2006 年 8 月 计 算 数 学 第 28 卷第 3 期
Aug., 2006 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.28, No.3

Cahn-Hilliard 方程的有限元分析*1)

张 铁
(东北大学数学系, 沈阳 110004)

摘 要

建立了求解非线性发展型 Cahn-Hilliard 方程的有限元方法, 借助于一个双调和问题的有限元投影逼近, 给出了最优阶 L_2 模误差估计. 特别对于 3 次 Hermite 型有限元, 导出了 L_∞ 模和 W_∞^1 模的最优阶误差估计和导数逼近的超收敛结果.

关键词: Cahn-Hilliard 方程, 有限元分析, 稳定性和误差估计, 超收敛

MR (2000) 主题分类: 65N30, 65M60

FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR CAHN-HILLIARD EQUATION

Zhang Tie
(*Department of Mathematics, Northeastern University, Shenyang 110004, China*)

Abstract

The finite element method is presented for solving the nonlinear evolution Cahn-Hilliard equation. Optimal order error estimates is derived in L_2 norms by means of a finite element biharmonic projection approximation. Especially, for the third order Hermite finite element space, we establish the optimal order error estimates in L_∞ and W_∞^1 norms and the superconvergence property in derivative approximation.

Keywords: Cahn-Hilliard, finite element analysis, stability and error estimates, superconvergence

2000 Mathematics Subject Classification: 65N30, 65M60

1. 介 绍

Cahn-Hilliard 方程是一类重要的 4 阶非线性扩散方程, 最初由 Cahn 和 Hilliard 在 1958 年研究热力学中两种物质之间相互扩散现象时提出的 [1]. 现在 Cahn-Hilliard 方程已

* 2005 年 6 月 17 日收到.
1) 国家自然科学基金 (10471019) 资助项目.

广泛应用于描述生物种群的竞争和排斥, 河床迁移过程, 固体表面微粒扩散以及化学和材料学等领域中的物理现象 [2,3]. 关于 Cahn-Hilliard 方程解的理论已有较丰富的结果 [2-7], 近年来 Cahn-Hilliard 方程数值方法的研究引起了人们的广泛关注. 谱方法, 拟谱方法和差分方法的有关工作可参见文献 [8-11] 及所引文献. 就有限元方法而言, 除 Elliott 和 Du 的工作外 [12-15], 相关的工作较少且不完善, 例如, L_∞, W_∞^1 模最优阶误差估计和超收敛结果尚未见到, 而 Elliott 的工作 [13,14], 正如文 [15] 所指出, 存在着许多错误. 目前的有限元方法基本上是从原方程的混合形式出发进行的 [12,13,15], 这样的好处是可直接得到有限元解的有界性估计, 从而使非线性项处理变得很容易, 但这种方式也使计算的复杂性增加. 本文对 Cahn-Hilliard 方程的一般形式建立了半离散和全离散有限元逼近, 论证了有限元解的存在唯一性, 稳定性和质量守恒性质, 借助于双调和方程的有限元投影逼近和有限元解的稳定性估计, 给出了最优阶 L_2 模误差估计. 特别对最常用的 3 次 Hermite 型有限元, 建立了 L_∞, W_∞^1 模最优阶误差估计以及节点导数逼近的超收敛性质. 这些结果进一步丰富了 Cahn-Hilliard 方程的数值理论.

本文中, 用 $W_p^m(I)$ 表示通常的 Sobolev 空间, $\|\cdot\|_{m,p}$ 为相应范数, 当 $p=2$ 时, 记 $W_p^m(I)=H^m(I)$, $\|\cdot\|_{m,p}=\|\cdot\|_m$. $L_2(I)=H^0(I)$ 空间上的范数与内积分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$. 设 X 是一个 Banach 空间, $u(t):[0,T]\to X$ 表示 X- 值函数, 定义空间

$$L_p(0,T;X)=\{\,u(t):\ \|u\|_{L_p(X)}=(\int_0^T\|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}<\infty\},\ 1\le p\le\infty.$$

用 C 表示与剖分尺寸无关的常数, 在不同处可代表不同的常量.

2. 问题及其有限元近似

考虑 Cahn-Hilliand 方程初边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\gamma\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\dfrac{\partial^2\varphi(u)}{\partial x^2},\ 0<x<\pi,\ 0<t\le T,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\pi)=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0)=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi)=0,\ 0\le t\le T,\\ u(0,x)=u_0(x),\ 0\le x\le\pi. \end{cases} \tag{1}$$

这里, $T>0$ 为常数, $u(t,x)$ 是两种物质之一的密度, $0<\gamma<1$ 为迁移率, $u_0(x)$ 为给定的初值, 非线性项 $\varphi(u)=H'(u)$ 表示内在的化学能, $H(u)$ 是双井位势函数, 定义如下:

$$\varphi(u)=\gamma_0 u+\gamma_1 u^2+\gamma_2 u^3,\quad H(u)=\frac{1}{2}\gamma_0 u^2+\frac{1}{3}\gamma_1 u^3+\frac{1}{4}\gamma_2 u^4, \tag{2}$$

γ_0, γ_1, γ_2 为常数. 当 $\gamma_2>0$ 时, 如果 $u_0(x)$ 适当光滑, 问题 (1) 存在唯一整体解; 当 $\gamma_2<0$ 时, 问题 (1) 的解可能出现爆破现象 [4,5,7]. 本文中假设 $\gamma_2>0$, $\gamma_2<0$ 情形将另文讨论.

