

轴对称旋转壳弹性有限元分析

张秀玲,董慧灵

(湖南生物机电职业技术学院,湖南 长沙 410126)

[摘要] 本文用有限元法对轴对称旋转板、壳进行了应力、应变分析。对可找到解析解的壳体如球形壳,编制计算程序,上机计算,将有限元求得的结果与解析式求得的结果进行比较、分析。

[关键词] 有限元素;单元分析;轴对称壳;应力、应变分析

[中图分类号] TB115 [文献标识码] A [文章编号] 1671-5004(2003)-01-05-05

Elasticity Finite Elements Method Analysis of Axi-Symmetric Rotating Shells

ZHANG Xiu-ling, DONG Hui-lin

(Hunan Biological & Electromechanic Polytechnic, Changsha 410007, China)

Abstract: By adopting finite elements method to make the the analysis of stress and strain of axi-symmetric rotating shells. This paper compares and analyses the result of finite elements method with that of analysis method.

Key Words: finite elements method; axi-symmetric rotating shells; analysis of the stress and strain

前言

在宇航结构上有许多轴对称旋转壳,如头部、贮箱压力容器等,它们都可以看成不同类型的母线绕对称轴旋转而成,这壳体结构大多数是在内压或外压下工作,即载荷也是轴对称的,在理论上,对简单母线旋转成壳体能够找出它的解或近似解,当母线比较复杂或组合体理论分析得不到精确的解析解,用有限元法进行强度分析,也可得出满意的结果。

本文通过对可找到解析解的壳体如球形壳进行位移、应力、应变分析,编制计算程序,将有限元求得的结果与解析式求得的结果进行比较,如有限元求得的结果满足精度要求,此程序可用于解决其它具体问题。

1 基本理论

1.1 有限元的理论基础

有限元的理论基础是依据最小位能原理。最小势能原理可叙述如下:在所有满足边界条件的协调位移中,那些满足平衡条件的位移使物体位能取驻值, $\delta \Pi_P = \delta U - \delta V = 0$ 其中 $\Pi_P = U - V$ 为物体应变能与外力势能 V 之差,在有限元法中,要解决以下两主要问题:

a) 单元分析

b) 系统分析

单元分析涉及:i) 选择函数,使它能用节点位移唯一地描述位移。

ii) 导出相应的位移

iii) 导出平衡分布边界应力的虚节点力

单元分析给出节点力与节点位移间的关系,这种关系用单元有刚度矩阵或柔度矩阵表示。

1.2 有限元法解题步骤

(1) 有限元法解题时首先把连续结构离散化,用有限元尺寸的不连续组成的虚构系统来代替相邻单元,可以看成在共公点连接,但在别处被假想地分割开,本问题研究的是轴对称旋转,元素和元素之间连接的是圆。

(2) 设允许位移函数

有限元法是对每个单元假定各自的位移函数,各单元内部位移用节点值唯一地确定,可以证明,节点平衡条件满足时选定的位移模式产生的位移场的位移最小。

(3) 计算元素位能

(4) 计算元素的总位能

(5) 求变分 $\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} = 0$ 得一组方程,其系数是奇异的,须用位移边界条件代和消除刚体位移。

1.3 位移函数的收敛性

在有限元方法中,荷载的移置以及应力矩阵和刚度矩阵的建立等都依赖于位移模式,因此,为了能够从有限单元法得出正确的解答,首先必须使位移模式能够正确反映弹性体中的真实位移形态,具体来说,就是要满足下列三方面的条件:

(1) 位移模式必须能反映单元的刚体位移,刚体位移,在这个位移下,壳体不产生变形,对轴对称回转壳体,独立运动只有沿轴向,因此假设的刚体运动应包含沿轴向运动。

[收稿日期] 2004-03-09

[作者简介] 张秀玲(1958—),女,江苏江浦县人,湖南生物机电职业技术学院高级讲师,研究方向:模具设计。

董慧灵(1956—),女,湖南郴州人,湖南生物机电职业技术学院高级讲师,研究方向:模具设计。

(2)位移模式必须能反映单元的常量应变,每个单元的应变一般总是包含两个部分,一部分是与该单元各点的位移坐标有关的,即所谓变量应变;另一部分是与位置坐标无关的,是各点相同,即所谓常量应变,而且,当单元的尺寸较小时,单元中各常量的应变趋于相等,也就是单元的变形趋于均匀,因而常量应变就成为应变的主要部分,因此,为了正确反映单元的变形状态,位移模式必须能反映该单元的常量应变。

