

Задания

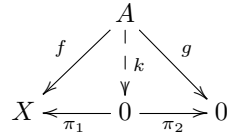
16 марта 2021 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - (a) Начальные объекты.
 - (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:
 - (a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.
 - (b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.
3. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:
 - (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.
 - (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.
4. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
5. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \rightarrow 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.

\Rightarrow) 0 — строгий.

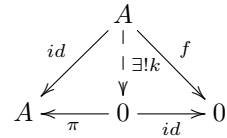
Рассмотрим диаграмму



Так как 0 строгий, то g, π_2 — изо. Значит $\exists k = \pi_2^{-1} \circ g$. Так как k — изо, а 0 начальный, то k^{-1} — уникальный. Значит k — уникальный. Так как 0 — начальный объект, то π_1 — уникальный, а значит $\pi_1 \circ k$ — уникальный. Значит $f = \pi_1 \circ k$. Таким образом, вся диаграмма коммутует и k — уникальный.

\Leftrightarrow) $X \times 0 \simeq 0$.

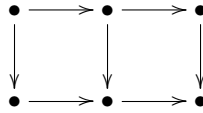
Пусть $f : A \rightarrow 0$. Рассмотрим $A \times 0$



$$f = k \wedge \pi \circ k = id \Rightarrow \pi \circ f = id$$

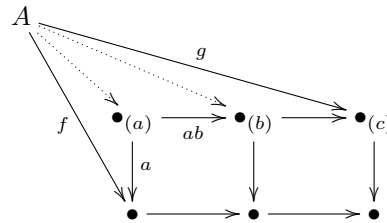
$f \circ \pi = id$, так как это стрелка из начального объекта.

6. Пусть в диаграмме вида



правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

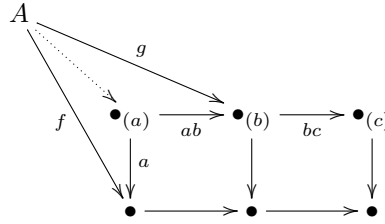
\Rightarrow) Левый квадрат — пулбэк.



Пусть есть A, f, g . Так как правый квадрат — пулбэк, то $\exists! h : A \rightarrow \bullet_{(b)}$ такой, что диаграмма коммутует. Так как левый квадрат

является пулбэком, то $\exists! k : A \rightarrow \bullet_{(a)}$ такой, что левая половина диаграммы коммутирует. Если существует $k' : A \rightarrow \bullet_{(a)}$, при котором коммутативен подграф, состоящий из него, внешнего прямоугольника и f, g . Но тогда $ab \circ k' = h$, так как h — единственный, для которого соответствующий подграф коммутативен. Но раз так, то $k = k'$, так как с k', a, f коммутирует левый пулбэк. Получается, что для $\forall f, g \exists! k$ такой, что внешний прямоугольник коммутирует, значит прямоугольник — пулбэк.

\Leftrightarrow) Внешний прямоугольник — пулбэк.



Пусть есть f, g , с которыми левый квадрат коммутативен. Тогда и вся диаграмма коммутативна, а значит $\exists! k : A \rightarrow \bullet_{(a)}$, для которого внешний прямоугольник коммутативен. Так как правый квадрат — пулбэк, то g — единственный, для которого вся диаграмма коммутирует. Значит $ab \circ k = g$. Но тогда с k коммутирует и левый квадрат. Пусть $\exists k'$, обладающий теми же свойствами, что и k . Но тогда $bc \circ ab \circ k', f$ подставим в определение для пулбэка для внешнего прямоугольника и получим, что $k = k'$.

7. Пусть $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ – морфизмы в некоторой категории, а $D \hookrightarrow C$ – некоторый подобъект C . Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$.

Построим $f^{-1}(g^{-1}(D))$.

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(g^{-1}(D)) & \longrightarrow & g^{-1}(D) & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Так как оба квадрата есть пулбэки, то и внешний прямоугольник — пулбэк. Значит $(g \circ f)^{-1}(D)$ уникален (с точностью до изо).

8. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\pi_A} & A + B & \xleftarrow{\pi_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow k & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

$$A + B = (A \times B, \langle *_{A}, *_{B} \rangle)$$

$$\pi_A(a) = (a, e_B), \quad \pi_B(b) = (e_A, b)$$

$$\forall f : A \rightarrow C, \forall g : B \rightarrow C :$$

$$k((a, b)) := f(a) *_{C} g(b) : A + B \rightarrow C$$

Единственность:

Пусть $\exists k' : A + B \rightarrow C$.

$$k' \circ \pi_B = g$$

Любая функция $A + B \rightarrow C$ будет иметь вид $(a, b) \mapsto f'(a) * g'(b)$ для некоторых f, g .

$$\text{Тогда } \forall b \in B : \quad g(b) = (k' \circ \pi_B)(b) = k'((e_A, b)) = f'(e_A) * g'(b) = g'(b) \Rightarrow g = g'.$$

Аналогично $f = f'$. Значит $k = k'$.

9. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.

Категория **Ab**

10. Идемпотентный морфизм $h : B \rightarrow B$ является расщепленным, если существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.

Как было показано ранее, если в категории есть уравнители, то идемпотентный морфизм расщеплен. Если в категории есть уравнители, то в C^{op} любой идемпотентный морфизм расщеплен. Так как

$Hom_{Cor}(X, Y)$ состоит из тех же элементов, что и $Hom(Y, X)$, то соответствующие f, g будут стрелками в исходной категории и для них будут выполняться необходимые свойства. Значит будет расщепленным.

11. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.

Пусть есть какая-то диаграмма. Рассмотрим произвольную стрелку $f : A \rightarrow B$. Существует пулбэк

$$\begin{array}{ccc} A \times_B B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow id \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Построим такие пулбэки для всех стрелок. Рассмотрим произвольную компоненту слабой связности. Пусть есть 2 смежные стрелки (направление значения не имеет).

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

Рассмотрим также уже построенные для этих стрелок пулбэки

$$\begin{array}{ccccc} & A \times_B B & & B \times_C C & \\ & \swarrow \downarrow \searrow & & \swarrow \downarrow \searrow & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

Построим пулбэк для $A \times_B B, B, B \times_C C$

$$\begin{array}{ccccc} & & ABC & & \\ & & \downarrow & & \\ & A \times_B B & & B \times_C C & \\ & \swarrow \downarrow \searrow & & \swarrow \downarrow \searrow & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

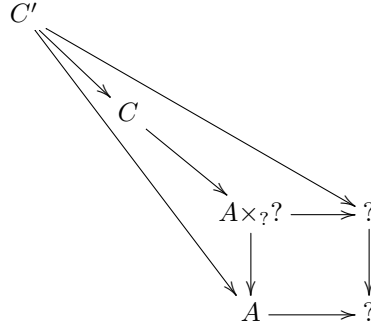
Таким образом, для каждой компоненты слабой связности можно построить конус. Теперь объединим конусы для разных компонент с помощью следующего пулбэка

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \swarrow & & \searrow \\ C_1 & & C_2 \\ \searrow & & \swarrow \\ & 1 & \end{array}$$

В результате получим конус C .

Докажем, что это если существует другой конус C' и стрелка $C' \rightarrow C$, то она единственна.

Возьмем случайный объект A . Рассмотрим произвольный пулбэк, в котором он содержится.



Стрелка $C' \rightarrow C \rightarrow A \times_? ?$ заставляет коммутировать оба треугольника и уникальна по определению пулбэка. Такие же условия можно написать для остальных объектов. Поскольку $C \rightarrow A \times_? ?$ для всех объектов фиксирован, то получаем, что существует единственная стрелка $C' \rightarrow C$, что все треугольники одновременно коммутируют.

Осталось показать, что для любого конуса стрелка $C' \rightarrow C$ существует. Рассмотрим произвольную стрелку (если есть) $A \rightarrow B$. Для нее есть пулбэк $A \times_B B$. Значит существует стрелка из конуса в объект пулбэка такая, что два треугольника (из определения пулбэка) коммутируют. Таким образом, существуют стрелки во все пулбэки первого уровня (те, что непосредственно связаны с исходной диаграммой). На этих пулбэках были также построены пулбэки (второго уровня). Значит в них тоже существуют стрелки. Таким образом, по индукции доходим до C .

Получили, что существует конус C такой, что для любого другого конуса есть единственная стрелка такая, что треугольники из определения предела коммутируют. Значит C есть предел.

12. Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, D – диграмма формы J в категории \mathbf{C} , и A – конус диаграммы D . Мы будем говорить, что конус A является *слабым пределом*, если для него выполняется уникальность, но не обязательно существование стрелки из определения предела. Обратите внимание, что слабые пределы не обязательно уникальны. Например, любой пулбэк $A \times_C B$ – это слабый предел дискретной диаграммы, состоящей из объектов A и B .

Докажите, что если для некоторой диаграммы существует предел L , то некоторый конус является слабым пределом тогда и только тогда, когда он является подобъектом L .

\Leftarrow) Пусть $h : X \hookrightarrow L$. Скомпозировав эту стрелку со всеми стрелками L и получив конус. Пусть есть другой конус Y и существует морфизм $f : Y \rightarrow X$ такой, что следующая диаграмма коммутует:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow h \\ D(v) & \longleftarrow & L \end{array}$$

Так как L — предел, то $h \circ f$ — уникальный. Тогда если существует $f' : Y \rightarrow X$, для которого эта диаграмма тоже коммутует, то $h \circ f = h \circ f'$. Так как h — моно, то $f = f'$. Значит X — слабый предел.

\Rightarrow) Пусть X — слабый предел. Рассмотрим $h : X \rightarrow L$. Пусть для некоторых $f, g : Y \rightarrow X$ выполняется $h \circ f = h \circ g$. Y является конусом, так как X является конусом. Кроме того, $f = g$, так как X — слабый предел. Значит h — моно.