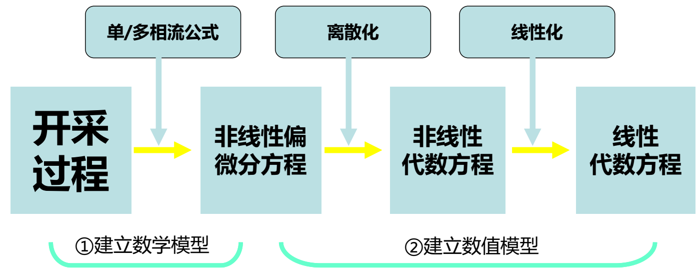
目 录

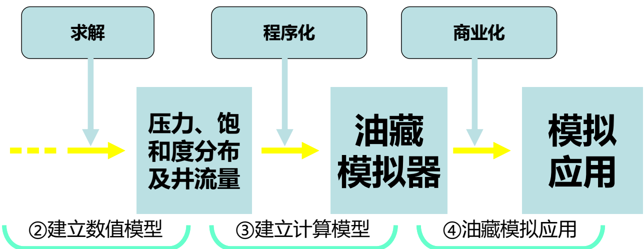
第四章 一维油藏的数值模拟方法



A、通过质量/能量守恒方程、状态方程、运动方程、辅助方程建立基本方程组。
B、根据所研究的具体问题建立相应的初始和边界条件。

A、通过离散化将偏微分方程组转换为有限差分方程组。
B、将非线性系数线形化，得到线形代数方程组。

第四章 一维油藏的数值模拟方法



C、应用线性代数方程组的解法求得未知量（压力、饱和度等）的数值分布。

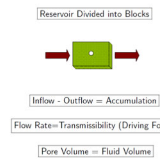
A、将求解数值模型进行程序化。
B、连同前后处理软件，形成油藏模拟器。

利用油藏模拟器研究和解决具体的油气田开发问题。

第四章 一维油藏的数值模拟方法

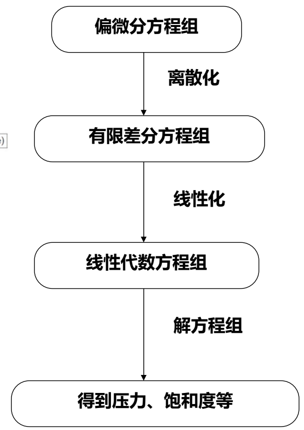
(1)建立数学模型

即建立一套描述油藏中流体渗流的偏微分方程组，包括初、边值问题。



(2)建立数值模型

通过离散化，将连续的偏微分方程组转换成离散的有限差分方程组，再用多种方法将非线性系数线性化，成为线性代数方程组，然后求解线性代数方程组。



第四章 一维油藏的数值模拟方法

(3)建立计算机模型

将资料（静、动态）的输入，系数矩阵和常数项的形成，多种解法和结果的输出等，编制成计算机程序。

数值模拟的关键是计算的精度和速度。计算的精度取决于离散的程度、数值计算误差、离散方程的稳定性，计算的速度取决于计算机速度、解法速度和模型规模。从离散的程度看，速度和精度相矛盾，要根据解决问题的需要选择离散化程度和计算速度。

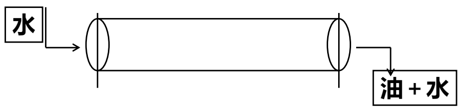
第四章 一维油藏的数值模拟方法

§4.1 一维油、水两相流数学模型

一、数学模型

1. 假设条件

1) 油、水两相，互不混溶
2) 等温渗流，符合达西渗流定律
3) 一维流动，不考虑重力
4) 流体和岩石不可压缩，不考虑毛管力；
5) 油藏岩石性质（k,ϕ）沿一维非均质



§4.1 一维油、水两相流数学模型

2. 质量守恒方程

由质量守恒方程的一般式逐步简化到上述假设条件。

1）当考虑三维非均质油藏，油、水两相互不混溶，可压缩流体和岩石，考虑毛管力和重力时，数学模型的一般式为：

$$\nabla\cdot\left[\rho_l\frac{kk_{rl}}{\mu_l}\left(\nabla p_l-\rho_l g\nabla D\right)\right]+q_l=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho_l s_l\right)\qquad l=o,w$$

q_l：单位时间内单元体内注入（或采出）的流体质量

§4.1 一维油、水两相流数学模型

2) 简化到一维，忽略重力项：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_l \frac{kk_{rl}}{\mu_l}\frac{\partial p_l}{\partial x}\right]+q_l=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho_l s_l\right) \qquad l=o,w$$

