# 旋转壳对称载荷有限元应力分析的系数配置法

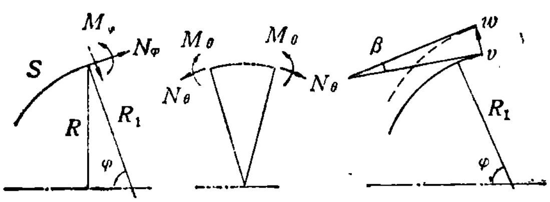
**何自信**　（航天部四院41所，西安）

**提要**　本文用有限元系数配置法分析轴对称旋转壳，计算时不需坐标转换，对各种类型的壳体元素统一采用同一组基本公式协调求解．算法简单，精度高，可用于圆柱壳，圆锥壳，平法兰等工程上常用的旋转壳结构．由于在协调求解中可插入解析公式，便于处理螺栓连接，结合裙等不连续结构．本法是在文献[1]基础上改进而成．

**关键词**　旋转壳，有限元，系数配置法．

## 1. 基本公式

图 1 (a) 表示一般形状的旋转壳的几何参数和内力，图 1(b) 表示变形时的位移和转角．




(a)　　　(b)

图　1

按图可以算出

径向位移　$\delta_y = v\cos\varphi + w\sin\varphi$　(1-1)

轴向位移　$\delta_x = v\sin\varphi - w\cos\varphi$　(1-2)

径向内力　$P_y = N_\varphi\cos\varphi - Q_\varphi\sin\varphi$　(1-3)

轴向内力　$P_x = N_\varphi\sin\varphi + Q_\varphi\cos\varphi$　(1-4)

变形时的几何关系：

转角　$$\beta = \frac{dw}{ds} - \frac{v}{R_1} \qquad (1\text{-}5)$$

应变　$$\varepsilon_\varphi = \frac{dv}{ds} + \frac{w}{R_1} \qquad (1\text{-}6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\delta_y}{R} \qquad (1\text{-}7)$$

曲率变化　$$K_\varphi = \frac{d\beta}{ds} \qquad (1\text{-}8)$$

$$K_\theta = \frac{\cos\varphi}{R}\beta \qquad (1\text{-}9)$$

内力与应变之间的物理关系是：

$$N_\varphi = G(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\theta) \qquad (2\text{-}1)$$

$$N_\theta = G(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_\varphi) \qquad (2\text{-}2)$$

$$M_\varphi = D(K_\varphi + \mu K_\theta) \qquad (2\text{-}3)$$

$$M_\theta = D(K_\theta + \mu K_\varphi) \qquad (2\text{-}4)$$

式中，$G = \dfrac{Eh}{1-\mu^2}$，$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$．

以母线弧长 $s$ 为参数，平衡方程为

$$\frac{dN_\varphi}{ds} + (N_\varphi - N_\theta)\frac{\cos\varphi}{R} - \frac{Q_\varphi}{R_1} = -p_\varphi \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{dQ_\varphi}{ds} + \frac{Q_\varphi\cos\varphi + N_\theta\sin\varphi}{R} + \frac{N_\varphi}{R_1} = p_r \qquad (3\text{-}2)$$

$$\frac{dM_\varphi}{ds} + (M_\varphi - M_\theta)\frac{\cos\varphi}{R} = Q_\varphi \qquad (3\text{-}3)$$

式中 $p_\varphi$ 和 $p_r$ 分别为单位面积上的母线方向载荷和法向载荷．

## 2. 计算步骤

系数配置法的原理是计算时把壳体分成有限个元素，在每一个元素内以母线长度 $s$ 为参数，用一个包含若干待定系数的位移函数表示假定的位移，然后根据上述基本公式，利用平衡条件、连续条件、边界条件列方程式求解、配置这些系数，就可求得真正的位移表达式，进而可算内力和应力．具体步骤如下：

### 2.1 假定位移函数

$$v = K_1 + K_2 s + K_3 s^2 + K_4 \cdot \begin{cases} s^3 + K_5 s^4 \ (\varphi \neq 0 \text{ 或 } R_1 \text{ 为有限值时}) \\ \dfrac{1}{R} \qquad (\varphi = 0 \text{ 且 } R_1 \text{ 为}\infty\text{时}) \end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

$$w = (K_5 \ln R \text{ 当 } \varphi = 0 \text{ 且 } R_1 \text{ 为}\infty\text{时}) + K_6 + K_7 s + K_8 s^2 + K_9 s^3 + K_{10} s^4 + K_{11} s^5 \tag{4-2}$$

式中，$K_1, K_2, \cdots K_{11}$ 为待定系数；$s$ 为元素的母线长度.

