

Задания

18 апреля 2021 г.

1. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

Пусть $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

- (а) Если U является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ – моно. Пусть в следующей диаграмме $U(f) \circ g = U(f) \circ h$.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} U(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(U(f) \circ g) &= \phi^{-1}(U(f) \circ h) \\ f \circ \phi^{-1}(g) &= f \circ \phi^{-1}(h) \Rightarrow \phi^{-1}(g) = \phi^{-1}(h) \Rightarrow f \circ \phi^{-1}(g) = f \circ \phi^{-1}(h) \Rightarrow f = g \end{aligned}$$

- (б) Если U является строгим, то обратное верно, то есть если $U(f)$ – мономорфизм, то f также является мономорфизмом.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} X \xrightarrow{f} Y$$

$$\begin{aligned} f \circ g = f \circ h, \quad U \text{ строгий} &\Rightarrow U(f \circ g) = U(f \circ h) \Rightarrow U(f) \circ U(g) = U(f) \circ U(h) \\ U(f) \circ U(h) &\Rightarrow U(g) = U(h) \Rightarrow \phi^{-1}(U(g)) = \phi^{-1}(U(h)) \Rightarrow g = h \end{aligned}$$

2. Докажите, что у забывающего функтора $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$, сконструированного в 5 ДЗ, существует левый сопряженный.

Построим левый обратный F .

Пусть $F((V, E)) = C$, где

$$Ob(C) = V$$

$Hom(v_a, v_b) = \{ [v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, \dots, v_b] \mid v_i \in V \}$ – произвольные конечные пути (если $v_a = v_b$, то $[v_a] \in Hom(v_a, v_b)$ – нейтральный элемент)

$$F_V(v) = v$$

$$F_E(e^{a \rightarrow b}) = [a, e^{a \rightarrow b}, b]$$

Композиция морфизмов — композиция путей.

Покажем, что $\text{Hom}(A, U(B)) \simeq \text{Hom}(F(A), B)$.

Пусть $f \in \text{Hom}(A, U(B))$, тогда ему можно однозначно сопоставить $g \in \text{Hom}(F(A), B)$:

$$g(V) = f(V)$$

$$g([v_a, E(v_a, v_1), v_1, E(v_1, v_2), v_2, \dots, v_b]) = f(E(v_a, v_1)) \circ f(E(v_1, v_2)) \dots$$

$$g([v_a]) = [f(v_a)]$$

3. Докажите, что левый сопряженный к некоторому функтору U уникален с точностью до изоморфизма, то есть если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то $F \simeq F'$.

$$\text{Пусть } \alpha_A = \epsilon_{F'A} \circ F\eta'_A, \quad \beta_A = \epsilon'_{FA} \circ F'\eta_A$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & FGF(A) & & \\
 \downarrow F\eta'_A & & \downarrow F\eta'_{GFA} & \searrow id & \\
 FGF'(A) & \xrightarrow{FGF'\eta_A} & FGF'GF(A) & \xrightarrow{FG\epsilon'_{FA}} & FGF(A) \\
 \downarrow \epsilon_{F'A} & & \downarrow \epsilon_{F'GFA} & & \downarrow \epsilon_{FA} \\
 F'(A) & \xrightarrow{F'\eta_A} & F'GF(A) & \xrightarrow{\epsilon'_{FA}} & F(A) \\
 & \dashrightarrow \beta_A & & &
 \end{array}$$

Верхний квадрат коммутует по натуральности η' , два нижних — по натуральности ϵ . Правый верхний треугольник — так как $F' \dashv U$. Композиция стрелок $F(A) \rightarrow FGF(A) \rightarrow FGF'(A) \rightarrow F(A)$ равна id , так как $F \dashv U$. Значит $\beta_A \circ \alpha_A = id$. Если построить симметричную диаграмму (меняем F, F'), то получится, что $\alpha_A \circ \beta_A = id$.

То есть α — изоморфизм функторов F, F' .

4. Есть ли у забывающего функтора $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ правый сопряженный? Докажите это.

Рассмотрим копроизведение абелевых групп. Оно равно произведению этих групп. Однако копроизведение множеств — это размеченное объединение, которое не изоморфно произведению. Раз он не сохраняет копроизведения, то он не левый сопряженный.

5. Есть ли у забывающего функтора $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Mon}$ правый сопряженный? Докажите это.

Рассмотрим функтор $F : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Grp}$, который оставляет только обратимые элементы моноида.

Пусть $f : U(A) \rightarrow B$. $f(a) * f(a^{-1}) = f(0) = 0 \Rightarrow f(a) = f(a^{-1})^{-1} \Rightarrow f(A) \subset F(B)$. Значит можно смотреть на f как на гомоморфизм групп. В обратную сторону тоже верно. Значит $Hom(U(A), B) \simeq Hom(A, F(B))$, где гомоморфизмы переходят в себя же.

6. Пусть **rGraph** – категорий рефлексивных графов. Объекты этой категории – это графы, в которых для каждой вершины x выбрана петля id_x в этой вершине. Морфизмы – морфизмы графов, сохраняющие тождественные петли.

Категория графов в данном упражнении не будет работать, но вместо **rGraph** можно взять категорию малых группоидов или категорию малых категорий; решение при этом не изменится.

