Задания

25 февраля 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Начальные объекты.
   (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:
   (a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.
   (b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.
3. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:
   (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.
   (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.
4. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
5. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \to 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

   Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.

$\Rightarrow$) 0 – строгий.
Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & 0 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как 0 строгий, то g, π_2 — изо. Значит $\exists k = \pi_2^{-1} \circ g$. Так как k — изо, а 0 начальный, то k^{-1} — уникальный. Значит k — уникальный. Так как 0 — начальный объект, то π_1 — уникальный, а значит $\pi_1 \circ k$ — уникальный. Значит $f = \pi_1 \circ k$. Таким образом, вся диаграмма коммутирует и k — уникальный.

$\Leftarrow$) $X \times 0 \simeq 0$.
Пусть $f : A \to 0$. Рассмотрим $A \times 0$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, dashed, "\exists! k"] \arrow[dr, "f"] & \\
A & 0 \arrow[l, "\pi"] \arrow[r, "id"'] & 0
\end{tikzcd}$$

$f = k \quad \wedge \quad \pi \circ k = id \Rightarrow \pi \circ f = id$

6. Пусть в диаграмме вида

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

7. Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ – морфизмы в некоторой категории, а $D \hookrightarrow C$ – некоторый подобъект C. Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$.

8. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.
$A + B = (A \times e_B \cup e_A \times B, \langle *_A, *_B \rangle)$
$\pi_A(a) = (a, e_B), \quad \pi_B(b) = (e_A, b)$
$\forall f : A \to C, \forall g : B \to C :$
$k((a,b)) := f(a) *_C g(b) \quad : \; A + B \to C$

9. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.

10. Идемпотентный морфизм $h : B \to B$ является расщепленным, если существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.

11. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.

12. Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, D – диграмма формы J в категории $\mathbf{C}$, и A – конус диаграммы D. Мы будем говорить, что конус A является *слабым пределом*, если для него выполняется уникальность, но не обязательно существование стрелки из определения предела. Обратите внимание, что слабые пределы не обязательно уникальны. Например, любой пулбэк $A \times_C B$ – это слабый предел дискретной диаграммы, состоящей из объектов A и B.

    Докажите, что если для некоторой диаграммы существует предел L, то некоторый конус является слабым пределом тогда и только тогда, когда он является подобъектом L.