

Задания

20 февраля 2021 г.

- Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - Терминальные объекты.
 - Произведения объектов.
- Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 . Докажите, что для любого объекта A в \mathbf{C} существует произведение $A \times 1$.
- Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.
- Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \rightarrow B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ является эпиморфизмом.
- Докажите, что в \mathbf{Ab} существуют все произведения.
- Докажите, что два определения уравнивателей, приводившихся в лекции, эквивалентны.

\Leftarrow) $\exists! k \Rightarrow e$ — моно

Пусть $e \circ w = e \circ t$ для неких t, w . Тогда $e \circ w$ можно подставить вместо h в определение уравнивателя. Тогда $\exists! k : e \circ k = e \circ w$. Получается, что $k = w = t$. Значит e — моно.
- Докажите, что уравниватель пары стрелок $f, g : A \rightarrow B$ уникален с точностью до изоморфизма. То есть, если $e_1 : E_1 \rightarrow A$ и $e_2 : E_2 \rightarrow A$ — два уравнивателя f и g , то существует уникальный изоморфизм $i : E_1 \rightarrow E_2$ такой, что $e_2 \circ i = e_1$.

По определению уравнивателя: $\exists! k_1. e_1 \circ k_1 = e_2, \quad \exists! k_2. e_2 \circ k_2 = e_1$.

Так как уравниватели — мономорфизмы, то:

$$e_1 \circ k_1 \circ k_2 = e_1 \Rightarrow k_1 \circ k_2 = id$$
$$e_2 \circ k_2 \circ k_1 = e_2 \Rightarrow k_2 \circ k_1 = id$$

Значит k_1, k_2 — изоморфизмы, причем единственные
- Морфизм $h : B \rightarrow B$ называется *идемпотентным*, если $h \circ h = h$. Докажите следующие факты:

- (a) Если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ — такие, что $g \circ f = id_A$, то $h = f \circ g$ является идемпотентным.
 $h \circ h = (f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ g = h$
- (b) Если в категории есть уравниватели, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма $h : B \rightarrow B$ существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$.

Построим уравниватель для h , id . Так как $h \circ h = id \circ h$, то $\exists f, \exists! g$

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ g \downarrow & \searrow h & \\ A & \xrightarrow{f} B & \xrightarrow[id]{h} B \end{array}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &= h \\ f \circ g \circ f &= h \circ f \\ \text{Но } h \circ f &= id \circ f \text{ и } f \text{ — моно, а значит} \\ f \circ g \circ f &= f \\ g \circ f &= id \end{aligned}$$

9. Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.

Пусть f — регулярный моно и $g \circ f = id$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ g \circ h \downarrow & \searrow h & \\ A & \xrightarrow[f]{f} B & \xrightarrow[id]{f \circ g} B \end{array}$$

Достаточно проверить, что эта диаграмма коммутрует для любого h (точнее даже нужно проверить только треугольник).

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h \circ id = h$$

10. Мономорфизм $f : A \rightarrow B$ называется *сильным*, если для любой коммутативной диаграммы, где $e : C \rightarrow D$ является эпиморфизмом,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad} & A \\ e \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

существует стрелка $D \rightarrow A$ такая, что диаграмма выше коммутует.

Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{e} & D & & \\ & \searrow t & \downarrow k & \swarrow w & \\ & & A & \xrightarrow[f]{} & B \xrightarrow[g]{h} K \end{array}$$

Чтобы доказать существование k , достаточно показать, что $how = gow$
 $h \circ f \circ t = g \circ f \circ t$ — тк f — уравниватель
 $h \circ w \circ e = g \circ w \circ e$ — тк квадрат коммутативен
 $h \circ w = g \circ w$ — тк e — эпи

11. Мономорфизм $f : A \rightarrow B$ называется *экстремальным*, если для любого эпиморфизма $e : A \rightarrow C$ и любого морфизма $g : C \rightarrow B$ таких, что $g \circ e = f$, верно, что e — изоморфизм.

Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.

Так как f — сильный, то для любых e, g , для которых квадрат коммутативен, надется соответствующий h

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id} & A \\ e \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

$h \circ e = id$
 $e \circ h \circ e = e$
 $e \circ h = id$ — так как e — эпи
 Получается, что e, h — изо

12. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?

Если f — регулярный моно- эпиморфизм, то он является уравнивателем для неких g, h . Причем, так как f — эпи, то $g = h$. Тогда по определению уравнивателя $\exists! k : f \circ k = id$, то есть f — расщепленный моно- эпи-, а значит изо.

13. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.

Пусть $f : A \rightarrow B$ — моно. Если f — эпи, то f — изо, а значит расщепленный, а значит регулярен (пункт 9).

Если f — не эпи, то f — уравниватель для 1_B и $1_{f(A)}$

14. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.

Пусть $f : A \rightarrow B$ — моно. Если f — эпи, то f — изо, а значит расщепленный, а значит регулярен (пункт 9).

Если f — не эпи, то f — уравниватель для 0_B и $1_{B \setminus f(A)} : B \rightarrow \mathbb{Z}_2$

Бонусные задания:

- Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.
- Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального $n > 1$ существует $x \in M$ такой, что $x \neq 1$ и $x^n = 1$.

3. Приведите пример нетривиального моноида M такого, что в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения.