

Задания

23 марта 2021 г.

1. Пусть $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Какие из следующих утверждений верны? Как изменится ответ, если предположить, что F – эквивалентность категорий?

- (а) Если $f : X \rightarrow Y$ – мономорфизм в \mathbf{C} , то $F(f)$ – мономорфизм в \mathbf{D} .
(б) Если X – (ко)предел диаграммы $D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, то $F(X)$ – (ко)предел диаграммы $F \circ D : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$.

2. Пусть \mathbf{Cat} – категория малых категорий. Ее объекты – это малые категории. Морфизмы в категории \mathbf{Cat} – это функторы между категориями.

Пусть \mathbf{Graph} – категория графов. Ее объекты – графы, то есть пары (V, E) , состоящие из множества вершин V и функции E , сопоставляющей каждой паре вершин $x, y \in V$ множество $E(x, y)$ ребер из x в y .

Морфизм графов (V, E) и (U, D) состоит из функции $f : V \rightarrow U$ и функции $f : E(x, y) \rightarrow D(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in V$. Композиция и тождественные морфизмы определены очевидным образом.

Определите забывающий функтор из \mathbf{Cat} в \mathbf{Graph} . Докажите, что этот функтор строгий.

3. В лекции определялся функтор $I : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Grp}$ обратимых элементов моноида.

- (а) Является ли I строгим? Докажите это.

Рассмотрим два моноида: первый M_1 – моноид из строк над конечным алфавитом с операцией конкатенации; второй M_2 – $(\mathbb{Z}, +)$.

$I(M_1)$ – тривиальный моноид; $I(M_2) = M_2$.

Гомоморфизмы $f_1(s) = \text{length}(s)$, $f_2(s) = 2 \cdot \text{length}(s)$ отображаются в один и тот же (единственный) гомоморфизм $f(x) = 0$.

I не строгий.

(b) Является ли I полным? Докажите это.

Рассмотрим два моноида:

$$M_1 = (4\mathbb{Z} \cup \{-2\}, *)$$

$$M_2 = (4\mathbb{Z} \cup \{2\}, *)$$

$$I(M_1) = I(M_2) = (4\mathbb{Z}, *)$$

$$\text{Пусть } f(x) = x : I(M_1) \rightarrow I(M_2)$$

Пусть $g : M_1 \rightarrow M_2$ — прообраз f .

$$4 = g(4) = g(-2 * -2) = g(-2)^2 \Rightarrow g(-2) = 2$$

$$-8 = g(-8) = g(4 * -2) = g(4) * g(-2) = 8$$

Получили противоречие, значит g — не прообраз f . Значит у f нет прообраза, значит I не полный.

4. Докажите, что если $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ — некоторый эндифунктор, то начальная F -алгебра X удовлетворяет уравнению $X \simeq F(X)$.

Пусть (X_0, α) — начальный объект. Тогда рассмотрим алгебру $(F(X_0), F(\alpha))$. Тогда существует каникальный f , для которого диаграмма ниже коммутует.

$$\begin{array}{ccc} F(X_0) & \xrightarrow{\alpha} & X_0 \\ F(f) \downarrow & & \downarrow f \\ F(F(X_0)) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(X_0) \end{array}$$

$\alpha \circ f : X_0 \rightarrow X_0$ — морфизм в категории F -алгебр. Так как (X_0, α) — начальный, то $\alpha \circ f = id$.

Тогда из диаграммы получаем:

$$F(\alpha) \circ F(f) = F(\alpha \circ f) = F(id) = id = f \circ \alpha$$

То есть α — изо, а значит $X_0 \simeq F(X_0)$