

控制理论课程实习报告

——基于 MATLAB 的控制系统分析、设计与仿真

二〇二一年一月

目 录

第一章 绪论.....	1
第二章 倒立摆系统机理建模.....	2
2.1 机理建模.....	2
2.2 模型线性化与特例化.....	3
2.3 获取差分方程.....	4
第三章 倒立摆系统分析.....	6
3.1 开环系统动态性能分析.....	6
3.2 控制设计条件验证分析.....	8
3.3 状态反馈控制设计.....	9
3.4 基于状态观测器的状态反馈设计.....	12
3.5 基于单位增益比例输出反馈的控制设计.....	15
3.6 基于积分校正的控制设计.....	17
3.7 带积分校正和状态观测器的状态反馈控制设计.....	20
第四章 蔡氏混沌电路机理建模.....	22
4.1 数学模型.....	22
4.2 同步设计原理.....	22
第五章 蔡氏混沌电路同步控制设计.....	24
5.1 单个蔡氏电路的混沌现象.....	24
5.2 双同构蔡氏电路同步设计.....	26
5.3 基于蔡氏混沌电路的图像保密通讯.....	27
第六章 总结.....	30
参考文献.....	31

第一章 绪论

在控制理论的研究中，往往划分为两个重要阶段，即经典控制理论与现代控制理论。当然随着科研水平的发展以及科学工程的需求变化，在后续的理论研究中也出现了更新的最优控制以及智能控制等相关领域。经典控制理论基于传递函数针对单输入单输出系统进行相关性能的研究和改善，而现代控制理论则依托于状态空间表达式，清晰的分析系统内部情况，完成多输入多输出系统相关性能的研究和改善。

虽然看似现代控制理论具有更强的能力，但实际上经典控制理论与现代控制理论是紧密结合的，两种研究思路或许并不相同，但是所研究的对象本身，以及各类过程特性是统一的，也是相互对应的，这在稳定性，能控能观特性中都能够很好的体现。

倒立摆系统具有多变量、强耦合、非线性且不稳定等特性，所有重心在上支点在下的问题都可以用倒立摆问题来概括。科研人员通过对倒立摆的控制检验自己的控制算法，直观地表现稳定性、可控性等关键问题：倒立摆有着深刻的工程背景。相关理论成果已经在直升飞机、火箭发射、人造卫星、机器人等方面得到了广泛应用^[1]。

近年来随着通信技术的发展网络系统分布式多媒体系统中存在着大量的数字图像传输由于通信传输和接收设备的充分发展通过无线电和一般的通信网络非法获取数据已经变得越来越容易因此信息安全已经成为一个关键而迫切的问题利用混沌进行加密的技术已经成为一项亟待快速发展的关键技术随着研究的深入发展利用混沌的非周期连续宽频带类噪声和长期不可预测等特点进行保密通信逐渐成为混沌研究领域的又一热点^[2]。

基于以上背景，在本课程设计中，主要完成两方面的内容，一是对倒立摆系统的机理建模以及相关系统分析和控制器设计，使得系统能够在一定程度上改善稳定性。二是完成蔡氏混沌电路的双同构同步设计，并使用所设计的双同构电路进行保密通信。学习与了解现代控制理论在科学工程中的应用方法，以及蔡氏混沌电路在保密通信中的作用效果。

第二章 倒立摆系统机理建模

2.1 机理建模

参考如下情景假设构建倒立摆系统：

在无外力作用时，倒立摆不能保持在垂直位置而会左右倾倒，为此需要给小车在水平方向上施加适当的作用力 u 。为简化问题，一般忽略摆杆质量、伺服电动机惯性，以及摆轴、轮轴与接触面之间的摩擦力和风力。控制目标是为保持倒立摆垂直且使小车可停留在任意给定但可变更的位置上。

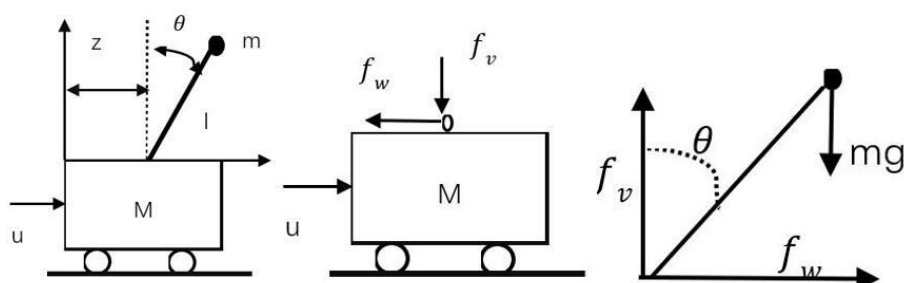


图 2.1 倒立摆力学系统分析

如上图 2.1 为相关系统力学分析，相关定义可参考表 2.1 所示。

表 2.1 系统变量定义分析

符号	含义
θ	摆杆偏离垂线的角度 (rad)
z	小车水平方向的瞬时位置坐标
f_w	小车通过铰链作用于摆杆的力的水平分量
f_v	小车通过铰链作用于摆杆的力的垂直分量

从图中可知，摆锤重心的水平、垂直坐标分别为 $(z + l\sin\theta)$ 、 $l\cos\theta$ 。忽略摆杆质量，则系统的重心近似位于摆锤重心，且系统围绕其重心的转动惯量 $J \approx 0$ 。此时倒立摆系统的运动可分解为重心的水平运动、重心的垂直运动及绕重心的转动这 3 个运动。根据牛顿动力学，可得：

$$f_w = m \frac{d^2}{dt^2} (z + l\sin \theta)$$

$$f_v - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l\cos \theta)$$

$$f_v l \sin \theta - f_w l \cos \theta = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx 0$$

小车的动力学方程为:

$$u - f_v = M \frac{d^2 z}{dt^2}$$

连列上式, 可获得:

$$u = m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta) + M \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$(m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) + mg) l \sin \theta - (m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta)) l \cos \theta = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx 0$$

2.2 模型线性化与特例化

由于上述式子中存在 $\cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 项, 故为非线性方程, 需要进行近似线性化处理。当 θ 很小时, 有 $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$ 。则式子可近似线性化为:

$$(M + m) \ddot{z} + m l \ddot{\theta} = u$$

$$m l \ddot{z} + m l^2 \ddot{\theta} = m g l \theta$$

进一步整理可得:

$$M l \ddot{\theta} = (M + m) g \theta - u$$

$$M \ddot{z} = u - m g \theta$$

根据此线性方程可定义状态变量:

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{z} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

即该倒立摆的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{cases}$$

为了方便分析, 将该模型特例化, 各系数取有意义的物理数值, 令小车质量为 $M=1\text{kg}$, 摆杆的质量 $m=0.1\text{kg}$, 摆杆的长度 $l=0.5\text{m}$, 将数据代入上式中, 可以

得到：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \end{cases}$$

后续的分析也将基于及模型开展，当然若尝试不进行线性化，而是保留系统的非线性部分，最终可推导出系统的数学模型为：

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{u + m l \sin \theta \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta \sin \theta}{M + m - m \cos^2 \theta} \\ \ddot{\theta} &= \frac{u \cos \theta - (M + m) g \sin \theta + m l \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}}{m l \cos^2 \theta - (M + m) l} \end{aligned}$$

选择状态变量为：

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{cases}$$

则系统的状态方程模型为：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u \cos x_1 - (M + m) g \sin x_1 + m l \sin x_1 \cos x_1 x_2^2}{m l \cos^2 x_1 - (M + m) l} \\ x_4 \\ \frac{u + m l \sin x_1 x_2^2 - m g \cos x_1 \sin x_1}{M + m - m \cos^2 x_1} \end{bmatrix}$$

2.3 获取差分方程

在控制设计中往往存在系统辨识或参数估计的环节，尤其在参数估计中往往会使用到系统的微分方程进行递推运算，所以我们针对 2.2 中所获得的线性化系统转为差分方程的形式进行运算。

首先我们使用如下公式获取该系统的传递函数矩阵，由于本系统属于单输入单输出方程，故其传递函数阵则为 1 维：

$$W_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

经求得其传递函数为：

$$G(s) = \frac{s^2 - 20}{s^4 - 22s^2}$$

再使用一阶前向差分的方法，即：

$$s = \frac{z - 1}{T}$$

其中 T 为采样时间，此处取 0.1，则有：

$$Z = \frac{(10z - 10)^2 - 20}{(10z - 10)^2((10z - 10)^2 - 22)}$$

进一步化简则有：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.005008z^3 - 0.006027z^2 - 0.006027z + 0.005008}{z^4 - 4.224z^3 + 6.448z^2 - 4.224z + 1}$$

将该方程转为差分方程的形式则有：

$$z(k) - 4.224z(k-1) + 6.448z(k-2) - 4.224z(k-3) + z(k-4) = 0.005008u(k-1) - 0.00603u(k-2) - 0.00603u(k-3) + 0.005008u(k-4)$$

若考虑系统在测量时存在随机噪声，则有：

$$z(k) - 4.224z(k-1) + 6.448z(k-2) - 4.224z(k-3) + z(k-4) = 0.005008u(k-1) - 0.00603u(k-2) - 0.00603u(k-3) + 0.005008u(k-4) + v(k)$$

若需要将此模型用于参数估计，只需要设立相关参数，即分别配置为 a_n

($n = 1, 2, 3, 4$) 与 b_n ($n = 1, 2, 3, 4$)。其真实值如下表 2.2 所示。

表 2.2 待估计参数真实值

参数	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
真值	-4.224	6.448	-4.224	1	0.005008	-0.00603	-0.00603	0.005008

第三章 倒立摆系统分析

3.1 开环系统动态性能分析

由 2.2 节的状态空间表达式推导可以得出系统的传递函数模型如下：

$$G(s) = \frac{s^2 - 19.6}{s^4 - 21.56s^2}$$

根据经典控制理论的相关知识可以计算出系统极点为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4.6368, \lambda_5 = 4.6368$$

由此可以得出结论，系统不稳定。除此之外还可以绘制出系统 Bode 图与 Nyquist 图用于判断系统稳定性如图 3.1, 3.2 所示，并计算频域性能指标如表 3.1 所示。

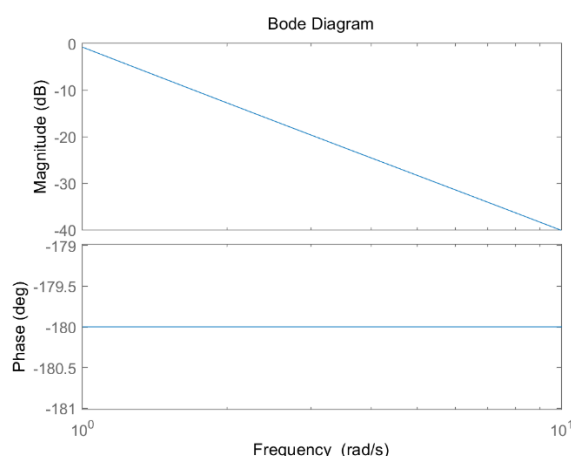


图 3.1 系统 Bode 图

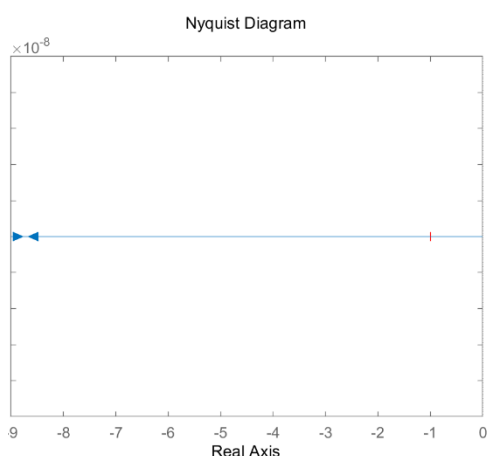


图 3.2 系统 Nyquist 曲线图

在 Bode 图上，对应在 $L(w) > 0$ 的频段范围内， $G_1(S)$ 的对数相频曲线穿越 -180 度线次数为 0，即 $N=0$ 。根据对数稳定判据 $Z = P - 2N$ 可得 $Z=1$ ，系统不稳定。从频域角度出发，系统截止频率 $w_c = 0.9554$ ，系统相角交界频率 $w_g = 0$ ，对应的相角裕度 $\gamma = 0^\circ$ ，幅值裕度 $h = 0$ 。同样可以得出系统不稳定的结论。

表 3.1 系统频域性能指标表

	G
Gm	0
Pm	0
Wcp	0
Wcgain	0.9554

若从状态空间模型出发，由 2.2 章节中求获得的状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \end{cases}$$

由李氏间接法即李雅普诺夫第一方法判断矩阵 A 的特征根可得如下结果：

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4.6368, \lambda_5 = 4.6368$$

可以看出李氏间接法的求解结果与经典方法相同，可以判断系统不稳定，其余判定方法由于篇幅有限可以参见附录，且经测试得出系统均为不稳定系统。在以上分析基础上，结合系统数学模型，借助于 Simulink 平台搭建相关结构图，可获得如图 3.3 线性系统开环状态响应曲线，图 3.4 非线性系统开环状态响应曲线。从图中不难发现，其线性系统与非线性系统的开环系统均是不稳定的。但线性系统与非线性系统的开环特性曲线存在较大差距。这是由于非线性系统源自于物理环境，其发散情况受物理因素限制，故角度呈波浪形，而线形系统则完全源自理论模型，没有物理制约。

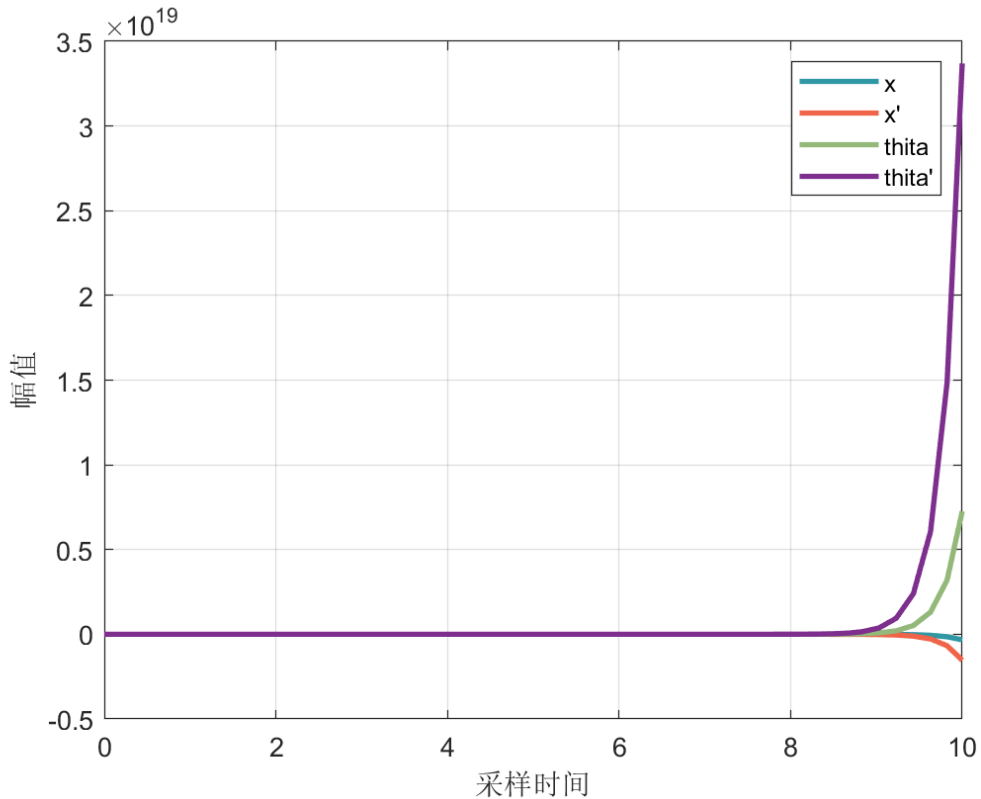


图 3.3 线性系统开环状态响应曲线

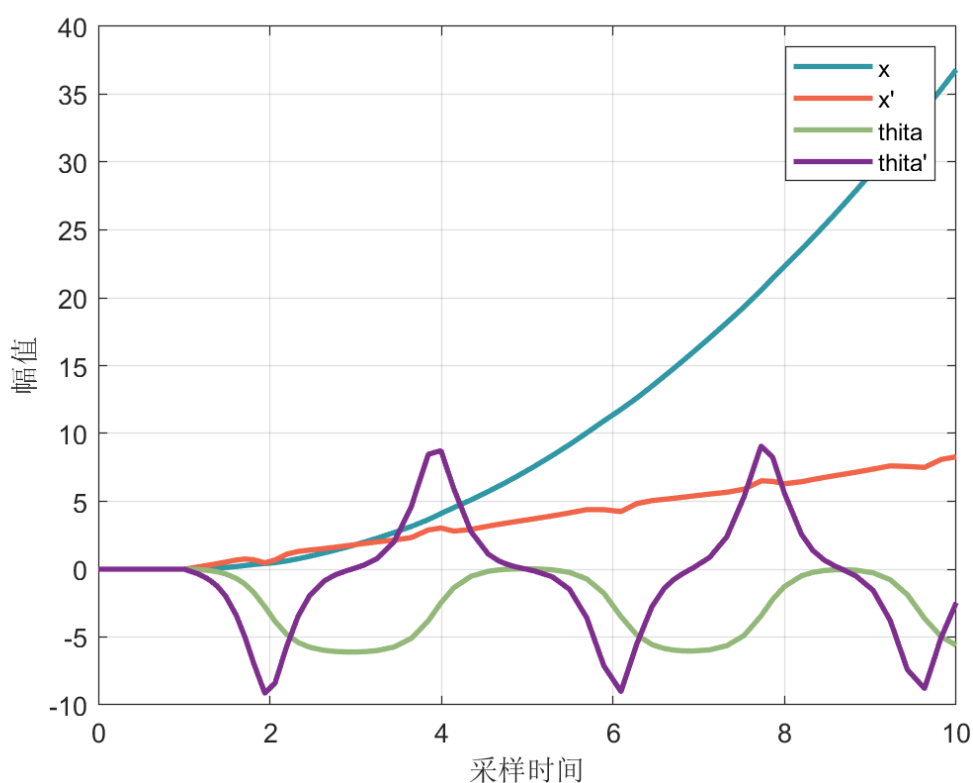


图 3.4 非线性系统开环状态响应曲线

3.2 控制设计条件验证分析

由于系统不稳定，我们若需要对其进行控制设计需要清楚的了解其能控性与能观性，以此确定所使用的方法以及验证系统是否具备可镇定的条件。通过状态空间表达，将系统分别转为能控性矩阵与能观性矩阵，结合秩判据来完成相关条件的判断。

其中求得能控性矩阵如下，其秩为 4，矩阵满秩，系统完全能控。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -44 \\ -2 & 0 & -44 & 0 \end{bmatrix}$$

其中求得能观性矩阵如下，其秩为 4，矩阵满秩，系统完全能观。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

即本系统具备控制设计的基本条件，可继续开展相关控制设计。

3.3 状态反馈控制设计

在本状态反馈控制设计中，我们配置预期极点为 $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_2 = -3$ ， $\lambda_3 = -4$ ， $\lambda_5 = -5$ ，借助于 Matlab 中 `place` 函数可以获得其状态反馈增益矩阵为：

$$K = [-3.0623 \quad -5.4592 \quad -41.8106 \quad -9.2296]$$

将此 K 矩阵结合到系统中，搭建系统如图 3.5 所示以状态反馈的方式进行作用可获得图 3.6 线性系统状态反馈曲线与图 3.7 非线性系统状态反馈曲线。

从图中较为容易的对比，结果状态反馈的输入控制作用，系统已经进入稳定状态，可见基于状态反馈的镇定控制设计是成功的。实际上随着所配置的极点不同，其镇定效果也是有所不同的，主导极点距离虚轴越远则系统的动态响应也会好，但是同样系统对噪声的敏感程度也会上升，在一个合适的范围内，线性系统与非线性系统可以表现出同样的特性曲线，但若极点距离虚轴较远时，其非线性系统的曲线将逐渐与线性系统产生差别。同样虽然系统的极点选择十分重要，关于系统的初始状态的选择也同样重要，对于线性系统其初始状态由于不受物理因素限制，相对较宽，但是若非线性系统偏离平衡点过远，其将完全发散，甚至无法使用状态反馈时其镇定。下图 3.8 与 3.9 分别为线性和非线性系统再初始状态较大时的状态反馈控制效果。

从图中不难发现，针对线性系统，若初始状态过大，其也能完成镇定，只是其动态响应特性不如初始状态较小时的效果好，但是对于非线性系统，其初始状态过大则完全偏离轨迹，无法再进行镇定，这是由于该非线性系统哪怕经过镇定之后也只是小范围的渐进稳定，当其偏离平衡点过远时，是没有办法再回归之平衡点的。

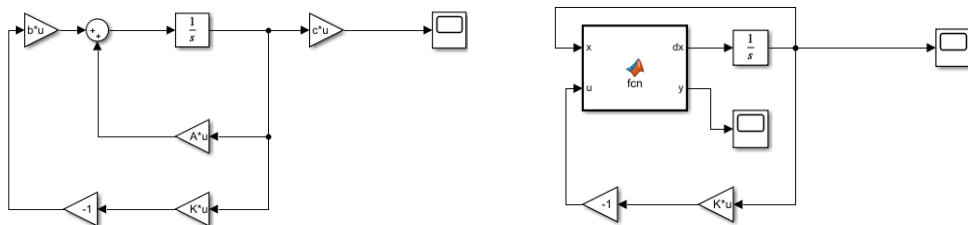


图 3.5 系统状态反馈构建图（左：线性系统；右：非线性系统）

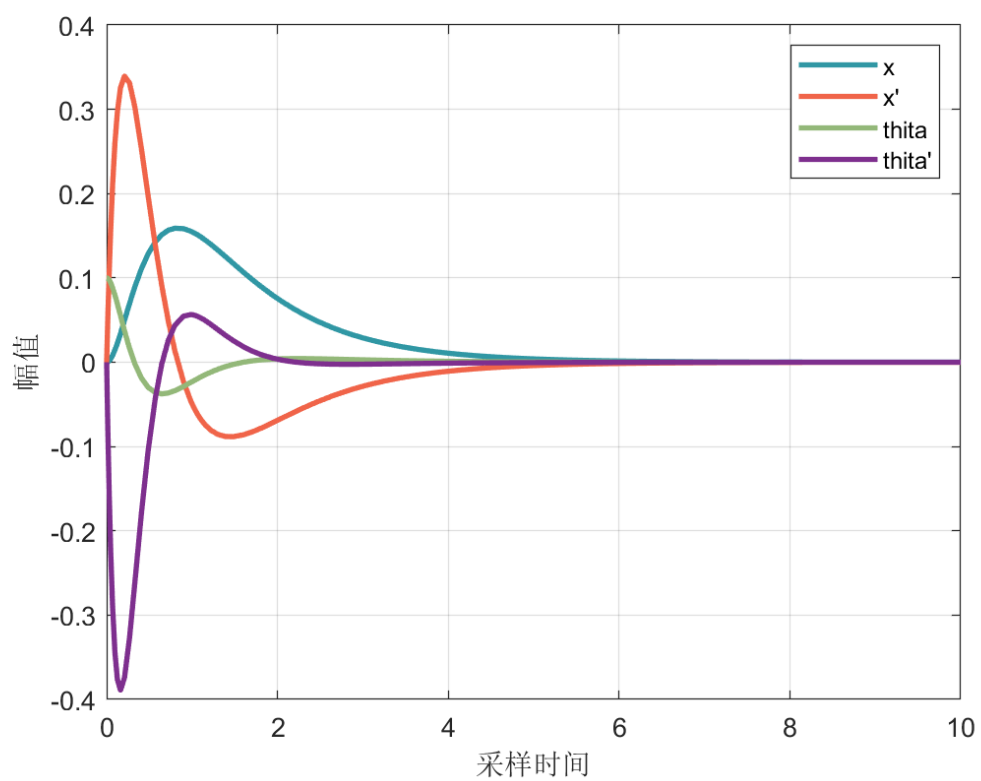


图 3.6 线性系统状态反馈曲线

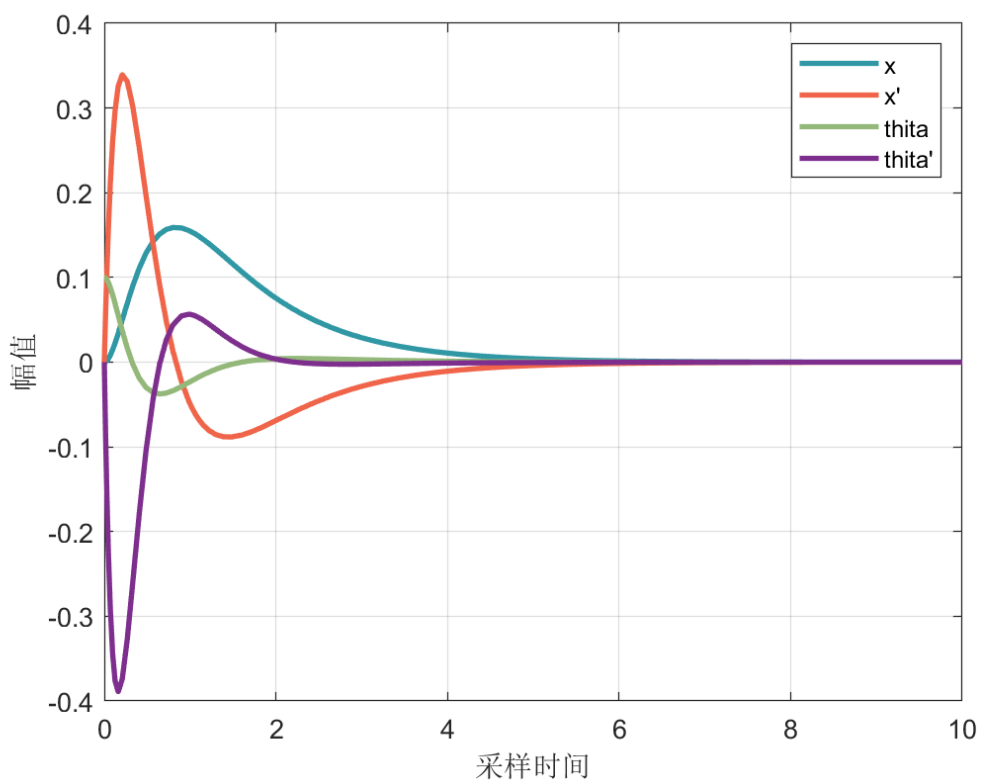


图 3.7 非线性系统状态反馈曲线

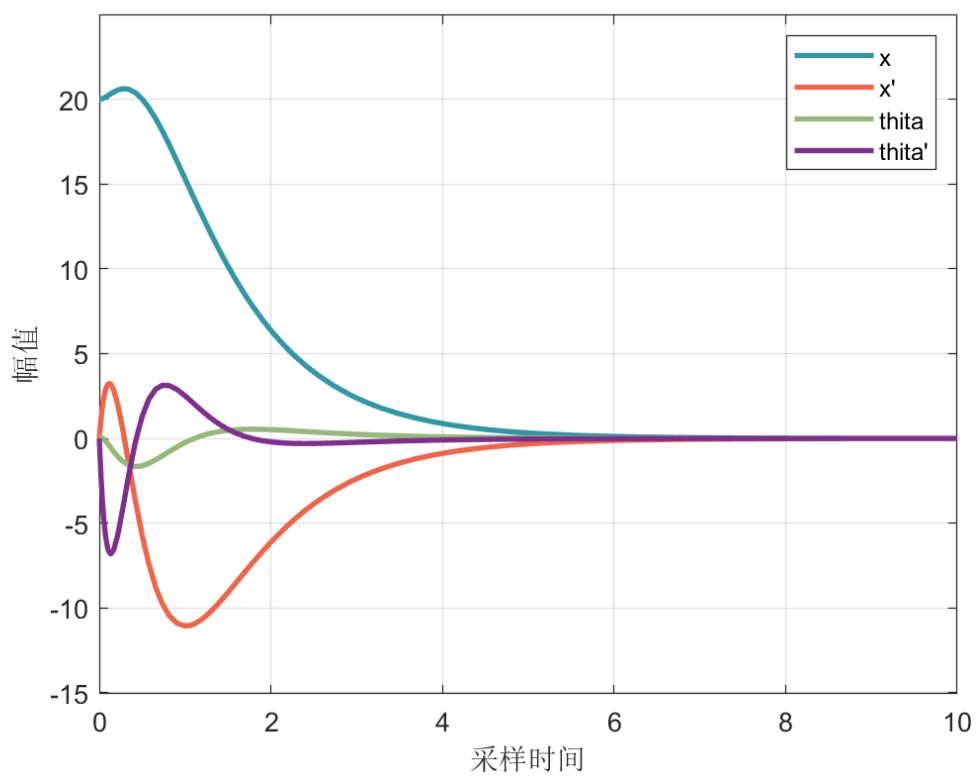


图 3.8 线性系统状态反馈曲线（初始状态过大）

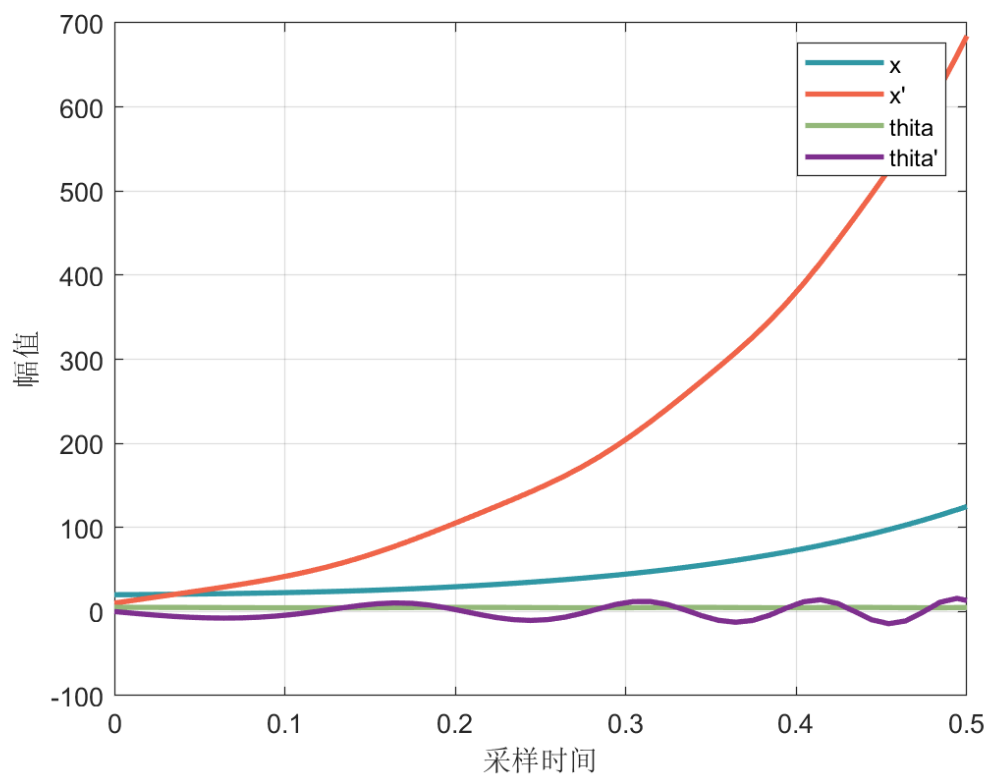


图 3.9 非线性系统状态反馈曲线（初始状态过大）

3.4 基于状态观测器的状态反馈设计

除了基于状态反馈进行控制设计，在现代控制理论中，还存在使用状态观测器进行状态反馈设计的方法。使用此方法主要是源自于有时候系统的状态变量并不都是易于直接能够检测得到的，有些状态变量甚至根本无法检测。为了解决在确定性条件下受控系统的状态重构问题，由 Luenberger 提出的状态观测器理论使状态反馈成为一种可实现的控制律。

配置状态观测反馈极点为 $P = [-5, -5, -5, -5]$ 。而状态反馈同样基于 3.3 中所测试的数据，最终可获得其观测器的增益矩阵为：

$$G = \begin{bmatrix} 20 \\ 171.6 \\ -950.2 \\ -4412.1 \end{bmatrix}$$

其状态反馈增益矩阵 K 同章节 3.3 中所求，此处 K 与 G 可以分开求解的原因是基于了分离原理，通过运算与推导，可以证明基于状态观测器的状态反馈控制设计中，其 G 与 K 矩阵可以分别独立运算，配置不同的极点来完成求解，最终组合到一起。如图 3.10 为所构建的基于状态观测器的状态反馈结构图。

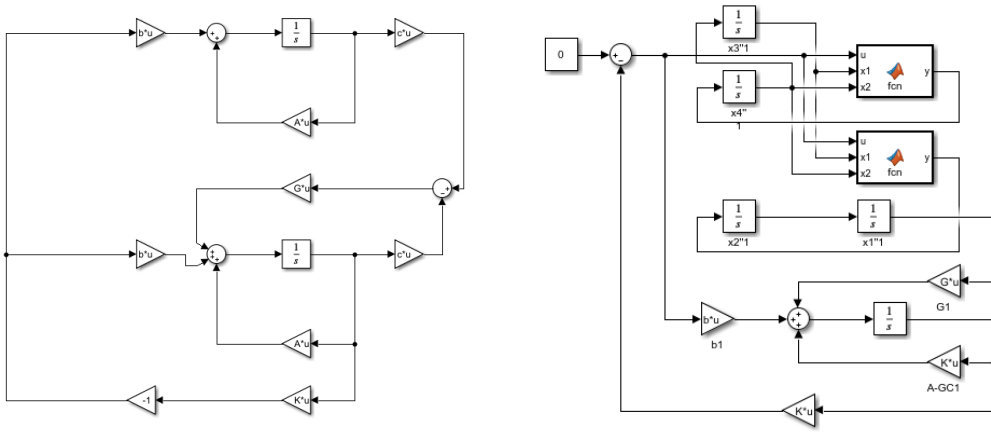


图 3.10 基于状态观测器的状态反馈构件图（左：线性系统；右：非线性系统）

状态观测器的构建主要依赖于跟踪控制，即利用构建的系统以及原始系统的输出差值作为反馈输入，从而使得我们构建的系统最终能够跟踪到原始系统，实际上蔡氏混沌电路的同步设计也是于此十分类似的原理。依托于该构件图我们可以获得图 3.11 与图 3.12 所示的输出效果，以及图 3.13，3.14 给出的状态曲线。

