

Задания

15 апреля 2021 г.

1. Пусть $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-}\mathbf{alg} \rightarrow \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-}\mathbf{alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T .

2. Докажите, что категория Клейсли \mathbf{Kl}_T эквивалентна полной подкатегории $T\text{-}\mathbf{alg}$ на свободных T -алгебрах.

Определим функтор $F : \mathbf{Kl}_T \rightarrow T\text{-}\mathbf{alg}^{free}$, где $T\text{-}\mathbf{alg}^{free}$ – полная подкатегория $T\text{-}\mathbf{alg}$ на свободных алгебрах.

$$F(A) = (T A, \mu_A)$$
$$F(f) = T f$$

Определение корректно, так как данная диаграмма коммутует по нитуральности μ :

$$\begin{array}{ccc} TTA & \xrightarrow{\mu_A} & TA \\ \downarrow TTf & & \downarrow Tf \\ TTTB & \xrightarrow{\mu_{TB}} & TB \end{array}$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \quad F(id) = id, \text{ так как } T \text{ – функтор}$$

Докажем, что F – полный и строгий. Следующая диаграмма коммутует

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & TA \\ \downarrow f & & \downarrow Tf \\ TB & \xleftarrow{\mu_B} & TTB \end{array}$$

так как $\mu_B \circ Tf \circ \eta_A = f \circ \mathbf{kl}_T \eta_A = f \circ \mathbf{kl}_T id_A = f$.

A значит $Hom(A, TB) \rightarrow Hom((TA, \mu_A), (TB, \mu_B))$ – биекция.

Так как F существенно сюръективен (прообраз (TA, μ_A) есть A), то F – эквивалентность категорий.

3. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.

$$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$$

$$\mathcal{S} = \{v, e\}$$

$$\mathcal{F} = \{src : e \rightarrow v, dst : e \rightarrow v, id : v \rightarrow e\}$$

$$\mathcal{A} = \{src(id\ x) = x, dst(id\ x) = x\}$$

4. Докажите, что для любой малой категории \mathbf{C} категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.

Определим теорию T :

$$T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A}) :$$

$$\mathcal{S} = Ob(\mathbf{C})$$

$$\mathcal{F} = \{f_h^{AB} : A \rightarrow B \mid h \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \ \forall A, B \in \mathbf{C}\}$$

$$\mathcal{A} = \{f_{id}^{AA}(x) = x, f_f^{BC}(f_g^{AB}(a)) = f_{f \circ g}^{AC}(a)\}$$

Теперь определим функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow T\text{-Mod}$:

На объектах (функторах):

$$F(f) = M, \text{ где}$$

$$M(A) = f(A)$$

$$M(f_h^{AB}) = f(h)$$

На морфизмах (естественных преобразованиях):

$$F(\alpha) = \alpha$$

Определение корректно: пусть $F(f) = M, F(g) = N$. Тогда:

$$\alpha_B(M(f_h^{AB})(a)) = \alpha_B(f(h)(a)) = g(h)(\alpha_A(a)) = N(f_h^{AB})(\alpha_A(a))$$

в силу естественности α :

$$\begin{array}{ccc} f(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & g(A) \\ \downarrow f(h) & & \downarrow g(h) \\ f(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & g(B) \end{array}$$

Из определения F на морфизмах очевидно, что

$$Hom(A, B) = Hom(F(A), F(B)). \text{ Более того, можно построить функтор}$$

$$U : T\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} :$$

$$U(M) = f, \text{ where } f(A) = M(A), f(h \in Hom(A, B)) = M(f_h^{AB})$$

$$U(\alpha) = \alpha.$$

Тогда $F \circ U = id$, $U \circ F = id$. Значит категории изоморфны, а значит и эквивалентны.

5. Докажите, что категория $\mathbf{Mon}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathbf{Mon}\text{-}\mathbf{Mod})$ моноидов в категории моноидов (в **Set**) изоморфна категории коммутативных моноидов (в **Set**).
6. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.
7. Пусть $(A, *, 1)$ – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \rightarrow M$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

8. Пусть $(A, +, 0, *, 1)$ – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом A – это моноид $(M, +, 0)$ вместе с операцией $\cdot : A \times M \rightarrow M$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- $0 \cdot x = 0$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$ является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории **Set**. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

9. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

```
data Term a = Var a | App (Term a) (Term a) | Lam (Term (Maybe a))
```

Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.