0917 离散数学作业

2154312 郑博远 计算机科学与技术 1 班

一、判断。

① ×

② ×

二、符号形式化。

① $p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$

② $p \rightarrow (q \rightarrow (\neg r \wedge \neg s))$

③ $\neg p \rightarrow (q \rightarrow s)$

④ $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg r)$

⑤ $\neg p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg s)$

三、求主范式。

① 法一 $p \leftrightarrow q$

$\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow \overset{M_1}{\cancel{M_0}} \wedge M_2$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_3$

法二 $p \leftrightarrow q$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (\neg p \wedge p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_3$

法三 $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\therefore p \leftrightarrow q \Leftrightarrow m_0 \vee m_3$

② $p \oplus q$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_3$

③ $((p\to q)\land(r\to s)\to((\neg q\lor\neg s)\to(\neg p\lor\neg r)))\land(p\leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow((\neg p\lor q)\land(\neg r\lor s)\to(\neg(\neg q\lor\neg s)\lor(\neg p\lor\neg r)))\land(\neg p\lor r)\land(\neg r\lor p)$

$\Leftrightarrow((p\land\neg q)\lor(r\land\neg s)\lor(q\land s)\lor\neg p\lor\neg r)\land(\neg p\lor r)\land(\neg r\lor p)$

$\Leftrightarrow((p\land\neg q\land\neg p)\lor(r\land\neg s\land\neg p)\lor(q\land s\land\neg p)\lor(\neg p\land\neg p)\lor(\neg r\land\neg p)\lor(p\land\neg q\land r)\lor(r\land\neg s\land r)\lor(q\land s\land r)\lor$
$(\neg p\land r)\lor(\neg r\land r))\land(\neg r\lor p)$

$\Leftrightarrow((\neg p\land r\land\neg s)\lor(\neg p\land q\land s)\lor(\neg p)\lor(\neg p\land\neg r)\lor(p\land\neg q\land r)\lor(r\land\neg s)\lor(q\land r\land s)\lor(\neg p\land r))\land(\neg r\lor p)$

$\Leftrightarrow(\neg p\land r\land\neg s\land\neg r)\lor(\neg p\land q\land s\land\neg r)\lor(\neg p\land\neg r)\lor(\neg p\land\neg r\land\neg r)\lor(p\land\neg q\land r\land\neg r)\lor(r\land\neg s\land\neg r)\lor(q\land r\land s\land\neg r)\lor(\neg p\land r\land\neg r)$
$\lor(\neg p\land r\land\neg s\land p)\lor(\neg p\land q\land s\land p)\lor(\neg p\land p)\lor(\neg p\land\neg r\land p)\lor(p\land\neg q\land r\land p)\lor(r\land\neg s\land p)\lor(q\land r\land s\land p)\lor(\neg p\land r\land p)$

$\Leftrightarrow(\neg p\land q\land\neg r\land s)\lor(\neg p\land\neg r)\lor(\neg p\land\neg r)\lor(p\land\neg q\land r)\lor(p\land r\land\neg s)\lor(p\land q\land r\land s)$

$\Leftrightarrow(\neg p\land q\land\neg r\land s)\lor(\neg p\land\neg r\land s)\lor(\neg p\land\neg r\land\neg s)\lor(p\land\neg q\land r\land s)\lor(p\land\neg q\land r\land\neg s)\lor(p\land q\land r\land\neg s)\lor$
$(p\land\neg q\land r\land\neg s)\lor(p\land q\land r\land s)$

$\Leftrightarrow(\neg p\land q\land\neg r\land s)\lor(\neg p\land q\land\neg r\land s)\lor(\neg p\land\neg q\land\neg r\land s)\lor(\neg p\land\neg q\land\neg r\land\neg s)\lor(\neg p\land q\land\neg r\land\neg s)\lor(p\land\neg q\land r\land s)\land(p\land$
$\neg q\land r\land\neg s)\lor(p\land q\land r\land\neg s)\lor(p\land\neg q\land r\land\neg s)\lor(p\land q\land r\land s)$

$\Leftrightarrow m_0\lor m_1\lor m_4\lor m_5\lor m_{10}\lor m_{11}\lor m_{14}\lor m_{15}$ （主析取范式）

$\Leftrightarrow M_2\land M_3\land M_6\land M_7\land M_8\land M_9\land M_{12}\land M_{13}$ （主合取范式）

四、分析题。

① 18 种，理由如下：由 p、q、r 组成的简单合取式有 $p(M_4\land M_5\land M_6\land M_7)$, $q(M_2\land M_3\land M_6\land M_7)$, $r(M_1\land M_3\land M_5\land M_7)$, $p\land q(M_6\land M_7)$, $p\land r(M_5\land M_7)$, $q\land r(M_3\land M_7)$, $p\land q\land r(M_7)$，单独存在的情况共计 7 次，再考虑它们之间的析取组合：单个文字组成的简单合取式之间的析取有两两和三个组合的情况，均不重复，计 4 次，共计 11 次；两个文字组成的简单合取式之间的析取同理计 4 次，共计 15 次；再考虑单个文字和两个文字组成的简单合取式之间的析取，每个两个文字的简单合取式仅对应一个不存在包含关系的单个文字的简单合取式，因此计 3 次，共计 18 次。其他组合均存在合取式之间的包含关系，不重复计数。

② 256 种，理由如下：由德摩根律可得，否定与析取能推出合取（例如：$p\land q\Leftrightarrow\neg(\neg p\lor\neg q)$），因此理论上能构造出所有的极小项，它们之间的析取组合能够表示出所有的主析取范式，共 2^8 种。

③ 256 种，理由如下：一个命题与自己进行与非便得到该命题的否定；两个命题的否定进行与非，由德摩根律可得等价于两个命题进行合取；与②同理可得，合取、否定能得到析取。合取与否定能构造出所有的极小项，它们之间通过析取能够表示出所有的主析取范式，共 2^8 种。