Задания

24 марта 2021 г.

1. Пусть **C** – категория предпорядка, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
2. Пусть **C** – категория с одним объектом, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
3. Пусть **C** – дискретная категория, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
4. Пусть **C** – группоид, а **D** – нет.
   (a) Могут ли **C** и **D** быть изоморфны?
   (b) Могут ли **C** и **D** быть эквивалентны?
5. Докажите, что **Num** эквивалентна **FinSet**. Изоморфны ли эти категории?

   Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Num} \to \mathbf{FinSet}$
   $F(n) = \{1, 2, ...n\} =: A_n$
   $F((a_1, ..., a_n)) = \lambda x.\ case\ x\ of \{i \Rightarrow a_i\}\ : A_n \to A_k$

   Так как $|Hom_{\mathbf{Num}}(n, k)| = k^n = |Hom_{\mathbf{FinSet}}(\{1, ..., n\}, \{1, ..., k\})|$ и $F : Hom_{\mathbf{Num}}(n, k) \to Hom_{\mathbf{FinSet}}(\{1, ..., n\}, \{1, ..., k\})$ — инъекция, то F — сюръекция. Значит F строгий и полный.

   $\forall\ S \in \mathbf{Set}\ \exists A_{|S|} \simeq S$, так как равномощные множества изоморфны. Значит $\forall F(|S|) \simeq S$. F существенно сюръективен.
   Получается, что F — экви.

   FinSet не изоморфен **Num**, так как первый состоит из континуального множества объектов, а второй — из счетного.

6. Докажите, что **Mat** эквивалентна $\mathbf{Mat}^{op}$. Изоморфны ли эти категории?

7. Докажите, что **FinSet** не эквивалентна **Set**.

   Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{FinSet}$ — экви.
   Тогда $|Hom_{\mathbf{Set}}(\mathbb{N}, \{0\})| = |Hom_{\mathbf{FinSet}}(F(\mathbb{N}), F(\{0\}))| < \infty$, что неверно.

8. Пусть $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – пара функторов. Естественное преобразование $\alpha : F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если для любого объекта X в $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ является изоморфизмом.

   Докажите, что $\alpha : F \to G$ – естественный изоморфизм тогда и только тогда, когда α – изоморфизм в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, shift left, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[l, shift left, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] \\
F(X) \arrow[r, shift left, "\alpha_Y"] & G(Y) \arrow[l, shift left, "\beta_Y"]
\end{tikzcd}$$

   Если $\forall X :\ \alpha_X$ – изо, то позьмем $\beta_X := \alpha_X^{-1}$. Для такого β диаграмма выше коммутирует, значит β – естественное проеобразование. Кроме того, $(\alpha \circ \beta)_X = \alpha_X \circ \beta_X = id_{G(X)}$, а $(\beta \circ \alpha)_X = \beta_X \circ \alpha_X = id_{F(X)}$. Значит $\beta = \alpha^{-1}$ в $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

   Если $\beta = \alpha^{-1}$ в $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, то $(\alpha \circ \beta)_X = \alpha_X \circ \beta_X = id_{G(X)}$ (и симметрично с другой стороны). Значит $\forall X :\ \beta_X = \alpha_X^{-1}$, то есть $\forall X :\ \alpha_X$ – изо.

9. Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория. Докажите, что функтор $- \times 1$ изоморфен тождественному функтору в $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

$$\begin{tikzcd}
X \times 1 \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, "\langle f,! \rangle"'] & X \arrow[l, shift left, "\langle id,! \rangle"] \arrow[d, "\langle f,! \rangle"] \\
Y \times 1 \arrow[r, shift left, "\pi_1"] & X \arrow[l, shift left, "\langle id,! \rangle"]
\end{tikzcd}$$

   Поскольку диаграмма выше коммутирует, то $\pi_1 : - \times 1 \to id$ и $\langle id, ! \rangle$ — естественные преобразования, причем взаимно обратные. То есть π_1 — изоморфизм этих функторов.