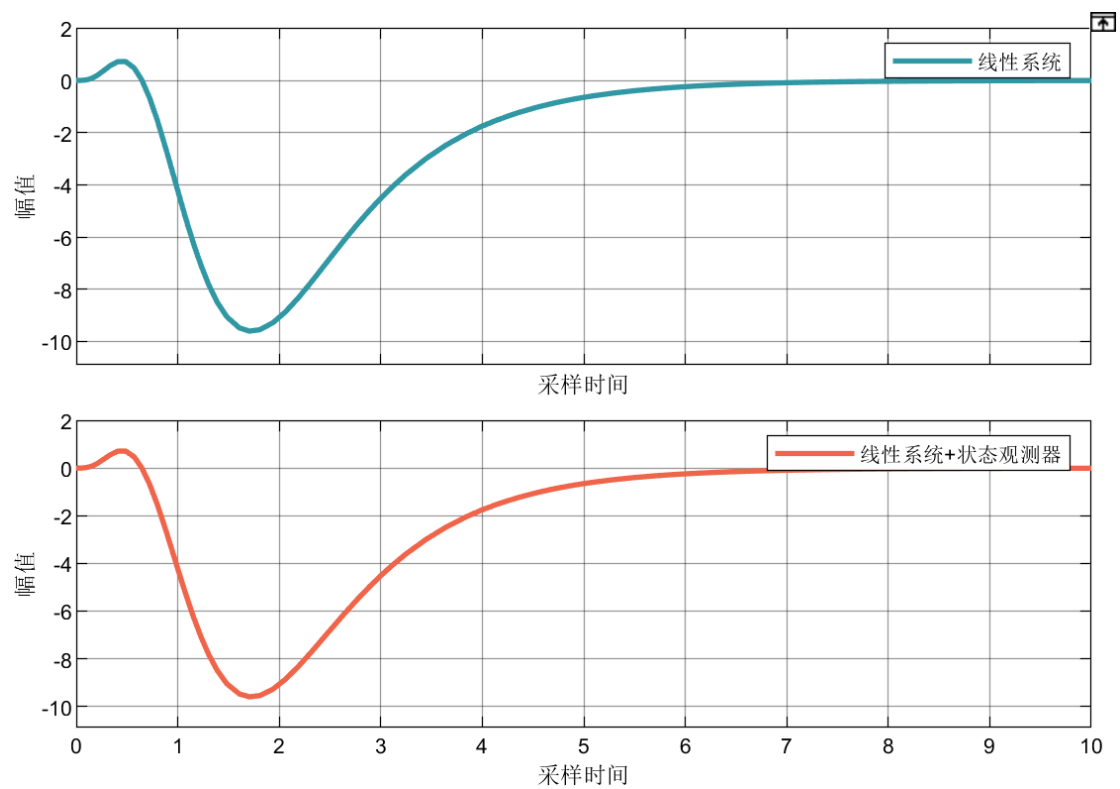


图 3.11 线性系统状态观测器跟踪效果

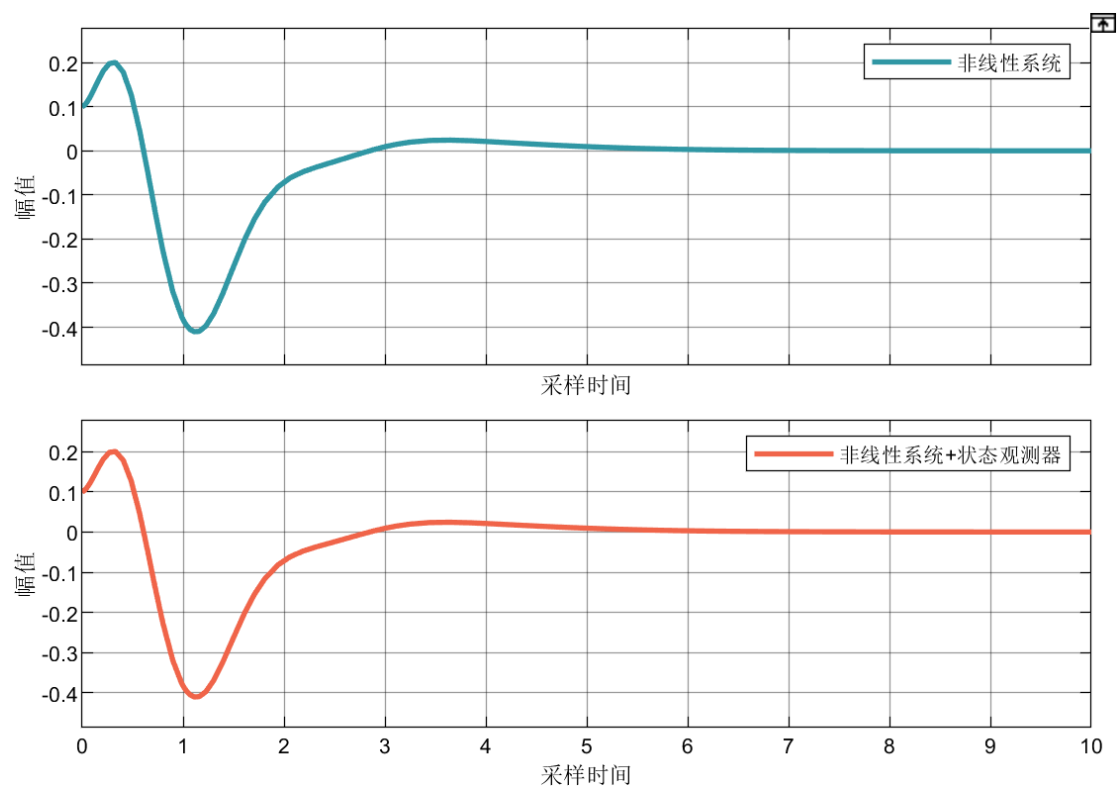


图 3.12 非线性系统状态观测器跟踪效果

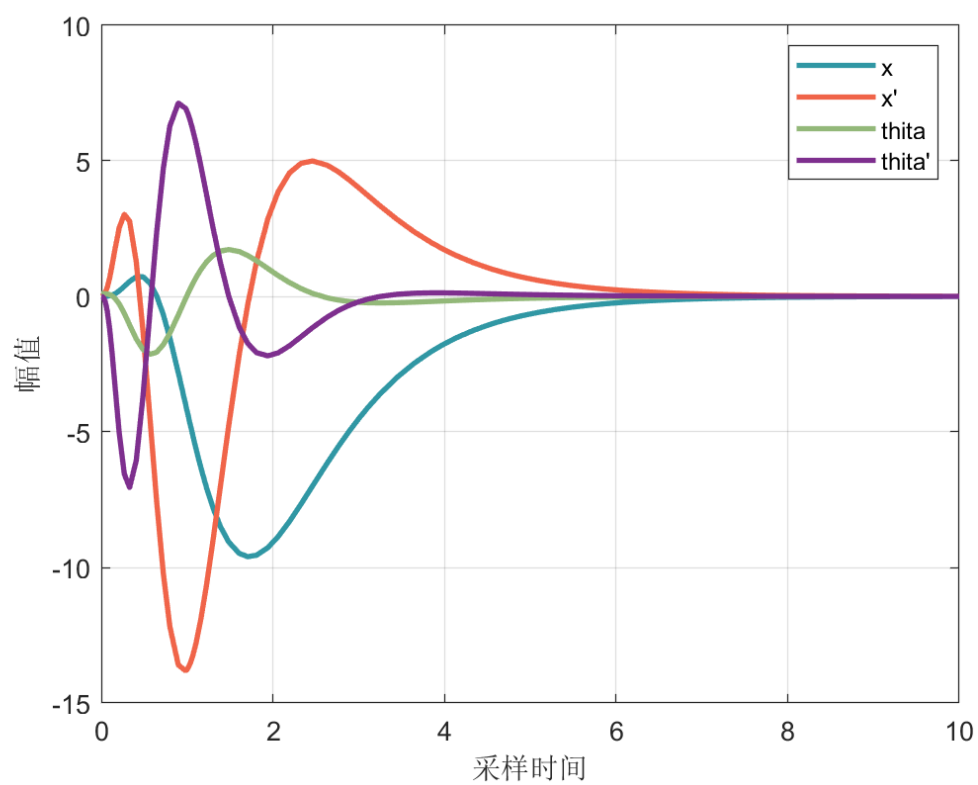


图 3.13 非线性系统状态观测器跟踪效果

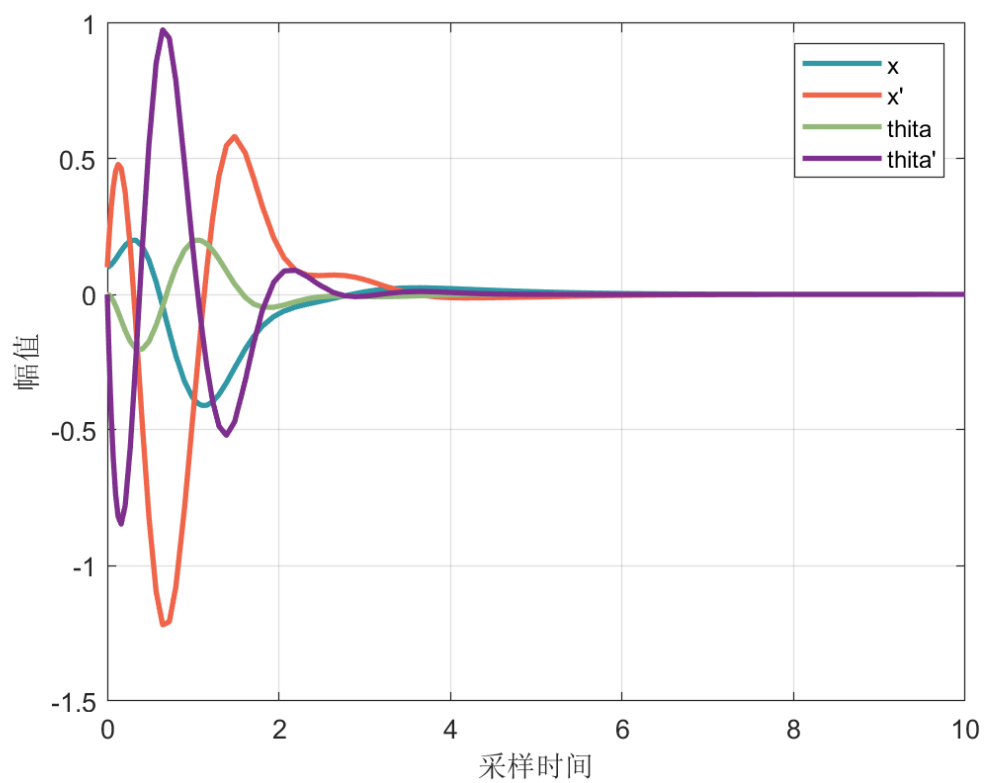


图 3.14 非线性系统状态观测器跟踪效果

针对图 3.11, 3.12, 可以从两个方向分析两图, 第一个方向是上下两图均一致, 即原始系统于观测器输出一致, 这说明我们所配置的极点, 以及生成的 G 矩阵能够成功的跟踪同步到原始系统; 第二个方向则是其系统依赖 3.3 章节中所求得的 K 矩阵依旧能够完成镇定, 并且其镇定结果与之前一致, 也证明了分离原理的理论和实践正确性。

当然如果对比线性和非线性系统, 会发现二者并无太大区别, 但是我们所计算的 K 、 G 矩阵均是在线性系统下计算的, 移植到非线性系统中, 却可以正常的跟踪和镇定。这是由于我们所使用的线性系统模型主要是由于对非线性系统做了理想化, 使其在极其靠近平衡点附件进行线性化, 所以当系统两者的初始状态都十分接近, 并且都在平衡点附件时, 其实是可以等价对待的, 这也就是为什么非线性系统能够如此贴合线性系统的原因。当然如果我们修改了两者的初始状态, 则结果将会有较大差距, 甚至会完全发散。

3.5 基于单位增益比例输出反馈的控制设计

当摆杆从 A 点到 B 点的过程中, 可以简化看作系统跟踪单位阶跃形式的位移信号, 可以将位移信号作为测量值反馈形成闭环用于控制系统稳定以及跟踪阶跃信号。

针对状态反馈系统存在状态表达式:

$$\dot{x} = (A - BK_1)x + Bu$$

但是由于单位输出反馈的影响, 可以得出以下式子:

$$u = v - Cx - K_1x$$

带入后可得出:

$$\dot{x} = (A - B(K_1 + C))x + Bu$$

由此可以按照原极点进行配置但是矩阵 K_1 的取值需要在求得反馈增益矩阵的基础上减去矩阵 C 。

与 3.3 节相同在本状态反馈控制设计中, 预期极点为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_5 = -5$, 借助于 Matlab 中 `place` 函数可以获得其状态反馈增益矩阵为:

$$K = [-3.0623 \quad -5.4592 \quad -41.8106 \quad -9.2296]$$

减去矩阵 C 后可得：

$$K_1 = [-4.0612 \quad -5.4592 \quad -41.8106 \quad -9.2296]$$

根据以上分析可以搭建仿真平台如图 3.15 所示，并得出相应的输出曲线如图 3.16。

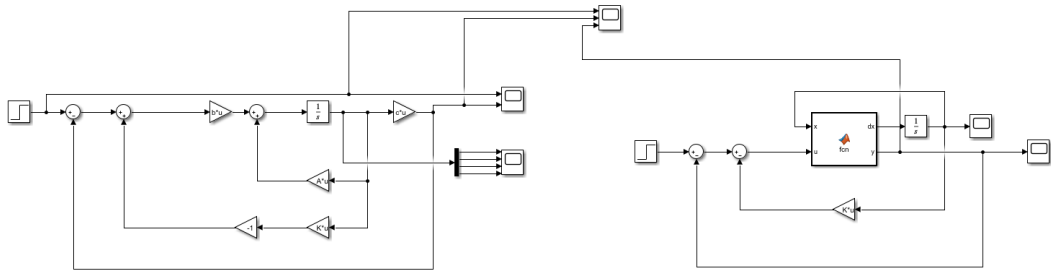


图 3.15 单位增益比例输出反馈设计图

根据图 3.16 结果可以看出，系统虽然在闭环作用下能够达成稳定但是由于单纯的比例控制不足以消除稳态误差，系统在稳定后仍然有较大的稳态误差，这也是为什么在后续内容中需要设计带积分矫正控制的设计原因。

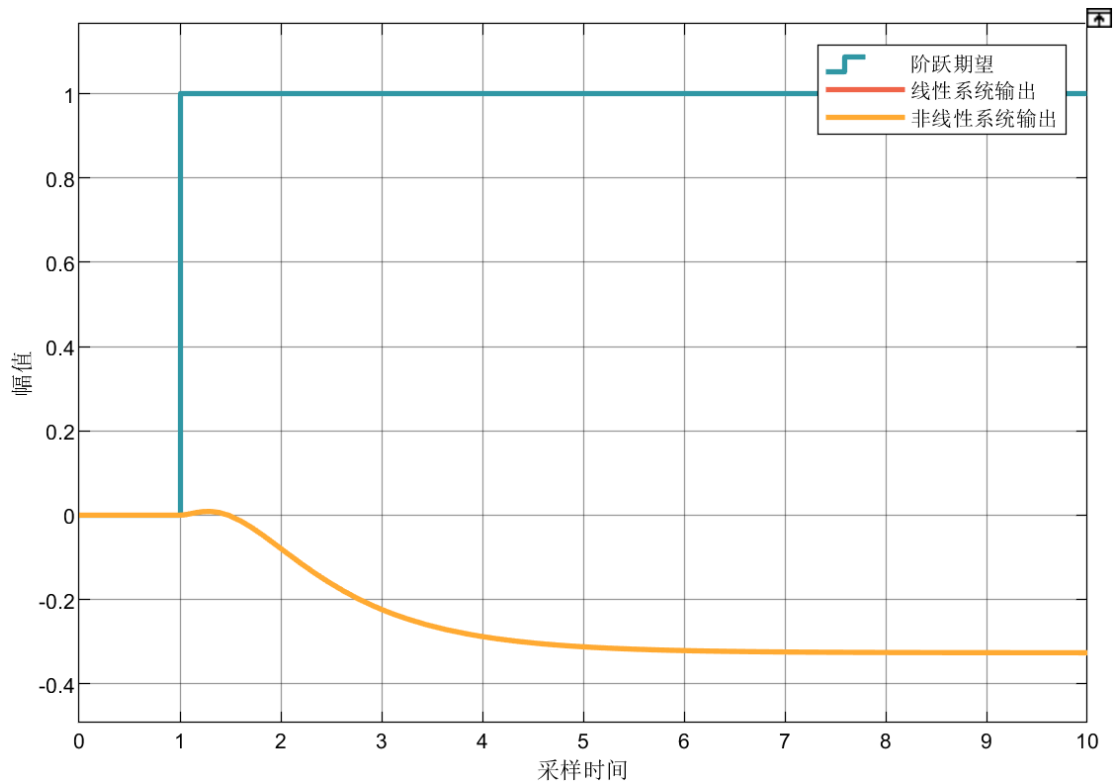


图 3.16 单位增益比例输出反馈系统响应输出图

3.6 基于积分校正的控制设计

在控制器设计的环节，使用了状态反馈进行控制设计，但实际上，该类设计并未考虑到外部干扰^[3]，然而在实际过程中外界对系统产生的干扰是难以避免的，会导致系统瞬间产生波动，并且恢复稳态时往往造成稳态偏差的产生，不能理想地跟随输入指令，将经典控制理论中比例积分控制的思想引入本系统中。

其系统的结构图如图 3.17 所示，在系统的输入环节之前再次引入了一个积分器，通过改变系统维度（从经典控制理论的角度则的改变系统的零极点分别情况）来使得系统的动态特性得以改变。

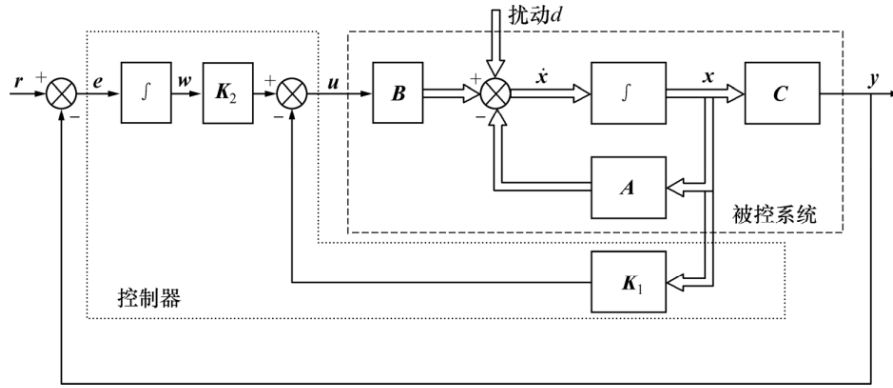


图 3.17 积分校正作用下的反馈控制结构图

其中 n 维列向量 d 为扰动输入， r 为参考输入； x ， u 和 y 分别为 n 维， 1 维和 m 维列向量； A ， B 和 C 分别为 $n \times n$ ， $n \times 1$ 和 $m \times n$ 实数矩阵； K_1 和 K_2 分别为 $1 \times n$ 和 $1 \times m$ 实数矩阵。将 m 个积分器生成的 w 作为附加状态向量，与原被控系统可构成被控系统增广的动态方程：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} d \\ r \end{bmatrix} \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

增广系统状态反馈控制律为：

$$u = [-K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = -K_1 x + K_2 w$$

结合上式，经过化简可得：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ r \end{bmatrix} \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

因此，只要 K_1 和 K_2 选得使上式的特征值均具有负实部，则图 3.17 所示闭环系统可消除阶跃扰动及阶跃参考输入作用下的稳态误差，建立仿真模型如图 3.18 所示。

由于在本系统中需要依赖于超调量与调节时间进行极点配置，故需要借助于二阶传递模型来辅助完成主导极点的求解。虽然本系统属于高阶系统，但是在高阶系统的处理中也常常使用二阶系统进行近似运算，所以此处可以直接只用二阶系统中的阻尼比与自然频率等相关关系来完成极点配置。