设 $I_h: 0 = x_0 < x_1 < \cdot < x_N = \pi$ 为区间 $I = [0, \pi]$ 的一个有限元剖分, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h = max\, h_i$. 记 $S_h^{(k)}$ 为剖分 I_h 上的分段 $k \geq 3$ 次多项式构成的有限元空间, 且

$$S_h^{(k)} \subset H_E^2(I) = \{ u \in H^2(I):\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \}.$$

问题 (1) 的等价变分形式为: 求 $u(t): (0, T] \to H_E^2(I)$, $u(0) = u_0(x)$, 使满足

$$(u_t, v) + \gamma (D^2u, D^2v) = (\varphi(u), D^2v),\ \forall v \in H_E^2(I). \tag{3}$$

这里, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $Du = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. 根据 (3) 式, 定义问题 (1) 的半离散有限元逼近: 求 $u_h(t): (0, T] \to S_h^{(k)}$ 使满足

$$\begin{aligned} &(u_{h,t}, v_h) + \gamma (D^2u_h, D^2v_h) = (\varphi(u_h), D^2v_h),\ \forall v_h \in S_h^{(k)}, \\ &u_h(0) \in S_h^{(k)}. \end{aligned} \tag{4}$$

在 (4) 式中取 $v_h = 1 \in S_h^{(k)}$ 可知, $u_h(t)$ 满足如下质量守恒性质:

$$\int_0^\pi u_h(t,x)dx = \int_0^\pi u_h(0,x)dx,\ \ 0 \leq t \leq T.$$

定理 1. 问题 (4) 的解 $u_h(t) \in S_h^{(k)}$ 唯一存在, 且满足稳定性估计

$$\|u_h(t)\| \leq e^{\beta t}\|u_h(0)\|,\ \ 0 \leq t \leq T,\ \ \beta = \frac{(2\gamma_1^2/\gamma_2 + |\gamma_0|)^2}{2\gamma}. \tag{5}$$

证明. 问题 (4) 等价于一个常微分方程组, 其局部解虽然是唯一存在的, 当 (5) 式成立时, 由延拓定理可推得整体解的唯一存在性. 因此只须证明稳定性估计式 (5). 在 (4) 式中取 $v_h = u_h$ 并利用分部积分, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|^2 + \gamma\|D^2u_h\|^2 = (\varphi(u_h), D^2u_h) = -(\varphi'(u_h)Du_h, Du_h) = (-\varphi'(u_h), (Du_h)^2).$$

由于 (注意 $\gamma_2 > 0$)

$$-\varphi'(u) = -2(\gamma_2u^2 + \gamma_1u) - \gamma_2u^2 - \gamma_0 \leq \begin{cases} |\gamma_0|, & |u| > |\gamma_1|/\gamma_2, \\ 2\gamma_1^2/\gamma_2 + |\gamma_0|, & |u| \leq |\gamma_1|/\gamma_2, \end{cases}$$

因此

$$(-\varphi'(u_h), (Du_h)^2) \leq (2\gamma_1^2/\gamma_2 + |\gamma_0|, (Du_h)^2) = -(2\gamma_1^2/\gamma_2 + |\gamma_0|)(u_h, D^2u_h).$$

代入前式且利用柯西不等式得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|^2+\gamma\|D^2u_h\|^2\le\frac{(2\gamma_1^2/\gamma_2+|\gamma_0|)^2}{2\gamma}\|u_h\|^2+\frac{\gamma}{2}\|D^2u_h\|^2, \tag{6}$$

由此得 $\frac{d}{dt}(e^{-2\beta t}\|u_h(t)\|^2)\le 0$, 关于 t 积分, 定理 1 得证.

