仪表校正

2012年9月28日

依赖于一组独立自变量x_i的量$Q = f(x_1, x_2, ..., x_N)$的不确定度与每个自变量$x_i$的不确定度之间的关系：

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{x_1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_1}(\frac{\delta x_1}{x_1}) + \frac{x_2}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_2}(\frac{\delta x_2}{x_2}) + ... + \frac{x_N}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_N}(\frac{\partial x_N}{x_N}) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(\frac{\delta Q}{Q})^2 \quad &= [(\tfrac{x_1}{Q}\tfrac{\partial Q}{\partial x_1})^2(\tfrac{\delta x_1}{x_1})^2 + (\tfrac{x_2}{Q}\tfrac{\partial Q}{\partial x_2})^2(\tfrac{\delta x_2}{x_2})^2 + ... + (\tfrac{x_N}{Q}\tfrac{\partial Q}{\partial x_N})^2(\tfrac{\delta x_N}{x_N})^2] + \\ &\textstyle\sum_{i,j,i\neq j}^{N} \tfrac{x_i}{Q}\tfrac{\partial Q}{\partial x_i}(\tfrac{\delta x_i}{x_i}) \times \tfrac{x_j}{Q}\tfrac{\partial Q}{\partial x_j}(\tfrac{\delta x_j}{xj})\end{aligned} \tag{2}$$

因为x_i之间是独立independent的，所以$\delta x_i \delta x_j = 0$，于是有

$$\frac{\delta Q}{Q} = [(\frac{x_1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_1})^2(\frac{\delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{x_2}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_2})^2(\frac{\delta x_2}{x_2})^2 + ... + (\frac{x_N}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_N})^2(\frac{\delta x_N}{x_N})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

$$\frac{\delta Q}{Q} = [(S_{x_1})^2(U_{x_1})^2 + (S_{x_2})^2(U_{x_2})^2 + ... + (S_{x_N})^2(U_{x_N})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

$$S_{x_i} = \frac{x_i}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_i} \tag{5}$$

$$U_{x_i} = \frac{\delta x_i}{x_i} \tag{6}$$

其中S_{x_i}成为变量x_i的灵敏度系数，U_{x_i}是x_i的不确定度。

各种仪表：

基于压力差的流量计表有：

Orifice, venturi, nozzle flowmeters: 体积流速为

$$Q = C_d E_u Y(\frac{\pi}{4}d^2)\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_1}} \tag{7}$$

其中$\Delta p = p_1 - p_2$，ρ_1、p_1为upstream的密度、压力，p_2为downstream的压力，C_d为discharge coefficient(与粘滞和涡流带来的损耗有关)，E_u是velocity approach factor，$E_u = 1/\sqrt{1-\beta^2}$，$\beta = d/D$，Y称为扩散因子(考虑到气体压缩性质)，对于不可压缩的物质，其值为1，对于气体，

$$Y = \sqrt{(P_2/P_1)^{2/k}(\frac{k}{k-1})(\frac{1-(P_2/P_1)^{\frac{k-1}{k}}}{1-P_2/P_1})(\frac{1-\beta^4}{1-\beta^4(P_2/P_1)^{2/k}})} \tag{8}$$

其中k是比热因子C_p/C_v，当β小于0.25时，β^4接近于0。

Wedge flowmeter: 只用来测液体，此时可以用上面的流速公式，Y视为1，不过β的计算有点不同：

$$\beta = \frac{1}{\pi^2}[cos^{-1}(1-2\frac{H}{D}) - 2(1-2\frac{H}{D})\{\frac{H}{D} - (\frac{H}{D})^2\}^{1/2}] \tag{9}$$

Pitot tube flowmeter: 体积流速为

$$Q = K(\frac{\pi}{4}D^2)\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{10}$$

其中$\Delta P = P_t - P_s$，P_t为total stagnation压力，P_s为static pressure，K为仪器的经验系数。

通过其他物理原理来测体积流速的表还有：
vortex flowmeter: 体积流速为：

$$Q = \frac{f\pi D^2 w}{4S}(1 - \frac{4Kw}{\pi D}) \tag{11}$$

其中$S = fw/u$，S称为Strouhal数，f为vortex shedding frequency，在Reynolds数为$10^2 - 10^7$这样一个很大的范围内，S基本是一个常数，值依赖于w/D，当$w/D = 0.1$时，$S = 0.18$，当$w/D = 0.3$时，$S = 0.26$，当$w/D = 0.5$时，$S = 0.44$。

