

# Задания

6 апреля 2021 г.

1. Пусть  $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \rightarrow \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто  $T$ .

2. Докажите, что категория Клейсли  $\mathbf{Kl}_T$  эквивалентна полной подкатегории  $T\text{-}\mathbf{alg}$  на свободных  $T$ -алгебрах.
3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

$$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$$
$$\mathcal{S} = \{v, e\}$$
$$\mathcal{F} = \{src : e \rightarrow v, \ dst : e \rightarrow v, \ id : v \rightarrow e\}$$
$$\mathcal{A} = \{src(id\ x) = x, \ dst(id\ x) = x\}$$

4. Докажите, что для любой малой категории  $\mathbf{C}$  категория функторов  $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$  эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.
5. Докажите, что категория  $\mathbf{Mon}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{Mon}\text{-}\mathbf{Mod})$  моноидов в категории моноидов (в  $\mathbf{Set}$ ) изоморфна категории коммутативных моноидов (в  $\mathbf{Set}$ ).
6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.
7. Пусть  $(A, *, 1)$  – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом  $A$  – это моноид  $(M, +, 0)$  вместе с операцией  $\cdot : A \times M \rightarrow M$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$  является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории  $\mathbf{Set}$ . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть  $(A, +, 0, *, 1)$  – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом  $A$  – это моноид  $(M, +, 0)$  вместе с операцией  $\cdot : A \times M \rightarrow M$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- $0 \cdot x = 0$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$  является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории  $\mathbf{Set}$ . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

```
data Term a = Var a | App (Term a) (Term a) | Lam (Term (Maybe a))
```

Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.