对 (6) 式积分且利用 (5) 式, 也得到

$$\int_0^t\|D^2u_h(\tau)\|^2\,d\tau\le\frac{1}{\gamma}\left(\|u_h(0)\|^2+2\beta\int_0^t e^{2\beta t}\|u_h(0)\|^2\right)=\frac{1}{\gamma}e^{2\beta t}\|u_h(0)\|^2,\ 0\le t\le T.$$

由于

$$\|Du\|^2=(Du,Du)=-(u,D^2u)\le\|u\|\,\|D^2u\|\le\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|D^2u\|^2,\ \forall u\in H_E^2(I), \tag{7}$$

利用上式和定理 1, 可得有界性估计

$$\int_0^t\|u_h(\tau)\|_2^2\,d\tau\le\frac{3}{2}(1+\frac{1}{\gamma})e^{2\beta t}\|u_h(0)\|^2,\ \ 0\le t\le T. \tag{8}$$

3. 半离散误差分析

为了进行误差分析, 首先引进一个定常问题的有限元投影逼近. 设 $u\in H_E^2(I)$, 定义 u 的双调和有限元投影 $R_h: u\to R_hu\in S_h^{(k)}$ 使满足

$$a(u-R_hu,v_h)\equiv\gamma\,(D^2(u-R_hu),D^2v_h)+(u-R_hu,v_h)=0,\ \ \forall v_h\in S_h^{(k)}. \tag{9}$$

利用 (7) 式可得

$$\gamma^*\|u\|_2^2\le a(u,u),\ \forall u\in H_E^2(I),\ \ \gamma^*=\frac{1}{2}min\,(\gamma,1). \tag{10}$$

因此, $a(u,v)$ 是 $S_h^{(k)}$ 上对称正定的双线性形式, 则问题 (9) 的解 $u_h\in S_h^{(k)}$ 唯一存在. 利用双调和方程标准的有限元分析方法 [16], 容易得到

$$\|u-R_hu\|+h\|u-R_hu\|_1+h^2\|u-R_hu\|_2\le Ch^{r+1}\|u\|_{r+1},\ 2\le r\le k. \tag{11}$$

对于 3 次有限元, 还可得到更好的逼近结果.

定理 2. 设 $S_h^{(k)}=S_h^{(3)}$ 为 3 次 Hermite 型有限元空间, $u\in H_E^2(I)\bigcap H^4(I)$. 那么 R_hu 满足如下导数节点逼近的超收敛估计

$$|\,D(u-R_hu)(x_i)|\le Ch^4\|u\|_4.$$

进一步设 $u \in W^4_\infty(I)$, 则 $R_h u$ 满足如下 L_∞, W^1_∞ 模最优阶误差估计

$$\|u-R_hu\|_{0,\infty}+h\|u-R_hu\|_{1,\infty}\le Ch^4\|u\|_{4,\infty}.$$

证明. 设 $u_I \in S_h^{(3)}$ 为函数 u 的 Hermite 型插值逼近. 由于 $(u-u_I)(x_i)=D(u-u_I)(x_i)=0$, 且 $v_h\in S_h^{(3)}$ 为分段 3 次多项式, 则利用分部积分可得

$$(D^2(u-u_I),D^2v_h)=\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}D^2(u-u_I)D^2v_h\,dx=-\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}D(u-u_I)\,dx\,D^3v_h=0.$$

从而

$$|a(u-u_I,v_h)|=|\,(u-u_I,v_h)\,|\le Ch^4\|u\|_4\|v_h\|,\ \ \forall v_h\in S_h^{(3)}.$$

因此, 利用 (9) 和 (10) 式, 得到

$$\gamma^*\|u_I-R_hu\|_2^2\le a(u_I-R_hu,u_I-R_hu)=a(u_I-u,u_I-R_hu)\le Ch^4\|u\|_4\|u_I-R_hu\|,$$

则导出超收敛估计

$$\|u_I-R_hu\|_2\le Ch^4\|u\|_4. \tag{12}$$

写 $u-R_hu=u-u_I+u_I-R_hu$, 利用插值逼近性质, (12) 式和 Sobolev 嵌入定理, 且注意 $D(u-u_I)(x_i)=0$, 即推得定理 2 结论.

现在考虑半离散有限元解的误差估计. 设 u 和 u_h 分别为问题 (3) 和 (4) 的解. 分解误差

$$u-u_h=u-R_hu+R_hu-u_h=\eta(t)+\theta(t),\ \ \theta(t)\in S_h^{(k)}. \tag{13}$$

由 u, u_h 和 R_hu 所满足的方程 (3)、(4) 和 (9), 可知 θ 满足

$$(\theta_t,v_h)+\gamma\,(D^2\theta,D^2v_h)=(\eta-\eta_t,v_h)+(\varphi(u)-\varphi(u_h),D^2v_h),\ v_h\in S_h^{(k)}. \tag{14}$$

引理 1. 设 $u(t)$ 和 $u_h(t)$ 分别为问题 (3) 和 (4) 的解, $u\in L_\infty(0,T;H^2(I))$. 那么对 $\forall\, 0<\varepsilon<1$, 存在常数 $C=C(u,\,u_h(0))$ 使

$$\|\,\varphi(u)-\varphi(u_h)\,\|^2\le C(\,\frac{1}{\varepsilon}\|\,\theta\,\|^2+\|\,\eta\,\|^2\,)+\varepsilon\,\|\,D^2\theta\,\|^2.$$