(3)位移模式应当尽可能反映位移的连续性。为了使得单元内部的位移连续保持连续,必须把位移模式取为坐标的单元连续函数,为了保持相邻单元的位移保持连续,就要使它们在公共结点处具有相同的位移时,也能在整个公共边界上具有相同的位移。代替原为连续弹性体的那个离散结构物仍然保持为连续弹性体。

本问题选择的位移模式为:

$$u = \alpha_1 + S\alpha_2$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 S + \alpha_5 S^2 + \alpha_6 S^3$$

$$v = 0$$

其中, u 为壳体母线方向位移

w 壳体法向位移

v 环向位移

S 为单元局部坐标

可以证明本问题所选择的位移模式是满足收敛性准则。

1.4 轴对称有限元理论

(1)形函数

由于所讨论的问题是轴对称壳受轴对称载荷,根据对称性壳体没有环向位移,即 $v=0$,因此,在轴对称壳受轴对称载荷情况下,中面某点位移决定于两个分量,切向位移 u 和法向位移 w ,见图 1。

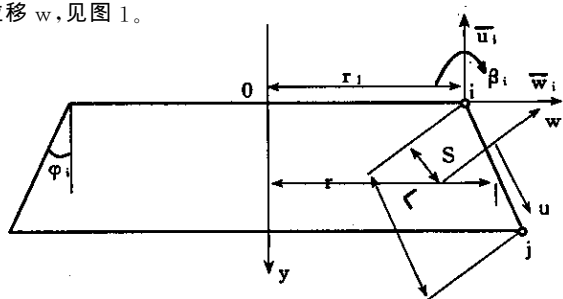


图 1

在局部坐标系上用 α_i 参数假定位移函数,单元位移函数假设为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 S \\ w &= \alpha_3 + \alpha_4 S + \alpha_5 S^2 + \alpha_6 S^3 \\ \beta &= dw/ds = \alpha_4 + 2\alpha_5 S + 3\alpha_6 S^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若设

$\{q_i\} = \{u_1 w_1 \beta_1 u_2 w_2 \beta_2\}^T$; $\{q\}$ 为局部坐标系下节圆广义位移列阵

$\{\bar{q}_i\} = \{\bar{u}_1 \bar{w}_1 \bar{\beta}_1 \bar{u}_2 \bar{w}_2 \bar{\beta}_2\}^T$; $\{\bar{q}\}$ 为局部坐标 (xoy) 下单元节点广义位移列阵

列阵 $\{q_i\}$, $\{\bar{q}_i\}$ 通过变换矩阵 $[\lambda]$ 实现。

万方数据

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设 $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6\}^T$

$$\left\{ \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{matrix} \right\} = [C][\alpha]$$

$$\{q_i\} = [C][\alpha]$$

$$\{\bar{q}_i\} = [\lambda]\{q_i\} = [\lambda][C][\alpha] = [A]\{\alpha\}$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\bar{q}_i\}$$

$$[A] = [\lambda][C]$$

由(1)式

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ w \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} [A]^{-1} \{\bar{q}_i\}$$

$$= [N]\{\bar{q}_i\}$$

$[N]$ ——形函数

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} [A]^{-1} \quad (2)$$

(2)应变函数矩阵

单元应变、位移关系为:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ x_s \\ x_\theta \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\frac{du}{ds} \\ &(w \cos\varphi + u \sin\varphi)/r \\ &-\frac{d^2 w}{ds^2} \\ &-\frac{\sin\varphi dw}{r ds} \end{aligned} \right\}$$

$$= [B]\{\bar{q}_i\} \quad (3)$$

其中 w 垂直母线方向位移, u 沿母线方向的位移, φ 为截锥壳元素的半锥角, r 为元素母线中点的旋转半径。

$[B]$ —单元刚度矩阵。

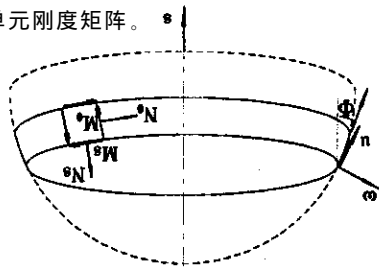


图 2

(3) 应力矩阵 $[S]$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\}$$

其中, $[D]$ 为弹性系数矩阵

$$[D] = \frac{Et}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 1 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \mu t^2/12 \\ 0 & 0 & \mu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix}$$

