Задания

13 апреля 2021 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.

2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если a, b – объекты $\mathbf{C}$ такие, что b^a существует, то $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$ тоже существует и определяется как $\mathbf{y}(b^a)$.

3. Докажите, что коллекция объектов вида $\mathbf{y}a$ является генератором для категории предпучков.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{y}a \arrow[r, "s"] & F \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & G \end{tikzcd}$$

   $Hom(\mathbf{y}a, F) \simeq F_a, \quad Hom(\mathbf{y}a, G) \simeq G_a.$
   $f \simeq f' : F_a \to G_a, \quad g \simeq g' : F_a \to G_a$
   $\forall s' \in F_a : f'(s') = g'(s') \Rightarrow f' = g' \Rightarrow f = g$

4. Определите категорию $\mathbf{C}$, такую что $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ эквивалентна категори рефлексивных графов.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop left, "id"] \arrow[rr, bend left, "src"] \arrow[rr, bend right, "dst"'] & & E \arrow[ll, "i"] \arrow[loop above, "l"] \arrow[loop right, "id"] \arrow[loop below, "r"] \end{tikzcd}$$

   G_E – ребра, G_V – вершины.
   $dst, src : \ G_E \to G_V$
   $i : \ G_V \to G_E$
   $dst \circ i = id$
   $src \circ i = id$
   $i \circ dst = r$
   $i \circ src = l$
   $src \circ l = src$
   $dst \circ l = src$
   $dst \circ r = dst$
   $src \circ r = dst$

$l \circ i = i$
$r \circ i = i$

5. Докажите, что функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{D}$ является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.

   Достаточно доказать, что если он сохраняет копределы, то он левый сопряженный.

   Пусть $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$. Тогда по ко-лемме $X = colim_a\ \mathbf{y}a$.
   $\mathrm{Hom}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}(F(colim_a\ \mathbf{y}\ a), Y) =$
   $= \mathrm{Hom}(colim_a\ F(\mathbf{y}\ a), Y) = lim_a \mathrm{Hom}(F(\mathbf{y}\ a), Y) =$
   $= lim_a \mathrm{Hom}(\mathbf{y}\ a, Hom(F(\mathbf{y}\ \_), Y)) =$
   $= \mathrm{Hom}(colim_a\ \mathbf{y}\ a, Hom(F(\mathbf{y}\ \_), Y)) = \mathrm{Hom}(X, Hom(F(\mathbf{y}\ \_), Y)) =$
   $=: \mathrm{Hom}(X, U(Y))$

   $U = \mathrm{Hom}(F(\mathbf{y}\ \_), \_) \quad : \quad D \to \mathbf{Set}^{C^{op}}$ — правый сопряженный

6. Докажите, что функтор $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ является свободным копополнением $\mathbf{C}$, то есть, что для любой коползной категории $\mathbf{D}$ и любого функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ существует уникальный (с точностью до изоморфизма) функтор $\widetilde{F} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{D}$, сохраняющий копределы, и такой, что следующая диаграмма коммутирует (с точностью до изоморфизма функторов):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathbf{y}"'] & \mathbf{D} \\ \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"'] & \end{tikzcd}$$

   Пусть такой $\widetilde{F}$ существует и пусть $X \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} = colim_a\ \mathbf{y}\ a$. Тогда
   $\widetilde{F}(X) = \widetilde{F}(colim_a\ \mathbf{y}\ a) = colim_a\ (\widetilde{F}(\mathbf{y}\ a)) = colim_a\ F_a$.

   Тогда можно взять $\widetilde{F}(X) = colim_a\ F_a$ как определение $\widetilde{F}$. Оно корректно, так как в $\mathbf{D}$ существуют копределы.