**2.2** 利用位移函数求基本公式中有关量的微分和表达式,并用矩阵表示. 如转角

$$[\beta] = \left[-\frac{1}{R_1} \quad -\frac{s}{R_1} \quad -\frac{s^2}{R_1} \quad -\frac{s^3}{R_1} \quad -\frac{s^4}{R_1} \quad 0 \quad 1 \quad 2s \quad 3s^2 \quad 4s^3 \quad 5s^4\right][K] \tag{5-1}$$

式中 $[K] = [K_1 K_2 \cdots K_{11}]^T$ (5-2)

其它 $\left[\frac{dv}{ds}\right]$, $\left[\frac{d\beta}{ds}\right]$, $[\delta_y]$, $[\delta_x]$, $[N_\varphi]$, $\left[\frac{dN_\varphi}{ds}\right]$, $[N_\theta]$, $[M_\varphi]$, $\left[\frac{dM_\varphi}{ds}\right]$, $[M_\theta]$, $[Q_\varphi]$, $\left[\frac{dQ_\varphi}{ds}\right]$, $[P_x]$, $[P_y]$, $[P_r]$, $[P_\varphi]$ 等等都可依次求出，不再赘述. 这里需要注意 $\varphi$ 和 $R$ 也是 $s$ 的函数，它们的微分关系是

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R_1} \tag{6-1}$$

$$\frac{dR}{ds} = \cos\varphi \tag{6-2}$$

**2.3** 列方程式. 如把一壳体分成 $N$ 个元素,则有 $11N$ 个待定系数,需列出 $11N$ 个方程式求解. 方程组成如下:

**2.3.1** 平衡方程. 每一元素的起点和终点即 $s=0$ 和 $s=s$ 时各列 3 个平衡方程式

$$[P_\varphi] = 0 \tag{7-1}$$

$$[P_r] = p \tag{7-2}$$

$$[P_x] = p_{x_0} \tag{7-3}$$

其中 $[P_x]$ 是由 $[N_\varphi]$ 和 $[Q_\varphi]$ 合成的轴向力阵，用以代替平衡方程中右端项无法确定的 $[Q_\varphi]$.

$N$ 个元素共 $6N$ 个方程式.

**2.3.2** 协调方程. 元素连续,节点上位移和内力对应相等. 即

$$[\delta_y]_{is} = [\delta_y]_{(i+1)0} \tag{8-1}$$

$$[\delta_x]_{is} = [\delta_x]_{(i+1)0} \tag{8-2}$$

$$[\beta]_{is} = [\beta]_{(i+1)0} \tag{8-3}$$

$$[M_\varphi]_{is} = [M_\varphi]_{(i+1)0} \tag{8-4}$$

$$[P_y]_{is} = [P_y]_{(i+1)0} \tag{8-5}$$

式中 $is$ 表示第 $i$ 个元素 $s=S$,$(i+1)0$ 表示第 $(i+1)$ 个元素 $s=0$.

每个节点可列 5 个方程式，$N$ 个元素共 $5(N-1)$ 个方程式.

**2.3.3** 边界方程. 壳体第一个元素起点和最后一个元素终点各取 $[\delta_y]$, $[P_y]$, $[\beta]$, $[M_\varphi]$ 中任意两个给定已知值,可列 4 个方程式,再在起始点或最终点给定轴向位移为零,即 $[\delta_x] = 0$,共 5 个方程式.

总计 $6N + 5(N-1) + 5 = 11N$ 个方程式,可解 $11N$ 个未知数,满足要求.

