符号说明

$\mathrm{I_m}$	已量测负荷节点集合
$\mathrm{I_{um}}$	未量测负荷节点集合
I	$\mathrm{I}=\mathrm{I_m}\cup I_{\mathrm{um}}$ 所有负荷节点集合
$\mathbf{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},0/1}$	在完整参数/缺失参数下估计出的对应于第 i 个负荷节点的聚合模型参数 a
$\mathbf{b}_{r}^{0/1}$	在完整参数/缺失参数下估计出的聚合模型参数 b
$\mathbf{T}_{r,l}^{i}$	第 i 个负荷节点的量测回水温度
$\mathbf{h}_{l}^{i}$	第 i 个负荷节点的热负荷
c	比热
m_i	负荷节点 i 的流量
T_{amb}	环境温度
$\mathbf{T}$	时间集合

$$\tilde{a}_r^k=\begin{bmatrix}\tilde{a}_r^{k,1,\Gamma} & \cdots & \tilde{a}_r^{k,1,\Gamma}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_r^{k,1,0} & \cdots & \tilde{a}_r^{k,N_l,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{\mathrm{r}}^{1,0/1} & \mathbf{a}_{\mathrm{r}}^{2,0/1} & \cdots \mathbf{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},0/1}\end{bmatrix}$$

根据热网 AGM，对于单源 DHN，有

$$T_{t,src}^{0}=\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},0}{}'\boldsymbol{T}_{r,l}^{i}+\sum_{i\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}{}'\boldsymbol{T}_{r,l}^{j}+b_r^0T_{amb} \tag{1}$$

说明：对于公式(1)，在数据理想情况下(如节点法生成的数据)，通过参数估计器可以准确拟合出参数，使得

$$T_{r,src}^{0}=T_{r,src} \tag{2}$$

其中$T_{r,src}$是实际的热负荷回水温度。

对于不完整的负荷数据，有

$$T_{t,src}^{1}=\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i,1}{}'\boldsymbol{T}_{r,l}^{i}+b_r^1T_{amb} \tag{3}$$

在不完全的量测数据下，参数估计器会估计出一组最佳参数使$T_{t,src}^{1}$尽量逼近$T_{r,src}^{0}$(即真实的回水温度)。

基于物理规律，负荷节点的回水温度与热负荷有如下关系

$$\mathbf{h}_l = cm(\boldsymbol{T}_{s,l} - \boldsymbol{T}_{r,l}) \tag{4}$$

下面是主要的推导:

$$T_{r,src}^0 - T_{r,src}^1 = \sum_{i \in I_m} (\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0} - \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0})' \boldsymbol{T}_{r,l}^i + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{j},0\prime} \boldsymbol{T}_{r,l}^j + (b_r^0 - b_r^0) T_{amb} \tag{5}$$

根据(4), 有

$$\begin{aligned} T_{r,src}^0 - T_{r,src}^1 &= \sum_{i \in I_m} (\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0} - \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' (\boldsymbol{T}_{s,l}^i - \frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}) + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{j},0\prime} (\boldsymbol{T}_{s,l}^j - \frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j}) + (b_r^0 - b_r^1) T_{amb} \\ &= \sum_{i \in I_m} (\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0} - \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' \boldsymbol{T}_{s,l}^i + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{j},0\prime} \boldsymbol{T}_{s,l}^j - \left[\sum_{i \in I_m} (\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0} - \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' \frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i} + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j} \right] + (b_r^0 - b_r^1) T_{amb} \end{aligned} \tag{6}$$

此推导, 是基于中小规模单源网络, 可以认为各个负荷的供水温度近似相等, 则

$$T_{r,src}^0 - T_{r,src}^1 = (\sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0} - \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' \boldsymbol{T}_{s,l} - \left[\sum_{i \in I_m} (\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0} - \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' \frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i} + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j} \right] + (b_r^0 - b_r^1) T_{amb} \tag{7}$$

