

Задания

6 апреля 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \rightarrow \mathbf{C}$$

$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-}\mathbf{alg}$$

$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T .

2. Докажите, что категория Клейсли \mathbf{Kl}_T эквивалентна полной подкатегории $T\text{-}\mathbf{alg}$ на свободных T -алгебрах.
3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

$$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$$

$$\mathcal{S} = \{v, e, B\}$$

$$\mathcal{F} = \{edge : v \rightarrow v \rightarrow e \rightarrow B, \text{ id} : v \rightarrow e, \text{ Tru}, Fls : B\}$$

$$\mathcal{A} = \{edge \ x \ x \ (\text{id} \ x) = \text{Tru}\}$$

4. Докажите, что для любой малой категории \mathbf{C} категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.
5. Докажите, что категория $\mathbf{Mon}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{Mon}\text{-}\mathbf{Mod})$ моноидов в категории моноидов (в \mathbf{Set}) изоморфна категории коммутативных моноидов (в \mathbf{Set}).
6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.
7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \rightarrow M$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории \mathbf{Set} . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \rightarrow M$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- $0 \cdot x = 0$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории \mathbf{Set} . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

```
data Term a = Var a | App (Term a) (Term a) | Lam (Term (Maybe a))
```

Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.