3) 若不考虑流体和岩石压缩性

$$\phi = const \qquad \rho_l=\rho_{lsc}=const$$

不考虑油水两相之间的毛管力

$$p_o=p_w=p$$

§4.1 一维油、水两相流数学模型

水相 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{wv}=\phi\frac{\partial s_w}{\partial t} \qquad (1)$$

油相 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{ov}=\phi\frac{\partial s_o}{\partial t} \qquad (2)$$

3. 辅助方程 $$s_w+s_o=1 \qquad (3)$$

q_{wv}、q_{ov} ：单位时间内单元体内注入（或采出）的水和油的体积

§4.1 一维油、水两相流数学模型

4. 未知数和方程数

未知数		方程数	
未知数符号	数量	方程式	数量
P S_w、S_o	1 2	质量守恒方程 饱和度方程	2 1
总计	3	总计	3

§4.1 一维油、水两相流数学模型

5. 初始条件和边界条件

在岩心中饱和油和束缚水，然后在左端注入水，右端先出油，后出油和水，要求得岩心中各点压力、饱和度随时间的变化，需知初始条件和边界条件。

§4.1 一维油、水两相流数学模型

初始条件和边界条件

I.C
$$\left.\begin{aligned} p(x,0) &= p_i \\ s_w(x,0) &= s_{wc} \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le x \le L$$

B.C
$$\left.\begin{aligned} q_v|_{x=0} &= q_{wv} = q_v \\ q_v|_{x=L} &= q_{wv} + q_{ov} = q_v \end{aligned}\right\} \qquad t > 0$$

- 水驱油实验为稳定驱替，注入、产出量均为q_v
- 以上油水两相流动的偏微分方程、辅助方程、初边界条件构成了一维油水两相水驱油的完整数学模型，求解上述模型，即可得到不同的注入速率下，模型中任一点的压力和饱和度随时间的分布和变化。

第四章 一维油藏的数值模拟方法

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

一、数学模型的求解方法

1) 方程的解法问题

- 顺序求解(Sequential)：先求p，再求s
  - — 隐式压力显式饱和度　IMPES
    即：Implicit Pressure　Explicit Saturation
  - — 隐式压力隐式饱和度　IMPIMS
    即：Implicit Pressure　Implicit Saturation
- 联立求解(Simultaneous)：p、s同时求解
  - — 半隐式(Semi-Implicit)
  - — 全隐式(Fully-Implicit)

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

2) 非线性系数项、产量项的处理方法（时间上：k，u不变，k_r处理——s_o、s_w函数）

- **显式处理：**即在求n+1时刻的p、s时，系数项直接用n时刻的值；如对k_{rl}，s_l取n时刻，为已知值。
- **半隐式处理：**将系数项用Taylor级数展开，忽略二阶小量项，一阶导数项用n时刻值。
- **隐式处理：**处理方法与半隐式方法一样，但一阶导数项用n+1时刻的值。

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

回顾：若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则在该邻域内有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒(Taylor)公式，

其中 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

称为拉格朗日余项。

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

■ **半隐式及隐式的系数处理**（以 k_{rl} 为例）

$$k_{rl}(s_l^{n+1})=k_{rl}(s_l^n)+k_{rl}'(s_l^n)\left(s_l^{n+1}-s_l^n\right)+\frac{k_{rl}''(s_l^n)}{2!}\left(s_l^{n+1}-s_l^n\right)^2+\cdots$$
$$\approx k_{rl}(s_l^n)+k_{rl}'(s_l^n)\left(s_l^{n+1}-s_l^n\right)$$

若将 s_l^{n+1} 写成**饱和度增量**

$$s_l^{n+1}=s_l^n+\delta s_l$$

则有

$$k_{rl}(s_l^{n+1})=k_{rl}(s_l^n)+k_{rl}'(s_l^n)\delta s_l$$

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

■ **半隐式及隐式的不同**

半隐式处理

$$k_{rl}(s_l^{n+1})=k_{rl}(s_l^n)+k_{rl}'(s_l^n)\delta s_l$$

全隐式处理

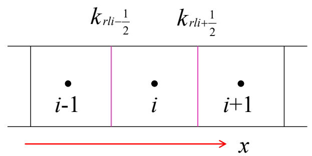
$$k_{rl}(s_l^{n+1})=k_{rl}(s_l^n)+k_{rl}'(s_l^{n+1})\delta s_l$$