证明. 首先给出证明中要用到的估计式. 由定理 1, (9) 和 (10) 式, 得到

$$\|\,u-u_h\|\le\|\,u\,\|+e^{\beta T}\|\,u_h(0)\|\le C, \tag{15}$$

$$\|\,\eta\,\|_1=\|\,u-R_hu\,\|_1\le\|\,u\,\|_1+\frac{1+\gamma}{\gamma^*}\|\,u\,\|_2\le C. \tag{16}$$

现在, 注意

$$u^2-u_h^2=2u(u-u_h)-(u-u_h)^2,$$
$$u^3-u_h^3=(u^2+u\,u_h+u_h^2)(u-u_h)=(u-u_h)^3-3u(u-u_h)^2+3u^2(u-u_h),$$

则由 $\varphi(u)$ 的定义得到

$$\begin{aligned}\|\varphi(u)-\varphi(u_h)\|^2&\le 4(\gamma_0^2\|u-u_h\|^2+\gamma_1^2\|u^2-u_h^2\|^2+\gamma_2^2\|u^3-u_h^3\|^2)\\&\le 4\gamma_0^2\|u-u_h\|^2+8\gamma_1^2(4|u|_\infty^2\|u-u_h\|^2+\|(u-u_h)^2\|^2)\\&+16\gamma_2^2(\|(u-u_h)^3\|^2+9|u|_\infty^2\|(u-u_h)^2\|^2+9|u|_\infty^4\|u-u_h\|^2)\\&=C(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,|u|_\infty)(\|u-u_h\|^2+\|u-u_h\|_{L_4}^4+\|u-u_h\|_{L_6}^6).\end{aligned}\tag{17}$$

利用 Sobolev 内插不等式 [17]

$$\|u\|_{0,q}\le C_0\|u\|_{1,p}^{\alpha}\|u\|_{0,p}^{1-\alpha},\ \ 1<p<q<\infty,\ \ \alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\le 1,\tag{18}$$

取 $q=4$, $p=2$, $\alpha=1/4$, 并利用 (15), (16) 和 (7) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|_{L_4}^4\le C_0^4\|u-u_h\|_1\|u-u_h\|^3\le C(\|\eta\|_1+\|\theta\|+\|D\theta\|)\|u-u_h\|^3\\&\le C(\|u-u_h\|^2+\|\theta\|^2+\|D\theta\|^2)\le C(\|u-u_h\|^2+\|\theta\|^2+\|\theta\|\|D^2\theta\|).\end{aligned}$$

类似地, 在 (18) 式中取 $q=6$, $p=2$, $\alpha=1/3$, 得到

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{L_6}^6\le C_0^6\|u-u_h\|_1^2\|u-u_h\|^4&\le C(\|\eta\|_1^2+\|\theta\|^2+\|D\theta\|^2)\|u-u_h\|^4\\&\le C(\|u-u_h\|^2+\|\theta\|^2+\|\theta\|\|D^2\theta\|).\end{aligned}$$

将这两个估计代入 (17) 式, 并利用 $\varepsilon-$ 不等式, 引理 1 得证.

定理 3. 设 $u(t)$ 和 $u_h(t)$ 分别为问题 (3) 和 (4) 的解, $u(0)\in H^{k+1}(I)$, $u_t\in L_2(0,T;H^{k+1}(I))$, 初始近似满足 $\|u(0)-u_h(0)\|\le Ch^{k+1}\|u(0)\|_{k+1}$. 则如下最优阶 L_2 模误差估计成立.

$$\|u(t)-u_h(t)\|\le Ch^{k+1}\left(\|u(0)\|_{k+1}^2+\int_0^T\|u_t(\tau)\|_{k+1}^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}},\ \ 0\le t\le T.$$

证明. 根据 (13) 和 (11) 式, 只须估计 $\theta(t)$. 在 (14) 式中取 $v_h=\theta$, 利用柯西不等式得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta(t)\|^2+\gamma\|D^2\theta\|^2&\le(\|\eta\|+\|\eta_t\|)\|\theta\|+\|\varphi(u)-\varphi(u_h)\|\|D^2\theta\|\\&\le\frac{1}{2}(\|\eta\|+\|\eta_t\|)^2+\frac{1}{2}\|\theta\|^2+\frac{1}{2\gamma}\|\varphi(u)-\varphi(u_h)\|^2+\frac{\gamma}{2}\|D^2\theta\|^2,\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{d}{dt}\|\theta(t)\|^2+\gamma\|D^2\theta\|^2\le(\|\eta\|+\|\eta_t\|)^2+\|\theta\|^2+\frac{1}{\gamma}\|\varphi(u)-\varphi(u_h)\|^2.$$

利用引理 1, 取 $\varepsilon=\gamma^2/2$, 得到

$$\frac{d}{dt}\|\theta(t)\|^2+\frac{\gamma}{2}\|D^2\theta\|^2\le C\|\theta\|^2+C(\|\eta\|^2+\|\eta_t\|^2),$$

应用 Gronwall 引理得到

$$\|\theta(t)\|^2\le C(\|\theta(0)\|^2+\int_0^t(\|\eta(\tau)\|^2+\|\eta_t(\tau)\|^2)d\tau),$$

利用初始逼近假设, (11) 式 (注意 $(R_hu)_t=R_hu_t$) 和三角不等式, 定理 3 得证.