**2.4** 解方程组，配置系数，求内力和应力. 按上述方法所列方程为 $11N$ 阶不对称带型方程组. 本题所编 SAS 程序把 $[11N \times 11N]$ 系数阵转换为 $[11N \times 26]$ 系数阵，用列主元消去法求解,获得满意结果.

方程解出后,系数配置完毕,各元素位移表达式确定. 进而根据需要再把各元素按弧长 $s$ 分成若干小段. 可求每段节点上的位移、转角、内力以及应力. 每个元素都如此，可求壳体上任意点的位移和内力.

## 3. 几种特殊结构的处理

### 3.1 部分特殊元素的处理

在某些特殊结构中，部分元素的几何参数可以取负值. 如图 2 中第 3 个元素 $\varphi$ 角取负值，第 2 个元素和第 8 个元素 $R_1$ 取负值. 另外,元素 1 不能从轴线算起,否则 $R=0$ 发生奇异算不下去,在这种情况下,给定 $R$ 一个较小值就可以了.

### 3.2 连接螺栓的处理

二元素之间的连接螺栓受力后产生转角和位移，应在所连接的二元素协调方程中加以考虑. 设在 $j$ 和 $(j+1)$ 元素之间有与旋转轴线平行放置的连接螺栓 $AB$，结构和受力情况如图 3. $PP$ 是止扣受的力. $j$ 和 $j'$ 元素的内力通过左端 $A$ 点传给螺栓又通过右端 $B$ 点和 $(j+1)$ 元素协调. 螺栓两端所受弯矩和径向力分别为

$$M_L^{左} = \frac{2\pi R}{n_L}\left[(M_\varphi)_{js} + \frac{L}{2}(P_y)_{js}\right.$$

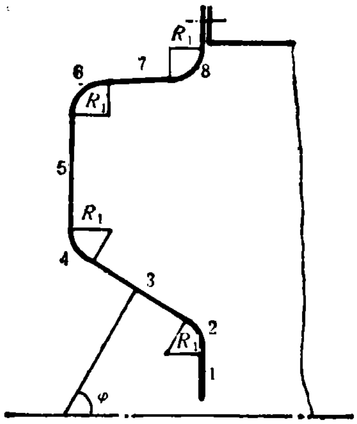


图 2

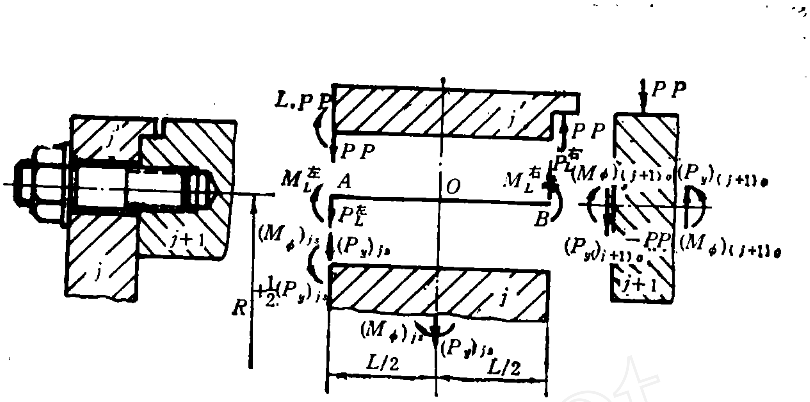


图 3

$$-L\cdot PP\Big] \qquad (9\text{-}1)$$

$$P_L^{左}=\frac{2\pi R}{n_L}[(P_y)_{js}-PP] \qquad (9\text{-}2)$$

$$M_L^{右}=\frac{2\pi R}{n_L}[(M_\varphi)_{(j+1)0}] \qquad (9\text{-}3)$$

$$P_L^{右}=\frac{2\pi R}{n_L}[(P_y)_{(j+1)0}-PP] \qquad (9\text{-}4)$$

由螺栓平衡求得内力协调关系为

$$[P_y]_{(j+1)0}=[P_y]_{js} \qquad (9\text{-}5)$$

$$[M_\varphi]_{(j+1)0}=[M_\varphi]_{js}-\frac{L}{2}[P_y]_{js} \qquad (9\text{-}6)$$