Докажите, что у функтора $\Gamma : \mathbf{rGraph} \rightarrow \mathbf{Set}$, сопоставляющего каждому рефлексивному графу множество его вершин, существует правый сопряженный $C : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{rGraph}$ и левый сопряженный $D : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{rGraph}$, и у D существует левый сопряженный $\Pi_0 : \mathbf{rGraph} \rightarrow \mathbf{Set}$. Таким образом, мы получаем следующую цепочку сопряженных функторов:

$$\Pi_0 \dashv D \dashv \Gamma \dashv C$$

Определим $C : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{rGraph}$, который по множеству возвращает граф, вершины которого – элементы этого множества и между любой парой вершин существует ровно одно ребро.

Тогда $Hom(A, C(B))$ состоит из морфизмов, у которых действие на ребрах однозначно задается действием на вершинах – они склеивают ребра между одинаковыми парами вершин. Тогда $Hom(A, C(B)) \simeq Hom(\Gamma(A), B) \Rightarrow \Gamma \dashv C$.

Определим $D : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{rGraph}$, который по множеству возвращает граф, вершины которого – элементы этого множества, а из ребер есть только петли.

Тогда $Hom(D(A), B)$ состоит из морфизмов, у которых действие на ребрах однозначно задается действием на вершинах (так как морфизмы сохраняют выделенные петли). Тогда $Hom(D(A), B) \simeq Hom(A, \Gamma(B)) \Rightarrow D \dashv \Gamma$.

Рассмотрим $Hom(A, D(B))$. Если в A было ребро $a \rightarrow b$, то оно будет отображено в ребро $D(a) \rightarrow D(b)$. Это означает, что все вершины, между которыми есть ребра, должны быть отображены в одну, а все ребра между ними – в петлю. Тогда $Hom(A, D(B)) \simeq Hom(\Pi_0(A), B)$, где $\Pi_0 : \mathbf{rGraph} \rightarrow \mathbf{Set}$ по рефлексивному графу возвращает множество из компонент слабой связности данного графа.

7. Докажите, что категории **Fam_I** и **Set/I** эквивалентны.

Пусть $f, g : I \rightarrow \mathbf{Set}$ – объекты **Fam_I**, $f \in Hom(f, g)$.

Определим F :

$F(f) = (A, fst)$, где $A = \{(i, f(i)) \mid i \in I\}$
 $F(f) = \lambda(A, fst). (B, fst) : F(f) \rightarrow F(g)$, где
 $B = \{(i, f \circ i \circ f_i) \mid (i, f_i) \in A\}$
 (если смотреть на f как на функцию $\prod_{i \in I} \rightarrow f \circ i \rightarrow g \circ i$)

Коммутативность диаграммы $(fst = fst \circ F(f))$ очевидна.

Очевидно, что $F(id) = id$.

Если $g \in Hom(g, h)$, то $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, так как $g \circ i \circ (f \circ i) = (g \circ f) \circ i \circ (f \circ i)$.

Таким образом, F – функтор.

$Hom(f, g) \simeq Hom(F(f), F(g))$, так как $Hom(F(f), F(g))$ – множество функций, которые сохраняют первый элемент пары (так как диаграмма из определения **Set**/ I коммутует), а значит оно эквивалентно семейству функций $f \circ i \rightarrow g \circ i$.

Получается, что F полный и строгий. Осталось проверить существенную сюръективность.

Пусть $w : (A, f : A \rightarrow I)$, $A \in \mathbf{Set}$.

Возьмем $g = f^{-1} : I \rightarrow A$, который по индексу возвращает множество прообразов.

$F(g) = (B, fst)$, где $B = \{(i, f^{-1}(i)) \mid i \in I\}$

Так как $B \simeq A$, то по $fst^{B \rightarrow I}$ можно построить $f^{A \rightarrow I}$ и наоборот, а значит $F(g) \simeq w$. То есть для F существенно сюръективна.

Значит F – экви.

8. Пусть \mathbf{C} – декартова категория. Если A – объект \mathbf{C} , то мы можем определить функтор $A^* : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/A$ как $A^*(B) = (A \times B, \pi_1)$ и $A^*(f) = \text{id}_A \times f$.

- (а) Докажите, что у A^* есть левый сопряженный.

Возьмем $(X, f) \in \mathbf{C}/A$, $Y \in \mathbf{C}$.

$Hom((X, f), A^*(Y))$ состоит из функций $\langle h_1, h_2 \rangle : X \rightarrow A \times Y$ таких, что $\pi_1 \circ \langle h_1, h_2 \rangle = f$. То есть $h_1 = f$, а $h_2 : X \rightarrow Y$ – произвольная

Значит $Hom((X, f), A^*(Y)) \simeq Hom(X, Y)$.

Тогда можно определить забывающий функтор $F((X, f)) = X$, который будет левым сопряженным. (морфизмы $X \rightarrow Y$ переводятся в себя же).

- (б) Докажите, что если \mathbf{C} декартово замкнута и в \mathbf{C} есть уравниватели, то у A^* есть правый сопряженный.

Пусть $X \in \mathbf{C}$, $(Y, g) \in \mathbf{C}/A$.

$Hom(A^*(X), (Y, g)) = Hom((A \times X, \pi_1), (Y, g))$ состоит из функций таких $h : A \times X \rightarrow Y$, что $\pi_1 = g \circ h$.

Так как \mathbf{C} декартово замкнута, то в ней существуют экспоненты. По универсальному свойству для экспонент существует уникальная стрелка $f : X \rightarrow Y^A$ такая, что $ev \circ \langle f, id \rangle = h$. Значит существует инъекция $Hom(A^*(X), (Y, g)) \hookrightarrow Hom(X, Y^A)$

В обратную сторону: todo