基于根轨迹设计中的经验，闭环极点的设计思路是先对 1 对共轭主导极点进行配置，再选择其余次极点，使其处于远离主导闭环极点的左方。一般来说，在 s 复平面上当某极点距离虚轴的距离为主导极点距离虚轴距离的 5~10 倍时，就认为该极点为一次极点。其中主导闭环极点可根据系统希望的阻尼比 ξ 以及无阻尼自然频率 ω_n 来确定。最终可得到 2 个共轭主导极点 p_1 和 p_2 为：

$$-\omega_n \times 2\pi \times \xi \pm j\omega_n \times 2\pi \times \sqrt{1 - \xi^2}$$

此外，选择次极点为 $p_3 = p_4 = -5 \times \omega_n \times 2\pi \times \xi$ 。而极点配置设计方法的核心内容即为选择状态反馈增益矩阵，它对应于反馈控制算法 $u = x_r - Kx$ 中的行向量 K ，从而使得闭环传递函数的极点与选择的期望闭环极点完全一致。

依托于上式计算，在本实验中，设立其超调量为 0.1，其调节时间为 3s 可到，如下图 3.19 积分校正效果图。

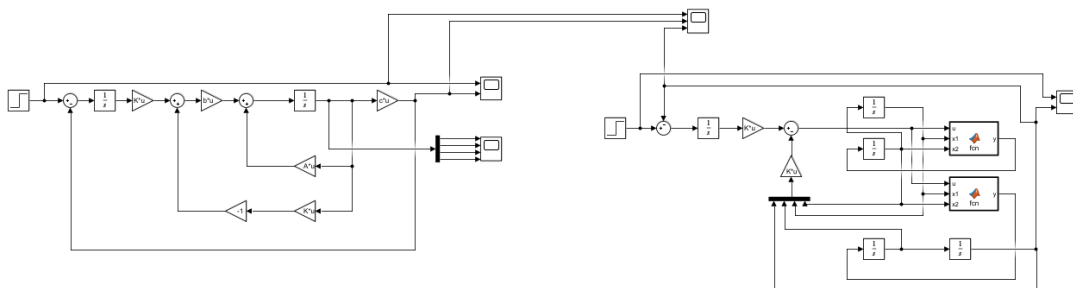


图 3.18 积分校正设计图

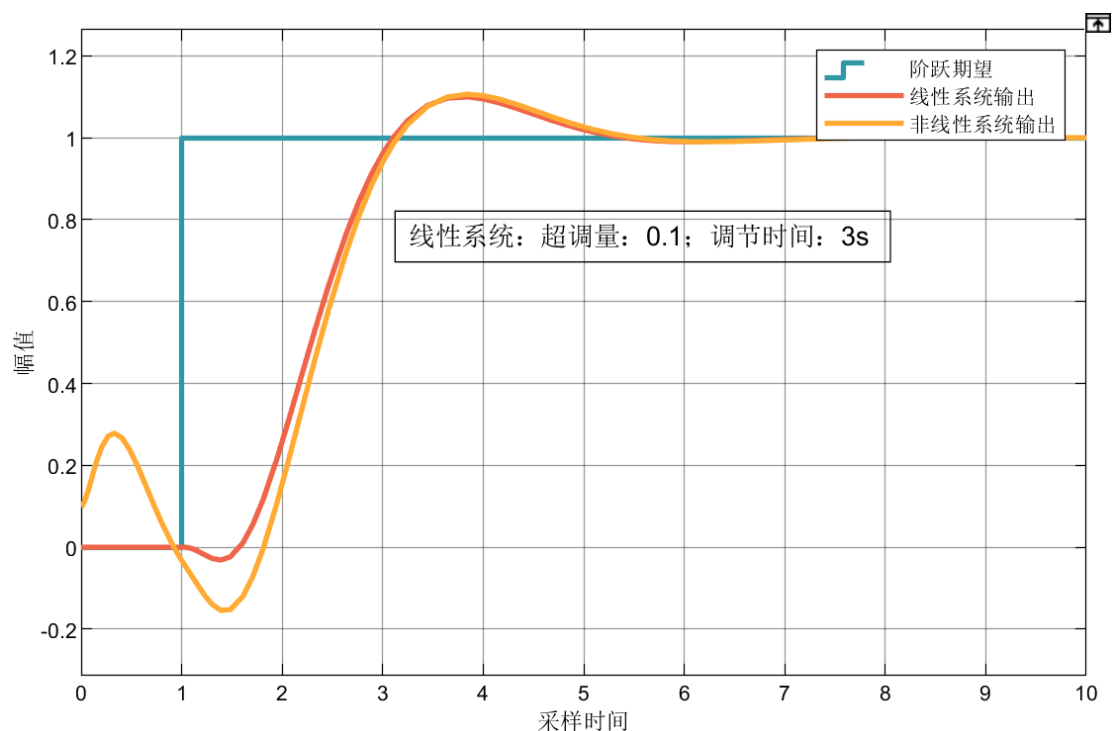


图 3.19 积分校正效果图

其中取阶跃响应作为干扰信号的输入，阶跃响应的幅值为 1，在第 1 秒的时候开始作用，从图中可以较为直观的发现放引入了积分校正后，系统能够稳定的到达控制点，且线性系统的输出动态性能基本符合设计要求，但是对于非线性系统在阶跃出现时存在振荡不能与线性系统下曲线完全重合，但是性能也大致与设计要求相似，在过渡阶段两曲线近似重合，很大程度上证明了积分校正系统中所起到的稳定和抗干扰性的作用。

其中系统所输出的积分校正 K 矩阵为：

$$K = [-37.8087 \quad -26.2778 \quad -103.1152 \quad -23.1389 \quad 31.5359]$$

即：

$$K_1 = [-37.8087 \quad -26.2778 \quad -103.1152 \quad -23.1389]$$

$$K_2 = -31.5359$$

注：此处 K_2 取反是由于系统再反馈时的正反作用不一致导致的。

3.7 带积分校正和状态观测器的状态反馈控制设计

若尝试将积分校正与基于状态观测器的状态反馈设计配合使用，则可见下图 3.20 所示。其中非线性部分与线性系统结构图类似，只是将原 $\Sigma(A, B, C)$ 的部分替换为用 Matlab Function 表达的非线性系统。需要说明的是，在本结构图中，将积分环节使用在了原系统与重构系统的输入之前，目的是希望通过输入控制来影响两个系统的运行。由于积分校正的原理是基于现成的系统进行控制作用，故才本环节中，尝试将基于状态观测器的状态反馈作为一个整个系统进行，这样做的好处是将系统分为了内外两个部分，内部系统则是之前实验中所使用的已经构建好 G 矩阵的系统，而外部系统则是同 3.5 章节中所构建的 K 矩阵，由于状态观测器在调制合理的情况下，输出的可以跟随原系统的，所以尝试将两者合并为一个系统，并使用观测器的输出作为反馈的重要一环，就使得积分校正与状态反馈，状态观测器进行了结合使用，系统即具有整体性也具有各自的独立性。

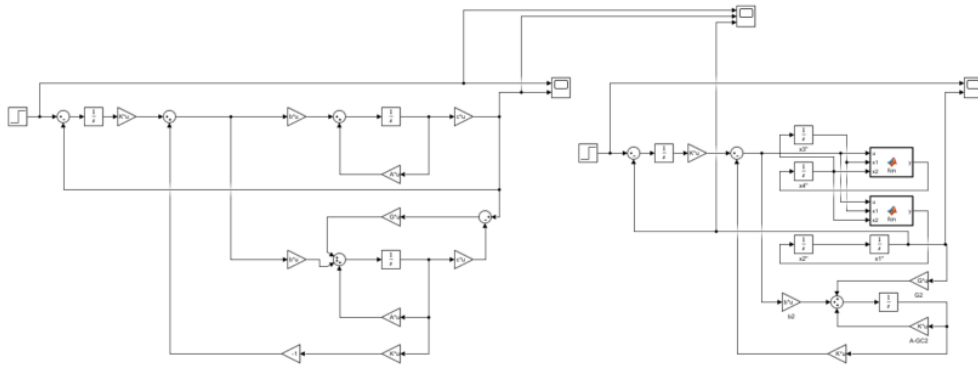


图 3.20 带积分校正和状态观测器的状态反馈控制设计图

结合 3.20 所示的截图，以及之前章节所生成的：

$$K_1 = [-37.8087 \quad -26.2778 \quad -103.1152 \quad -23.1389]$$

$$K_2 = -31.5359$$

$$G = \begin{bmatrix} 20 \\ 171.6 \\ -950.2 \\ -4412.1 \end{bmatrix}$$

系统最终可以获得如图 3.21 输出。

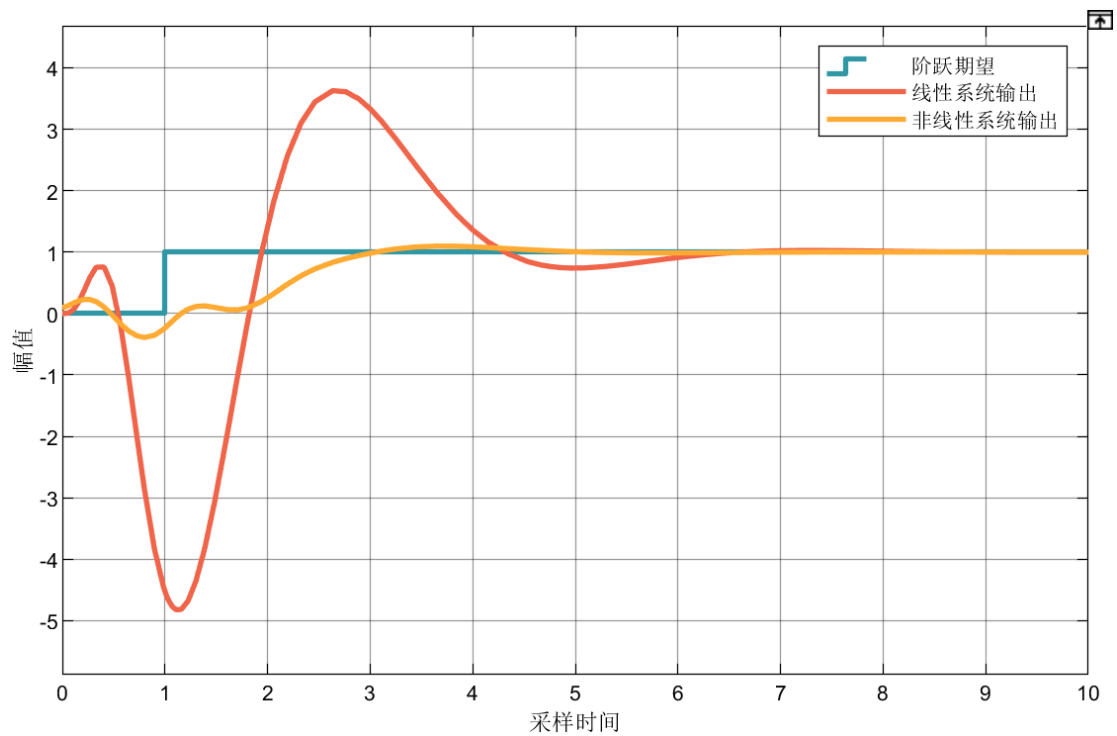


图 3.21 带积分校正的状态观测器的状态反馈效果图

从图 3.21 可以看出虽然系统在最终能够跟随阶跃信号，但是由于状态观测器在初始状态开始一段时间内稳定跟踪状态，导致不管是线性系统还是非线性系统都存在振荡的现象，更是出现了线性系统大超调的问题，因此针对观测器的积分校正若对过渡过程要求不高的情况下可以选择使用。

