弹性薄板弯曲及平面问题的自然边界元方法

李顺才 董正筑 赵慧明 著

科学出版社

弹性薄板弯曲及平面问题的自然边界元方法

李顺才　董正筑　赵慧明　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书详细地介绍了弹性薄板弯曲问题与平面弹性问题的自然边界元法及其应用. 全书共分 8 章, 内容包括: 弹性薄板弯曲问题与平面弹性问题的基本理论; 双调和方程边值问题的自然边界归化原理; 弹性薄板(包括圆板、开孔无限大板、悬臂半无限大板)弯曲问题及圆板热弯曲问题的自然边界元方法; 圆内、圆外、半平面体弹性问题以应力函数为求解未知量的自然边界元方法; 圆内、圆外平面弹性问题以位移为求解未知量的自然边界元方法; 半平面体弹性问题位移法的自然边界归化原理及其在地基-基础相关问题中的应用; 扇形截面杆件扭转问题的自然边界元法、圆形巷道在给定应力边界及位移边界条件下围岩应力场的自然边界元法等.

本书可供学习和从事计算力学、科学与工程数值分析、采矿与岩土工程等领域的高年级本科生、研究生、高等院校教师及科研院所的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

弹性薄板弯曲及平面问题的自然边界元方法/李顺才, 董正筑, 赵慧明著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-031457-4

Ⅰ. ①弹… Ⅱ. ①李… ②董… ③赵… Ⅲ. ①薄板-弹性屈曲-边界元法 ②薄板-弹性理论-边界元法 Ⅳ. ①O343 ②TU330.1 ③O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 107705 号

责任编辑: 陈玉琢 李 欣 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2011 年 6 月第一次印刷 印张: 13 3/4
印数: 1—2 000 字数: 262 000

定价: 48.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

中国矿业大学力学系董正筑教授是我的老朋友, 自 1986 年我在德国斯图加特大学访问工作时与他相识, 至今已有 25 年. 去年他的学生彭维红博士与他合作撰写了《自然边界元法在力学中的应用》一书, 我曾为之作序. 近日董教授又发来他的学生李顺才博士、赵慧明博士与他合作完成的题为《弹性薄板弯曲及平面问题的自然边界元方法》的书稿, 内容为自然边界元法在另外一些力学领域的应用, 依然要我为之作序. 我深为他们多年来在这一方向坚持不懈的勤奋工作而感动, 也为我的研究成果能在力学的诸多领域获得有效应用而高兴, 故再次欣然应允而作此序.

我从事边界元法研究始于 1978 年. 那一年国家恢复研究生招生, 我在大学毕业 11 年后又成了中国科学院的研究生, 有幸师从著名数学家冯康院士. 当时国际上兴起了边界元法研究, 基于经典的边界积分方程理论发展了直接边界元法和间接边界元法. 冯康先生为我选定的研究方向则是：提出并发展与西方流行方法完全不同的新的边界元法. 我的硕士论文与博士论文都是关于这一课题的. 我们的方法后来被冯先生定名为自然边界元方法. 在这些工作的基础上, 我发表了一系列论文, 并于 1993 年在科学出版社出版了专著《自然边界元方法的数学理论》, 2002 年科学出版社又和国际著名的出版社*Kluwer Academic Publishers*合作出版了我的英文专著*The Natural Boundary Integral Method and Its Applications*. 这两本书是我在这一方向数十年研究工作的系统总结. 正是这两本书及与之相关的一系列研究成果使我于 1989 年独立获得了中国科学院自然科学一等奖, 19 年后又与清华大学韩厚德教授一起获得了 2008 年国家自然科学二等奖.

《自然边界元方法的数学理论》一书的主要内容取自我 1984 年的博士论文. 但因为此后我相继到美国和德国访问工作, 该书推迟到我回国后才完成并出版. 1991 年冯康先生亲自为该书定名并向科学出版社推荐出版. 他在推荐信中写道：该书“系统介绍了由我国学者首创并发展的、有许多独特优点的一种新型边界元方法, 完全不同于国内外现有的同类书籍, 是一本具有国际领先水平的、极有特色并反映我国学者研究成果的学术专著, 很有出版价值.” 冯康先生不幸于 1993 年 8 月去世. 让我感到欣慰的是, 该专著在冯先生去世前几个月出版了. 当我把该书的精装本送到他手里时, 能感觉到他异常兴奋的心情.

董正筑教授在该书出版后不久就得到了该书. 他对自然边界元方法在力学中的应用极感兴趣, 请我去徐州讲学并组织学生研读该书. 此后我们又多次进行互访交

流. 他和他的学生们近二十年来一直致力于这一方向的研究, 已取得了非常丰硕的成果, 近年接连出版两本专著便是明证. 他们的大量研究成果当然也说明了自然边界元方法确实有非常广泛的应用.

有感于三十年来提出并发展自然边界元及相关计算方法, 我曾以 “研究杂感” 为题赋诗二首, 今录于此作为本序言的结尾. 其一为

化整为零简驭繁, 裁弯取直裂单元.

人工边界自然妙, 返朴归真索本源.

其二为

分解合成简或繁, 研究探索几多番.

欲知界外无穷事, 先解域中有限元.

这两首诗或许可帮助读者理解自然边界元方法的基本思想.

余德浩
中国科学院数学与系统科学研究院
计算数学与科学工程计算研究所
2011 年 4 月于北京

前　　言

以挠度为未知量的弹性薄板弯曲问题和以应力函数为未知量的平面弹性问题均可归结为双调和方程边值问题, 这两类问题的相似性已为大家所熟悉. 以往对这两类问题的求解方法虽然很多, 但对同一区域和边界形状的物体视不同的边界条件和载荷情况, 往往需采用不同的方法进行求解, 如平面问题中同一物体需先根据不同的载荷条件, 如集中力、集中力偶或分布力等, 假设不同的应力函数再逐一求解. 而根据双调和问题的自然边界归化原理, 只要区域给定, 其 Green 函数就唯一确定, 且格林函数与所给边界条件和载荷无关, 因此理论上可以用统一的方法或公式进行求解.

自然边界元法是根据格林函数法或复变函数法或 Fourier 级数法将微分方程边值问题归化为所研究区域上的 Poisson 积分公式或边界上的强奇异积分方程. Poisson 积分公式直接在边界上进行积分运算, 属于解析方法; 边界上的强奇异积分方程需采用相应的变分形式在边界上离散化求解, 属于半解析半数值方法. 自然边界元法是由我国学者冯康和余德浩首先提出并系统发展起来的一种边界元法, 特别适用于无界区域偏微分方程边值问题的求解. 日本著名数学家藤田宏教授对余德浩教授等人的工作评价是: “位势理论的现代版本”, “完善和建立了自然边界元方法”, 对 “自然边界积分算子和边界上的 Laplace Beltrami 算子间的关系给出了圆满的答案”. 当前国际公认的 DTN 方法是数值求解无界区域偏微分方程的最好方法, 该方法实际上就是自然边界元与有限元耦合法. DTN 算子就是自然积分算子, 该方法的主要代表人物 D. Givoli, 他高度评价了余德浩于 2002 年在*Kluwer Academic Publishers*出版的英文专著*The Natural Boundary Integral Method and Its Applications*.

本书在总结前人及各位作者多年研究工作的基础上, 详细地介绍了双调和方程边值问题的自然边界归化方法在弹性薄板弯曲问题与平面弹性问题中的应用, 并给出了大量实例. 本书共分 8 章. 第 1 章介绍了弹性薄板弯曲问题与平面弹性问题的基本理论以及双调和方程边值问题的自然边界归化原理; 第 2 章介绍了圆板、开孔无限大板、悬臂半无限大板等弹性薄板弯曲问题及圆板热弯曲问题的自然边界元方法, 并给出了大量实例; 第 3 章探讨了圆内与圆外平面弹性问题在以应力函数为基本求解未知量时的自然边界元法, 推导出孔边分别受平衡和非平衡载荷作用时的圆外问题应力函数的边界积分公式, 并给出了应用实例; 第 4 章介绍了半平面体弹性问题应力函数的边界积分公式及其应用; 第 5 章研究了圆内与圆外平面问题在以位移为基本求解未知量时的自然边界元法及其应用; 第 6 章以半平面体弹性问

题位移法的自然边界归化原理为基础, 研究了地基–基础中的相关问题; 第 7 章基于调和方程边值问题的自然边界归化原理, 求解了扇形截面杆件的扭转切应力; 第 8 章根据圆外问题应力函数法和位移法的自然边界归化原理, 分别求解了圆形巷道在给定应力边界及位移边界条件下的围岩应力场.