Turbine flowmeter: 体积流速为：

$$Q = (\frac{\pi}{4}D^2)\frac{Krw}{\tan\theta} \tag{12}$$

其中$u = \frac{Krw}{\tan\theta}$是upstream的流速，$K$是仪器对因涡轮造成的流体减速的补偿因子，$w$为涡轮角速度，$r = \sqrt{\frac{r_o^2+r_i^2}{2}}$，$r_o$和$r_i$分别为刀片的外半径和内半径。$\theta$为管轴与涡轮刀片面的夹角。

Ultrasonic flowmeter: 体积流速为：

$$Q = (\frac{\pi}{4}D^2)\frac{KD}{\sin 2\theta}t_f \tag{13}$$

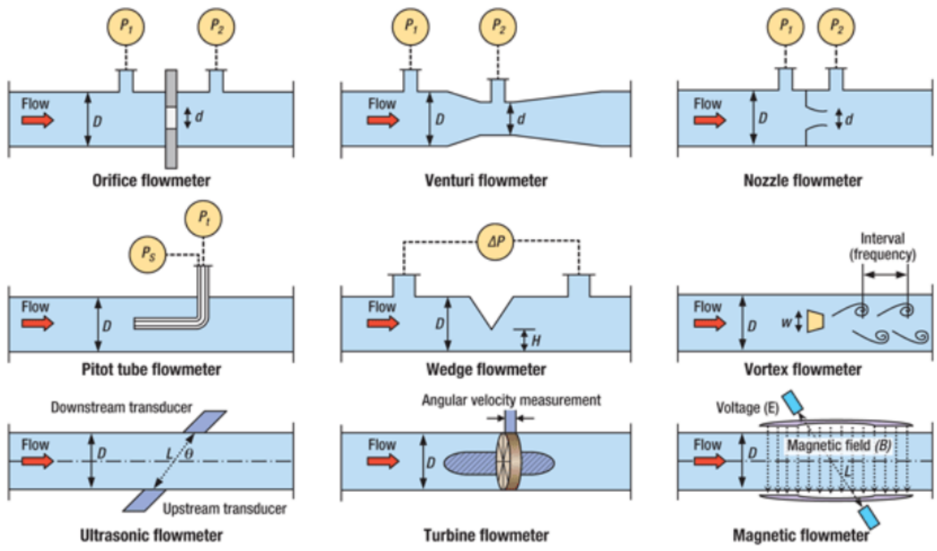

Figure 1: 各种体积流量计

其中$t_f = (t_U - t_D)/(t_U t_D)$是一个关于与流体近似同向的接受时间$t_D$和与流体近似逆向的接收时间$t_U$的函数，$K$是仪器经验参数。

Magnetic flowmeter: 体积流速为：

$$Q = (\frac{\pi}{4}D^2)\frac{KE}{BL} \tag{14}$$

E是通电流体在磁场下产生的感应电势差，原理等同于霍尔效应，K为仪器经验参数，L为两电极间的距离，通常等于管径D。

直接测量质量流速的流量计Mass flowmeter通常利用科里奥利力(coriolis force)，其测得的质量流速为：

$$Q = \frac{K_u \tau (1 - (\frac{w}{w_u})^2)}{2KL^2} \tag{15}$$

其中K是与管子形状有关的一个经验参数，K_u为管子的刚度，w_u是管子的自然共振频率，w是实际的振动频率，τ是科里奥利力引起的相差带来的时间滞后。

流速补偿公式推导：

对于orifice，venturi，nozzle，wedge，pitot这几种通过测量压力差来得到流速数据Q_m的表，

$$Q_{corr}\sqrt{\rho_m} = Q_m\sqrt{\rho_D} \tag{16}$$

$$Q_{corr} = Q_m\sqrt{\rho_D/\rho_m} \tag{17}$$

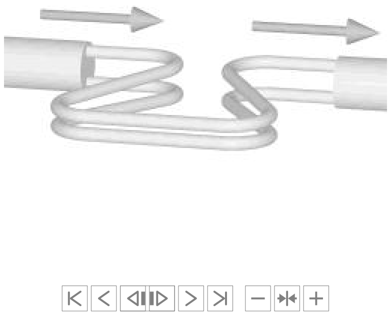

Figure 2: Coriolis质量流量计

如果读取的是质量流速数据$\dot{m} = Q \cdot \rho$，则有

$$\dot{m}_{corr}/\sqrt{\rho_m} = \dot{m}_m/\sqrt{\rho_D}\dot{m}_{corr} = \dot{m}_m\sqrt{\rho_m/\rho_D} \tag{18}$$