以下设剖分是拟一致的, 即有限元逆不等式成立. 那么由定理 3 可得有界性估计

$$\begin{aligned}\|u_h\|_{0,\infty}&\le\|u_h-u_I\|_{0,\infty}+\|u_I\|_{0,\infty}\le Ch^{-1}\|u_h-u_I\|+C\|u\|_{0,\infty}\\&\le C(h^{-1}\|u-u_h\|+h^{-1}\|u-u_I\|+\|u\|_{0,\infty})\le C(u).\end{aligned}\tag{19}$$

为获得超收敛估计, 需要如下引理.

引理 2. 设 $u(t)$ 和 $u_h(t)$ 分别为问题 (3) 和 (4) 的解, 初值 $u_h(0)=R_hu(0)$, $u(0)\in H^{k+1}(I)$, $u_t\in L_2(0,T;H^{k+1}(I))\bigcap L_\infty(0,T;L_\infty(I))$. 则如下超收敛估计成立.

$$\|\theta(t)\|_2\le Ch^{k+1}\left(\|u(0)\|_{k+1}^2+\int_0^t\|u_t(\tau)\|_{k+1}^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad 0\le t\le T.$$

证明. 在 (14) 式中取 $v_h=\theta_t$ 得到

$$\begin{aligned}\|\theta_t(t)\|^2+\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|D^2\theta(t)\|^2&=(\eta-\eta_t,\theta_t)+(\varphi(u)-\varphi(u_h),D^2\theta_t)\\&=(\eta-\eta_t,\theta_t)+\frac{d}{dt}(\varphi(u)-\varphi(u_h),D^2\theta)-((\varphi(u)-\varphi(u_h))_t,D^2\theta)\end{aligned}$$

积分且注意 $\theta(0)=0$, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^t\|\theta_t(\tau)\|^2d\tau+\frac{\gamma}{2}\|D^2\theta(t)\|^2\ &\le\ \int_0^t\|\eta-\eta_t\|\|\theta_t\|\,d\tau+\|\varphi(u)-\varphi(u_h)\|\|D^2\theta\|\\&+\ \int_0^t\|(\varphi(u)-\varphi(u_h))_t\|\|D^2\theta(\tau)\|\,d\tau.\end{aligned}$$

利用 (19) 式得到

$$
\begin{aligned}
&\|(\varphi(u)-\varphi(u_h))_t\| = \|\gamma_0(u-u_h)_t+\gamma_1(u^2-u_h^2)_t+\gamma_2(u^3-u_h^3)_t\| \\
\le\ & |\gamma_0|\,\|(u-u_h)_t\| + 2|\gamma_1|\,\|(u-u_h)u_t+u_h(u-u_h)_t\| \\
&+3\gamma_2\|(u^2-u_h^2)u_t+u_h^2(u-u_h)_t\| \\
\le\ & C(\|u-u_h\|+\|+\|(u-u_h)_t\|) \le C(\|u-u_h\|+\|\eta_t\|+\|\theta_t\|),
\end{aligned}
$$

代入上式, 利用引理 1(取 $\varepsilon=\frac{\gamma}{16}$) 和柯西不等式得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t\|\theta_t(\tau)\|^2d\tau+\frac{\gamma}{4}\|D^2\theta(t)\|^2 \ \le\ & C\int_0^t\|D^2\theta(\tau)\|^2d\tau + C(\|\theta\|^2+\|\eta\|^2)+ \\
+\ & C\int_0^t(\|u-u_h\|^2+\|\eta\|^2+\|\eta_t\|^2)d\tau,
\end{aligned}
$$

应用 Gronwall 引理, 并利用定理 3 和 (11) 式, 得到 $\|D^2\theta\|$ 的估计. 再利用定理 3 和 (7) 式, 即可推得引理 2 结论.

现在, 对于 3 次 Hermit 型有限元, 可以得到更好的误差估计和超收敛结果.

定理 4. 设 $S_h^{(k)}=S_h^{(3)}$ 为 3 次 Hermite 型有限元空间, $u(t)$ 和 $u_h(t)$ 分别为问题 (3) 和 (4) 的解, 初值 $u_h(0)=R_hu(0)$, $u(0)\in H^4(I)$, $u_t\in L_2(0,T;H^4(I))\bigcap L_\infty(0,T;L_\infty(I))$. 则成立如下导数节点逼近的超收敛估计

$$|D(u-R_hu)(t,x_i)|\le Ch^4\left(\|u(0)\|_4^2+\int_0^t\|u_t(\tau)\|_4^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}},\ 0\le t\le T.$$

进一步设 $u\in L_\infty(0,T;W_\infty^4(I))$, 则成立如下 L_∞, W_∞^1 模最优阶误差估计

$$\|u(t)-u_h(t)\|_{0,\infty}+h\|u(t)-u_h(t)\|_{1,\infty}\le Ch^4\left(\|u(0)\|_4^2+\|u\|_{4,\infty}^2+\int_0^t\|u_t(\tau)\|_4^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明. 如 (13) 式分解误差 $u(t)-u_h(t)=\eta(t)+\theta(t)$. 利用定理 2, 引理 2 和 Sobolev 嵌入定理, 定理 4 得证.

