# Задания

14 апреля 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \to T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто $T$.

2. Докажите, что категория Клейсли $\mathbf{Kl}_T$ эквивалентна полной подкатегории $T$-**alg** на свободных $T$-алгебрах.

3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
$\mathcal{S} = \{v, e\}$
$\mathcal{F} = \{src \ : \ e \to v, \ \ dst \ : \ e \to v, \ \ id \ : \ v \to e\}$
$\mathcal{A} = \{src \ (id \ x) = x, \ \ dst \ (id \ x) = x\}$

4. Докажите, что для любой малой категории $\mathbf{C}$ категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.

$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
$\mathcal{S} = \{f, c, ch, s\}$
$\mathcal{F}$ :
$app_{Ob} \ : \ f \to c \to s$
$app_{Hom} \ : \ f \to ch \to (s \to s)$
$\circ_c \ : \ ch \to ch \to ch$
$id_c \ : \ c \to ch$
$src \ : \ ch \to c$
$dst \ : \ ch \to c$

$\mathcal{A}$ :
$app_{Hom}\ F\ (f\ \circ_c\ g)\ x = app_{Hom}\ F\ f\ (app_{Hom}\ F\ g\ x)$
$app_{Hom}\ F\ (id_c\ c)\ x = x$
$src\ (id\ c) = c$
$dst\ (id\ c) = c$
$(f\ \circ_c\ g)\ \circ_c\ h = f\ \circ_c\ (g\ \circ_c\ h)$

5. Докажите, что категория Mon-**Mod**(Mon-**Mod**) моноидов в категории моноидов (в **Set**) изоморфна категории коммутативных моноидов (в **Set**).

6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.

7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом $A$ – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом $A$ – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
   - $0 \cdot x = 0$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

   $data\ Term\ a\ =\ Var\ a\ |\ App\ (Term\ a)\ (Term\ a)\ |\ Lam\ (Term\ (Maybe\ a))$

   Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.