如果读取到的是转换到某个标准条件下之后的(比如一定温度T_{D_std}、压力P_{D_std}、还有某种标准液体密度ρ_{D_std})体积流速数据Q_{std_m}(注意在设计的时候也不一定是在这种标准条件下，所以还有ρ_D，但ρ_{D_std}和ρ_D是针对同一种初始设计液体的)，则：
首先由当前条件转换到标准条件下体积流速的公式会变为：

$$Q_{std} = Q \cdot \frac{\rho_1}{\rho_{1\_std}} \propto \frac{\sqrt{\rho_1}}{\rho_{1\_std}} \tag{19}$$

可以得到转换到标准条件下之后的体积流速的补偿关系为：

$$Q_{std\_corr} = Q_{std\_m}\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_D}} \cdot \frac{\rho_{D\_std}}{\rho_{m\_std}} \tag{20}$$

上面ρ_m与ρ_{m_std}也是针对同一种被测的实际液体的。对于理想气体和实际气体分别有$PV = nRT$和$PV = nZRT$，其中Z为压缩因子(compressibility factor)，将后式改写成:

$$V_{mol} = ZRT/P \tag{21}$$

$$\rho = M_{mol}/V_{mol} = PM_{mol}/ZRT \tag{22}$$

代入到前面三种针对液体的补偿关系式中，可以得到：
对于体积流速

$$Q_{corr} = Q_m \sqrt{\frac{M_{mol\_D} P_D / Z_D T_D}{M_{mol\_m} P_m / Z_m T_m}} \tag{23}$$

对于转换到标准条件下之后的体积流速

$$\begin{aligned} Q_{std} = Q \cdot \frac{\rho_1}{\rho_{1\_std}} = Q \cdot \frac{P_1/Z_1 T_1}{P_{1\_std}/Z_{1\_std} T_{1\_std}} \\ \propto \frac{1}{\sqrt{P_1 M_{mol\_1}/Z_1 T_1}} \cdot \frac{P_1/Z_1 T_1}{P_{1\_std}/Z_{1\_std} T_{1\_std}} \propto \frac{\sqrt{P_1/Z_1 T_1 M_{mol\_1}}}{P_{1\_std}/Z_{1\_std} T_{1\_std}} \end{aligned} \tag{24}$$

$$Q_{std\_corr} = Q_{std\_m} \sqrt{\frac{P_m / M_{mol\_m} Z_m T_m}{P_D / M_{mol\_D} Z_D T_D}} = Q_{std\_m} \sqrt{\frac{M_{mol\_D} Z_D T_D / P_D}{M_{mol\_m} Z_m T_m / P_m}} \tag{25}$$

上式中用到了对于任意气体，在不同条件下同一气体摩尔质量始终相同的，不同气体在标准条件下P_{1_std}，T_{1_std}，和Z_{1_std}都是一样的(Z_{1_std}好像不一定一样啊？如果认为不一样，则后面补偿系数表[1]($gas, standard, m^3/h$)一行应该都乘以$\frac{Z_{m_std}}{Z_{D_std}}$)。
对于质量流速补偿就很好求了

$$\dot{m}_{corr} = \dot{m}_m \sqrt{\frac{M_{mol\_m} P_m / Z_m T_m}{M_{mol\_D} P_D / Z_D T_D}} \tag{26}$$

上面对气体情况的补偿过程中还有一个问题是文献中没有考虑到的，就是Y的变化，如果考虑Y在不同条件下的变化，则需要对每个补偿进行一定的修正，参考`http://en.wikipedia.org/wiki/Orifice_plate`
对于vortex，turbine，ultrasonic和magnetic flowmeter，以及coriolis mass flowmeter，因为仪器原理不同，补偿公式都比较简单，列举出来如表[1]所示。

不确定度计算：利用不同仪表补偿系数表(表[1])，以及不确定公式(3-6)，可以得到各种表的的不确定计算方式如下：
对orifice,venturi,nozzle,wedge flowmeters，

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_{std}}{Q_{std}} = [(1)^2(\frac{\delta C_d}{C_d})^2 + (\frac{2}{1-\beta^4})^2(\frac{\delta d}{d})^2 + (\frac{-2\beta}{1-\beta^4})^2(\frac{\delta D}{D})^2 + \\ (\frac{1}{2})^2(\frac{\delta \Delta P}{\Delta P})^2 + (\frac{1}{2})^2(\frac{\delta \rho_1}{\rho_1})^2 + (-1)^2(\frac{\delta \rho_{1\_std}}{\rho_{1\_std}})^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{27}$$