螺栓受力后 $B$ 点相对 $A$ 点的位移和转角:

$$\delta_L=\frac{2\pi R L^2}{6n_L E_L J_L}\Big[3(M_\varphi)_{js}+\frac{L}{2}(P_y)_{js}-2L\cdot PP\Big] \qquad (9\text{-}7)$$

$$\beta_L=\frac{2\pi R L}{n_L E_L J_L}\Big[(M_\varphi)_{js}-\frac{L}{2}\cdot PP\Big] \qquad (9\text{-}8)$$

有止扣时 $\delta_L=0$ 可求 $PP$，无止扣时 $PP=0$ 可算 $\delta_L$ 和 $\beta_L$，再考虑到 $(\beta)_{js}$ 对 $(\delta_y)_{(j+1)0}$ 的影响，两种情况下的位移和转角协调关系为:

有止扣时:

$$[\delta_y]_{(j+1)0}=[\delta_y]_{js}+\frac{L}{2}[\beta]_{js} \qquad (9\text{-}9)$$

$$[\beta]_{(j+1)0}=[\beta]_{js}+\frac{\alpha}{4}R\times\Big\{[M_\varphi]_{js}-\frac{L}{2}[P_y]_{js}\Big\} \qquad (9\text{-}10)$$

$$PP=\frac{3}{2L}(M_\varphi)_{js}+\frac{1}{4}(P_y)_{js} \qquad (9\text{-}11)$$

或

$$PP=\frac{3}{2L}(M_\varphi)_{(j+1)0}+(P_y)_{(j+1)0} \qquad (9\text{-}12)$$

无止扣时:

$$[\delta_y]_{(j+1)0}=[\delta_y]_{js}-\frac{L}{2}[\beta]_{js}+\frac{\alpha}{2}RL\Big\{[M_\varphi]_{js}+\frac{L}{6}[P_y]_{js}\Big\} \qquad (9\text{-}13)$$

$$[\beta]_{(j+1)0}=[\beta]_{js}+\alpha R[M_\varphi]_{js} \qquad (9\text{-}14)$$

$$PP=0 \qquad (9\text{-}15)$$

以上式中

$$\alpha=\frac{2\pi L}{n_L E_L J_L}=\frac{128L}{n_L E_L d_L^4} \qquad (9\text{-}16)$$

其中，$L$ 为螺栓长度; $n_L$ 为螺栓数量; $d_L$ 为螺栓直径; $E_L$ 为弹性模量.

### 3.3 结合裙的处理

结合裙和壳体连接是三个元素汇集在一点，如按三元素协调必然增加方程组带宽，不是好办法. 现按解析法处理. 设在 $K$ 和 $(K+1)$ 元素之间有一圆柱形裙 $AB$(图 4)，把裙分离出

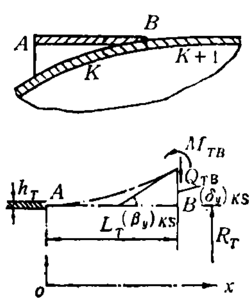


图 4

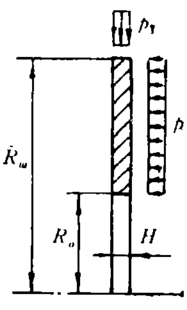


图 5

来，$A$ 点为自由端，$M_{TA}=0$，$Q_{TA}=0$，$B$ 点受壳体变形影响产生径向位移 $(\delta_y)_{Ks}$，转角 $(\beta)_{Ks}$，把这四个边界条件代入圆柱壳弯曲挠度方程

$$w_T(x)=e^{-\bar\beta x}(C_1\cos\bar\beta x+C_2\sin\bar\beta x)+e^{\bar\beta x}(C_3\cos\bar\beta x+C_4\sin\bar\beta x) \quad (10\text{-}1)$$