燕山大学王美芬参加了第 6 章的编写, 华东计算技术研究所刘俊参加了第 2 章的编写, 河海大学胡丰参加了第 8 章的编写.

本书的写作和出版得到了国家自然科学基金项目 “承压破碎岩体蠕变–渗流系统非线性动力学特性研究” (编号：50974107) 和江苏省 “青蓝工程” (编号：10QLD006) 的资助; 本书同时还得到了国家重点基础研究发展计划 (973 计划) “煤矿突水机理与防治基础理论研究” (编号：2007CB209400)、深部岩土力学与地下工程国家重点实验室开放基金项目 (编号：SKLGDUEK1014)、国家自然科学青年基金项目 (编号：50909093) 的支持.

本书得到了徐州师范大学机电工程学院、中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室、徐州师范大学物电学院、中国矿业大学力建学院等单位的大力支持和协作, 在此深表感谢! 在本书的撰写和修改过程中还得到了中国科学院余德浩教授的指教和斧正, 以及卓士创副教授、彭维红博士等的支持和帮助, 在此一并致谢!

由于作者水平有限, 书中难免存在疏漏和不足之处, 敬请同行专家和广大读者批评指正.

作 者

2011 年 3 月

目　　录

序
前言
第 1 章　基本理论 …… 1
1.1　弹性薄板弯曲问题和平面弹性问题 …… 1
1.1.1　弹性薄板弯曲问题及其研究概述 …… 1
1.1.2　平面弹性问题及其研究概述 …… 3
1.2　双解析函数与双调和函数 …… 5
1.3　双调和方程边值问题的自然边界归化原理 …… 7
1.3.1　弹性薄板弯曲问题 …… 7
1.3.2　平面弹性问题 …… 10
1.4　广义函数简介 …… 11
1.4.1　广义函数的引入 …… 11
1.4.2　广义函数的运算 …… 12
1.4.3　奇异函数 …… 13
1.5　强奇异积分计算方法 …… 14
1.5.1　积分核级数展开法 …… 14
1.5.2　奇异部分分离计算法 …… 16
参考文献 …… 18
第 2 章　弹性薄板弯曲问题 …… 21
2.1　弹性圆形薄板的弯曲问题 …… 21
2.1.1　边界积分公式和自然积分方程 …… 21
2.1.2　连续性载荷作用下圆板的弯曲问题 …… 24
2.1.3　非连续性载荷作用下圆板的弯曲问题 …… 29
2.2　开孔无限大板边界受力的弯曲问题 …… 40
2.2.1　已知孔边挠度和转角的无限大板弯曲 …… 42
2.2.2　已知孔边挠度和弯矩的无限大板弯曲 …… 46
2.2.3　已知孔边剪力和弯矩的无限大板弯曲 …… 48

2.3 开孔无限大板板面受力的弯曲问题 ······ 51
2.3.1 边界积分公式和自然积分方程 ······ 51
2.3.2 圆孔内边固支的无限大板弯曲 ······ 53
2.3.3 圆孔内边简支的无限大板弯曲 ······ 54
2.4 悬臂半无限大板的弯曲问题 ······ 57
2.4.1 半无限大板弯曲挠度的边界积分公式 ······ 57
2.4.2 受集中力作用的固支悬臂半无限大板的弯曲解 ······ 59
2.4.3 两邻边一边固支一边简支的半无限大板的弯曲解 ······ 60
2.4.4 一对边简支一边固定的半无限大板的弯曲解 ······ 61
2.5 圆板热弯曲问题 ······ 64
2.5.1 边界积分公式和自然积分方程 ······ 64
2.5.2 板内无热源的弯曲问题 ······ 65
2.5.3 板内有热源的弯曲问题 ······ 67
2.6 圆板混合边界弯曲问题 ······ 70
2.6.1 自然积分方程的数值解法 ······ 71
2.6.2 算例 ······ 76
参考文献 ······ 81
第 3 章 平面弹性问题应力函数法 ······ 83
3.1 圆内问题 ······ 83
3.1.1 边界积分公式和自然积分方程 ······ 83
3.1.2 算例 ······ 84
3.2 圆外问题 ······ 87
3.2.1 孔边受平衡载荷作用 ······ 87
3.2.2 孔边受非平衡载荷作用 ······ 96
3.3 椭圆孔口平面问题 ······ 103
参考文献 ······ 109
第 4 章 半平面体弹性问题应力函数法 ······ 110
4.1 半平面体问题应力函数的边界积分公式 ······ 110
4.2 算例 ······ 112
参考文献 ······ 123
第 5 章 平面弹性问题位移法 ······ 124
5.1 位移法自然边界归化原理 ······ 124

5.1.1　区域上的变分问题 ······ 125
5.1.2　自然边界归化及边界上的变分问题 ······ 126
5.2　圆内问题 ······ 127
5.2.1　圆内区域的自然积分方程 ······ 127
5.2.2　圆内区域自然积分方程的数值解法 ······ 131
5.2.3　算例分析 ······ 134
5.3　圆外问题 ······ 139
5.3.1　圆外区域的自然积分方程 ······ 139
5.3.2　圆外区域自然积分方程的数值解法 ······ 142
5.3.3　算例分析 ······ 145
参考文献 ······ 147
第 6 章　地基–基础相关问题 ······ 149
6.1　半平面体弹性问题位移法的自然边界归化 ······ 149
6.2　无限长基础梁半平面弹性地基中的位移和应力 ······ 152
6.2.1　基础垂直位移引起地基中的位移和应力 ······ 152
6.2.2　边界水平滑移引起地基中的位移和应力 ······ 155
6.2.3　局部均布面力作用下地基中的位移和应力 ······ 158
6.3　有限长基础梁半平面弹性地基中的位移和应力 ······ 159
6.3.1　局部面力作用下地基表面的相对沉陷 ······ 159
6.3.2　有限长梁垂直位移作用下地基中的应力分布 ······ 161
参考文献 ······ 166
第 7 章　扇形截面杆件扭转问题 ······ 167
7.1　杆件扭转问题的基本理论 ······ 167
7.2　调和方程的自然边界归化原理 ······ 169
7.3　扇形截面杆件扭转问题的自然边界元法 ······ 171
7.3.1　扇形截面杆扭转应力的积分公式 ······ 171
7.3.2　边界应力求解 ······ 173
7.3.3　算例 ······ 174
7.4　扇形截面杆件扭转问题的有限差分法 ······ 178
7.4.1　差分方程 ······ 178
7.4.2　边界条件 ······ 179
7.4.3　极惯性矩 J 的计算 ······ 180

7.4.4 扭转应力 …… 180
参考文献 …… 183
第 8 章 圆形巷道围岩应力场的自然边界元法 …… 185
8.1 巷道在应力边界条件下的围岩应力场 …… 185
8.1.1 巷道边界局部弱支护 …… 185
8.1.2 巷道边界均匀支护 …… 190
8.1.3 巷道边界局部未支护 …… 191
8.1.4 围岩应力分布 …… 194
8.2 巷道在位移边界条件下的围岩应力场 …… 203
8.2.1 圆外问题自然边界元公式 …… 203
8.2.2 算例 …… 205
参考文献 …… 207

第 1 章　基 本 理 论

弹性薄板弯曲问题和平面弹性问题都可以归结为双调和方程边值问题, 其通解可以用双调和函数表示. 本章先简要介绍这两类问题的基本理论及研究概述, 然后研究这两类问题的自然边界归化方法, 最后介绍了相关的广义函数论知识、强奇异积分及其数值计算方法.