对于任意一个 t^n 到 t^{n+1} 时间步长

- 半隐式方法只需求一次系数，解一次方程；
- 全隐式方法则要迭代多次求解方程，更新各系数，使之逐步逼近 $n+1$ 时刻的值。

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

3）相对渗透率取上游权



$$k_{rli-\frac{1}{2}}=\begin{cases}k_{rl}\left(s_{wi-1}\right) & \text{流动由}i\text{-1到}i\\ k_{rl}\left(s_{wi}\right) & \text{流动由}i\text{到i-1}\end{cases}$$

上游权处理的实质：将显式处理造成的时间上的滞后用空间上的向前来进行弥补

§4.2 数学模型的求解方法及参数处理

用IMPES方法建立差分方程组：

1. 乘以适当系数，合并油水相方程，消去差分方程组中的S_o、S_w，得到只含压力p的方程。
2. 方程左端达西项系数用上一阶段值，即显式处理系数，压力作隐式处理，形成一高阶线性代数方程组，求解之。
3. 将解出的p值代入油、水相方程，显式计算S_o、S_w值。
4. 井点所在网格的产量作显式处理，由上一时间阶段的S_o、S_w值计算井点网格的油水产量。

第四章 一维油藏的数值模拟方法

§4.3 差分方程组的建立及求解

1、隐式求压力的过程

水相
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{wv}=\phi\frac{\partial s_w}{\partial t} \qquad (1)$$

油相
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{ov}=\phi\frac{\partial s_o}{\partial t} \qquad (2)$$

$$s_w+s_o=1$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

1、隐式求压力的过程

为消除 S 项，（1）+（2）可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{wv}+q_{ov}=\phi\frac{\partial s_w}{\partial t}+\phi\frac{\partial s_o}{\partial t}$$

即：
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}+\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]+q_v=0$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

定义流动系数：

$$\lambda_w = \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \qquad \lambda_o = \frac{kk_{ro}}{\mu_o}$$

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o$$

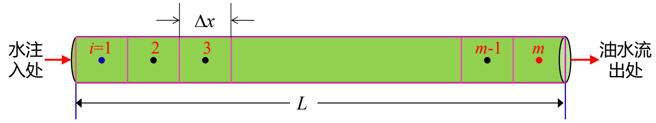
则

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}+\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]+q_v=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_v=0 \qquad (4)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

空间离散



一维等间距网格系统（采用块中心网格，且网格相等）

§4.3 差分方程组的建立及求解

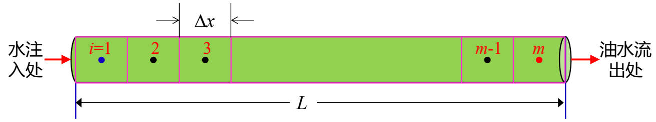
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_v=0 \qquad (4)$$

对（4）式进行二阶隐式差分离散，得：

$$\frac{\lambda_{i+1/2}\dfrac{p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}}{\Delta x}-\lambda_{i-1/2}\dfrac{p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}+q_{vi}=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\lambda_{i+1/2}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}-\frac{\lambda_{i-1/2}\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}+q_{vi}=0 \qquad (6)$$

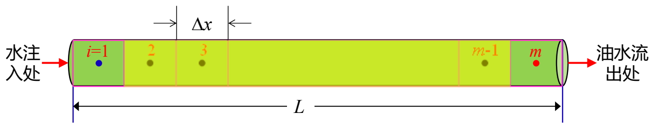
§4.3 差分方程组的建立及求解



$$\frac{\lambda_{i+1/2}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}-\frac{\lambda_{i-1/2}\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}+q_{vi}=0 \qquad (6)$$

对隐式差分方程（6）分以下三种情况讨论：

§4.3 差分方程组的建立及求解



1）对于第2~*m*-1个网格，无注入、采出，$q_v=0$，只有网格间的流动，式（5）可写为：

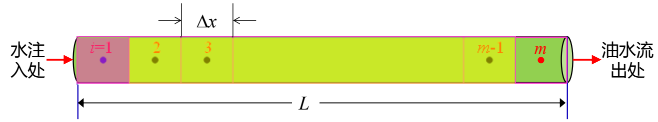
$$\lambda_{i+\frac{1}{2}}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)-\lambda_{i-\frac{1}{2}}\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)=0$$