$$\beta_T(x)=\frac{dw_T(x)}{dx} \quad (10\text{-}2)$$

$$M_T(x)=D_T\frac{d^2w_T(x)}{dx^2} \quad (10\text{-}3)$$

$$Q_T(x)=D_T\frac{d^3w_T(x)}{dx^3} \quad (10\text{-}4)$$

求得 $B$ 点的弯矩和剪力分别是

$$M_{TB}=M_D(\delta_y)_{Ks}+M_B(\beta)_{Ks} \quad (11\text{-}1)$$

$$Q_{TB}=Q_D(\delta_y)_{Ks}+Q_B(\beta)_{Ks} \quad (11\text{-}2)$$

式中

$$\bar\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu_T)}{R_T^2h_T^2}} \quad (11\text{-}3)$$

$$D_T=\frac{E_Th_T^3}{12(1-\mu_T^2)} \quad (11\text{-}4)$$

$$M_D=-2D_T\bar\beta^2[e^{2\bar\beta L_T}+e^{-2\bar\beta L_T}-2\cos2\bar\beta L_T]/FM \quad (11\text{-}5)$$

$$M_B=2D_T\bar\beta[e^{2\bar\beta L_T}-e^{-2\bar\beta L_T}-2\sin2\bar\beta L_T]/FM \quad (11\text{-}6)$$

$$Q_D=4D_T\bar\beta^3[-e^{2\bar\beta L_T}+e^{-2\bar\beta L_T}-2\sin2\bar\beta L_T]/FM \quad (11\text{-}7)$$

$$Q_B=2D_T\bar\beta^2[e^{2\bar\beta L_T}+e^{-2\bar\beta L_T}-2\cos2\bar\beta L_T]/FM \quad (11\text{-}8)$$

$$FM=e^{2\bar\beta L_T}+e^{-2\bar\beta L_T}+2(2+\cos2\bar\beta L_T) \quad (11\text{-}9)$$

其中，$R_T$ 为裙半径；$h_T$ 为裙壁厚；$L_T$ 为裙宽度；$E_T$，$\mu_T$ 为裙材料弹性模量，波桑比.

元素 $K$ 和 $(K+1)$ 之间协调方程变为

$$[M_\varphi]_{(K+1)0}=[M_\varphi]_{Ks}+M_D[\delta_y]_{Ks}+M_B[\beta]_{Ks} \quad (12\text{-}1)$$

$$[P_y]_{(K+1)0}=[P_y]_{Ks}-Q_D[\delta_y]_{Ks}-Q_D[\beta]_{Ks} \quad (12\text{-}2)$$

**4. 计算实例**

例 1　受轴向压力 $p=10\times10^5$ Pa 和径向外压 $p_1=10P$ 的圆环板(图 5). 外径 $R_w=145$cm，内径 $R_0=25$ cm，壁厚 $H=3.6$ cm. 边界条件：$R=R_0$ 时，$M_\varphi=0$，$P_y=0$；$R=R_w$ 时，$w=0$，$\beta=0$，$P_y=-p_1H$. 分 4 个元素计算，结果见表 1. 最大误差 2.9%.

例 2　受边界效应影响的圆柱筒. 筒径 $\phi$ 160cm，壁厚 2.6cm，受内压 $35\times10^5$Pa. 边界条件：左端厚堵盖连接，$\delta_y=0$，$\beta=0$，右端

**表 1　圆环板应力**（$10^5$Pa）

| $R$(cm) | | 25 | 50 | 85 | 125 | 145 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r$ | 解析法值 | 0 | 3320.41 | 279.43 | −7101.97 | −12057.57 |
| | 本法值 | 0 | 3320.97 | 280.25 | −7101.56 | −12057.20 |
| | 误差% | | −0.017 | −0.29 | −0.0058 | 0.0031 |
| $\sigma_\theta$ | 解析法值 | 11637.32 | 6799.40 | 3728.73 | −803.14 | −3693.40 |
| | 本法值 | 11634.62 | 6798.58 | 3728.58 | −803.08 | −3693.29 |
| | 误差% | 0.023 | 0.012 | 0.0040 | 0.0075 | 0.0030 |

**表 2　圆柱筒边界效应引起的弯矩**（N·m/cm）

| 距左端距离 $x$(cm) | 0 | 4 | 13 | 23 | 33.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 解析法值 | 186.991 | 76.927 | −30.209 | −31.742 | −9.162 |
| 本 法 值 | 187.150 | 77.356 | −30.336 | −32.033 | −9.108 |
| 误 差 % | −0.085 | −0.56 | −0.42 | −0.92 | 0.59 |