4. 全离散有限元近似

剖分时间区间 $[0,T]$: $0=t_0<t_1<\cdots<t_M=T$, $t_n-t_{n-1}=\triangle t=T/M$, $M>0$ 为整数. 引进向后欧拉差分公式

$$u_t(t_n)=\frac{u^n-u^{n-1}}{\triangle t}+\frac{1}{\triangle t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\tau-t_{n-1})u_{tt}(\tau)d\tau=\delta_tu^n+\varepsilon^n. \tag{20}$$

这里, 当 $g(t)$ 是 t 的连续函数时, 规定 $g^n = g(t_n)$. 现在定义逼近问题 (3) 的线性化全离散有限元欧拉格式: 求 $U^n \in S_h^{(k)}\,(n = 1, 2, \cdots, M)$ 使满足

$$(\delta_t U^n, v_h) + \gamma\,(D^2U^n, D^2v_h) = \gamma_0(U^n, D^2v_h) + \gamma_1(\,U^{n-1}U^n, D^2v_h)$$
$$+\gamma_2\,(\,(U^{n-1})^2U^n, D^2v_h), \quad \forall\, v_h \in S_h^{(k)}, \qquad U^0 \in S_h^{(k)}. \tag{21}$$

当 U^{n-1} 已知且 $\triangle t$ 充分小时, 可通过求解与方程 (21) 等价的一个正定线性方程组得到 U^n. 记误差 $u^n - U^n = u^n - R_hu^n + R_hu^n - U^n = \eta^n + \theta^n$, $\theta^n \in S_h^{(k)}$. 利用方程 (3) 和 (9) 可知, 对 $\forall\, v_h \in S_h^{(k)}$, R_hu^n 满足

$$(\delta_t R_hu^n, v_h) + \gamma\,(D^2R_hu^n, D^2v_h)$$
$$= (\eta^n - \varepsilon^n - \delta_t\eta^n, v_h) + \gamma_0(u^n, D^2v_h) + \gamma_1((u^n)^2, D^2v_h) + \gamma_2\,(\,(u^n)^3, D^2v_h).$$

用此式减去 (21) 式得知 $\theta(t)$ 满足

$$(\delta_t\theta^n, v_h) + \gamma\,(D^2\theta^n, D^2v_h) = (\eta^n - \varepsilon^n - \delta_t\eta^n, v_h) + \gamma_0(\eta^n, D^2v_h) + \gamma_0(\theta^n, D^2v_h)$$
$$+\gamma_1\,((u^n)^2 - U^{n-1}U^n, D^2v_h) + \gamma_2(\,(u^n)^2u^n - (U^{n-1})^2U^n, D^2v_h), \ \ \forall\, v_h \in S_h^{(k)}. \tag{22}$$

定理 5. 设 $u(t)$ 和 U^n 分别为问题 (3) 和 (21) 的解, $u(0) \in H^{k+1}(I)$, $u_t \in L_2(0,T; H^{k+1}\,(I))$, $u_{tt}{\in}L_2(0,T;L_2(I))$, 初始近似 $U^0{\in}S_h^{(k)}$ 满足 $\|u(0)-U^0\| \le Ch^{k+1}\|u(0)\|_{k+1}$, 网比 $\triangle t/h^2 \le c$. 则当 h 充分小时, 存在与 h, $\triangle t$, n 无关的常数 $C = C(u)$ 使

$$\|u^n - U^n\| \le C(\triangle t + h^{k+1}), \ \ n = 0, 1, \cdots, M. \tag{23}$$

证明. 首先做一个后验假设: 存在 h_0, 使当 $0 < h \le h_0$ 时,

$$(H) \qquad \|u^m{-}U^m\|_{0,\infty} \le 1, \ \ m = 1, 2, \cdots, M.$$

我们将在后面证明假设 (H) 的正确性. 在 (22) 式中取 $v_h = \theta^n$, 利用柯西不等式得到

$$(\delta_t\theta^n, \theta^n) + \gamma\,\|D^2\theta^n\|^2 \le \|\eta^n - \delta_t\eta^n - \varepsilon^n\|\|\theta^n\| + \gamma_0(\,\|\eta^n\| + \|\theta^n\|\,)\|D^2\theta^n\|$$
$$+\gamma_1\|(u^n)^2 - U^{n-1}U^n\|\|D^2\theta^n\| + \gamma_2\,\|(u^n)^2u^n - (U^{n-1})^2U^n\|\|D^2\theta^n\|$$
$$\le \frac{1}{2}\|\eta^n - \delta_t\eta^n - \varepsilon^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta^n\|^2 + \frac{1}{\gamma}\gamma_0^2(\,\|\eta^n\|^2 + \|\theta^n\|^2)$$
$$+\frac{1}{\gamma}(\gamma_1^2\|(u^n)^2 - U^{n-1}U^n\|^2 + \gamma_2^2\,\|(u^n)^2u^n - (U^{n-1})^2U^n\|^2\,) + \gamma\,\|D^2\theta^n\|^2.$$