1.1　弹性薄板弯曲问题和平面弹性问题

1.1.1　弹性薄板弯曲问题及其研究概述

板是工程实际中一种重要的结构. 在弹性力学里, 两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面所围成的物体, 称为板. 这两个平行面称为板面, 而这个柱面称为侧面或板边. 两个板面之间的距离 t 称为板的厚度, 而平分厚度 t 的平面称为中面. 薄板是指厚度 t 远较其余两方向的尺寸为小的板, 它是工程上常见的薄壁结构, 广泛地应用在建筑、航空、造船、机械、化工等领域. 作用于薄板上的载荷, 一般可以分解为作用在中面之内的纵向载荷和垂直于中面的横向载荷. 在纵向载荷作用下, 薄板可按平面应力问题来处理; 在横向载荷作用下, 薄板发生弯曲, 可按薄板弯曲问题来处理. 根据 Kirchhoff 假设, 薄板在弯曲变形时存在一个中立面. 取变形前的中立面为 xy 平面, 则中立面上仅第三个方向的位移非零, 称之为挠度. 可认为挠度 u 沿板厚是一致的, 它只依赖于坐标 (x, y). 挠度 $u(x, y)$ 满足如下平衡方程：

$$\Delta^2 u = \frac{q}{D},$$

其中, Δ 是 Laplace 算子, u 是薄板的挠度, q 是作用于薄板上的外载荷集度, D 是板的抗弯刚度.

上述四阶椭圆型偏微分方程在定解时一般要在边界上规定两个边界条件. 对薄板弯曲问题, 边界条件通常有如下三类：第一类边界条件规定几何约束, 即规定边界上的横向位移 $u = u_0$ 及规定边界上的切向转角 $\dfrac{\partial u}{\partial n} = u_n$, 这一类边界条件是强加边界条件. 第二类边界条件规定载荷, 为力学边界条件. 这样的边界条件也有两种, 即①规定边界上的横向分布载荷 V_n, 它表示横向分布剪力平衡：

$$Q_n + \frac{\partial M_{tn}}{\partial s} = V_n,$$

其中, Q_n, M_{tn} 分别为边界上单位宽度的横向剪力及扭矩; ②规定边界上的分布弯矩载荷 M_{nn}, 它表示弯矩平衡：$M_{nn}=m$. 力学边界条件是变分问题的自然边界条件, 它们其实就是边界上的平衡方程. 第三类边界条件是弹性支承. 这样的条件也有两种, 即①在边界上除横向载荷外, 还承受正比于挠度的横向弹性反力; ②边界上除了弯矩载荷外, 还承受正比于切向转角的弹性反矩[1].

实际应用中最常见的边界条件有如下三种：

固支边, $u=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$;

简支边, $u=0$, $M_{nn}=0$;

自由边, $M_{nn}=0$, $Q_n+\dfrac{\partial M_{tn}}{\partial s}=V_n=0$.

于是, 弹性薄板的弯曲问题一般可归结为在上述三种边界条件下的双调和方程边值问题.

板方面的理论是从 1766 年 Euler 研究薄板的振动开始的[2~6]. 弹性理论奠基人 Navier 于 1820 年给出了第一个令人满意的、完整的薄板弯曲理论, 他以双三角级数的形式作为简支板的解答, 为板问题的解析法奠定了基础; 1829 年 Poisson 进一步改进了板的理论, 得到了形式为 $D\left(\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q$ 的微分方程, 讨论了板的边界条件, 但认为薄板的自由边界应有三个条件; 1850 年 Kirchhoff 提出了薄板的两个基本假设, 即直法线假设和垂直于中面的假设, 指出板在每一边界上只存在两个条件, 他被公认为是考虑弯曲和拉压联合作用的板理论的创始人. 建立在 Kirchhoff 假设基础上的弹性薄板的弯曲微分方程为

$$D\nabla^4 w=D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q,$$

即薄板的弯曲问题可归结为在固支边、简支边、自由边等三种常见边界条件下的双调和方程边值问题. 对薄板弯曲问题的求解方法主要有以下几类：

(1) 经典的级数解法、复变函数法及直接积分法、叠加法等, 如：1820 年 Navier 的四边简支矩形板的双三角级数解[7], 19 世纪末 Levy 的两对边简支矩形板的单三角级数解[2], 1999 年许琪楼[8] 的 Navier 与 Levy 解的统一解法, 1985 年钱民刚、严宗达[9] 的扇形板的 Fourier–Bessel 级数解, 2002 年李映辉[10] 的环形板和扇形板弯曲问题的级数解法, 1984 年谢学松[11] 的梯形板的 Kantorovich 解, 2001 年张淑杰等[12] 的正多边形板的采用试函数的级数展开法、直接积分法求圆板的轴对称弯曲问题以及无限长矩形薄板的弯曲问题[7], 张福范的叠加法求解四边自由矩形板及矩形悬臂板的弯曲问题[3,7], 1938 年 Leheniski 的带有小圆孔矩形板的复变函数解[7] 等;

(2) 能量法、变分法、加权残值法[7,13], 如 Rayleigh–Ritz 法 (1908 年)、Galerkin 法 (1915 年)、Trefftz 法 (1926 年)、Castigliano 的最小余能法 (1873 年)、Kantorovich 的改进的 Ritz 法 (1941 年)、曲庆璋的加权残值法求弹性地基上自由矩形板的弯曲与振动问题 (1992 年) 等;

(3) 各种数值方法, 如：差分法、有限元法、有限样条法[14]、边界积分法[15]等. 此外, 还有其他的一些方法, 如 1995 年陆渝生[16] 的全息干涉 —— 差分混合解法、1999 年周建平[17] 的条形传递函数、1994 年俞中直[18] 的广义重调和算子法等.

近年来在边界元方面, 胡海昌[19] 于 1993 年建立了弹性薄板弯曲理论的间接变量边界积分方程; 张耀明[20] 于 2002 年建立了弹性薄板弯曲问题等价的直接变量边界积分方程; 1996 年徐建曼[21] 的边界元解 Kirchhoff 平板的比拟法; 2000 年许强、孙焕纯[22] 的板弯曲问题的三维虚边界元法; 2000 年周慎杰[23] 的弹性薄板弯曲问题的边界轮廓法; 1992 年张伟星[24] 的关于薄板弯曲的无奇异积分的边界单元法等.

1.1.2　平面弹性问题及其研究概述

根据结构的几何形状及受力和约束情况, 可以把工程中的平面弹性力学问题近似地抽象成两大类, 即平面应力问题和平面应变问题.

平面应力问题以薄板为研究对象, 其基本假设为：

① 设弹性体的三个特征尺寸 a, b, h 中, 有一个尺寸, 例如厚度 h 相对于另外两个尺寸是很小的; ② 只在板上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力, 同时体力也平行于板面并且不沿厚度变化; ③ 物体所受的几何约束条件沿厚度亦是不变的. 以薄板的中面为 xy 面, 以垂直于中面的任一直线为 z 轴, 由上述假设可得到

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0,$$

其余三个应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都只是 x, y 的函数.

平面应变问题以长的柱体或严格地说以无限长的柱体为研究对象, 其基本假设为：

① 设弹性体的三个特征尺寸 a, b, L 中, 有一个尺寸, 例如长度 L 相对于另外两个尺寸是很大的; 取长度方向为 z 方向, 垂直于长度方向的平面称为横截面, 横截面平行于 Oxy 平面; ② 只在柱面上受平行于横截面并且不沿长度变化的面力, 同时体力也平行于横截面并且不沿长度变化; ③ 物体所受的几何约束条件沿长度亦是不变的.

由上述假设可得到

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y),$$

其余三个应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都只是 x, y 的函数.