其中系数项λ采用显式处理，并采用上游权原则：

$$\lambda_i^n\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)-\lambda_{i-1}^n\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)=0$$

$$\lambda_{i-1}^n p_{i-1}^{n+1}-\left(\lambda_{i-1}^n+\lambda_i^n\right)p_i^{n+1}+\lambda_i^n p_{i+1}^{n+1}=0 \quad (6)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解



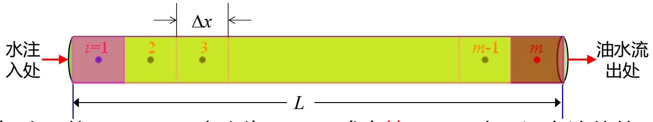
2）第1个网格（$i=1$），单位体积中注入的体积流量为q_v，式(5)中第二项取上游数，采用显式处理，$\lambda_0^n=0$：

$$\frac{\lambda_1^n\left(p_2^{n+1}-p_1^{n+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}+q_v=0 \Rightarrow p_1^{n+1}-p_2^{n+1}=\frac{q_v\left(\Delta x\right)^2}{\lambda_1^n}$$

两边同乘以$A\Delta x$（网格单元体积），令：$Q_v=q_vA\Delta x$，得：

$$p_1^{n+1}-p_2^{n+1}=\frac{Q_v\Delta x}{A\lambda_1^n} \quad (7)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解



3）第n个网格（$i=m$），产出为q_v，(5)式中第一项，由于没有流体从m流到m+1网格，无此项，采用上游权显式处理：

$$-\frac{\lambda_{m-1}^n\left(p_m^{n+1}-p_{m-1}^{n+1}\right)}{\left(\Delta x\right)^2}-q_v=0 \Rightarrow p_{m-1}^{n+1}-p_m^{n+1}=\frac{q_v\left(\Delta x\right)^2}{\lambda_{m-1}^n}$$

两边同乘以$A\Delta x$（网格单元体积），令：$Q_v=q_vA\Delta x$，得：

$$p_{m-1}^{n+1}-p_m^{n+1}=\frac{\Delta x}{A}\frac{Q_v}{\lambda_{m-1}^n} \quad \mathbf{(8)}$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

方程(6)、(7)、(8)构成了从i=1到m的线性方程组，矩阵方程：

$$\begin{array}{l} \text{i=1} \\ \text{i=2} \\ \\ \\ \\ \text{i=n-1} \\ \text{i=n} \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & -1 & & & & \\
\lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & & & \\
 & \lambda_2 & -(\lambda_2+\lambda_3) & \lambda_3 & & \\
 & \cdots\cdots & & & & \\
 & & & \cdots\cdots & & \\
 & & & \lambda_{n-2} & -(\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\
 & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \\ \\ \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{A}\cdot\frac{Q_v}{\lambda_1^n} \\ 0 \\ \\ \\ \\ 0 \\ \frac{\Delta x}{A}\cdot\frac{Q_v}{\lambda_{n-1}^n} \end{bmatrix}$$

- 系数矩阵为典型的三对角矩阵
- 求解方法：追赶法

§4.3 差分方程组的建立及求解

2、显式求饱和度方程 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{wv}=\phi\frac{\partial s_w}{\partial t} \Rightarrow \frac{\lambda_{i+1/2}\frac{p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}}{\Delta x}-\lambda_{i-1/2}\frac{p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}+q_{vi}=0$

方程（1）采用二阶隐式差分后，系数项λ_w 采用显式处理和上游权原则，可得

$$\frac{\lambda_{wi}^n\frac{p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}}{\Delta x}-\lambda_{wi-1}^n\frac{p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}+q_{wvi}=\phi\frac{s_{wi}^{n+1}-s_{wi}^n}{\Delta t} \quad (9)$$

式中p^{n+1}已求解得到，而求S_w可分以下三种情况：

§4.3 差分方程组的建立及求解

1）对于第$2\sim m-1$个网格，无注入、采出，$q_{vi}=0$，可写为：

$$\frac{\lambda_{wi}^n\frac{p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}}{\Delta x}-\lambda_{wi-1}^n\frac{p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}=\phi\frac{s_{wi}^{n+1}-s_{wi}^n}{\Delta t}$$

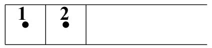
整理：

$$s_{wi}^{n+1}=s_{wi}^n+\frac{\Delta t}{\phi(\Delta x)^2}\left[\lambda_{wi}^n\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)-\lambda_{wi-1}^n\left(p_i^{n+1}-p_{i-1}^{n+1}\right)\right] \quad (10)$$