式中: E —弹性常数

μ —泊松比

t —旋转壳厚度

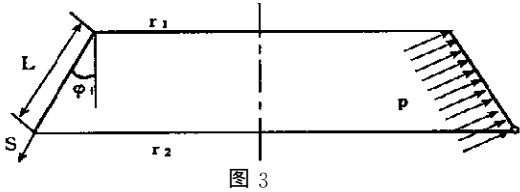


图 3

(4) 单元能量泛函

设在第 i 个单元上, 节圆分别为 1、2, 其能量泛函是

$$\Pi_i = \int_{\omega} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV - \int_{A_i} p w dA_i$$

式中 l_i —单元母线长, Π_i —半锥角, r_1, r_2 —节圆 1、2 的半

径, p —内压力

S —局部坐标

ξ —相对坐标 $\xi = S/l_i$

$$dA = 2\pi r dS = 2\pi r L d\xi$$

$$\int_{A_i} p w dA_i = \int_0^R 2\pi r p w dS = 2\pi L \int_0^1 r p w d\xi = 2\pi L \int_0^1 \{u, w\}$$

$$\begin{Bmatrix} o \\ p \end{Bmatrix} r d\xi$$

$$= 2\pi L \int_0^1 \{u\}^T \{p\} r d\xi$$

$$= 2\pi L \{\bar{q}\}^T \cdot \int [N]^T \{p\} r d\xi$$

$$\text{其中 } \begin{Bmatrix} O \\ P \end{Bmatrix} = \{P\}$$

$$\Pi_i = \{\bar{q}\}^T [K_i] \{\bar{q}_i\} - \{\bar{q}_i\}^T \{F_i\}$$

$$\text{其中 } [K_i] = 2\pi L \int_0^1 \frac{1}{2} [B]^T [S] r d\xi$$

$$[F_i] = 2\pi L \int_0^1 [N]^T \{p\} r d\xi$$

单元刚度矩阵用梯形公式

$$[k_i] = [(2\pi L [B]^T)_{\xi=1} + (2\pi L [B]^T [S] r)_{\xi=0}] = \pi L [(B)^T$$

$$[S] r)_{\xi=0} + (2\pi L [B]^T)_{\xi=1}]$$

” 单元节点力向量

$$[F_i] = 2\pi L \int_0^1 [N]^T \{p\} r d\xi$$

用直接积分法

$$= 2\pi L \int_0^1 p \begin{Bmatrix} -(1-3\xi^2+2\xi^3)\sin\varphi \\ (1-3\xi^2+2\xi^3)\cos\varphi \\ L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ -(3\xi^2-2\xi^3)\sin\varphi \\ (3\xi^2-2\xi^3)\cos\varphi \\ L(\xi^2+\xi^3) \end{Bmatrix} r d\xi$$

$$r = r_1 + S \cdot \sin\varphi = r_1 + L \sin\varphi \cdot \xi \varphi$$

$$r_2 = r_1 + L \sin\varphi$$

$$[F_i] = \frac{\pi L p}{10} \begin{Bmatrix} -\sin\varphi(7r_1+3r_2) \\ \cos(7r_1+3r_2) \\ \frac{L}{3}(3r_1+2r_2) \\ -\sin\varphi(3r_1+7r_2) \\ \cos\varphi(3r_1+7r_2) \\ -\frac{L}{3}(2r_1+3r_2) \end{Bmatrix}$$