平面弹性力学有三类基本边值问题：① 给定边界外力问题; ② 给定边界位移问题; ③ 混合边值问题 (在一部分边界上给定位移, 在另一部分边界上给定外力).

平面弹性问题的求解一般有两条途径[25,26]：位移法和力法. 位移法, 即以位移分量为基本未知函数, 得到 Navier 方程

$$-\mu\Delta\vec{u}-(\lambda+\mu)\mathrm{graddiv}\vec{u}=\vec{f},$$

其中, μ, λ 为 Lamé常数, 位移 $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{f}=(f_1,f_2)$, $\vec{f}$ 为区域上的外载荷密度. 另一方法为力法, 即以应力分量为基本未知函数, 再引入应力函数表示应力分量. 当按应力求解应力边界问题时, 在常体力 (X,Y) 情况下, 两种平面问题都满足下面两个平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0,$$

以及相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0.$$

引入 Airy 应力函数 $\varphi(x,y)$ 表示应力分量

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-Xx,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-Yy,\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

则由相容方程可得应力函数必满足双调和方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=\Delta^2\varphi=0.$$

此外, 根据边界已知面力可求出单连域边界或开孔无限域孔边上任一点应力函数值 φ_0 及应力函数的法向导数值 φ_n. 于是可得到应力函数法求解平面弹性问题的双调和方程边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2\varphi=0, & \Omega,\\ \varphi|_\Gamma=\varphi_0, & \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma=\varphi_n.\end{cases}$$

这种方法的优点是未知函数只有一个, 缺点是有些位移条件用应力函数表示比较麻烦. 对上述以应力函数为基本未知量的偏微分方程的求解除了经典的逆解法、半逆解法、复变函数和保角变换的方法外, 人们还探索了各种数值方法：如有限差分法、有限元法、边界元法等. 尤其在解析或半解析半数值方法的探索中付出了不懈的努

力, 如王林江[27] 在 1994 年研究的用多保角变换法、用多复变量应力函数计算多连通平面问题; 曹富新[28] 在 1994 年将复变函数引入变分法, 提出了弹性平面问题的一个新方法：复变–变分方法; 1991 年钟万勰将 Hamilton 体系理论引入弹性力学, 王治国[29] 在此基础上在 1995 年推导出一种更为有效的 Hamilton 单元方法; 王元淳[30] 在 1994 年用域外奇点法中的位移法和应力法求解弹性问题; 同年孙焕纯[31] 将虚边界元–最小二乘法应用于弹性平面问题的研究; 雷小燕[32] 提出了精度高于常规边界元法、独立于 Rizzo 型边界积分方程的一类新的边界积分方程; 王其中[33] 用泛复变函数构造了应力函数的一系列特解; 邹广德[34] 在 1995 年提出了弹性力学问题的一种新方法 —— 域外虚拟力法; 1999 年周慎杰[35] 用边界轮廓法对弹性力学问题建立了位移边界积分方程和面力边界积分方程; 2000 年龙述尧[36] 提出了弹性力学平面问题的无网格局部边界积分方程方法; 同年郑神州[37] 研究了双解析函数和双调和函数的关系, 并对单位圆区域给出了类似于 Poisson 公式解的积分表示式; 2001 年牛忠喜[38] 导出了弹性力学中一个新的位移导数边界积分方程: 自然积分方程; 同年张耀明[39] 还归化出了弹性力学平面问题的不含 Gauchy 主值积分和 Hadamard 强奇异积分的无奇异边界积分方程; 2002 年蒋玉川[40] 对于狭长矩形截面梁提出了一种简单实用的确定应力函数的方法. 此外, 1999 年田中旭[41] 提出了弹性力学的一种平衡差分解法; 2000 年李海阳[42] 提出了等参条形传递函数方法, 适合于静力与动力平面问题的分析.

由上述分析可知, 薄板的弯曲问题与平面问题具有多方面的相似性, 其方程均可以归结为双调和方程, 其中板的挠度 w 和应力函数 φ 具有一一对应关系. 这种相似性已为大家所熟悉, 如 1996 年徐建曼[43] 将薄板弯曲问题与平面弹性问题进行了比拟, 引入力矩函数表示平板弯曲内力, 对已有平面问题的边界元程序作一些修改, 就可用来计算薄板的小挠度问题; 1999 年钟万勰[44] 引用两个弯矩函数对应于平面弹性的位移, 建立了平面弹性与板弯曲的相似性理论, 给出了板弯曲经典理论的另一套基本方程与求解方法, 然后进入 Hamilton 体系用直接法研究板弯曲问题; 同年钟万勰[45] 进一步完善了板弯曲与平面弹性问题的多类变量变分原理, 该原理不仅可以处理有残余变形的弹性力学问题, 而且根据板弯曲与平面弹性之间的模拟关系, 可综合两者给出扁壳的多类变量变分原理.

由上述分析可知, 弹性薄板弯曲问题和给定应力边界条件的平面弹性问题都可以归结为双调和方程边值问题, 其通解可统一用双调和函数或双解析函数的实部或虚部来表示. 下面对双解析函数和双调和函数作一些简要介绍.

1.2　双解析函数与双调和函数

双调和方程 $\Delta^2 u = 0$ 的解函数称为双调和函数或重调和函数. 下面在解析函

数的基础上介绍双解析函数以及它和双调和函数的关系[37].

用 C 来表示复平面, Ω 为 C 上的一个区域, 记:

$$z = x + \mathrm{i}y \in \Omega, \quad f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

根据解析函数理论的有关结果, 一个函数 $f(x, y)$ 为解析函数的充要条件是 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 易从此方程得到其实函数方程组 (Cauchy-Riemann 方程组):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

设复区域 $\Omega \subset C$, $W(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \in C^2(\Omega, C)$. 如果 $W(z)$ 满足复微分方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in \Omega,$$

就称 $W(z)$ 为区域 Ω 上的双解析函数. 对双解析函数, 也可得到与 Cauchy-Riemann 方程组相对应的重 C-R 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 2\dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = -2\dfrac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

由上述方程组可进一步得到

$$\Delta^2 u(x, y) = \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = 0,$$

$$\Delta^2 v(x, y) = \frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial y^4} = 0.$$

上面两式即是从双解析函数得到的一对双调和方程, 称为互为共轭的双调和方程, 就像解析函数的实部和虚部满足互为共轭的调和方程一样. 可见双调和函数可以用双解析函数的实部或虚部来表示. 文献 [37] 中证明了平面弹性问题对于给定的边界面力, 其双调和方程的解即双调和函数是唯一的, 并给出了单位圆内双解析函数及双调和函数的一般形式. 文献 [1] 中利用 Green 函数法、Fourier 级数法、复变函数法等方法通过自然边界归化得到了几种典型域内双调和函数的表示形式. 下面简要介绍双调和方程的自然边界归化法.

1.3 双调和方程边值问题的自然边界归化原理

在上世纪 70 年代中期, 我国著名数学家冯康教授在研究一些强奇异积分问题及相应的变分形式时, 首次提出了正则归化的思想. 后来, 余德浩教授等进一步研究了强奇异积分的计算方法, 发展了自然边界归化的思想, 正式把正则边界归化的方法称为自然边界积分法, 也称为自然边界元法[46~53]. 自然边界元法是根据 Green 函数法或复变函数法或 Fourier 级数法将微分方程 Dirichlet 边值问题归化为所研究区域上的 Poisson 积分公式, 或将微分方程 Neumann 边值问题归化为边界上的一个强奇异积分方程: 前者直接在边界上进行积分运算, 属于解析方法; 后者需要离散化求解, 属于半解析半数值方法. 目前, 自然边界元法已成功地应用于一些典型区域上的调和方程、双调和方程、平面弹性方程及 Stokes 方程等问题的求解.