根据热网 AGM 模型, 系数之间存在归一化约束, 同样, 在利用不完整数据进行参数估计是时, 参数估计器中的归一化约束依然存在。因此, 有

$$\begin{aligned} (b_r^0 - b_r^1) T_{amb} &= \left[(1 - \sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0\prime} \mathbf{1}) - (1 - \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1\prime} \mathbf{1}) \right] T_{amb} \\ &= \left(\sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1\prime} \mathbf{1} - \sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0\prime} \mathbf{1} \right) T_{amb} \\ &= \left(\sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1\prime} - \sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0\prime} \right) \boldsymbol{T}_{amb} \end{aligned} \tag{8}$$

此处, 通过归一化约束以及将实数 T_{amb} 写成向量, 等效的式子改写为

$$\begin{aligned} T_{r,src}^0 - T_{r,src}^1 &= (\sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0} - \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' (\boldsymbol{T}_{s,l} - \boldsymbol{T}_{amb}) - \left[\sum_{i \in I_m} (\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},0} - \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' \frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i} + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j} \right] \\ &= (\sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0} - \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' (\boldsymbol{T}_{s,l} - \boldsymbol{T}_{amb}) - \left[\sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^k}{cm^k} - \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{i,1\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i} \right] \\ &= (\sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0} - \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{i},1})' (\boldsymbol{T}_{s,l} - \boldsymbol{T}_{amb}) + \sum_{i \in I_m} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{i,1\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i} - \sum_{k \in I} \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{\mathrm{k},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^k}{cm^k} \end{aligned} \tag{9}$$

将新估计的参数 $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{i,1}$ 表示为

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{i,1} = \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^{i,0} + \Delta \boldsymbol{a}_\mathrm{r}^i \tag{10}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i}$ 表示由于负荷节点丢失，未丢失负荷节点为表示丢失节点信息所引起的系数增量，

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i,0}$ 表示有量测节点 i 与源节点之间本身具有的系数。(9)可以继续写成如下形式

$$\begin{aligned} T_{r,src}^{0}-T_{r,src}^{1} &= (\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1})'(\boldsymbol{T}_{s,l}-\boldsymbol{T}_{amb})+\sum_{i\in I_m}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i,0}+\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i})'\frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}-\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^k}{cm^k} \\ &= (\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1})'(\boldsymbol{T}_{s,l}-\boldsymbol{T}_{amb})+\sum_{i\in I_m}\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j} \end{aligned} \tag{11}$$

如果未量测节点热负荷可以表示为如下形式，即未量测节点热负荷为量测节点热负荷的线性组合：

$$h_l^j=\sum_{i\in I_m}\alpha_{j,i}h_l^i,\quad j\in I_{um} \tag{12}$$

并且有组合系数的归一化约束：

$$\sum_{i\in I_m}\alpha_{j,i}=1,\quad j\in I_{um} \tag{13}$$

令

$$\theta_{j,i}=\frac{\alpha_{j,i}}{m_j}\quad j\in I_{um},i\in I_m \tag{14}$$

假设存在 $\Delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i}$ 使

$$\sum_{i\in I_m}\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j} \tag{15}$$

根据(14)，有

$$\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j}=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\sum_{i\in I_m}\theta_{j,i}\boldsymbol{h}_l^i=\sum_{j\in I_{um}}\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\theta_{j,i}\boldsymbol{h}_l^i=\sum_{i\in I_m}\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\theta_{j,i}\boldsymbol{h}_l^i \tag{16}$$

根据(16)，(15)改写为

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I_m}\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}=\sum_{i\in I_m}\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\theta_{j,i}\boldsymbol{h}_l^i \\ &\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\theta_{j,i}\boldsymbol{h}_l^i \\ &\frac{\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}}{m^i}=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\theta_{j,i} \\ &\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}=m^i\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\theta_{j,i}=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{m^i}{m_j}\alpha_{j,i} \end{aligned} \tag{17}$$

至此，只要满足(17)，就可以使(11)中的

$$\sum_{i\in I_m}\Delta\boldsymbol{a}_{r}^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^i}{cm^i}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j}=0 \tag{18}$$

现在，来分析当满足(17)时(11)中的另一部分

$$(\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1})'(\boldsymbol{T}_{s,l}-\boldsymbol{T}_{amb}) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1}&=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}-\sum_{i\in I_m}\Delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i}}\\&=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}-\sum_{i\in I_m}\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}\frac{m^i}{m_j}\alpha_{j,i}\\&=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}\sum_{i\in I_m}\frac{m^i}{m_j}\alpha_{j,i}\\&=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}(1-\sum_{i\in I_m}\frac{m^i}{m_j}\alpha_{j,i})\end{aligned} \tag{20}$$

