Задания

16 марта 2021 г.

1. Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Какие из следующих утверждений верны? Как изменится ответ, если предположить, что F – эквивалентность категорий?

   (a) Если $f : X \to Y$ – мономорфизм в $\mathbf{C}$. то $F(f)$ – мономорфизм в $\mathbf{D}$.

   (b) Если X – (ко)предел диаграммы $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, то $F(X)$ – (ко)предел диграммы $F \circ D : \mathbf{J} \to \mathbf{D}$.

2. Пусть **Cat** – категория малых категорий. Ее объекты – это малые категории. Морфизмы в категории **Cat** – это функторы между категориями.

   Пусть **Graph** – категория графов. Ее объекты – графы, то есть пары (V, E), состоящие из множества вершин V и функции E, сопоставляющей каждой паре вершин $x, y \in V$ множество $E(x, y)$ ребер из x в y.

   Морфизм графов (V, E) и (U, D) состоит из функции $f : V \to U$ и функции $f : E(x, y) \to D(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in V$. Композиция и тождественные морфизмы определены очевидным образом.

   Определите забывающий функтор из **Cat** в **Graph**. Докажите, что этот функтор строгий.

3. В лекции определялся функтор $I : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Grp}$ обратимых элементов моноида.

   (a) Является ли I строгим? Докажите это.
   Рассмотрим два моноида: первый M_1 — моноид из строк над конечным алфавитом с операцией конкатенации; второй M_2 — $(\mathbb{Z}, +)$.

   $I(M_1)$ — тривиальный моноид; $I(M_2) = M_2$.
   Гомоморфизмы $f_1(s) = length(s)$, $f_2(s) = 2 \cdot length(s)$ отобразятся в один и тот же (единственный) гомоморфизм $f(x) = 0$.
   I не строгий.

(b) Является ли I полным? Докажите это.

Пусть $f : I(M_1) \to I(M_2)$. Построим ее прообраз:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I(M_1) \\ f'(a_0) * \prod\limits_i f'(b_i) * f'(a_i), & \exists a_i \in I(M_1), b_i \notin I(M_1) \\ & \qquad\qquad x = a_0 * b_1 * a_1 * b_2 * a_2 ... \\ 1, & otherwise \end{cases}$$

Если $a, b \in I(M_1)$, то $a * b \in I(M_1) \Rightarrow f'(a * b) = f(a * b) = f(a) * f(b) = f'(a) * f'(b)$
Если $a \notin I(M_1), b \in I(M_1)$, то $f'(a * b) = f'(a) * f(b) = f'(a) * f'(b)$
Если $a \notin I(M_1), b \notin I(M_1)$ и $b = c*d, c \notin I(M_1), d \in I(M_1)$, то $f'(a*b) = f'(a * c * d) = f'(a * c) * f(d) = f(d)$

4. Докажите, что если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – некоторый эндофунктор, то начальная F-алгебра X удовлетворяет уравнению $X \simeq F(X)$.

   Пусть (X_0, α) — начальный объект. Тогда рассмотрим алгебру $(F(X_0), F(\alpha))$. Тогда существует кникальный f, для которого диаграмма ниже коммутирует.

$$\begin{tikzcd} F(X_0) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(f)"'] & X_0 \arrow[d, "f"] \\ F(F(X_0)) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F(X_0) \end{tikzcd}$$

   $\alpha \circ f : X_0 \to X_0$ — морфизм в категории F-алгебр. Так как (X_0, α) — начальный, то $\alpha \circ f = id$.

   Тогда из диаграммы получаем:
   $F(\alpha) \circ F(f) = F(\alpha \circ f) = F(id) = id = f \circ \alpha$

   То есть α — изо, а значит $X_0 \simeq F(X_0)$