1.3.1 弹性薄板弯曲问题

设有如下薄板双调和方程边值问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{q}{D} = f, & \Omega\text{内}, \\ (Tu, Mu) = (t, m), & \Gamma\text{上}, \end{cases} \tag{1-1}$$

其中, T, M 分别为微分边值算子 (见式 (1-2)), $(t,m) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 设 $P_1(\Omega)$ 为 Ω 上不超过一次的多项式全体, 则 (t,m) 需满足相容性条件

$$\int_\Gamma \left(tp + m\frac{\partial p}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = 0, \quad \forall p \in P_1(\Omega).$$

对薄板弯曲问题, 微分边值算子为

$$\begin{cases} Tu = \left\{ -\dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1-\mu)\dfrac{\partial}{\partial s}\left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) n_1 n_2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(n_2^2 - n_1^2) \right] \right\}_\Gamma, \\ Mu = \left[\mu \Delta u + (1-\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} n_1^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} n_2^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} n_1 n_2 \right) \right]_\Gamma. \end{cases} \tag{1-2}$$

上式中 (n_1, n_2) 为边界 Γ 的外法线方向余弦, μ 为 Poisson 比. 此时, Tu, Mu 分别为相应于边界横向分布剪力 V_n 及分布弯矩 M_{nn} 与抗弯刚度 D 的比值, 即有

$$Tu = -\frac{V_n}{D}, \quad Mu = \frac{M_{nn}}{D}.$$

对一般的重调和问题, 可不考虑 μ 的物理意义, 取 $\mu = 1$, 则微分边值算子分别简化为

$$\begin{cases} Tu = -\dfrac{\partial}{\partial n}\Delta u, \\ Mu = \Delta u. \end{cases} \tag{1-3}$$

定义双线性泛函

$$D(u,v)=\iint\limits_{\Omega}\left\{\Delta u\Delta v-(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

及线性泛函

$$F(v)=\int_{\Gamma}\left(m\frac{\partial v}{\partial n}+tv\right)\mathrm{d}s,$$

于是边值问题 (1-1) 等价于变分问题

$$\begin{cases}\text{求}u\in H^2(\Omega),\\ \text{s.t. }D(u,v)=F(v),\quad\forall v\in H^2(\Omega).\end{cases}\tag{1-4}$$

由双调和方程的 Green 第二公式

$$\iint\limits_{\Omega}(u\Delta^2 v-v\Delta^2 u)\mathrm{d}p=\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\Delta v-\frac{\partial u}{\partial n}\Delta v+\frac{\partial v}{\partial n}\Delta u-v\frac{\partial}{\partial n}\Delta u\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathrm{d}p=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 若取 $u=u(p)$ 满足双调和方程, $v=G(p,p')$ 为 Ω 上双调和方程的 Green 函数, 即满足

$$\begin{cases}\Delta^2 G(p,p')=\delta(p-p'),\\ G(p,p')|_{p\in\Gamma}=0,\\ \left.\dfrac{\partial}{\partial n}G(p,p')\right|_{p\in\Gamma}=0,\end{cases}$$

便得到一般双调和方程的 Poisson 积分公式

$$\begin{aligned}u(p)=&\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial n'}\Delta' G(p,p')u_0(p')-\Delta' G(p,p')u_n(p')\right]\mathrm{d}s'\\&+\iint\limits_{\Omega}G(p,p')f(p,p')\mathrm{d}p',\quad p\in\Omega,\end{aligned}\tag{1-5}$$

或写做

$$\begin{aligned}u(p)=&\int_{\Gamma}[-T'G(p,p')u_0(p')-M'G(p,p')u_n(p')]\mathrm{d}s'\\&+\iint\limits_{\Omega}G(p,p')f(p,p')\mathrm{d}p',\quad p\in\Omega.\end{aligned}\tag{1-6}$$

以上两式中, $p=(x,y)$, $p'=(x',y')$, $u_n=\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}$, $\mathrm{d}p'=\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$, Δ' 为关于 p' 的调和算子.

式 (1-6) 即为弹性薄板弯曲挠度的 Poisson 积分公式, 其中 u_0, u_n 分别代表薄板的边界挠度和边界法线转角. 对上式分别以微分边值算子 T 及 M 作用之, 并令 p 由 Ω 内部趋向边界 Γ, 即得到弹性薄板弯曲问题的自然积分方程

$$\begin{cases} Tu - \iint\limits_{\Omega} TG(p,p')f(p')\mathrm{d}p' = \int_{\Gamma} [K_{00}u_0 + K_{01}u_n]\,\mathrm{d}s', \\ Mu - \iint\limits_{\Omega} MG(p,p')f(p')\mathrm{d}p' = \int_{\Gamma} [K_{10}u_0 + K_{11}u_n]\,\mathrm{d}s', \end{cases} \tag{1-7}$$

其中算子

$$K_{00} = -TT'G(p,p'), \quad K_{01} = -TM'G(p,p'),$$

$$K_{10} = -MT'G(p,p'), \quad K_{11} = -MM'G(p,p').$$

由式 (1-7) 可知, 对给定的边界载荷 $(t,m) \in \left[H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]_0$, 有自然积分方程

$$\begin{cases} t' = t - \iint\limits_{\Omega} TG(p,p')f(p')\mathrm{d}p' = \int_{\Gamma} [K_{00}u_0 + K_{01}u_n]\,\mathrm{d}s', \\ m' = m - \iint\limits_{\Omega} MG(p,p')f(p')\mathrm{d}p' = \int_{\Gamma} [K_{10}u_0 + K_{11}u_n]\,\mathrm{d}s'. \end{cases}$$

令

$$\begin{aligned} \hat{D}(u_0,u_n;v_0,v_n) = \int_{\Gamma} \Big\{ v_0 \left[\int_{\Gamma} (K_{00}u_0 + K_{01}u_n)\mathrm{d}s' \right] \\ + v_n \left[\int_{\Gamma} (K_{10}u_0 + K_{11}u_n)\mathrm{d}s' \right] \Big\} \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

$$\hat{F}(v_0,v_n) = \int_{\Gamma} (t'v_0 + m'v_n)\mathrm{d}s,$$

则所求问题等价于变分问题

$$\begin{cases} (u_0,u_n) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \text{s.t.}\hat{D}(u_0,u_n;v_0,v_n) = \hat{F}(v_0,v_n), \quad \forall (u_0,u_n) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{cases} \tag{1-8}$$

文献 [1] 证明了边界上的变分问题 (1-8) 与区域上的变分问题 (1-4) 是等价的, 这样, 同一问题既可以采用在区域内离散的有限元法, 也可以采用在边界上离散的自然边界元法, 还可以根据问题的需要采用自然边界元与有限元耦合的方法.

1.3.2　平面弹性问题

前面已得到式 (1-5) 为一般双调和方程 (非齐次) 解函数的 Poisson 积分公式, 由于平面弹性问题在常体力情况下, 应力函数的微分方程是齐次双调和方程, 则式 (1-5) 中最后一项关于 Ω 域内的积分为零 (因 $f(p,p')=0$), 于是可得到平面弹性问题应力函数的边界积分公式为

$$u(p)=\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial n'}\Delta' G(p,p')u_0(p')-\Delta' G(p,p')u_n(p')\right]\mathrm{d}s',\quad p\in\Omega, \tag{1-9}$$

其中 u_0, u_n 分别为应力函数边界值及应力函数法向导数的边界值. 当边界上的面力已知时, 在边界上选取一点作为基点, 可求得边界上任意一点的 u_0 及 u_n 值, 在求得了给定区域的双调和方程的 Green 函数后, 可直接由上式得到平面问题中域内点的应力函数值.