利用该式可依次求出$i=2\sim m-1$网格的饱和度值。

§4.3 差分方程组的建立及求解

2）对$i=1$网格，$q_{wv}=q_v$，可得：



$$\frac{\lambda_{w1}^n\left(p_2^{n+1}-p_1^{n+1}\right)}{(\Delta x)^2}+q_v=\phi\frac{s_{w1}^{n+1}-s_{w1}^n}{\Delta t}$$

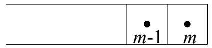
两边同乘以 $A\Delta x$（网格单元体积），令：$Q_v=q_vA\Delta x$，得：

$$\lambda_{w_1}^n\frac{A}{\Delta x}\left(p_2^{n+1}-p_1^{n+1}\right)+Q_v=\frac{\phi A\Delta x}{\Delta t}\left(s_{w1}^{n+1}-s_{w1}^n\right)$$

$$s_{w1}^{n+1}=s_{w1}^n+\frac{\Delta t}{\phi\Delta x}\left[\frac{Q_v}{A}-\frac{\lambda_{w1}^n}{\Delta x}\left(p_1^{n+1}-p_2^{n+1}\right)\right] \quad (11)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

3) 对$i=m$网格，$q_{wv}+q_{ov}=q_v$



由于 $q_{ov}=\lambda_o\left(p_{m-1}^{n+1}-p_m^{n+1}\right)$ $\quad q_{wv}=\lambda_w\left(p_{m-1}^{n+1}-p_m^{n+1}\right)$

所以 $q_v=q_{ov}+q_{wv}=\left(\lambda_w+\lambda_o\right)\left(p_{m-1}^{n+1}-p_m^{n+1}\right)$

$$\frac{q_{wv}}{q_v}=\frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_o} \Rightarrow q_{wv}=\frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_o}q_v$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

（9）式中只有第二项，所以

$$-\frac{\lambda^{n}_{wm-1}\left(p^{n+1}_{m}-p^{n+1}_{m-1}\right)}{(\Delta x)^2}-q_{wv}=\phi\frac{s^{n+1}_{wm}-s^{n}_{wm}}{\Delta t}$$

$$-\frac{\lambda^{n}_{wm-1}\left(p^{n+1}_{m}-p^{n+1}_{m-1}\right)}{(\Delta x)^2}-\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_o}\right)^{n}_{m-1}q_v=\phi\frac{s^{n+1}_{wm}-s^{n}_{wm}}{\Delta t}$$

两边同乘以 $A\Delta x$，令：$Q_v=q_vA\Delta x$，得：

$$\frac{\lambda^{n}_{wm-1}\left(p^{n+1}_{m-1}-p^{n+1}_{m}\right)A\Delta x}{(\Delta x)^2}-\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_o}\right)^{n}_{m-1}q_vA\Delta x=\frac{\phi A\Delta x}{\Delta t}\left(s^{n+1}_{wm}-s^{n}_{wm}\right)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

$$\frac{\lambda^{n}_{wm-1}\left(p^{n+1}_{m-1}-p^{n+1}_{m}\right)A}{\Delta x}-\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_o}\right)^{n}_{m-1}Q_v=\frac{\phi A\Delta x}{\Delta t}\left(s^{n+1}_{wm}-s^{n}_{wm}\right)$$

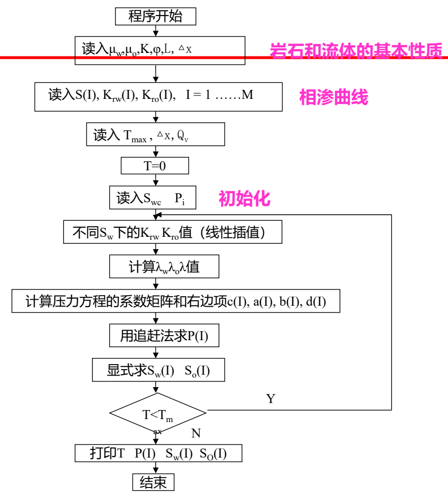
移项，整理：

$$s^{n+1}_{wm}=s^{n}_{wm}+\frac{\Delta t}{\phi\Delta x}\left[\lambda^{n}_{wm-1}\frac{p^{n+1}_{m-1}-p^{n+1}_{m}}{\Delta x}-\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_o}\right)^{n}_{m-1}\frac{Q_v}{A}\right]$$