对vortex flowmeter，

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_{std}}{Q_{std}} = [(-1)^2(\frac{\delta S}{S})^2 + (\frac{1-2\frac{4Kw}{\pi D}}{1-\frac{4Kw}{\pi D}})^2(\frac{\delta w}{w})^2 + (\frac{2-\frac{4Kw}{\pi D}}{1-\frac{4Kw}{\pi D}})^2(\frac{\delta D}{D})^2 + \\ (-\frac{\frac{4Kw}{\pi D}}{1-\frac{4Kw}{\pi D}})^2(\frac{\delta K}{K})^2 + (1)^2(\frac{\delta f}{f})^2 + (1)^2(\frac{\delta \rho_1}{\rho_1})^2 + (-1)^2(\frac{\delta \rho_{1\_std}}{\rho_{1\_std}})^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{28}$$

对turbine flowmeter，

$$\frac{\delta Q_{std}}{Q_{std}} = [(1)^2(\frac{\delta K}{K})^2 + (1)^2(\frac{\delta w}{w})^2 + (\frac{r_o}{2r^2})^2(\frac{\delta r_o}{r_o})^2 + (\frac{r_i}{2r^2})^2(\frac{\delta r_i}{r_i})^2 + (-\frac{\theta\sec^2\theta}{\tan\theta})^2(\frac{\delta\theta}{\theta})^2 + (2)^2(\frac{\delta D}{D})^2 + (1)^2(\frac{\delta\rho_1}{\rho_1})^2 + (-1)^2(\frac{\delta\rho_{1\_std}}{\rho_{1\_std}})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

对ultrasonic flowmeter，

$$\frac{\delta Q_{std}}{Q_{std}} = [(1)^2(\frac{\delta K}{K})^2 + (1)^2(\frac{\delta t_f}{t_f})^2 + (\frac{-2\theta}{\tan 2\theta})^2(\frac{\delta\theta}{\theta})^2 + (3)^2(\frac{\delta D}{D})^2 + (1)^2(\frac{\delta\rho_1}{\rho_1})^2 + (-1)^2(\frac{\delta\rho_{1\_std}}{\rho_{1\_std}})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

对coriolis mass flowmeter，体积流速的不确定度，

$$\frac{\delta Q_{std}}{Q_{std}} = [(1)^2(\frac{\delta K_u}{K_u})^2 + (-1)^2(\frac{\delta K}{K})^2 + (-\frac{2w^2}{w_u^2 - w^2})^2(\frac{\delta w}{w})^2 + (\frac{2w^2}{w_u^2 - w^2})(\frac{\delta w_u}{w_u})^2 + (1)^2(\frac{\delta\tau}{\tau})^2 + (-2)^2(\frac{\delta L}{L})^2 + (-1)^2(\frac{\delta\rho_{1\_std}}{\rho_{1\_std}})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

上面这些不确定度都是针对流体由工厂实际条件转换到标准条件下之后的不确定计算公式，如果想计算气体，或者不转换到标准条件下而是在工厂实际条件下的不确定度，可以利用一个简单规则，如果$f \propto x_i^a$，那么x_i这个变量的灵敏度系数即为$\frac{x_i}{f}\frac{\partial f}{\partial x_i} = a$，以及在工厂条件与标准条件下体积流速的转换关系$Q_{std} = Q \cdot \frac{\rho_1}{\rho_{1_std}}$，和补偿系数表，就可以计算各种情况下的不确定度(实际上对补偿系数表中每项，提取出包含D，D_{std}，mol_D的部分取倒数就得到这种情况下的流速与相关变量之间的幂函数正比关系，再利用上面的简单规则，就可以很容易由液体标准条件下不确定度公式写出其他情况下的不确定度公式)。

例子：

文献中的一个测液体体积流速的例子：

已知参数：设计密度$\rho_D = 750kg/m^3$，设计时的流体样本在标准条件下的密度$\rho_{D_std} = 950kg/m^3$，工厂实测密度$\rho_m = 740kg/m^3$，工厂实际流体在标准条件下的密度$\rho_{m_std} = 960kg/m^3$，现在流速表给出的是转换到标准条件下滞后的体积流速$Q_{std_m} = 600std.m^3/d$，代入式(20)可以得到转换到标准条件下之后的补偿值为$Q_{std_corr} = 600 \times \sqrt{\frac{740}{750}} \times \frac{950}{960} = 589.8std.m^3/d \sim 590std.m^3/d$，不确定计算则利用式(27)，其中灵敏度系数包含一些与仪表设计参数有关的量(如β)可以由说明书得到，而每个变量在某个置信度下的不确定度值是由不同标准(AGA，API，ASME，ASTM)或着仪表说明给出的，在AGA标准下各变量在U$_{95}$ 置信级别上的不确定度如图(3)所示(假