如果每个负荷节点流量近似相等，即

$$m^i=m^j \tag{21}$$

并且有组合系数归一化(13)，则有

$$\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1}=0 \tag{22}$$

即

$$(\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1})'(\boldsymbol{T}_{s,l}-\boldsymbol{T}_{amb})=0 \tag{23}$$

根据(18)和(23)，可得

$$T_{r,src}^{0}-T_{r,src}^{1}=0 \tag{24}$$

总结 1：如果满足
1.各个负荷节点供水温度近似相等
2.丢失负荷节点热负荷可以表示为其他负荷节点热负荷的凸组合，且组合系数具有归一化约束
3.各个负荷节点流量近似相等
这三个条件，丢失的负荷节点在参数估计中可以忽略不记

2024.11.24

接(11)，如果未量测节点热负荷可以表示为如下形式，即未量测节点热负荷为量测节点热负荷的线性组合，并且每个时间节点的组合系数不是固定的：

$$h_l^{j,t}=\sum_{i\in I_m}\alpha_{j,i}^{t}h_l^{i,t},\quad j\in I_{um}\quad t\in T \tag{25}$$

并且有

$$\sum_{i\in I_m}\alpha_{j,i}^{t}=1,\quad j\in I_{um}\quad t\in T \tag{26}$$

令

$$\theta_{i,j}^{t}=\frac{\alpha_{j,i}^{t}}{m_{j}} \quad j\in I_{um}, i\in I_{m}, t\in T \tag{27}$$

假设存在$\Delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i}$使(15)成立，根据(27)有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I_m}\sum_{t\in T}\frac{\Delta a_r^{i,t}h_l^{i,t}}{m^i}&=\sum_{j\in I_{um}}\sum_{t\in T}\frac{a_r^{j,0,t}\sum_{i\in \mathrm{I}_m}\alpha_{j,i}^{t}h_l^{i,t}}{m^j}\\&=\sum_{j\in I_{um}}\sum_{t\in T}\sum_{i\in I_m}a_r^{j,0,t}\theta_{j,i}^{t}h_l^{i,t}\end{aligned} \tag{28}$$

根据(28)，有

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta a_r^{i,t}h_l^{i,t}}{m^i}=\sum_{j\in I_{\mathrm{um}}}a_r^{j,0,t}\theta_{j,i}^{t}h_l^{i,t}\\&\Rightarrow \Delta a_r^{i,t}=\frac{m^i\sum_{j\in I_{\mathrm{um}}}a_r^{j,0,t}\theta_{j,i}^{t}h_l^{i,t}}{h_l^{i,t}}=m^i\sum_{j\in I_{\mathrm{um}}}a_r^{j,0,t}\theta_{j,i}^{t}\end{aligned} \tag{29}$$

即$\Delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i}$满足(29)，(15)成立。

现在，来分析当满足(17)时(11)中的另一部分

$$(\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1})'(\boldsymbol{T}_{s,l}-\boldsymbol{T}_{amb}) \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1}&=\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0}-\sum_{i\in I_m}\Delta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i}}\\&=\sum_{j\in I_{um}}\sum_{t\in T}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0,t}-\sum_{i\in I_m}\sum_{t\in T}\Delta a_r^{i,t}\end{aligned} \tag{31}$$

根据(29)，有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I_{um}}\sum_{t\in T}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0,t}-\sum_{i\in I_m}\sum_{t\in T}\Delta a_r^{i,t}&=\sum_{j\in I_{um}}\sum_{t\in T}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0,t}-\sum_{i\in I_m}\sum_{t\in T}\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0,t}\theta_{j,i}^{t}m^i\\&=\sum_{j\in I_{um}}\sum_{t\in T}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0,t}(1-\sum_{i\in I_m}\frac{m_i}{m_j}\alpha_{j,i}^{t})\end{aligned} \tag{32}$$

如果每个负荷节点流量近似相等，即

$$m^i=m^j \tag{33}$$

则根据(26)，有

$$(\sum_{k\in I}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{k},0}-\sum_{i\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{i},1})'(\boldsymbol{T}_{s,l}-\boldsymbol{T}_{amb})=0 \tag{34}$$