1.5 解题方法

轴对称旋转壳, 在轴对称载荷作用下, 内力、变形也是对称的, 只会沿母线变化, 就成为一维问题, 壳体只有中面方向的应变, 所取元素是锥形壳元素, 母线与对称轴的夹角? 是常数, 分割元素时, 只要沿对称轴线方向分, 总体刚度矩阵中零元素占大多数, 而非零元素又都只集中在对角线附近, 其最大半带宽是 6。为节省内存, 采用最大半带宽存储, 消元法解方程。对 n 阶方程, 如按最大半带宽存储, 消元法解方程, 占内存 $N^2/10$, 运算次数 $1N^3/100$ 。总刚度矩阵 ($n \times n$ 阶) 与最大半带宽存储矩阵 $A(n \times B)$ 的对应关系为

$$k_{ij} = A_{i,j-i+1}$$

$$j = i, i+1, i+B$$

B 为最大半带宽

消元法的通式为:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}$$

$$(k+1) \leq i \leq n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_i^{(k)}$$

$$(k+1) \leq j \leq n$$

2 程序部分

有限单元法在工程上的主要优点是能真实地去解复杂的实际问题, 当然这要靠计算机来实现。

2.1 总框图及说明

(1) 总框图如图 4 所示。

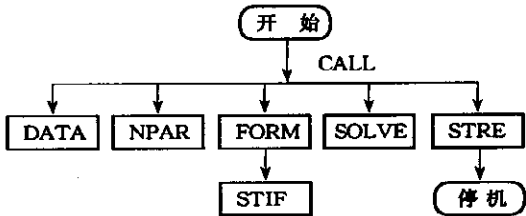


图 4 总框图

注: DATA 数据输入, NPAR 网格划分, SOLVE 解方程, FORM 组集, STRE 求应力。

(2) 主程序段 MASTER 说明

主程序段是采用子程序调用结构,这种结构的优点是:a)使用灵活,例如改变分割子程序可算不同类型的问题,如板、球顶、圆筒等问题,如需要用不同的组集方式和不同的解方程方法,改变组集子程序和解方程子程序即可,而其它子程序可不改动。b)通用性强,有广泛的使用范围,对类型相近的问题都可算,如载荷情况不同,壳体厚度不同,材料性质不同,母线不同等。c)结构简单,便于调整参数(输入输出数据方便检查),便于分工协作,易于与其它程序沟通。

主程序起组织作用,主程序通过分别调用子程序完成计算轴对称旋转壳受轴对称载荷作用时的位移、应力、应变,根据求得的结果便可进行强度分析。

如果主段不是用分别调用子程序结构,而是只用一个主段来控制,则主段很长,通用性不好,对不同类型问题不便于实现。

2.2 子程序框图及说明

网格划分子程序框图如图 5 所示。

分割子程序 NPAR 说明:

(1) 本子程序用于球形壳体网格划分,其目的在于求得元素各点坐标 (x_i, y_i)

(2) 分割是按中心角把母线分成若干区段,每个区段又独立地分成若干个元素,这种网格划分方案便于调整元素分配,使之合理。

(3) 本程序的优点在于适用于轴对称旋转壳,如球形壳顶部有开孔的或无开孔的,球顶,但对于其它轴对称板、筒壳的网格划分应做相应的改动。

应力子程序 STRE 框图及说明

应力子程序 STRE 说明:

(1) 本程序用于受轴对称载荷的轴对称壳(锥形壳体),其目的在于求得各节点的应变 $\{\epsilon\}$ 和应力 $\{\sigma\}$ 值及各元素中点应变应力。

(2) 总体刚度矩阵 SK 和单元刚度矩阵 EK 已知,用过本程序又将 SK 、 EK 重新赋值,其优点在于可节省内存。

(3) 本程序采用对弹性系数矩阵、应变函数矩阵赋值的方法,还可将单元应变矩阵单独编入一个子程序,用时调用,这样便于更换应变函数矩阵子程序以求出元素母线上任一点的应变应力值。

(4) 程序中用到的单元母线长 PL ,半锥角之余弦 CS ,正弦 SN 是用一个算一个,其优点在于可节省内存,但并不节省计算时间,还可将 PL 、 CS 、 SN 在网格划分子程中将 CS 、 SN 、 PL 一次算出,这样对多次使用 PL 、 CS 、 SN 的可省机时,一次使用时,前者要好些。

(5) 对于节点应变、应力,本程序是取两相邻元素在同一点的平均应变应力。

(6) 本程序的优点在于对受轴对称载荷的轴对称壳均适用,对不同类型问题(如轴对称板)不需做改动,但对锥壳元素线中间增加自由度的轴对称壳应做相应的变动,改变应力子程序中的应变函数数据可以解决不同性质问题,如平面应力问题、平面应变问题。

