

Задания

13 апреля 2021 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.
2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если a, b – объекты \mathbf{C} такие, что b^a существует, то $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$ тоже существует и определяется как $\mathbf{y}(b^a)$.
3. Докажите, что коллекция объектов вида $\mathbf{y}a$ является генератором для категории предпучков.

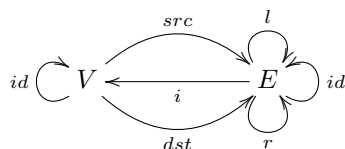
$$\mathbf{y}a \xrightarrow{s} F \xrightleftharpoons[g]{f} G$$

$$\text{Hom}(\mathbf{y}a, F) \simeq F_a, \quad \text{Hom}(\mathbf{y}a, G) \simeq G_a.$$

$$f \simeq f' : F_a \rightarrow G_a, \quad g \simeq g' : F_a \rightarrow G_a$$

$$\forall s' \in F_a : f'(s') = g'(s') \Rightarrow f' = g' \Rightarrow f = g$$

4. Определите категорию \mathbf{C} , такую что $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ эквивалентна категории рефлексивных графов.



G_E – ребра, G_V – вершины.

$$\text{dst}, \text{src} : G_E \rightarrow G_V$$

$$i : G_V \rightarrow G_E$$

$$\text{dst} \circ i = \text{id}$$

$$\text{src} \circ i = \text{id}$$

$$i \circ \text{dst} = r$$

$$i \circ \text{src} = l$$

$$\text{src} \circ l = \text{src}$$

$$\text{dst} \circ l = \text{src}$$

$$\text{dst} \circ r = \text{dst}$$

$$\text{src} \circ r = \text{dst}$$

$$l \circ i = i$$

$$r \circ i = i$$

5. Докажите, что функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.

Достаточно доказать, что если он сохраняет копределы, то он левый сопряженный.

Пусть $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$. Тогда по ко-лемме $X = \text{colim}_a \mathbf{y} a$.

$$\begin{aligned} \text{Hom}(F(X), Y) &= \text{Hom}(F(\text{colim}_a \mathbf{y} a), Y) = \\ &= \text{Hom}(\text{colim}_a F(\mathbf{y} a), Y) = \lim_a \text{Hom}(F(\mathbf{y} a), Y) = \\ &= \lim_a \text{Hom}(\mathbf{y} a, \text{Hom}(F(\mathbf{y} _), Y)) = \\ &= \text{Hom}(\text{colim}_a \mathbf{y} a, \text{Hom}(F(\mathbf{y} _), Y)) = \text{Hom}(X, \text{Hom}(F(\mathbf{y} _), Y)) = \\ &=: \text{Hom}(X, U(Y)) \end{aligned}$$

$$U = \text{Hom}(F(\mathbf{y} _), _) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \text{ — правый сопряженный}$$

6. Докажите, что функтор $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ является свободным копополнением \mathbf{C} , то есть, что для любой кополной категории \mathbf{D} и любого функтора $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ существует уникальный (с точностью до изоморфизма) функтор $\tilde{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{D}$, сохраняющий копределы, и такой, что следующая диаграмма коммутует (с точностью до изоморфизма функторов):

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \mathbf{y} \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} & & \end{array}$$

Пусть такой \tilde{F} существует и пусть $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} = \text{colim}_a \mathbf{y} a$. Тогда $\tilde{F}(X) = \tilde{F}(\text{colim}_a \mathbf{y} a) = \text{colim}_a (\tilde{F}(\mathbf{y} a)) = \text{colim}_a F_a$.

Тогда можно взять $\tilde{F}(X) = \text{colim}_a F_a$ как определение \tilde{F} . Оно корректно, так как \mathbf{D} кополная.