（12）

利用（10）~（12），即可求出I=1,2,~,n网格的饱和度值。

三、计算框图



§4.3 差分方程组的建立及求解

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ \lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & & & \\ & \lambda_2 & -(\lambda_2+\lambda_3) & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & -(\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{A}\frac{Q_v}{\lambda^n_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\Delta x}{A}\frac{Q_v}{\lambda^n_{n-1}} \end{pmatrix}$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

四、线性方程组的追赶法求解方法

1 三对角系数矩阵方程求解方法 $\mathbf{AX}=\mathbf{D}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & & & \\ \beta_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

LU分解法 $\mathbf{AX}=LU\times X=LY=\mathbf{D}$

§4.3 差分方程组的建立及求解

(1) 根据矩阵乘法规则计算元素

由第一行的元素得 $l_1=a_1$ $\quad u_1=\dfrac{b_1}{l_1}=\dfrac{b_1}{a_1}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & & & \\ \beta_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

根据矩阵乘法规则，计算其它元素

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i\text{-}1 & i & i+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \boxed{c_i} & \boxed{a_i} & \boxed{b_i} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i\text{-}1 & i & i+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \\ \boxed{\beta_i} & \boxed{l_i} & \boxed{0} \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i\text{-}1 & i & i+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & u_{i-1} & 0 \\ & 0 & 1 & u_i \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i\text{-}1 \\ i \\ i+1 \end{array}$$

$$\begin{cases} c_i=\beta_i\times 1+l_i\times 0=\beta_i \\ a_i=\beta_i\times u_{i-1}+l_i\times 1=\beta_i u_{i-1}+l_i \\ b_i=\beta_i\times 0+l_i\times u_i+0\times 1=l_i u_i \end{cases}$$

整理以上三式得

$$l_i=a_i-\beta_i u_{i-1}=a_i-c_i u_{i-1}$$

$$u_i=\frac{b_i}{l_i}=\frac{b_i}{a_i-c_i u_{i-1}}$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

(2) 计算未知变量 $\mathbf{AX}=LU\times X=LY=\mathbf{D}$

由 $\mathbf{LY}=\mathbf{D}$ 计算过渡矩阵Y

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{d_1}{l_1} \\ y_i=\dfrac{d_i-\beta_i y_{i-1}}{l_i}=\dfrac{d_i-\beta_i y_{i-1}}{a_i-c_i u_{i-1}} \end{cases} \quad (i=2,3,\cdots,n)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & & & \\ \beta_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

§4.3 差分方程组的建立及求解

由 $UX=Y$ 计算 X

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - u_i x_{i+1} \end{cases} \quad (i=n-1,n-2,\cdots,1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & & & \\ \beta_2 & l_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & l_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.28)$$

适用于一维问题的求解

§4.3 差分方程组的建立及求解

已知一维水驱油岩心水驱油实验参数

参数	数值	参数	数值
A	10cm^2	L	1m
μ_o	2mPa·s	μ_w	1mPa·s
ϕ	0.3	K	1μm^2
S_{wc}	0.2	P_i	0.1 MPa
Q_v	0.1 cm^3/s	P_n	0.1MPa
网格数(m)	40	Δx	2.5cm
T_{max}	500s	Δt	10s

油水相对渗透率数据如下表：

S_w	K_{rw}	K_{ro}
0.2	0	0.85
0.25	0.03	0.75
0.30	0.06	0.62
0.35	0.10	0.49
0.40	0.14	0.31
0.45	0.17	0.19
0.50	0.27	0.14
0.55	0.35	0.10
0.60	0.42	0.07
0.65	0.52	0.05
0.70	0.65	0.03
0.75	0.79	0.01
0.80	0.90	0

1、拉格朗日插值
2、线性插值
3、有理函数插值
4、三次样条插值
5、二元拉格朗日插值
6、双三次样条插值

§4.3 差分方程组的建立及求解

要求： 编制一维水驱油数值模拟程序。

① 打印100、200、300、400、500s 时的压力和饱和度随岩心长度的分布，并绘图表示。

② 求出水突破时间。

③ 改变油水相对渗透率曲线，讨论其对油水饱和度的影响。

参数	水力学单位
Q	cm^3/s
k	μm^2（D）
μ	mPa.s
A	cm^2
Δx	cm
Δp	10^{-1}MPa(atm)
T	s

注意：有关单位换算统一