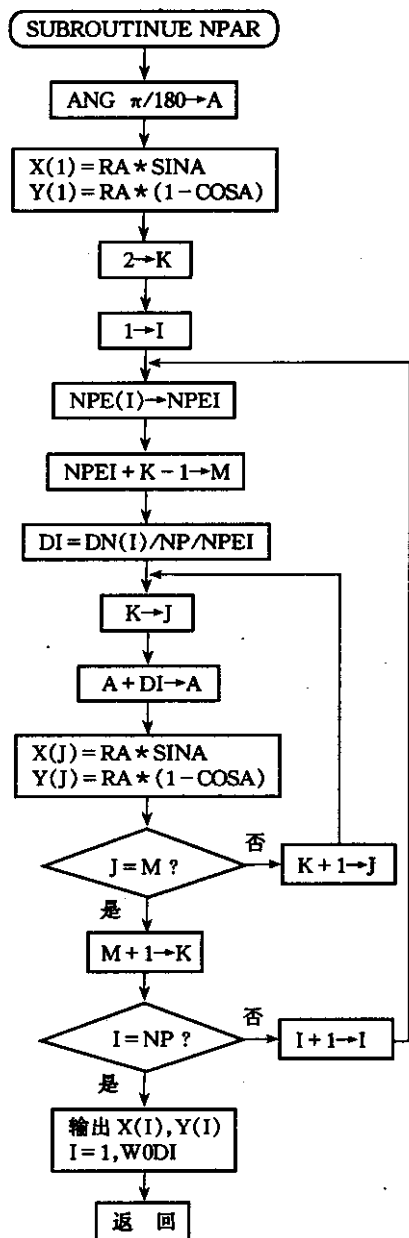


图 5 网格划分子程序框图

程序中最大元素定义为 99 个,100 个节点。程序用半宽存贮方式消元法解方程,受轴对称载荷的轴对称壳,如球形壳、板、筒,元素数小于 99 个的均可用。对不同载荷情况,载荷列阵不同,不同的类型,分割应做相应的改动。程序的通用性较好,如用不同的方法组集和解方程时,除解方程子程序和组集程序外,其它子和序还可使用。

3 计算例题

所选例题为球壳顶部有孔结构,且在孔边上作有一周分布弯矩 PM ,如图 7 所示。

坐标 x 取向右为正, y 轴向下为正,原始参数:

$$\mu = 0.33$$

$$E = 10^7 \text{ PSI}, t = 1 \text{ in}$$

$$PM = 1 \text{ N} \cdot \text{in} - ib/\text{in}, RA = 100 \text{ in}$$

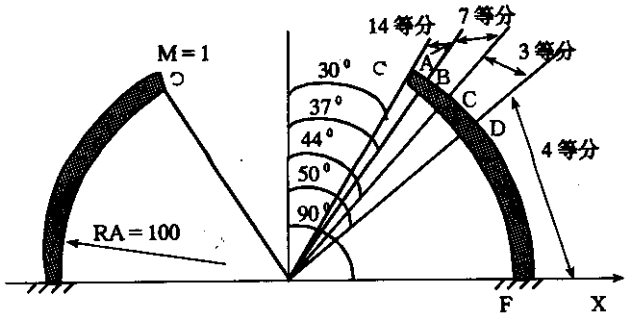


图 7

NE	12	23	24	28	29	51	91
$\delta(\%)$	7.5898	0.5816	0.3721	0.2498	0.2074	0.0881	0.0139

可以看出,当元素取得越多时,算得的误差越小,从理论上元素取的越多结果越精确,但元素数取的多了,机时多,因些在满足精度要求的情况下,应适当选择元素数。

(2)元素分配 对应力分布变化不大的区域或结构次要的地方,单元尺度可以选得大些,应力集中、应力变化急剧的部分,单元的尺寸就取小些。题中在 A 处受弯矩,在弧 AB 区段内力、位移变化较大,弧 BC、弧 CD 段次之,弧 DE 区段内位移、弯矩变化很小。因此在弧 AB 区段内单元尺寸取的就小,单元间隔为 0.5°,而弧 DE 区段位移和弯矩变化很小,单元取的较大,单元间隔为 10°。

[参 考 文 献]

[1] 何福保,沈亚鹏. 板壳理论[M]. 陕西:西安交通大学出版社, 1993.
[2] [俄]S. 铁摩辛柯,S· 潜诺斯基. 板壳理论[M]. 北京:科学出版社,1977.
[3] 杨骊先. 弹性力学及有限单元法[M]. 浙江:浙江大学出版社, 2003.
[4] 华东水利学院. 弹性力学问题的有限单元法[M]. 水利电力出版社,1978.