第四章 蔡氏混沌电路机理建模

4.1 数学模型

蔡氏混沌电路系统可由如下电路生成，

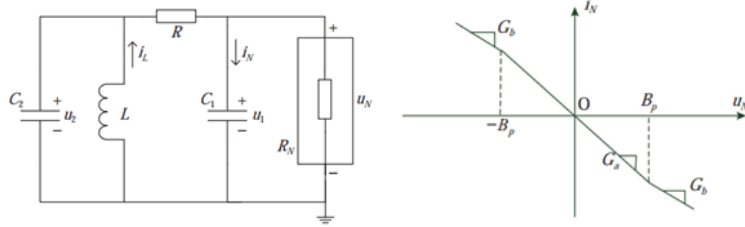


图 4.1 蔡氏混沌电路图

其建立的数学模型如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a[x_2(t) - h(x_1(t))] \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -bx_2(t) \\ p(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$h(x) = m_1 x_1(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + c| - |x_1(t) - c|)$$

在本系统中可取 $a = 9, b = 14.28, c = 1, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$ 。后续将针对本混沌系统进行研究同步设计。

4.2 同步设计原理

当分别构建如下系统时，可以进行同构的同步控制设计：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: & \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + H\sigma(Dx(t)) \\ p(t) = Cx(t) \end{cases} \\ \mathcal{S}: & \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + H\sigma(Dz(t)) + u(t) \\ q(t) = Cz(t) \end{cases} \\ \mathcal{C}: & u(t) = K(p(t) - q(t)) \end{aligned}$$

其中 \mathcal{C} ：为控制律，而 \mathcal{M} 为原始系统， \mathcal{S} 为跟随系统，通过反馈作用，使得 \mathcal{S} 能够跟随到 \mathcal{M} 系统。上述系统中的相关矩阵参数如下：

$$A = \begin{bmatrix} -am_1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -a(m_0 - m_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\sigma(x_1) = \left(\frac{1}{2}\right) (|x_1(t) + c| - |x_1(t) - c|)$$

为了满足 S 能够跟随 M，可建立相关李雅普诺夫方程如下：

$$P > 0, T > 0, \begin{bmatrix} PA - VC + A'P - C'V' & PH + D'WT \\ T'W'D + H'P & -2T \end{bmatrix} < 0$$

$$K = P^{-1}V$$

在满足上述条件后，可使得初始状态不相同的两个同构蔡氏混沌电路同步运行，从而满足保密通讯的基础条件。其中通过运算对比，可确定 P 为 3×3 矩阵， T 为 1×1 矩阵， V 为 3×1 矩阵。

第五章 蔡氏混沌电路同步控制设计

5.1 单个蔡氏电路的混沌现象

借助于 `simulink` 搭建的系统模型，可获得如下系统运行结果图：

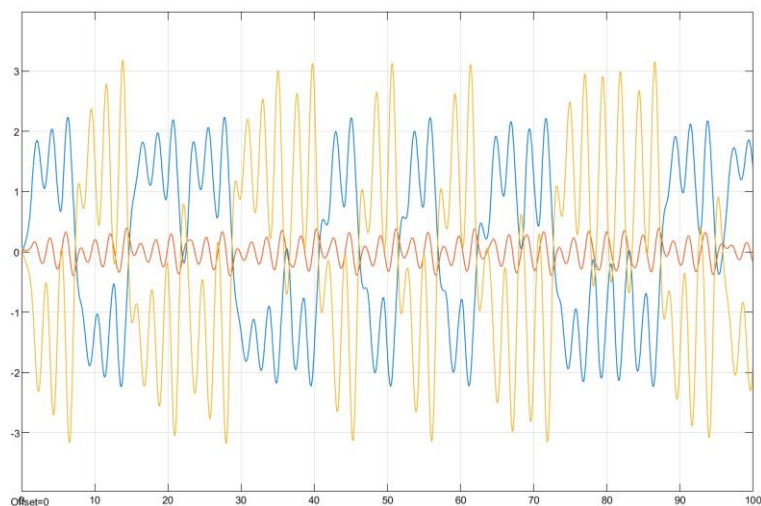


图 5.1 单个蔡氏电路混沌现象

其中初始状态设置为 $[-0.02; 0.03; 0.07]$ ，我们将该输出结果作为三维相图输出可获得如图 5.2 所示图样。

单个蔡氏电路混沌现象三维图

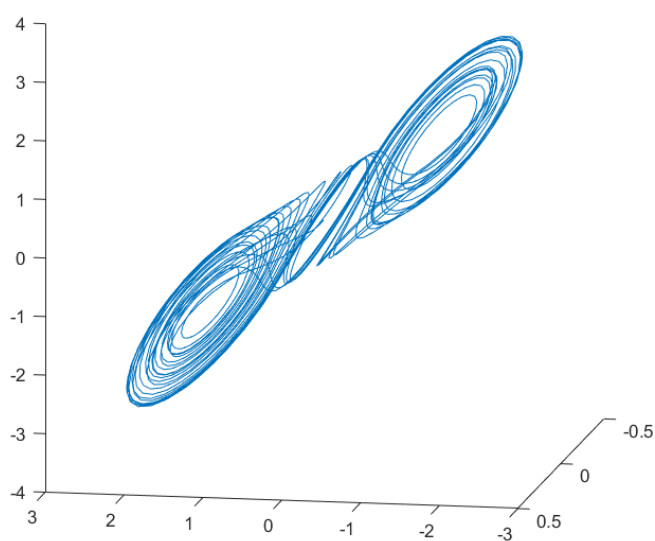


图 5.2 单个蔡氏电路混沌三维图

考虑到蔡氏混沌系统是一个对初始状态极其敏感的系统,我们通过微小的跳转其初始状态为 $[-0.02;0.03;0.1]$ 可观察其系统的输出结果分别如图 5.3 与图 5.4 所示。

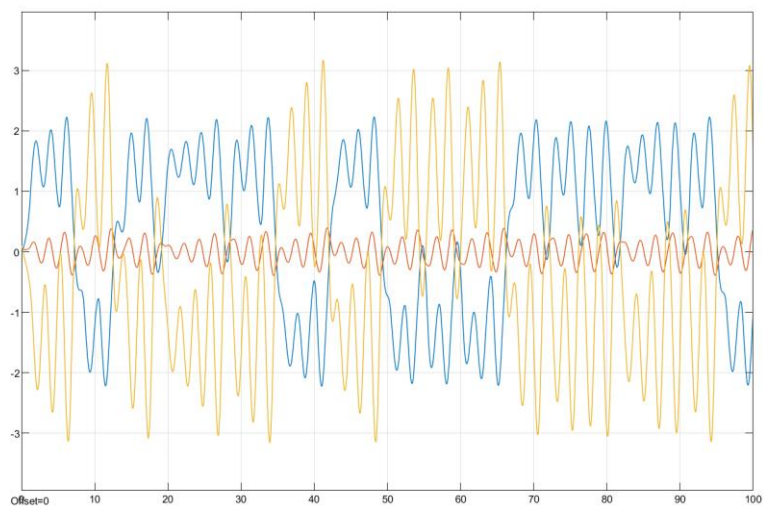


图 5.3 单个蔡氏电路混沌现象（修改初始状态）

单个蔡氏电路混沌现象三维图（修改初始状态）

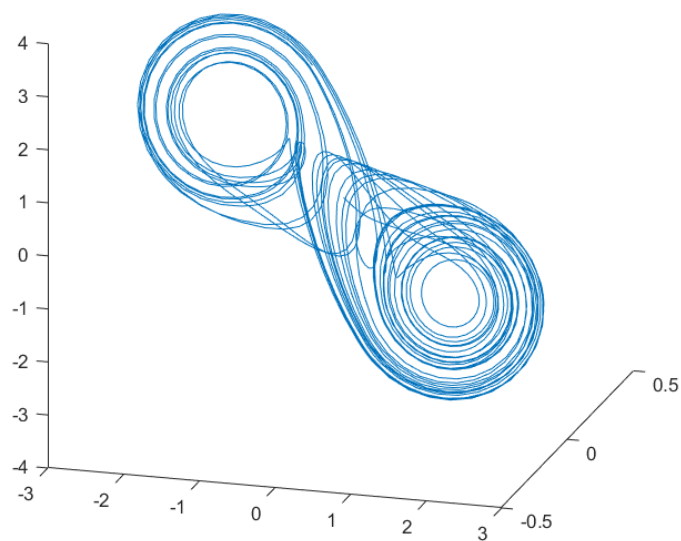


图 5.4 单个蔡氏电路混沌三维图（修改初始状态）

可以发现从同一个视角看过去,图 5.2 与图 5.4 已经完全不在是同一个运行模型,也正是基于此特点使得系统能够用于加密。

5.2 双同构蔡氏电路同步设计

蔡氏混沌电路对初始状态十分敏感，这使得其对加密具有良好的特性，其不依赖于密钥长度，但是这也使得其解密并非容易，而是需要同样一个实时同步的系统才能够进行解密，而现实中很难保证两个系统的初始状态相同，这就给与其加密解密的重要作用相悖。

故我们需要利用反馈设计一个双同构蔡氏电路，结合第四章所给出的李雅普诺夫方程，可以解出符合条件的反馈增益 $K = 6.5531; 1.4395; -0.5402$ 。

构建如下系统：

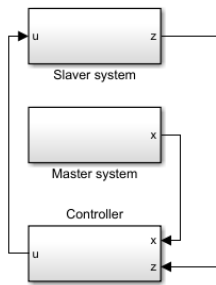


图 5.5 同步设计结构图

其中各系统分别为：

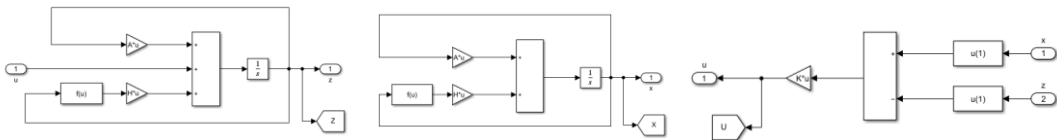


图 5.6 内部系统图

则输出结果如下所示：

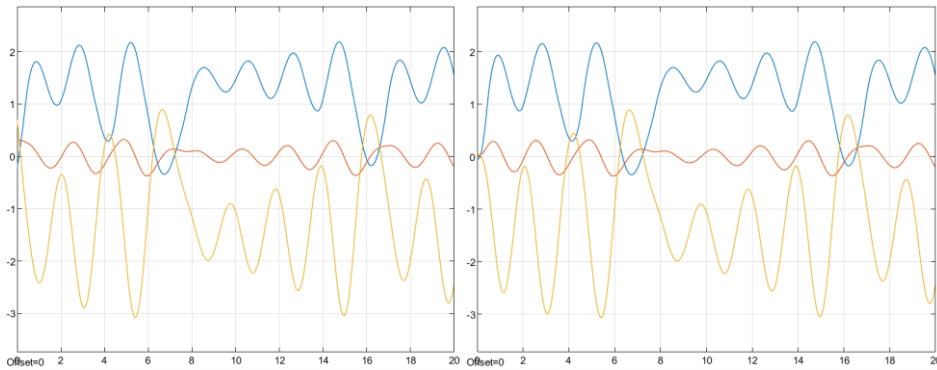


图 5.7 原系统（左）与跟随系统（右）

其中原系统初始为: $[-0.2; 0.3; 0.7]$ 跟随系统为 $[-0.02; 0.03; 0.07]$ 。从图中可见在最初的时候, 跟随系统的输出值与原系统并不一致, 但是随着时间的推移, 其系统已经能够完全跟随到原系统, 从而完成同步设计, 为了方便对比, 如下图 5.8 为两者差值图, 图中显示两者在 8s 之后就完成了同步跟随。

