

Задания

13 февраля 2021 г.

Если M – моноид, то мы будем обозначать \mathbf{C}_M категорию с одним объектом $*$ и множеством морфизмов $\text{Hom}_{\mathbf{C}_M}(*, *) = M$, операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в M .

Предпорядок (X, \leq) – это множество X с рефлексивным и транзитивным бинарным отношением \leq . Задать структуру предпорядка на множестве – это то же самое, что и задать на нем структуру категории, в которой между любой парой объектов существует максимум один морфизм. Если (X, \leq) – предпорядок, то мы будем обозначать соответствующую ему категорию как $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$. Множество объектов этой категории равно X , а множество морфизмов $\text{Hom}_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x, y)$ состоит из одного элемента, если $x \leq y$, и пусто в противном случае.

1. Изоморфны ли следующие объекты категории Λ_{ID} ? Если да, напишите функции, устанавливающие изоморфизм.
 - (a) Bool и Maybe Bool.
 - (b) Either Bool Bool и $\text{Bool} \times \text{Bool}$.
 - (c) Nat и Maybe Nat.
 - (d) Nat и List Nat.

Решение

- (a) Нет
 - (b) Нет
 - (c) Нет
 - (d) Нет
2. Пусть M – некоторый моноид. Определим тогда категорию \mathbf{C}_M как категорию с одним объектом и множеством морфизмов равным M . Композиции и тождественный морфизм определяются из структуры моноида. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?
 - (a) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N}, +)}$.

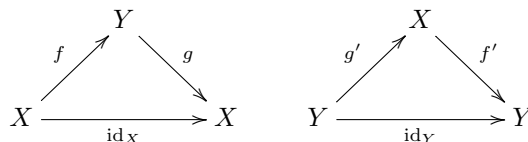
- (b) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N},*)}$.
 - (c) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},+)}$.
 - (d) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},*)}$.
 - (e) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},+)}$.
 - (f) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},*)}$.
3. Предпорядок называется частичным порядком, если из условия, что $x \leq y$ и $y \leq x$, следует, что $x = y$. Чему в категориальных терминах соответствует это свойство? (Другими словами, утверждается, что предпорядок (X, \leq) является порядком тогда и только тогда, когда категория $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$ обладает некоторым свойством, которое обсуждалось на лекции. Что это за свойство?)
4. Опишите следующие моноиды и группы:
- (a) $\text{Aut}_{\mathbf{Set}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.
 - (b) $\text{Aut}_{\mathbf{FinSet}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.
 - (c) $\text{Endo}_{\mathbf{C}_M}(*),$ где M – некоторый моноид.
 - (d) $\text{Endo}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}).$
 - (e) $\text{Aut}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}).$
 - (f) $\text{Endo}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}),$ где \mathbf{Ring} – категория колец с единицей.
 $\forall f \in \text{Endo}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}) :$
 $\forall z \in \mathbb{Z}. f(z) = z \cdot f(1)$
 $\forall z \in \mathbb{Z}. z \cdot f(1) = f(z) = f(1 \cdot z) = f(1) \cdot z \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \vee f(1) = 1$
Значит $f(.) \equiv 0 \vee f = id$
 - (g) $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(X),$ где \mathbf{C} – скелетная категория, и X – произвольный объект \mathbf{C} .
 $\forall f \in \text{Aut}_{\mathbf{C}}(X) :$
 $???$
 - (h) $\text{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n).$
 $\forall f \in \text{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n) :$
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный оператор
 $\text{Endo}_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$ *изоморфен моноиду из матриц $n \times n$ с операцией умножения*
 - (i) $\text{Aut}_{\mathbf{Num}}(n).$
 $\forall f \in \text{Aut}_{\mathbf{Num}}(n) : f \in [0..n]^n$ – изоморфизм
Значит $\text{Aut}_{\mathbf{Num}}(n)$ – множество перестановок из n элементов
 - (j) $\text{Endo}_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x),$ где x – произвольный элемент X .
 $\text{Endo}_{\mathbf{C}_{(X, \leq)}}(x) = \{x \leq x\}$ операцией композиции по транзитивности
5. Какие из следующих категорий являются скелетными: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Λ**, **Mat**, **Num**?

- (a) **Set** — нет, так как $\{0\}$ изоморфен $\{1\}$, но не равны
 - (b) **FinSet** — нет, аналогично **Set**
 - (c) **Grp** — нет, $(\mathbb{R}, +)$ изоморфна $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$
 - (d) **Vec** — нет, $i\mathbb{R}$ изоморфен \mathbb{R} , но не равен
 - (e) Λ — нет, $a \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a$ изоморфен $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow a$:
 $f = \lambda h a b. h b a$
 $f \circ f = \lambda x. f(fx) = \lambda x. f(\lambda b a. x a b) = \lambda x a b. x a b = \lambda x. x = id$
 - (f) **Mat** — да
 - (g) **Num** — да
6. Какие из следующих категорий являются группоидами: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ , **Mat**, **Num**?
- (a) **Set** — нет, есть инъекции, например
 - (b) **FinSet** — нет, есть инъекции, например
 - (c) **Grp** — нет, можно построить гомоморфизм в группу из одного нейтрального элемента
 - (d) **Vec** — нет, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 - (e) Λ — нет, есть терм с типом $(a \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow b)$
 - (f) **Mat** — нет, есть необратимые матрицы
 - (g) **Num** — нет, $(2) \in \text{Hom}_{\mathbf{Num}}(1, 2)$ не является изоморфизмом, так как $\text{Hom}_{\mathbf{Num}}(2, 1) = \{(1, 1)\}$
7. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?
- (a) Дискретные категории.
Всегда скелетные
 - (b) Категории вида \mathbf{C}_M .
Всегда скелетные
 - (c) Категории предпорядка.
Если это частичный порядок
 - (d) Группоиды.
Когда $\exists f \in \text{Hom}(A, B) \Rightarrow A = B$
8. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?
- (a) Дискретные категории.
Всегда группоиды.
 - (b) Категории вида \mathbf{C}_M .
Когда все элементы M обратимы

(с) Категории предпорядка.
Когда это дискретные категории

(d) Скелетные категории.
Когда это дискретные категории

9. Пусть $f, f' : X \rightarrow Y$ и $g, g' : Y \rightarrow X$ – морфизмы в некоторой категории **C**. Докажите, что если диаграммы



коммутируют и $f = f'$, то X и Y изоморфны.

Перевернем первый треугольник и склеим со вторым.

Так как они коммутировали, то полученная диаграмма будет коммутировать.

Отсюда: $\text{id}_X \circ g' = g \circ \text{id}_Y \Rightarrow g = g'$

$g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y \Rightarrow X$ изоморфен Y

10. Приведите пример, показывающий, что условие $f = f'$ в предыдущем задании является необходимым.
11. Какие из следующих категорий являются малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ , **Mat**, **Num**, \mathbf{C}_M , $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$?
12. Какие из следующих категорий являются локально малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, Λ , **Mat**, **Num**, \mathbf{C}_M , $\mathbf{C}_{(X, \leq)}$?