Задания

17 апреля 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \to \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \to T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T.

2. Докажите, что категория Клейсли $\mathbf{Kl}_T$ эквивалентна полной подкатегории T-**alg** на свободных T-алгебрах.

Определим функтор $F : \mathbf{Kl}_T \to T\text{-}\mathbf{alg}^{free}$, где $T\text{-}\mathbf{alg}^{free}$ – полная подкатегория T-**alg** на свободных алгебрах.

$F(A) = (T\ A, \mu_A)$
$F(f) = T\ f$

Определение корректно, так как данная диаграмма коммутирует по нитуральности μ:

$$\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "TTf"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ TTTB \arrow[r, "\mu_{TB}"] & TB \end{tikzcd}$$

$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \quad F(id) = id$, так как T – функтор

Докажем, что F – полный и строгий. Следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ TB & TTB \arrow[l, "\mu_B"] \end{tikzcd}$$

так как $\mu_B \circ Tf \circ \eta_A = f \circ_{\mathbf{Kl}_T} \eta_A = f \circ_{\mathbf{Kl}_T} id_A = f$.
А значит $Hom(A, TB) \to Hom((TA, \mu_A), (TB, \mu_B))$ – биекция.
Так как F существенно сюръективен (прообраз $(T\ A, \mu_A)$ есть A), то F – эквивалентность категорий.

3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

   $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$
   $\mathcal{S} = \{v, e\}$
   $\mathcal{F} = \{src\ :\ e \to v,\ \ dst\ :\ e \to v,\ \ id\ :\ v \to e\}$
   $\mathcal{A} = \{src\ (id\ x) = x,\ \ dst\ (id\ x) = x\}$

4. Докажите, что для любой малой категории $\mathbf{C}$ категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.

   Определим теорию T:
   $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$:
   $\mathcal{S} = Ob(\mathbf{C})$
   $\mathcal{F} = \{f_h^{AB}\ :\ A \to B \mid h \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B)\ \forall\ A, B \in \mathbf{C}\}$
   $\mathcal{A} = \{f_{id}^{AA}(x) = x,\ \ f_f^{BC}(f_g^{AB}(a)) = f_{f\circ g}^{AC}(a)\}$

   Теперь определим функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \to T\text{-}Mod$:

   На объектах (функторах):
   $F(f) = M$, где
   $M(A) = f(A)$
   $M(f_h^{AB}) = f(h)$

   На морфизмах (естественных преобразованиях):
   $F(\alpha) = \alpha$

   Определение корректно: пусть $F(f) = M, F(g) = N$. Тогда:
   $\alpha_B(M(f_h^{AB})(a)) = \alpha_B(f(h)(a)) = g(h)(\alpha_A(a)) = N(f_h^{AB})(\alpha_A(a))$
   в силу естественности α:

$$\begin{tikzcd}
f(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "f(h)"] & g(A) \arrow[d, "g(h)"] \\
f(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & g(B)
\end{tikzcd}$$

   Из определения F на морфизмах очевидно, что
   $Hom(A, B) = Hom(F(A), F(B))$. Более того, можно построить функтор $U : T\text{-}Mod \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$:
   $U(M) = f,\ wehre\ f(A) = M(A),\ \ f(h^{\in Hom(A,B)}) = M(f_h^{AB})$
   $U(\alpha) = \alpha$.

Тогда $F \circ U = id, \;\; U \circ F = id$. Значит категории изоморфны, а значит и эквивалентны.

5. Докажите, что категория Mon-**Mod**(Mon-**Mod**) моноидов в категории моноидов (в **Set**) изоморфна категории коммутативных моноидов (в **Set**).

   Mon-**Mod**(Mon-**Mod**) состоит из набора множеств и четырех операций:
   $*_1, *_2 \; : \; M \times M \to M, \;\; e_1, e_2 \; : \; 1 \to M$

   Так как f, g – гомоморфизмы, то
   $(a *_2 b) *_1 (c *_2 d) = (*_2)(a, b) *_1 (*_2)(c, d) = *_2((*_1 \otimes *_1)((a, b), (c, d))) =$
   $*_2 (*_1(a, c), *_1(b, d)) = (a *_1 c) *_2 (b *_1 d)$

   Тогда $a *_1 b = (!_2 \;\; *_2 \;\; a) *_1 (b *_2 !_2) = (!_1 \;\; *_1 \;\; b) *_2 (a *_1 !_1) = b *_2 a =$
   $= (b *_1 !_1) *_2 (!_1 \;\; *_1 \;\; a) = (b *_2 !_2) *_1 (!_2 \;\; *_2 \;\; a) = b *_1 a$

6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.

7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \to M$, удовлетворяющий следующим условиям:

   - $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
   - $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
   - $0 \cdot x = 0$
   - $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
   - $1 \cdot x = x$

   Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

   $data\ Term\ a\ =\ Var\ a \mid App\ (Term\ a)\ (Term\ a) \mid Lam\ (Term\ (Maybe\ a))$

   Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.