对平面弹性问题推导其自然积分方程时, 与薄板弯曲问题不同, 其微分边值算子应为边界上的法向应力与切向应力, 分别记为 Nu, Tu, 即有

$$\begin{cases} Nu=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}n_1^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}n_2^2-2n_1n_2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]_{\Gamma}, \\ Tu=\left[n_1n_2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-(n_1^2-n_2^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]_{\Gamma}, \end{cases} \tag{1-10}$$

(n_1,n_2) 为边界 Γ 的外法线方向余弦. 对式 (1-9) 两边分别作用对应于平面弹性问题的微分边值算子 Nu, Tu, 并令 p 由 Ω 内部趋向边界 Γ, 即得到平面弹性问题的自然积分方程

$$\begin{cases} Nu=\displaystyle\int_{\Gamma}\left(\left[N\frac{\partial}{\partial n'}\Delta' G(p,p')\right]u_0-[N\Delta' G(p,p')]u_n\right)\mathrm{d}s', \\ Tu=\displaystyle\int_{\Gamma}\left(\left[T\frac{\partial}{\partial n'}\Delta' G(p,p')\right]u_0-[T\Delta' G(p,p')]u_n\right)\mathrm{d}s'. \end{cases} \tag{1-11}$$

对于一些典型区域, 如上半平面、圆内及圆外区域的双调和方程边值问题, 可以由双调和方程的基本解

$$E(p,p')=\frac{1}{16\pi}[(x-x')^2+(y-y')^2]\ln[(x-x')^2+(y-y')^2] \tag{1-12}$$

出发, 求出这些区域的 Green 函数 $G(p,p')$, 再代入式 (1-5)、(1-7) 及 (1-9)、(1-11) 进行微分边值运算, 即可得到相应区域的双调和方程的 Poisson 积分公式及自然积分方程. 对于上述典型区域的双调和方程的 Poisson 积分公式, 将分别在后续的各章中介绍并给出具体的应用实例.

后面的研究内容涉及到广义函数论的有关知识, 因此下面简单介绍广义函数这方面的内容.

1.4　广义函数简介

1.4.1　广义函数的引入[54~58]

历史上最早出现的广义函数是物理学家 Dirac 为描述集中量的分布密度而引入的 δ 函数. 以一维的质量分布为例, 用 $m(x)$ 表示在区间 $(-\infty, x]$ 物质的质量, 如果 $m(x) \in C^1$, 那么质量分布密度为 $\rho(x) = \dfrac{\mathrm{d}m(x)}{\mathrm{d}x}$. 如果只有一个单位质量集中于坐标原点 $x = 0$, 那么 $m(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. $H(x)$ 称为 Heaviside 函数, 记分布密度函数为 $\delta(x)$. 容易看出 $\delta(x)$ 应具有以下性质：

(1) $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0; \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1;$

(3) 对任意连续函数 $\varphi(x)$, 有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$

上面的推导是形式上的, δ 函数不符合古典函数的定义, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 上也不是古典意义下的可积函数. 古典意义下几乎处处为零的函数的积分为零而不可能为 1;

(4) $\delta(x) = \dfrac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}.$

$H(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是 C^1 类函数, 这里的微分符号也只是延用的形式符号. 如果把 $x = 0$ 平移到 $x = \xi$, 那么 $\delta(x)$ 变为 $\delta(x - \xi)$, 有

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} 0, & x \neq \xi, \\ \infty, & x = \xi, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x = \varphi(\xi),$$

δ 函数的引入以及对 δ 函数进行形式上的运算, 虽然在数学上缺乏严谨, 但它却有效地解决了物理上的问题, 使统一处理通常的连续型分布和集中量的离散型分布成为可能. 20 世纪中期, 数学上广义函数的引入, 才使 δ 函数作为一种广义函数, 它的定义、性质及运算都建立在严格的数学理论之上.

广义函数是普通函数在某种意义下的推广. 普通函数是数和数之间的对应, 而广义函数作为一种泛函, 是某个函数空间中的函数和数之间的对应. 这个函数空间称为基本函数空间, 基本函数空间有很多种, 定义在其上的广义函数也是各式各样

的. 下面介绍一种常用的基本函数空间 $D(R^n)$, 用 $C_0^\infty(R^n)$ 表示在某一有界区域外为零的 $C^\infty(R^n)$ 的函数, 在 $C_0^\infty(R^n)$ 的函数中定义极限关系：

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x),$$

是指 φ_k,φ 在某一有界区域外为零, 且 φ_k 的各阶导数都一致趋于 φ 的相应各阶导数, 具有这种极限关系的 $C_0^\infty(R^n)$ 记为 $D(R^n)$. 类似可定义基本空间 $D(\Omega)$, 此时 $C_0^\infty(\Omega)$ 为在有界闭集 $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ 外为零的 $C^\infty(\Omega)$ 的函数.

定义　基本空间 D 上的线性连续泛函称为广义函数, 即对任意 $\varphi(x)\in D$, 有一个数与之对应, 记为 $T(\varphi)$ 或 (T,φ), $\varphi(x)$ 又称检验函数. 所有 D 上的广义函数全体记为 D', 称为 D 的对偶空间, T 是线性的, 故

$$T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(T,\varphi_1)+\alpha_2(T,\varphi_2).$$

T 是连续的, 即若 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}(T,\varphi_n)=(T,\lim\varphi_n)=(T,\varphi).$$

对在 Ω 上的局部可积函数 $f(x)$, 可定义一个广义函数

$$T_f(\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

此广义函数称为由函数 $f(x)$ 生成的广义函数, 这种广义函数称为正则广义函数, 由此可见广义函数是可积函数的一种推广. 因此, 也把一般的广义函数记做 $T(x)$, 它在 $\varphi(x)$ 的值记为

$$(T(x),\varphi(x))=\int_\Omega T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

这里的积分符号只是一个形式符号, 不再是原来意义下的积分符号. 正则广义函数以外的广义函数称为奇异广义函数.

1.4.2　广义函数的运算

(1) 线性运算：广义函数的加法定义为 $(T_1+T_2,\varphi)=(T_1,\varphi)+(T_2,\varphi)$, 广义函数与数的乘法定义为 $(\alpha T,\varphi)=\alpha(T,\varphi)$.

(2) 极限运算：广义函数 T_n 收敛于 T 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n,\varphi)=(T,\varphi)$, $\forall\varphi\in D$. 这种极限关系也称为弱极限, 即 $\forall\varphi\in D, T_n(\varphi)\to T(\varphi)$, 因此弱极限的概念是函数每点收敛的推广.

(3) 乘子运算：两个广义函数一般不能相乘, 但可以定义 $C^\infty(\Omega)$ 的函数与广义函数的乘法, 即 $T(x)\in D'$, $\alpha(x)\in C^\infty(\Omega)$, 定义 $\alpha(x)T(x)\in D'$ 为

$$(\alpha(x)T(x),\varphi(x))=(T(x),\alpha(x)\varphi(x)),\quad \forall\varphi\in D,$$

称 $\alpha(x)$ 为 D' 中的乘子.

(4) 直积运算：若 $f(x)\in D'(R^1),g(y)\in D'(R^1)$, 定义 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的直积 $f(x)g(y)$ 为 $D'(R^2)$ 中的广义函数.

(5) 微分运算：广义函数 $f(x)\in D'(R^1)$ 的导数定义为

$$(f'(x),\varphi(x))=-(f(x),\varphi'(x)).$$

若 $f(x)\in D'(R^n)$, 则它的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ 定义为

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k},\varphi(x)\right)=-\left(f(x),\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right).$$

显然任意广义函数均可无穷次求导, 且

$$(f^{(n)}(x),\varphi(x))=(-1)^n(f(x),\varphi^{(n)}(x)).$$

1.4.3　奇异函数[58]

广义函数应用于力学领域始于 20 世纪 40 年代, 它在力学中的应用已涉及到力学中的各个分支, 如材料力学、结构力学、弹性力学、振动力学、塑性力学、黏弹性力学等. 在力学中, 人们习惯将包括 Dirac δ 函数及其各阶导数、Heaviside 阶跃函数 $H(x)$ 及其各阶积分的广义函数族称为奇异函数. 通常奇异函数指的是下列函数族：

$$f(x)=\langle x-x_i\rangle^n,$$

$$\text{当 } n\geqslant 0 \text{ 时, } \langle x-x_i\rangle^n=\begin{cases}(x-x_i)^n, & x\geqslant x_i,\\ 0, & x<x_i;\end{cases}$$

$$\text{当 } n<0 \text{ 时, } \langle x-x_i\rangle^n=\begin{cases}\infty, & x=x_i,\\ 0, & x\neq x_i.\end{cases}$$