由此得到

$$\|\theta^n\|^2 \le \|\theta^{n-1}\|^2 + 2\triangle t\{\ \frac{1}{2}\|\eta^n - \delta_t\eta^n - \varepsilon^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta^n\|^2 + \frac{\gamma_0^2}{\gamma}(\,\|\eta^n\|^2 + \|\theta^n\|^2)$$
$$+\frac{1}{\gamma}(\gamma_1^2\|(u^n)^2 - U^{n-1}U^n\|^2 + \gamma_2^2\,\|(u^n)^2u^n - (U^{n-1})^2U^n\|^2\,)\,\}. \tag{24}$$

利用 (11), (20) 式和假设 (H) 可有

$$\begin{aligned}
&\|\eta^n\| \le Ch^{k+1}\|u(t_n)\|_{k+1},\\
&\|\delta_t\eta^n\| = \|\frac{1}{\triangle t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\eta_t(\tau)\,d\tau\| \le C\frac{1}{\triangle t}h^{k+1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t(\tau)\|_{k+1}\,d\tau\\
&\le C\frac{1}{\sqrt{\triangle t}}h^{k+1}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t(\tau)\|_{k+1}^2\,d\tau\right)^{\frac12},\\
&\|\varepsilon^n\| \le \int_{tn-1}^{t_n}\|u_{tt}(\tau)\|\,d\tau \le \sqrt{\triangle t}\left(\int_{tn-1}^{t_n}\|u_{tt}(\tau)\|^2\,d\tau\right)^{\frac12},\\
&\|(u^n)^2 - U^{n-1}U^n\| = \|(u^n - u^{n-1})u^n + (u^{n-1} - U^{n-1})u^n + U^{n-1}(u^n - U^n)\|\\
&\le (|u^n|_\infty + |U^{n-1}|_\infty)(\|u^n - u^{n-1}\| + \|u^{n-1} - U^{n-1}\| + \|u^n - U^n\|)\\
&\le C\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t(\tau)\|\,d\tau + \|\eta^{n-1}\| + \|\eta^n\| + \|\theta^{n-1}\| + \|\theta^n\|\right)\\
&\le C\left(\sqrt{\triangle t}\,(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t(\tau)\|^2\,d\tau)^{\frac12} + h^{k+1} + \|\theta^{n-1}\| + \|\theta^n\|\right),\\
&\|(u^n)^2u^n - (U^{n-1})^2U^n\| = \|((u^n)^2 - (u^{n-1})^2)u^n + ((u^{n-1})^2 - (U^{n-1})^2)u^n +\\
&+(U^{n-1})^2(u^n - U^n)\| \le |u^n + u^{n-1}|_\infty|u^n|_\infty\|u^n - u^{n-1}\| +\\
&+|u^{n-1} + U^{n-1}|_\infty|u^n|_\infty\|u^{n-1} - U^{n-1}\| + |U^{n-1}|_\infty^2\|u^n - U^n\|\\
&\le C\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t(\tau)\|\,d\tau + \|\eta^{n-1}\| + \|\eta^n\| + \|\theta^{n-1}\| + \|\theta^n\|\right)\\
&\le C\left(\sqrt{\triangle t}\,(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t(\tau)\|^2\,d\tau)^{\frac12} + h^{k+1} + \|\theta^{n-1}\| + \|\theta^n\|\right).
\end{aligned}$$

这里已利用了

$$\begin{aligned}
&|u^n|_\infty \le C\|u(t_n)\|_{k+1} \le C(\|u(0)\|_{k+1} + \int_0^{t_n}\|u_t(\tau\|_{k+1}d\tau),\\
&|U^{n-1}|_\infty \le |U^{n-1} - u^{n-1}|_\infty + |u^{n-1}|_\infty \le 1 + |u^{n-1}|_\infty.
\end{aligned}$$

将这些估计代入 (24) 式得到

$$\begin{aligned}
&\|\theta^n\|^2 - \|\theta^{n-1}\|^2 \le C\triangle t\left(\|\theta^n\|^2 + \|\theta^{n-1}\|^2 + h^{2(k+1)}\|u(t_n)\|_{k+1}^2\right) +\\
&+C(h^{2(k+1)} + \triangle t^2)\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\|u_t(\tau)\|_{k+1}^2 + \|u_{tt}(\tau)\|^2)\,d\tau\right).
\end{aligned}$$