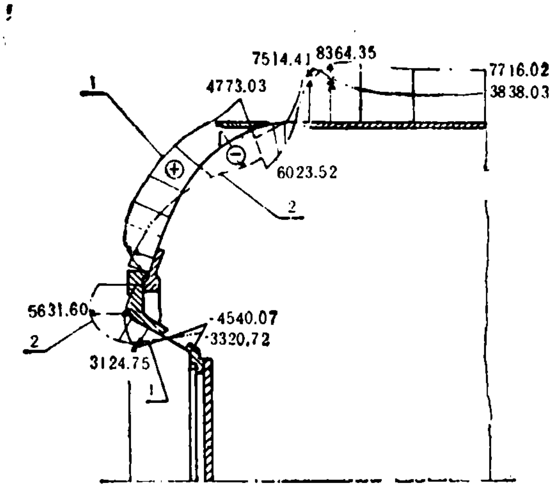



图 6

1 为母线方向应力 ($10^5$Pa) 2 为环向应力 ($10^5$Pa)
× 为母线方向实测应力. ▲为环向实测应力

$M_\varphi=0$, $\beta=0$, $\delta_x=0$. 在长度45cm范围内分9个元素计算,所得弯矩值列于表2中.可以看出,误差都在1%以下.

例3 倒锥壳、平法兰、椭球封头、圆柱壳组合结构应力分析.图6,分23个元素,考虑螺栓连接和裙部结构.算得应力分布曲线绘制在图6上.螺栓连接处平法兰转角 $-0.83°$,与水压试验实测值 $-0.85°$ 基本一致.

## 参考文献

[1] Nichols, R. W., Developments in Stress Analysis for Pressurized Components, Applied Science Publishers LTD, LONDON (1977).

(本文于1985年3月14日收到)

# 一立方米爆炸泄压试验和它的实用价值

王宝兴 裴惠芬 杜兰平 胡英年 (天津消防科学研究所)

**提要** 本文介绍了1米³爆炸泄压试验情况,并测得了泄压过程中的最高压力峰 $P_3$.

**关键词** 爆炸泄压,压力峰.

关于爆炸泄压以前的研究大多采用小容积容器,例如,Bradley 和 Mitcheson[1]根据小容积试验研究提出了"爆炸泄压安全性推荐意见".其将小容积试验数据推广到大容积(实际容积)的依据是"立方体规律",即认为有泄压口的容器的泄放爆炸压力(超压) $P$,对于同种可燃混气,在立方体(长细比小于3)的容器内,只和参数 $A/V^{2/3}$ 有关 ($A$ 为泄压口面积,$V$ 为容器或建筑物的容积,$A/V^{2/3}$ 通称为比例泄压面积).

然而近年的大容积试验[2]指出,在同样的 $A/V^{2/3}$ 情况下,小容积的 $P$ 比大容积试验的 $P$ 小(图1).

图1所示的这种差异一般都归因于流动产生的紊流度和 Taylor 不稳定性, Zalosh[3] 曾指出声动火焰不稳定性也可能是一个重要的原因。值得强调的是 Vanwingerden 和 Zeeuwen[4]

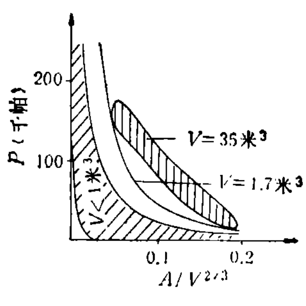



图1 不同容积的试验容器测得的 $P$ 与 $A/V^{2/3}$ 的关系[2]

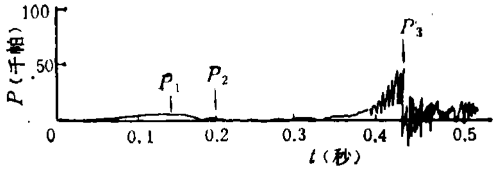



图2 5.2米³爆炸泄压试验容器内测得的 $P$-$t$ 曲线[4]