10. Пусть $\rightrightarrows$ – категория, состоящая из двух объектов $\{v, e\}$ и четырех морфизмов $\{id_v : v \to v, id_e : e \to e, d : v \to e, c : v \to e\}$. Докажите, что категории **Graph** (эта категория определяется в предыдущем ДЗ) и $\mathbf{Set}^{\rightrightarrows^{op}}$ эквивалентны. Изоморфны ли эти категории?

Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Graph} \to \mathbf{Set}^{\rightrightarrows^{op}}$.
$F(\ (V, E)\ ) = g$, где g — функтор $\rightrightarrows^{op} \to \mathbf{Set}$ определененный следующим образом:
$g(v) := V$
$g(e) := \{(x, y, e) \mid x, y \in V,\ e \in E(x, y)\}$
$g(c^{op}) := \pi_1$
$g(d^{op}) := \pi_2$
$g(id) := id$

Далее $g(e)$ буду обозначать как (x, y, Exy)

Пусть (f_V, f_E) – морфизм графов. Тогда должно быть $F(\ (f_V, f_E)\ ) = \alpha$, где α – какое-то Е.П. функторов $\rightrightarrows^{op} \to \mathbf{Set}$.

Пусть $\alpha_v = f_V, \quad \alpha_e = \langle f_V, f_V, f_E\rangle$. Докажем, что α – Е.П. Пусть $F(\ (V, E)\ ) = g_1,\ F(\ (f_V(V), f_E(E))\ ) = g_2$ тогда $\alpha : g_1 \to g_2$. Так как в $\rightrightarrows^{op}$ все стрелки направлены от e к v, достаточно рассмотреть диаграмму

$$\begin{tikzcd}
g_1(e) \arrow[r, "\langle f_V, f_V, f_E\rangle"] \arrow[d, "\pi_i"'] & g_2(e) \arrow[d, "\pi_i"'] \\
g_1(v) \arrow[r, "f_V"] & g_2(v)
\end{tikzcd}$$

Или точнее

$$\begin{tikzcd}
(x, y, Exy) \arrow[r, "\langle f_V, f_V, f_E\rangle"] \arrow[d, "\pi_i"'] & (f_V(x), f_V(y), f_E(Exy)) \arrow[d, "\pi_i"'] \\
V \arrow[r, "f_V"] & f_V(V)
\end{tikzcd}$$

Так как данная диаграмма коммутирует для $\pi_{[1,2]}$, α – Е.П.

Кроме того, если применить F к композиции морфизмов $(f_V^1, f_E^1) \circ (f_V^2, f_E^2) = (f_V^1 \circ f_V^2, f_E^1 \circ f_E^2)$, то полученное естественное преобразование будет в точности композицией естественных преобразований (нужно просто к диаграмме выше добавить еще один квадрат справа). То есть $F(x \circ y) = F(x) \circ F(y)$. Значит F — корректный функтор.

Очевидно, что есть биекция между парой (f_V, f_E) и парой (α_v, α_e). Значит $Hom(X, Y) \simeq Hom(F(X), F(Y))$. То есть F — строгий и полный.

Пусть $f :\rightrightarrows^{op} \to \mathbf{Set}$ – некоторый функтор. Возьмем граф (V, E), где
$V = f(v)$
$E(x, y) = \{e \mid e \in f(e),\ f(c^{op})(e) = x,\ f(d^{op})(e) = y\}$

Тогда $F(\ (V, E)\ )$ будет равен g
$g(v) := V = f(v)$
$g(e) := \{(f(c^{op})(e),\ f(d^{op})(e),\ e) \mid e \in f(e)\}$
$g(c^{op}) := \pi_1$
$g(d^{op}) := \pi_2$
$g(id) := id$

Рассмотрим пару естественных преобразований α, β, где $\alpha_v = \beta_v = id,\ \alpha_e = \langle f(c^{op}),\ f(d^{op}), id\rangle,\ \beta_e = \pi_3$. Так как $\alpha_v \circ \beta_v = id,\ \ \beta_v \circ \alpha_v = id,\ \ \alpha_e \circ \beta_e = id,\ \ \beta_e \circ \alpha_e = id$, данные преобразования являются изоморфизмами. То есть $F(\ (V, E)\ ) \simeq f$. Значит F существенно сюръективен.