关于 n 求和, 且注意 $\|\theta^0\| \le Ch^{k+1}\|u(0)\|_{k+1}$, $n\triangle t = t_n \le T$, 得到

$$\|\theta^n\|^2 \le C\triangle t\sum_{i=1}^{n}\|\theta^i\|^2 + C(\triangle t^2 + h^{2(k+1)}) \left(\|u(0)\|_{k+1}^2 + \int_0^{t_n}(\|u_t(\tau)\|_{k+1}^2 + \|u_{tt}(\tau)\|^2)\,d\tau\right).$$

取 $\triangle t$ 充分小, 使 $C\triangle t \le 1/2$, 则有

$$\|\theta^n\|^2 \le C\triangle t\sum_{i=1}^{n-1}\|\theta^i\|^2 + C(\triangle t^2 + h^{2(k+1)}).$$

应用离散 Gronwall 引理, (11) 式和三角不等式, 证得估计式 (23). 现在, 为完成定理 4 证明, 只须说明假设 (H) 的正确性. 采用归纳法. 当 $m=0$ 时, 由初始逼近假设和有限元逆不等式, 当 $h \le h_0$, h_0 充分小时, 假设 (H) 成立. 现设假设 (H) 对 $m=n-1$ 成立, 根据上述证明可得到估计式 (23), 其中 C 为与 n, $\triangle t$, h 无关的常数 (注意 $t_n \le T$). 利用有限元逆不等式, 插值逼近性质, 网比条件和 (23) 式, 当 $0 < h \le h_0$, h_0 充分小时, 可有

$$\| u^n - U^n\|_{0,\infty} \le \| u^n - u_I^n\|_1 + Ch^{-1}\| u_I^n - U^n\| \le C(h^k + h) \le Ch_0 \le 1.$$

即假设 (H) 对 $m=n$ 成立. 根据归纳法原理, 假设 (H) 成立, 定理 5 得证.

参 考 文 献

[1] J.W. Cahn and J.E. Hilliard, Free energy of a non-uniform system, I Interfacial free energy, *J. Chem. Phys.*, **28** (1958), 258–267.

[2] S. Cohehd and J.D. Murray, Adeneralize diffusion model for growth and dispersal in a population, *J. Math. Biology,* **12** (1981), 237–249.

[3] A.B. Tayler, Mathematical Models in Applied Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[4] J. Carr, M.E. Gurtin and M. Slemrod, Structured phase transitions on a finite interval, *Arch. rat. Mech. Anal.,* **86** (1984), 317–351.

[5] C.M. Elliott and S.M. Zheng, On the Cahn-Hilliard equation, *Arch. rat. Mech. Anal.,* **96** (1986), 339–357.

[6] A. Novick-Cohen, L.A. Segel, Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation, *Physical,* 10 (1984), 277–298.

[7] 伍卓群, 赵俊宁等, 非线性扩散方程, 吉林大学出版社, 长春, 1996.
(Wu Zhuoqun, Zhao Junning et al., Nonlinear Diffusion Equations, Jilin University Publication, ChangChun, 1996.)

[8] B.N. Lu and R.F. Zhang, An explicit pseudo-spectral scheme with almost unconditional stability for the Cahn-Hilliard equation, *J. Computational Math.,* 2(2000), 165–172.

[9] S.M. Choo and S.K. Chung, Conservative nonlinear difference schemes for the Cahn-Hilliard equation, *Computers Math., Appl.,* **36** (1998), 31–39.

[10] 叶兴德, 程晓良, Cahn-Hilliard 方程的 Legendre 谱逼近, 计算数学, **25**:2 (2003), 157–170.
(X.D. Ye and X.L. Cheng, Legendre spectral approximation for Cahn-Hilliard equation, *Mathematica Numerica Sinica,* **25**:2(2003), 157–170.)

[11] 白风兰, 尹丽, 邹永魁, 近似求解 Cahn-Hilliard 方程的拟谱方法, 吉林大学学报, **41** (2003), 262–268.
(F.L. Bai, L. Yin and Y.K. Zou, solving the Cahn-Hilliard equation by pseudo-spectral method, *J. of Jilin University,* **41** (2003), 262–268.)

[12] C.M. Elliott and D.A. French, A nonconforming finite element method for the two-dimensional Cahn-Hilliard equation, *SIAM J. Numer. Anal.,* **26** (1989), 884–903.

[13] C.M. Elliott, D.A. French and F.A. Milner, A second order splitting method for the Cahn-Hilliard equation, *Numer. Math.,* **54** (1989), 575–590.

[14] C.M. Elliott and D.A. French, Numerical studies of the Cahn-Hilliard equation for phase separation, *IMA J. Appl. Math.,* **38** (1987), 97–128.

[15] Q. Du and R.A. Nicolaides, Numerical analysis for a continuum model of phase transition, *SIAM J. Numer. Anal.,* 8(1991), 1310–1322.

[16] P. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[17] A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt Rinchart & Winston, New York, 1969.