TABLE 2. Variable uncertainty

		Sensitivity coefficient	Sensitivity value, S	Uncertainty, U_{95}	$(S\ U_{95})^2$
C_D	Discharge coefficient	1	1	0.45	0.2025
d	Orifice diameter	$2/(1-\beta^4)$	2.298	0.05	0.0132
D	Pipe diameter	$-2\beta^4/(1-\beta^4)$	−0.298	0.25	0.0056
ΔP	Differential pressure	½	0.5	0.5	0.0625
ρ	Actual density	½	0.5	0.45	0.0506
ρ_{Std}	Standard density	−1	−1	0.5	0.25
					Sum of squares $\sum(S\ U_{95})^2 = 0.5844$
					Square root of sum of squares $\sqrt{\sum(S\ U_{95})^2} =$ **0.7644**

Figure 3: 变量不确定度

设$\beta = 0.6$)，可以得到U_{95}置信级别下的转换到标准条件之后的体积流速不确定度为±0.76%，而算工厂实际条件下的质量流速不确定度时就不需要式(27)中最后一项，可以算得其不确定度为±0.58%。

对于气体流速的补偿情况，由补偿系数表可以看到与M_{mol}，T，P，Z有关系，前三个量都是容易知道的，但设计条件下与工厂实际条件下气体(特别是混合气体)的压缩因子Z怎么得到?

基本步骤：

1，根据仪表类型、要补偿的物理量以及在什么条件下进行补偿，由补偿系数表选择合适的补偿系数。

2，对于液体需要知道设计时的密度，工厂实际条件下的密度，如果是要补偿转换到标准条件下之后的流速值，还需要知道设计时的流体样本在标准条件下的密度以及工厂实际流体在标准条件下的密度；对于气体，在不考虑Y的变化情况下，需要知道设计时的温度，压力，摩尔质量，压缩因子，工厂实际条件下的温度，压力，摩尔质量，压缩因子。压缩因子怎么得到?

3，根据仪表类型，要得到什么条件下什么量的不确定度选择合适的不确定度计算公式，再根据所选置信级别，仪器实际参数和说明，以及选定那种国际标准来确定灵敏度系数以及每个量的不确定度，根据前面所选公式进而算出所要求的不确定度。

4，对每个仪表都进行补偿并得到不确定度之后，对补偿后的整个网络再进行校正，比较校正与补偿之间的差别并根据前面得到的不确定度判断是否存在系统误差。

Phase\Type of flowmeters	Differential pressure meters orifice, venturi, nozzle, wedge, pitot	Volumetic flowmeters vortex, turbine, ultrasonic, magnetic	Mass flowmeters coriolis
liquid, actually, m^3/h	$\sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_m}}$	1	$\frac{\rho_D}{\rho_m}$
liquid, standard, m^3/h	$\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_D}} \cdot \frac{\rho_{D\_std}}{\rho_{m\_std}}$	$\frac{\rho_m}{\rho_D} \cdot \frac{\rho_{D\_std}}{\rho_{m\_std}}$	$\frac{\rho_{D\_std}}{\rho_{m\_std}}$
liquid, actually, kg/h	$\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_D}}$	$\frac{\rho_m}{\rho_D}$	1
gas, actually, m^3/h	$\sqrt{\frac{M_{mol\_D} P_D / Z_D T_D}{M_{mol\_m} P_m / Z_m T_m}}$	1	$\frac{M_{mol\_D} P_D / Z_D T_D}{M_{mol\_m} P_m / Z_m T_m}$
gas, standard, m^3/h	$\sqrt{\frac{M_{mol\_D} Z_D T_D / P_D}{M_{mol\_m} Z_m T_m / P_m}}$	$\frac{Z_D T_D / P_D}{Z_m T_m / P_m}$	$\frac{M_{mol\_D}}{M_{mol\_m}}$
gas, actually, kg/h	$\sqrt{\frac{M_{mol\_m} P_m / Z_m T_m}{M_{mol\_D} P_D / Z_D T_D}}$	$\frac{M_{mol\_m} P_m / Z_m T_m}{M_{mol\_D} P_D / Z_D T_D}$	1

Table 1: 不同仪表补偿系数