根据(28)和(34)，有

$$T_{r,src}^{0}-T_{r,src}^{1}=0 \tag{35}$$

结论 2：如果满足

1.各个负荷节点供水温度近似相等

2.丢失负荷节点热负荷在每个采样时刻可以表示为其他负荷节点热负荷的凸组合，且组合系数具有归一化约束

3.各个负荷节点流量近似相等

这三个条件，丢失的负荷节点在参数估计中可以忽略不记

2024.12.03

首先对 **2024.11.24** 的推导进行说明：该推导是错误的，如果组合系数在每一个采样时刻不是固定的，那么为了(35)成立，系数矩阵 a 其实不是固定的，这是错误的。这也说明，只有组合系数是固定的，才有未量测节点可以忽略的结论。

为了考虑热负荷的随机性，我们将热负荷写成

$$\boldsymbol{h}_l = \boldsymbol{h}_{l,tr} + \boldsymbol{h}_{l,ra} \tag{36}$$

$\boldsymbol{h}_{l,tr}$ 表示热负荷的趋势项，$\boldsymbol{h}_{l,ra}$ 表示热负荷的随机项。并且趋势项满足

$$h_{l,tr}^{j} = \sum_{i \in I_m} \alpha_{j,i} h_{l,tr}^{i}, \quad j \in I_{um} \tag{37}$$

有

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_l^j}{cm^j} &= \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\sum_{i \in I_m} \alpha_{j,i} \boldsymbol{h}_{l,tr}^i + \boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{cm^j} \\
&= \frac{1}{c} \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \sum_{i \in I_m} \theta_{j,i} \boldsymbol{h}_{l,tr}^i + \frac{1}{c} \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j} \\
&= \frac{1}{c} \sum_{i \in I_m} \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \theta_{j,i} \boldsymbol{h}_{l,tr}^i + \frac{1}{c} \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j}
\end{aligned} \tag{38}$$

假设存在 $\Delta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{i}$ 使(15)成立，有

$$\sum_{i \in I_m} \Delta \boldsymbol{a}_r^{i\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,tr}^i + \boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^i} = \sum_{i \in I_m} \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \theta_{j,i} \boldsymbol{h}_{l,tr}^i + \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j} \tag{39}$$

对(39)进行移项，有

$$\sum_{i \in I_m} (\Delta \boldsymbol{a}_r^{i\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,tr}^i}{m^i} - \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \theta_{j,i} \boldsymbol{h}_{l,tr}^i) + \sum_{i \in I_{\mathrm{m}}} \Delta \boldsymbol{a}_r^{i\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^i} - \sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j} = 0 \tag{40}$$

当随机项非常小时或者未量测负荷较少时：

由于系数 a 属于[0 1],质量流量 m 大于 0，并且认为随机项较小，因此认为

$$\begin{gathered}
\sum_{j \in I_{um}} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j} \approx 0 \\
\sum_{i \in I_{\mathrm{m}}} \Delta \boldsymbol{a}_r^{i\prime} \frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^i} \approx 0
\end{gathered} \tag{41}$$

可以得到与结论一类似地结论。即(17)(35)成立。

当随机项相对较大时或未量测负荷较多时：

这个时候(41)不再成立，当满足(17)时，式

$$\sum_{i\in I_m}\Delta \boldsymbol{a}_r^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^i}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j}\neq 0 \tag{42}$$

下面推导误差

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I_m}\Delta \boldsymbol{a}_r^{i\prime}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^i}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j}\\
&=\sum_{i\in I_m}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^i}\sum_{j\in I_m}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{m^i}{m^j}\alpha_{ji}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j}\\
&=\sum_{i\in I_m}\sum_{j\in I_m}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^i}{m^j}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\alpha_{ji}-\sum_{j\in I_{um}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}\frac{\boldsymbol{h}_{l,ra}^j}{m^j}\\
&=\sum_{j\in I_{um}}\frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{j},0\prime}}{m^j}\Big(\sum_{i\in I_m}\alpha_{ji}\boldsymbol{h}_{l,ra}^i-\boldsymbol{h}_{l,ra}^j\Big)
\end{aligned} \tag{43}$$