式中, 括号 $\langle\rangle$ 一般称为 Macauley 括号. 当 $n=-1$ 时即为 Dirac δ 函数, $n=0$ 时即为 Heaviside 阶跃函数 $H(x)$. δ 函数的 n 阶导数定义及性质为

$$\delta^{(n)}(x-x_i)=\langle x-x_i\rangle^{-(n+1)}=\begin{cases}\infty, & x=x_i,\\ 0, & x\neq x_i,\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_i)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(x_i),$$

$$\begin{aligned} f(x)\delta^{(n)}(x) =& (-1)^n f^{(n)}(0)\delta(x) + (-1)^{n-1} n f^{(n-1)}(0)\delta'(x) \\ &+ (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2!}\cdot f^{(n-2)}(0)\delta''(x) + \cdots + f(0)\delta^{(n)}(x). \end{aligned}$$

此外, 上述奇异函数的微分法则和积分法则可归纳如下：

(1) 微分

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x-x_i\rangle^n = \langle x-x_i\rangle^{n-1}, & n \leqslant 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x-x_i\rangle^n = n\langle x-x_i\rangle^{n-1}, & n > 0. \end{cases}$$

(2) 积分

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\langle x-x_i\rangle^n \mathrm{d}x = \langle x-x_i\rangle^{n+1}, & n \leqslant 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\langle x-x_i\rangle^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\langle x-x_i\rangle^{n+1}, & n > 0. \end{cases}$$

上述奇异函数的性质及微分、积分公式将在后面各章中发挥重要作用.

1.5 强奇异积分计算方法[1]

与有限元法不同, 边界元法的数值积分通常带有对数或一阶、二阶奇异性. 这种奇异积分不可能在通常的 Riemann 或 Lebesgue 意义下定义. 含对数型积分核的积分为弱奇异积分, 这一积分在广义 Riemann 积分的意义下仍是可积的. 带一阶奇异核的积分为 Cauchy 型奇异积分, 这一积分虽在广义 Riemann 意义下无定义, 但仍可定义其 Cauchy 主值. 带二阶奇异核的积分为超强奇异积分. 由于这种方程曾在 Hadamard 的著作中出现过, 故也称为 Hadamard 型奇异积分方程. Hadamard 型强奇异积分比 Cauchy 型奇异积分具有更高阶的奇异性. 按经典微积分学的概念, 这些积分是发散的、没有意义的, 当然也无法用经典的数值积分公式计算出其具有一定精度的近似值, 而由自然边界归化得到的自然积分方程无一例外都是强奇异积分方程. 为了近似计算这样的积分, 必须发展相应的数值方法. 下面介绍两种在后续内容中要用到的强奇异积分的计算方法.

1.5.1 积分核级数展开法

在简支圆板弯曲的自然积分方程中含有关于边界法线转角 $u_n(\theta)$(未知) 的积

分项

$$-\frac{1}{2\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}} * u_n(\theta) = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi\sin^2\dfrac{\theta-\theta'}{2}} u_n(\theta')\mathrm{d}\theta',$$

上式中积分核 $\dfrac{1}{2\pi\sin^2\dfrac{\theta-\theta'}{2}}$ 是强奇异的, 需利用广义函数论中的有关公式将其展开为 Fourier 级数的形式, 把 $u_n(\theta)$ 采用分段线性元进行逼近, 才能进行具体的数值计算.

设

$$m(\theta) = -\frac{1}{2\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}} * u_n(\theta), \tag{1-13}$$

对 u_n 采用分段线性元逼近, 将圆弧 N 等分, 取均匀剖分下的分段线性基函数

$$L_i(\theta) = \begin{cases} \dfrac{N}{2\pi}(\theta - \theta_{i-1}), & \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i, \\ \dfrac{N}{2\pi}(\theta_{i+1} - \theta), & \theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{1-14}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, N, \theta_k = \dfrac{k}{N}2\pi \ (k = 0, 1, \cdots, N+1)$.

设 $u_n(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{N} V_j L_j(\theta)$, 则由式 (1-13) 相应的变分问题

$$\int_0^{2\pi} m(\theta)L_i(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}} * \sum_{j=1}^{N} V_j L_j(\theta) \right] L_i(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{1-15}$$

利用广义函数论中的重要公式：

$$-\frac{1}{4\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\cos n\theta,$$

代入式 (1-15) 得到线性方程组

$$QV = B,$$

式中

$$V = [V_1, V_2, \cdots, V_N]^{\mathrm{T}},$$

$$B = [B_1, B_2, \cdots, B_N]^{\mathrm{T}}, \quad B_i = \int_0^{2\pi} m(\theta)L_i(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad Q = [q_{ij}]_{N\times N},$$

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-1}{2\pi\sin^2\dfrac{\theta-\theta'}{2}} L_j(\theta')L_i(\theta)\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\cos n(\theta-\theta')L_j(\theta')L_i(\theta)\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\theta, \quad i=1,2,\cdots,N.
\end{aligned} \tag{1-16}
$$

令

$$
a_k = \frac{8N^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin^4\frac{n}{N}\pi\cos\frac{nk}{N}2\pi, \quad k=0,1,2,\cdots,N-1,
$$

得

$$
\begin{aligned}
q_{ij} = q_{ji} = a_{|i-j|}, \quad i,j=1,2,\cdots,N, \\
Q = \left[a_{|i-j|}\right]_{N\times N} = ((a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})).
\end{aligned} \tag{1-17}
$$

上式右端表示由 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}$ 生成的循环矩阵, 即

$$
a_i = a_{N-i}, \quad i=1,\cdots,N-1.
$$

由

$$
B_i = \sum_{j=1}^{N} m(\theta_j)L_i(\theta_j)\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{N}m(\theta_i),
$$

得

$$
m(\theta_i) = \frac{N}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} q_{ij}V_j, \quad i=1,2,\cdots,N. \tag{1-18}
$$

根据问题的边界条件, 上式左边 $m(\theta)$ 由简支板边界径向分布弯矩与抗弯刚度的比值确定, 是已知值, 且上式中刚度矩阵为对称循环稀疏矩阵, 从而由上式采用迭代法可快速求解出边界上各节点的法线转角 V_j.

1.5.2　奇异部分分离计算法

在研究上半平面体弹性问题时, 自然边界归化会导致计算当 $s\in(a,b)$ 时, $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{\pi(t-s)^2}\mathrm{d}t$ 的强奇异积分. 可以利用函数 $f(t)$ 的 Taylor 展开, 分离出被积函数的奇异部分, 根据定义计算出奇异部分的有限部分积分的准确值, 再对剩余的非奇异积分应用通常的方法求值. 这是一类奇异部分分离计算法.

(1) 当积分核为 $\dfrac{1}{(t-s)^2}$, 函数 $f(t)\in C^2(a,b)$ 时, 对 $s\in(a,b)$, Hadamard 有限部分积分定义为

$$
\text{f.p.}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon}\frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t + \int_{s+\varepsilon}^{b}\frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t - \frac{2f(s)}{\varepsilon}\right\}.
$$

特殊地, 当 $f(t)=1$ 时, 有

$$\text{f.p.}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t=-\left(\frac{1}{b-s}+\frac{1}{s-a}\right).$$

对于一般的 $f(t)\in C^2(a,b)$, 有 Taylor 展开式

$$f(t)=f(s)+f'(s)(t-s)+\frac{1}{2}f''(s+\theta(t-s))(t-s)^2,$$

其中 $0<\theta<1$, 于是

$$\begin{aligned}\text{f.p.}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t=&f(s)\ \text{f.p.}\int_a^b \frac{1}{(t-s)^2}\mathrm{d}t+f'(s)\ \text{p.v.}\int_a^b \frac{1}{t-s}\mathrm{d}t\\&+\int_a^b \frac{1}{(t-s)^2}[f(t)-f(s)-f'(s)(t-s)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其右端第一项为 Hadamard 有限部分积分, 第二项简化为 Cauchy 主值积分, 第三项简化为经典 Riemann 积分, 其被积函数已不含奇异性. 由有限部分积分

$$\text{f.p.}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t=-\left(\frac{1}{b-s}+\frac{1}{s-a}\right),$$

及 Cauchy 主值积分

$$\text{p.v.}\int_a^b \frac{1}{t-s}\mathrm{d}t=\ln\frac{b-s}{s-a},$$

得

$$\begin{aligned}\text{f.p.}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t=&-\left(\frac{1}{b-s}+\frac{1}{s-a}\right)f(s)+f'(s)\ln\frac{b-s}{s-a}\\&+\int_a^b \frac{1}{(t-s)^2}[f(t)-f(s)-f'(s)(t-s)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

上式中最后一项可以利用通常 Riemann 积分的数值积分公式进行计算.

