Задания

23 февраля 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Терминальные объекты.
   Наибольший элемент
   (b) Произведения объектов.
   Точная нижняя граница

2. Пусть в категории $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1. Докажите, что для любого объекта A в $\mathbf{C}$ существует произведение $A \times 1$.

   $A \times 1 = A, \pi_1 = id, \pi_2 = (\textit{единственный морфизм } A \to 1)$
   $\forall C, f_1 : C \to A, f_2 : C \to 1$
   $\exists h = f_1$. Одна половина коммутирует, так как $id \circ f_1 = f1$, вторая — так как там терминальный объект. h единственный, так как $id \circ h = f_1 \Rightarrow h = f_1$

3. Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.

   В терминальный объект существует только одна стрелка из другого объекта.

4. Пусть в категории $\mathbf{C}$ существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \to B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \to A$ является эпиморфизмом.

$$\begin{tikzcd}
& A = A \times 1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr, "id"] & & \\
B & A \times B \arrow[l] \arrow[r, "\pi_1"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

5. Докажите, что в $\mathbf{Ab}$ существуют все произведения.

   $(A_1, *) \times (A_2, +) = (A_1 \times A_2, \langle *, + \rangle)$
   проекции тривиальные. свойство выполняется для функции $h(x) = (f(x), g(x))$. Она единственная, так как любую функцию, действующую в множество пар можно разбить на 2 функции и тогда $id \circ f = f, id \circ g = g$

6. Докажите, что два определения уравнителей, приводившихся в лекции, эквивалентны.

   $\Rightarrow$ e — моно $\Rightarrow \exists! k e$
   если e — моно, то k — единственный, для которого диаграмма коммутирует ($e \circ k = h = e \circ k' \Rightarrow k = k'$)

   $\Leftarrow$) $\exists! k \Rightarrow e$ — моно
   Пусть $e \circ w = e \circ t$ для неких t, w. Тогда $e \circ w$ можно подставить вместо h в определение уравнителя. Тогда $\exists! k : e \circ k = e \circ w$. Получается, что $k = w = t$. Значит e — моно.

7. Докажите, что уравнитель пары стрелок $f, g : A \to B$ уникален с точностью до изоморфизма. То есть, если $e_1 : E_1 \to A$ и $e_2 : E_2 \to A$ – два уравнителя f и g, то существует уникальный изоморфизм $i : E_1 \to E_2$ такой, что $e_2 \circ i = e_1$.

   По определению уравнителя: $\exists!\ k_1.\ e_1 \circ k_1 = e_2, \quad \exists!\ k_2.\ e_2 \circ k_2 = e_1$.
   Так как уравнители — мономорфизмы, то:
   $e_1 \circ k_1 \circ k_2 = e_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 \circ k_2 = id$
   $e_2 \circ k_2 \circ k_1 = e_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 \circ k_1 = id$
   Значит k_1, k_2 — изоморфизмы, причем единственные

8. Морфизм $h : B \to B$ называется *идемпотентным*, если $h \circ h = h$. Докажите следующие факты:

   (a) Если $f : A \to B$ и $g : B \to A$ – такие, что $g \circ f = id_A$, то $h = f \circ g$ является идемпотентным.

   $h \circ h = (f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ g = h$

   (b) Если в категории есть уравнители, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма $h : B \to B$ существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$.

   Построим уравнитель для h, id. Так как $h \circ h = id \circ h$, то $\exists f, \exists! g$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ A \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "id"'] & B \end{tikzcd}$$

   $f \circ g = h$
   $f \circ g \circ f = h \circ f$
   Но $h \circ f = id \circ f$ м f — моно, а значит
   $f \circ g \circ f = f$
   $g \circ f = id$

9. Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.

Пусть f — регулярный моно и $g \circ f = id$. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "g\circ h"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
A \arrow[r, hook, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[r, shift left, "f\circ g"] \arrow[r, shift right, "id"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Достаточно проверить, что эта диаграмма коммутирует для любого h (точнее даже нужно проверить только треугольник).
$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h \circ id = h$

10. Мономорфизм $f : A \to B$ называется *сильным*, если для любой коммутативного квадрата, где $e : C \to D$ является эпиморфизмом,

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}
$$

существует стрелка $D \to A$ такая, что диаграмма выше коммутирует.

Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[dr, "t"'] & D \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, squiggly, "w"] & & \\
& A \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "g"'] & K
\end{tikzcd}
$$

Чтобы доказать существование k, достаточно показать, что $h{\circ}w = g{\circ}w$
$h \circ f \circ t = g \circ f \circ t$ — тк f — уравнитель
$h \circ w \circ e = g \circ w \circ e$ — тк квадрат коммутативен
$h \circ w = g \circ w$ — тк e — эпи

11. Мономорфизм $f : A \to B$ называется *экстремальным*, если для любого эпиморфизма $e : A \to C$ и любого морфизма $g : C \to B$ таких, что $g \circ e = f$, верно, что e – изоморфизм.

Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.

Так как f — сильный, то для любых e, g, для которых квадрат коммутативен, надется соответствующий h

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B
\end{tikzcd}
$$

$h \circ e = id$
$e \circ h \circ e = e$
$e \circ h = id$ — так как е — эпи
Получается, что e, h — изо

12. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?

    Если f — регулярный моно- эпиморфизм, то он является уравнителем для неких g, h. Причем, так как f — эпи, то g = h. Тогда по определению уравнителя $\exists! k : f \circ k = id$, то есть f — расщепленный моно- эпи-, а значит изо.

13. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.

    Пусть $f : A \to B$ — моно. Если f — эпи, то f — изо, а значит расщепленный, а значит регулярен (пункт 9).
    Если f — не эпи, то f — уравнитель для $\mathbb{1}_B$ и $\mathbb{1}_{f(A)}$

14. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.

    Пусть $f : A \to B$ — моно. f — уравнитель для $\mathbb{0}$ и некоторого g, где $g : B \to C,\ ker(g) = f(A)$
    Так как B — абелева, значит $f(A)$ — нормальная, значит можно определить g так:
    $g(b) = b \cdot f(A)\ :\ B \to B/f(A)$

Бонусные задания:

1. Докажите, что если в категории $\mathbf{C}_M$ существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.

2. Докажите, что если в категории $\mathbf{C}_M$ существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального $n > 1$ существует $x \in M$ такой, что $x \neq 1$ и $x^n = 1$.

3. Приведите пример нетривиального моноида M такого, что в категории $\mathbf{C}_M$ существует бинарные произведения.