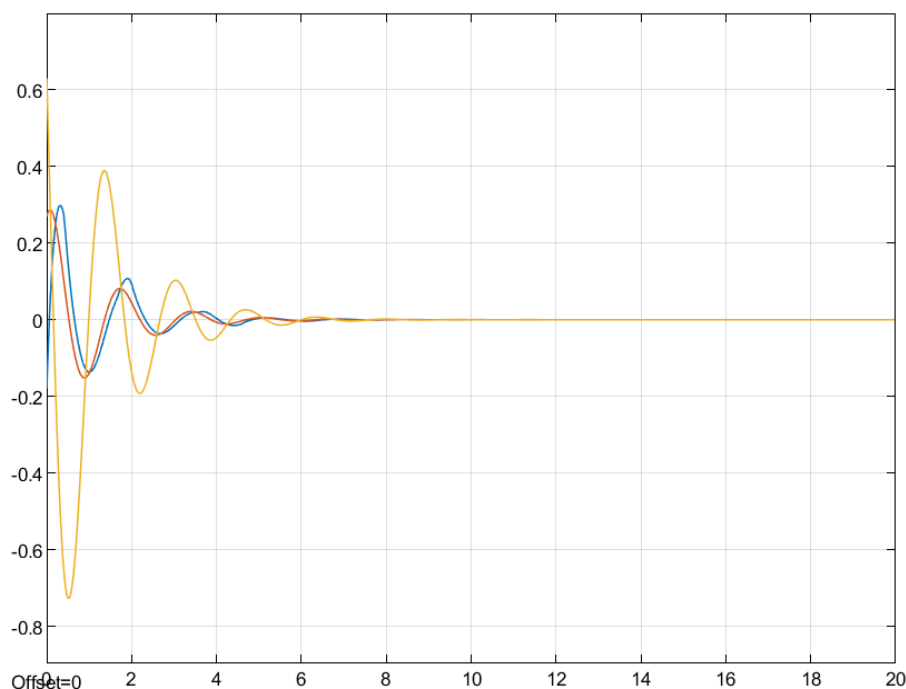


图 5.8 两系统输出差值图

5.3 基于蔡氏混沌电路的图像保密通讯

当完成了双同构蔡氏混沌电路的同步设计后, 便可以进行通讯的加密传输, 在原系统对图像进行加密, 而跟随系统中进行解密。

其加密的原理主要如图 5.9 所示:

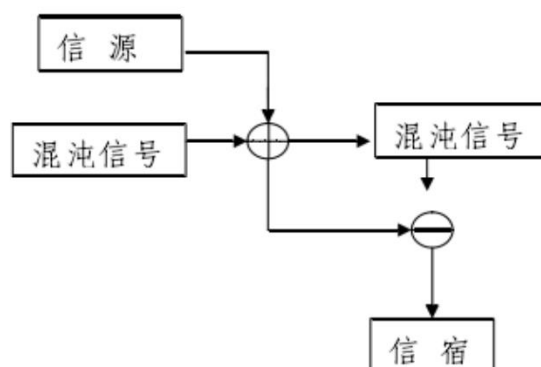


图 5.9 混沌信号加密解密原理图

通过对原始信号与混沌信号的运算处理后发送至接收方，接收方再利于自己的混沌信号与收到的信号进行处理后即可获取真实的信号，由于蔡氏混沌电路对初始状态极其敏感，这使得对中间信号截获破解工作变得十分复杂。

在本任务的设计中，主要按照下述方法进行：

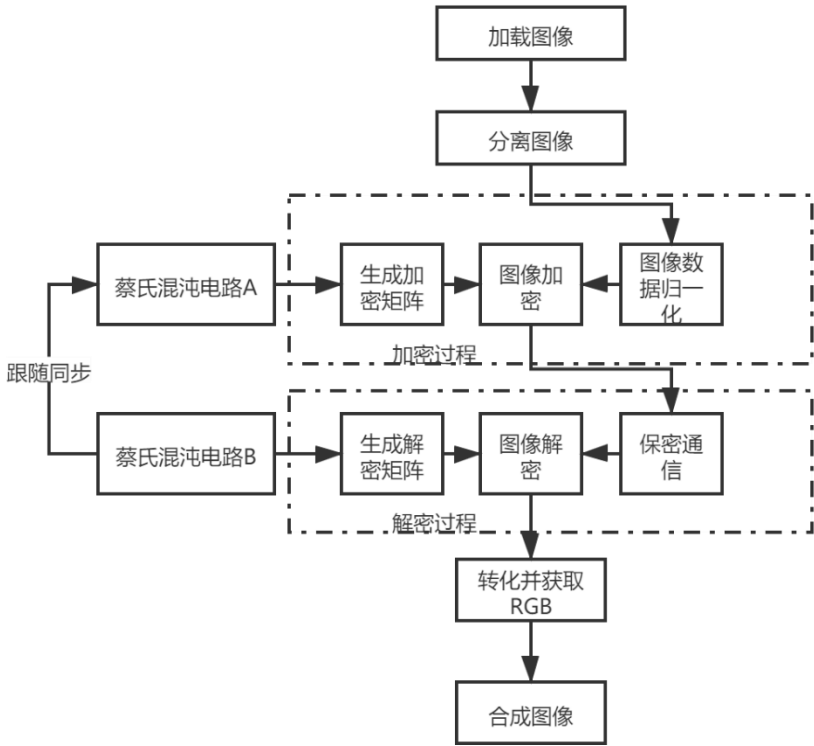


图 5.10 图像保密通信程序流程图

将图像分为 RGB 三个通道分别进行加密，其中图 5.11 为分离后的效果图：



图 5.11 RGB 分离图像

而图 5.12 则为程序经过多次处理加密后的结果，其中彩色图为 RGB 三张图片加密后进行合成显示：

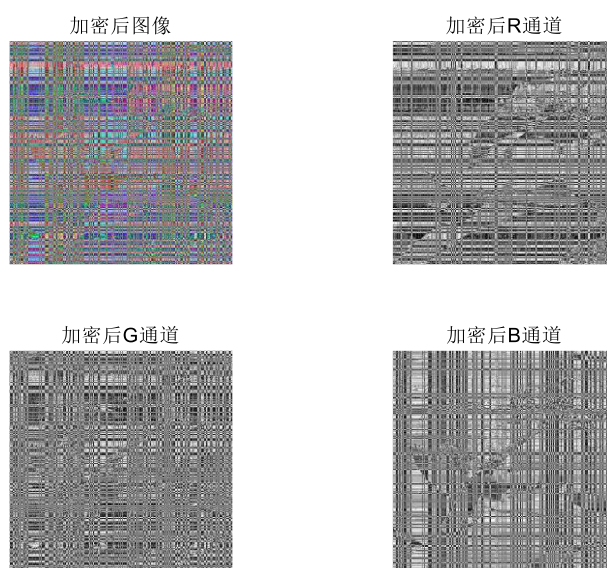


图 5.12 加密后的图像

而我们利用同步设计的跟随混沌系统产生的同段序列对加密图像进行逆处理，可获得解密后的图像，如图 5.13 所示。



图 5.13 解密后的图像

对比解密后与原始图像，可以确定图像的保密通讯任务完成，再图像的加密与解密过程中并未对图像造成信息的破坏，同时也印证了双同构的蔡氏混沌电路的同步设计的符合要求的，系统能够在初始状态不一致的情况下完成跟踪同步。

第六章 总结

在本课程设计中，主要完成了对倒立摆系统的建模、分析及控制设计。在设计的过程中极为困扰的是关于 K 与 G 的值是取正还是负的问题，这是由于 Matlab 的计算方式与前期所学习的教材并不一致，导致去取值也存在正负之别，错误的取值将导致系统发散，在实验前期又无法明确是由于取值错误还是系统配置错误引起的发散，从而极大程度影响了调试的时间。

随着实验的进行，对教材知识的掌握也逐渐熟练，在某个时刻突然有了某种通透的感觉，对“输入控制”这四个字有了更新和更清晰的间接，也提升了后续实验开展的速度和效率。当然，在本实验中还涉及到积分校正的相关知识学习，由于积分校正是在经典控制理论中学习到，而迁移到现代控制理论中反而有些不那么顺利，再借助了文献资料的查询后，了解到了其转化方法，利用增加系统维度的方法来完成 K 值计算，这一种思维其实是一种整体思维，能够将分散的系统看作一个整体的系统对外进行控制设计，又能够将一个系统剖解内部进行逐个研究，这倒是给我不少启发。

蔡氏混沌电路的特性可谓是十分奇妙，其所表现的“8”字螺旋轨迹完全是一种很特殊的现象，而对应的初始状态不同，其“8”字螺旋轨迹也大不相同，这种特性使得其在通讯加密过程中成了热点。不得不承认，在本加密实验中，算法较为简单粗暴，理应由更好的算法能够将加密序列/矩阵与图片进行更好的融合，使得图片的加密速度效率以及效果都更快，通过查询了解到最佳的加密可以使得图像的 RGB 三个原色的均值相同，使得图片完全无法进行解析，而只有同步后的蔡氏混沌电路可以完成解密，相比这也算是理论研究中一种奇怪而又自然的发现吧，还是很感谢老师的教学，在学习中学到了不少新的知识，也希望后续的学习中能够将这些知识融会贯通，活学活用。

参考文献

- [1]于树友,褚建新,王银敏.一阶旋转倒立摆输出反馈控制[J].实验技术与管理,2020,37(03):165-170+199.
- [2]邵佳佳.蔡氏混沌电路在保密通信中的应用[J].魅力中国,2010(13):239-240.
- [3]曹家勇,张婧茹,代欣,梁庆华.包含磁力齿轮的位置伺服系统的极点配置与积分校正控制[J].中南大学学报(自然科学版),2016,47(12):4041-4047.
- [4]刘金琨,沈晓蓉,赵龙.系统辨识理论及 MATLAB 仿真[M].电子工业出版社:北京,2013:41.
- [5]孙恺,沈精虎.单级倒立摆系统的设计与仿真[J].煤矿机械,2018,39(09):8-11.
- [6]杨善义. 基于混沌的数字图像加密算法研究[D].哈尔滨理工大学,2009.
- [7]孟博. 基于混沌的数字图像加密算法研究[D].天津大学,2018.