(1)有限元结果分析。

所选例题分为 28 个元素,计算内容有节点坐标、总刚度、位移、节点平均应力、元素中点应变、应力。

元素数为 28 时求得的结果与理论曲线接近很好,而将元素数改变时求得的结果与 NE=28 时的结果进行比较,符合的较好,又对元素数进行了调整,算出各组数据。分别算了 NE=12,23,29,51,91 计算的结果当元素数等于 12 时结果的误差很大,是不收敛的,如 \bar{u}_1

NE	12	28
\bar{u}_1	0.236276×10^4	0.273189×10^{-4}

所以元素数为 12 是不可取的,随元素数据的增加越来越接近理论曲线,经计算结果,NE=91 时与理论曲线符合的很好。在 A 点的弯矩 MS 可算出 PM 的相对误差

(上接第 4 页)

构建终身教育体系。”为此,我们必须从贯彻十六大精神和实践“三个代表”重要思想的高度,充分认识职业教育在国家经济社会发展中的重要作用,充分认识职业教育工作在终身教育体系中的地位。高等职业教育不仅要办好全日制教育、学历教育,而且要根据社会的需求,创造条件,努力办好各种非全日制教育、非学历教育的岗位培训、专业知识学习以及专题讲座等。为构建和完善我国的终身教育体系作出贡献。

八 远程教育将成为高等职业教育新的教学方式

20 世纪 90 年代以来,网络信息技术飞速发展,我国高等学校网络也达到相当规模。截止 2003 年 4 月我国普通高校共计 1408 所,建有网站的高校有 944 所。占高校的 67%。网络改变了人们的生活,也使我们的教育方式得以改变,它使我们的学生可不再集中在教室接受传统的面授教育,而只要点击“虚拟课堂学习模式”再登记注册,就能参加在线课程的学习。因此,近几年来,我国部分高校利用网络与本校网站开展了远程教学。1999 年教育部批准清华大学、浙江大学、北京邮电大学、湖南大学等 4 所高校试办网络远程教学,设置了类型齐全的在线课程。2000 年,远程教学学校又由 4 所扩大至 31 所。至今,不到三年时间,我国网络远程教学已达到 67 所,而且招生人数也呈几何级数上升,从最早开始的几百人增加到了几万万方数据

人。

利用网络进行远程教育,既可充分利用网上资源,又可为各类专业人员和管理人员提供多种继续教育课程,也是构建终身教育体系的一个重要方面。美国的高等教育是世界上首屈一指的,大学比比皆是,但因为各种原因,并不是所有的人都有机会进入大学校园。为了让更多人接受大学教育,远程教育便应运而生,并迅速发展。据统计,1995 年只有 28% 的大学提供网上课程,但到 1998 年猛增到 60%。目前,美国约有 200 万网上大学生,70% 以上大学设立了网上课程。不久前,美国教育部决定,2005 年,90% 以上的美国大学都将开设网络课程。

随着我国高等职业教育的发展,目前,许多高等职业学校也都设有网站。因此,利用网络开展远程教育,也是我国高等职业学校未来发展的方向。

[参 考 文 献]

[1] 汤晋祥,等. 中外高等职业技术教育比较[M]. 北京:高等教育出版社,2002
[2] 朱高峰. 要现代化就要大力发展制造业[J]. 北京:新华文摘, 2003,(2)
[3] 王 湛. 弘扬与时俱进精神,大力推进职成教事业改革与发展[J]. 北京:中国职业技术教育,2003,(9. 中)
[4] 罗平强,等. 我国高等院校网络建设现状分析[J]. 长沙:湖南大众传媒职业技术学院学报,2003,(2)