(2) 当 $f(t)\notin C^2(a,b)$, 但 $f(t)\in C^2(a,s^-)\cap C^2(s^+,b)$ 时, Hadamard 有限部分积分的定义应修改为

$$\begin{aligned}\text{f.p.}\int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg\{&\int_a^{s-\varepsilon}\frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t-\frac{f(s^-)}{\varepsilon}-f'(s^-)\ln\varepsilon\\&+\int_{s+\varepsilon}^b \frac{1}{(t-s)^2}f(t)\mathrm{d}t-\frac{f(s^+)}{\varepsilon}+f'(s^+)\ln\varepsilon\Bigg\}.\end{aligned}$$

当奇点 s 为积分区间端点时, 上式化为

$$\text{f.p.}\int_a^s \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon}\frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t-\frac{f(s^-)}{\varepsilon}-f'(s^-)\ln\varepsilon\right\},$$

或

$$\text{f.p.} \int_s^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{s+\varepsilon}^b \frac{1}{(t-s)^2}f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(s^+)}{\varepsilon} + f'(s^+)\ln\varepsilon\right\}.$$

特别地, 当 $f(t)=1$ 时, 可得

$$\text{f.p.} \int_a^s \frac{1}{(t-s)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-a},$$

$$\text{f.p.} \int_s^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{b-s}.$$

又由

$$\text{f.p.} \int_a^s \frac{1}{t-s}\mathrm{d}t = -\ln(s-a), \quad \text{f.p.} \int_s^b \frac{1}{t-s}\mathrm{d}t = \ln(b-s)$$

得到对一般的 $f(t)\in C^2(a,s^-)\cap C^2(a,s^+)$ 的 Hadamard 有限部分积分计算公式

$$\begin{aligned}\text{f.p.} \int_a^b \frac{f(t)}{(t-s)^2}\mathrm{d}t =& -\frac{1}{s-a}f(s^-) - \frac{1}{b-s}f(s^+) + \ln\frac{(b-s)'f'(s^+)}{(s-a)f'(s^-)}\\ &+\int_a^s \frac{1}{(t-s)^2}[f(t)-f(s^-)-f'(s^-)(t-s)]\mathrm{d}t\\ &+\int_s^b \frac{1}{(t-s)^2}[f(t)-f(s^+)-f'(s^+)(t-s)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

上式右端最后二项已不再是奇异积分.

参 考 文 献

[1] 余德浩. 自然边界元法的数学理论 [M]. 北京：科学出版社, 1993

[2] 徐芝纶. 弹性力学下册 [M]. 北京：高等教育出版社, 1998.3

[3] 成祥生. 应用板壳理论 [M]. 济南：山东科学技术出版社, 1989.8

[4] 黄与宏. 板结构 [M]. 北京：人民交通出版社, 1992

[5] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论 [M]. 西安：西安交通大学出版社, 1993

[6] 刘鸿文. 板壳理论 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1987：121–123

[7] 曲庆璋, 章权, 季求和, 梁兴复. 弹性板理论 [M]. 北京：人民交通出版社, 2000.1

[8] 许琪楼, 姜锐, 唐国明, 高峰. 四边支承矩形板弯曲统一求解方法 —— 兼论 Navier 解与李维解法的统一性 [J]. 工程力学, 1999, 16(3): 90–99

[9] 钱民刚, 严宗达. 扇形板的 Fourier–Bessel 级数解 [J]. 应用数学和力学, 1985, 6(4):359–379

[10] 李映辉. 环形板与扇形板弯曲问题的级数解 [J]. 力学与实践, 2002, 24(4):36–38

[11] 谢学松, 王磊. 梯形板弯曲问题的 Kantorovich 解 [J]. 应用数学和力学, 1984, 5(3):399–410

[12] 张淑杰, 关富玲, 戴素娟. 正多边形弹性薄板的弯曲解 [J]. 力学与实践, 2001, 23(6): 35–38

[13] 曲庆璋, 梁兴复等. 加权残值法及最新进展 [M]. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1992

[14] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及应用 [M]. 北京：科学出版社, 1981

[15] Zhang Y M, Sun H C, Yang J X. Equivalent boundary intergral equations with indirect unknows for thin elastic plate bending theory [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(11):1246–1255

[16] 陆渝生. 薄板小挠度弯曲问题中的全息干涉 —— 差分混合解法 [J]. 力学与实践, 1995, 17(5):35–37

[17] 周建平, 李海阳, 李爱丽. 弹性薄板分析的条形传递函数方法 [J]. 力学学报, 1999, 31(3): 320–329

[18] 俞中直. 广义重调和算子及其在薄板弯曲中的应用 [J]. 应用数学和力学, 1994, 15(2): 159–165

[19] 胡海昌. 弹性薄板弯曲理论中充要的间接变量边界积分方程 [J]. 上海力学, 1993, 14(1): 1–11

[20] 张耀明, 张作泉, 孙焕纯, 吕和祥. 弹性薄板弯曲问题的等价的直接变量边界积分方程 [J]. 计算力学学报, 2003, 20(2):223–226

[21] 徐建曼, 李芝兴. 边界元解 Kirchhoff 平板的比拟法 [J]. 工程力学, 1996, 13(1):115–124

[22] 许强, 孙焕纯. 板弯曲问题三维虚边界元分析 [J]. 工程力学, 2000, 17 (3):22–30

[23] 周慎杰, 孙树勋, 曹志远, 王威强. 弹性薄板弯曲问题的边界轮廓法 [J]. 力学学报, 2000, 32(6):717–726

[24] 张伟星. 一种无奇异积分的边界单元法 [J]. 工程力学, 1992, 9(2):91–98

[25] 武际可, 王敏中, 王伟. 弹性力学引论 [M]. 北京：北京大学出版社, 2001.11

[26] 樊大均. 数学弹性力学 [M]. 北京：新时代出版社, 1983.7

[27] 王林江, 林江铿. 用多复变量应力函数计算任意多连通弹性平面问题 [J]. 应用数学和力学, 1994, 15 (7):657–664

[28] 曹富新, 杨春秋. 复变–变分方法 —— 弹性平面问题的一个新方法 [J]. 工程力学, 1994, 11(2):91–98

[29] 王治国, 唐立民. 弹性力学中的哈密顿系统及其变分原理 [J]. 应用数学和力学, 1995, 16(2):117–122

[30] 王元淳, 谷壮. 域外奇点法在弹性问题及其物性值反问题中的应用 [J]. 上海力学, 1994, 15(2):84–90

[31] 孙焕纯, 杨贺先. 弹性力学问题的虚边界元 —— 最小二乘法及误差评估 [J]. 工程力学, 1994, 11(3):1–11

[32] 雷小燕. 弹性力学边界积分方程的一个发展 [J]. 固体力学学报, 1994, 15(3):218–225

[33] 王其中. 由泛复函构造弹性力学平面问题的特解 [J]. 力学与实践, 1995, 17(4):56–58

[34] 邹广德, 沈玉凤. 弹性力学问题的一种新解法 [J]. 力学与实践, 1995, 17(2):61–62