Таким образом, F — экви.

Про изоморфность надо еще подумать.

11. Пусть $\mathbf{D}$ – рефлективная подкатегория $\mathbf{C}$.

(a) Докажите, что рефлектор $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ является фнуктором $R : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

$R(id) = id :$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\eta_X"'] & X \arrow[d, "\eta_X"'] \\
\eta_X(X) \arrow[r, dashed, "\exists! h = id"] & \eta_X(X)
\end{tikzcd}$$

$R(f \circ g) = R(f) \circ R(g) :$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_Y"'] & Z \arrow[d, "\eta_Z"'] \\
\eta_X(X) \arrow[r, dashed, "\exists! g'"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\exists! h"'] & \eta_Y(Y) \arrow[r, dashed, "\exists! f'"] & \eta_Z(Z)
\end{tikzcd}$$

(b) Докажите, что η является естественным преобразованием между $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ и $i \circ R$, где $i : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – функтор вложения.

Следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \eta_X(X) \arrow[d, dashed, "\exists! h=(i\circ R)(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"] & \eta_Y(Y) \end{tikzcd}$$

12. Пусть $F : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Ab}$ – рефлектор вложения $i : \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$.

    (a) Приведите пример конечного нетривиального коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| = |X|$.

    Можно взять любую нетривиальную абелеву группу (ее вложение в **CMon**).

    (b) Приведите пример конечного коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| < |X|$.

    Рассмотрим моноид $M = \{0, 1\}$ с операцией max.
    Докажем, что $F(M) = \{0\}$. Пусть $f : M \to G$.
    Тогда $f(0) = 0,\ f(1) = f(1 \text{ `}max\text{` } 1) = f(1) * f(1)$
    $0 = f(0) = f(1) * f(1)^{-1} = f(1) * f(1) * f(1)^{-1} = f(1)$.
    То есть $f(M) = \{0\}$. Тогда единственный существующий гомоморфизм $F(M) \to G$ заставит коммутировать диаграмму из определения рефлектора.

    $|M| = 2,\ |F(M)| = 1$

    (c) Приведите пример коммутативного моноида X, такого что $\eta_X : X \to i(F(X))$ – не сюръективна.

    $X = (\mathbb{N}, +)$
    $F(X) = (\mathbb{Z}, +)$
    $i(F(X)) = (\mathbb{Z}, +)$
    $\eta_X(x) = x$ – не сюръекция

    (d) Докажите, что для любого конечного коммутативного моноида X функция $\eta_X : X \to i(F(X))$ является сюръективной. В частности $|F(X)| \leq |X|$.

    Пусть дан некоторый коммутативный моноид M. Возьмем группу Гротендика $G(M)$, соответствующую этому моноиду.
    (нашел вот тут https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_group, решил не переписывать определение).
    Докажем, что $M \to i(G(M))$ — сюръекция.
    Пусть $(a, b) \in G(M)$.
    Если $\exists b^{-1}$, то $(a, b) \sim (a * b^{-1}, 0) = G(a * b^{-1})$.
    Если это не так, то, поскольку моноид конечный, $\exists n, m \in \mathbb{N}, n > m :\ b^n = b^m$. Тогда $(a, b) \sim (a * b^{m+1}, b^{m+1}) = (a * b^{n+1}, b^{m+1}) =$

$$(a * b^{m+1} * b^{n-m}, b^{m+1}) \sim (a * b^{n-m}, 0) = G(a * b^{n-m}).$$

Таким образом, $i \circ G$ — сюръекция, а значит η_X — сюръекция, так как F изоморфен G.