как правый квадрат — пуллбэк, то g — единственный, для которого вся диаграмма коммутирует. Значит $ab \circ k = g$. Но тогда с k коммутирует и левый квадрат. Пусть $\exists k'$, обладающий теми же свойствами, что и k. Но тогда $bc \circ ab \circ k', f$ подставим в определение для пулбэка для внешнего прямоугольника и получим, что $k = k'$.

7. Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ – морфизмы в некоторой категории, а $D \hookrightarrow C$ – некоторый подобъект C. Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$.

   Построим $f^{-1}(g^{-1}(D))$.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(g^{-1}(D)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & g^{-1}(D) \arrow[r] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

   Так как оба квадрата есть пулбэки, то и внешний прямоугольник — пулбэк. Значит $(g \circ f)^{-1}(D)$ уникален (с точностью до изо).

8. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "k"] & B \arrow[l, "\pi_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

   $A + B = (A \times B, \langle *_A, *_B \rangle)$
   $\pi_A(a) = (a, e_B), \quad \pi_B(b) = (e_A, b)$
   $\forall f : A \to C, \forall g : B \to C :$
   $k((a, b)) := f(a) *_C g(b) \quad : \; A + B \to C$

   Единственность:
   Пусть $\exists k' : A + B \to C$.
   $k' \circ \pi_B = g$
   Любая функция $A + B \to C$ будет иметь вид $(a, b) \mapsto f'(a) * g'(b)$ для некоторых f, g.
   Тогда $\forall b \in B : \quad g(b) = (k' \circ \pi_B)(b) = k'((e_A, b)) = f'(e_A) * g'(b) = g'(b) \quad \Rightarrow g = g'$.
   Аналогично $f = f'$. Значит $k = k'$.

9. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.

   Категория **Ab**

10. Идемпотентный морфизм $h : B \to B$ является расщепленным, если существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.

    Как было показано ранее, если в категории есть уравнители, то идемпотентный морфизм расщеплен. Если в категории есть уравнители, то в C^{op} любой идемпотентный морфизм расщеплен. Так как

$Hom_{C^{op}}(X,Y)$ состоит из тех же элементов, что и $Hom(Y,X)$, то соответствующие f,g будут стрелками в исходной категории и для них будут выполняться необходимые свойства. Значит будет расщепленным.

11. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.

    Пусть есть какая-то диаграмма. Рассмотрим произвольную стрелку $f : A \to B$. Существует пулбэк

$$
\begin{tikzcd}
A \times_B B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "id"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

    Построим такие пулбэки для всех стрелок. Рассмотрим произвольную компоненту слабой связности. Пусть есть 2 смежные стрелки (направление значения не имеет).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
$$

    Рассмотрим также уже построенные для этих стрелок пулбэки

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times_B B \arrow[dl] \arrow[d] & B \times_C C \arrow[dl] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
$$

    Построим пулбэк для $A \times_B B, B, B \times_C C$

$$
\begin{tikzcd}
 & & ABC \arrow[dl] \arrow[d] \\
 & A \times_B B \arrow[dl] \arrow[d] & B \times_C C \arrow[dl] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
$$

    Таким образом, для каждой помпоненты слабой связности можно построить конус. Теперь объединим конусы для разных компонент с помощью следующего пулбэка

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C_1 \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dl] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

В результате получим конус C.
Докажем, что это если сузествует другой конус C' и стрелка $C' \to C$, то она единственна.
Возьмем случайный объект A. Рассмотрим произвольный пулбэк, в котором он содержится.

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[dr] \arrow[ddrrr] \arrow[dddrr] & & & \\
& C \arrow[dr] & & \\
& & A\times_? ? \arrow[r] \arrow[d] & ? \arrow[d] \\
& & A \arrow[r] & ?
\end{tikzcd}$$

Стрелка $C' \to C \to A\times_? ?$ заставляет коммутировать оба трекгольника и уникальна по определению пулбэка. Такие же условия можно написать для остальных объектов. Поскольку $C \to A\times_? ?$ для всех объектов фиксирован, то получаем, что существует единственная стрелка $C' \to C$, что все треугольники одновременно коммутируют.

Осталось показать, что для любого конуса стрелка $C' \to C$ существует. Рассмотрим произвольную стрелку (если есть) $A \to B$. Для нее есть пулбэк $A \times_B B$. Значит существует стрелка из конуса в объект пулбэка такая, что два треугольника (из определения пулбэка) коммутируют. Таким образом, существуют стреки во все пулбэки первого уровня (те, что непосредственно связаны с исходной диаграммой). На этих пулбэках были также построены пулбэки (второго уровня). Значит в ких тоже существуют стрелки. Таким образом, по индукции доходим до C.

Получили, что существует конус C такой, что для любого другого конуса есть единственная стрелка такая, что треугольники из определения предела коммутируют. Значит C есть предел.

12. Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, D – диграмма формы J в категории $\mathbf{C}$, и A – конус диаграммы D. Мы будем говорить, что конус A является *слабым пределом*, если для него выполняется уникальность, но не обязательно существование стрелки из определения предела. Обратите внимание, что слабые пределы не обязательно уникальны. Например, любой пулбэк $A \times_C B$ – это слабый предел дискретной диаграммы, состоящей из объектов A и B.

    Докажите, что если для некоторой диаграммы существует предел L, то некоторый конус является слабым пределом тогда и только тогда, когда он является подобъектом L.

⇐) Пусть $h : X \hookrightarrow L$. Скомпозируем эту стрелку со всеми стрелками L и получим конус. Пусть есть другой конус Y и существует морфизм $f : Y \to X$ такой, что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d, hook, "h"] \\ D(v) & L \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Так как L — предел, то $h \circ f$ — уникальный. Тогда если существует $f' : Y \to X$, для которого эта диаграмма тоже коммутирует, то $h \circ f = h \circ f'$. Так как h — моно, то $f = f'$. Значит X — слабый предел.

⇒) Пусть X — слабый предел. Рассмотрим $h : X \to L$. Пусть для некоторых $f, g : Y \to X$ выполняется $h \circ f = h \circ g$. Y является конусом, так как X является конусом. Кроме того, $f = g$, так как X — слабый прелел. Значит h — моно.