PID 控制原理分析及仿真

本报告从控制原理出发，分别对比例控制、积分控制、微分控制、PID 控制进行了理论分析以及实验仿真，得出结论如下：

- 在系统稳定的条件下，比例控制可以减小系统的稳态误差，但是不能消除系统稳态误差；对于稳定的一阶和二阶系统，比例控制不会影响系统稳定性，但是对于高阶系统，随着比例系数的增加可能会导致系统最终不稳定。
- 积分控制系统相较于比例控制系统在系统中加入了积分项，相当于引入了新的极点，随着根轨迹增益的增大，系统可能出现系统不稳定的情况；当系统稳定时，如果系统是 0 型系统，那么引入积分控制环节能够消除常值输入信号和扰动的稳态误差，但是对于变化过快的信号，高于 0 阶的多项式信号，理论上需要引入多个积分环节进行消除，即系统型别要高于输入信号型别才能消除稳态误差；由于积分的作用，积分控制系统调节时间增加。
- 微分控制器在实际应用中不单独使用，其无法对稳态误差进行缩减，但是可以减小系统的超调量以及调节时间，同时对高频信号较为敏感。
- 在对 PID 的仿真实验中发现，分别调整比例、积分、微分参数其所得到的结果与直接的比例控制、积分控制、微分控制相似。其中增加比例参数可以缩小稳态误差；增加积分项可以消除稳态误差但是增加振荡幅度和调节时间；增加微分项减小超调量和调节时间，但是对高频信号较为敏感。

1.比例控制

对于未加任何控制器的负反馈系统结构框图如图 1 所示。本节将从基础模型出发针对一阶系统、二阶系统、高阶系统探讨比例控制对于**稳定性、稳态误差、动态特征**的影响。

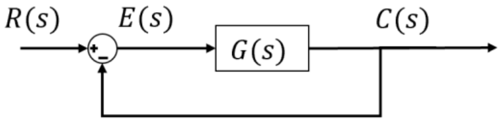


图 1 系统结构框图

一阶系统

稳定性分析

可以从根轨迹角度对于一阶系统进行稳定性分析，当一阶系统的极点位于s平面左半平面时，随着根轨迹增益的增加，极点始终位于左半平面，加入比例控制，实则也是会改变根轨迹增益的大小，因此比例控制并不会改变系统稳定性，可以直接对稳态误差进行讨论。

稳态误差

针对图 1 结构框图当开环传递函数为：

$$G(S) = \frac{1}{Ts+1}$$

计算可得误差$E(s)$为：

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - E(s)G(s)$$

$$E(s) = R(s)\frac{1}{1+\frac{1}{Ts+1}}$$

将$R(s)$为单位阶跃响应时带入可得：

$$E(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{1}{Ts+1}}$$

在系统稳定的条件下可以计算系统稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{1}{Ts+1}} = \frac{1}{2}$$

可以发现当输入为阶跃响应时，一阶系统稳态误差保持不变，那么为了减小稳态误差，可以考虑在系统中加入比例控制器。考虑比例控制器，即把输出与输入的误差e按照一定的比例K进行放大或者缩小作为系统的输入。对于控制系统图 1，现在将比例控制加入系统，如图 2 所示：

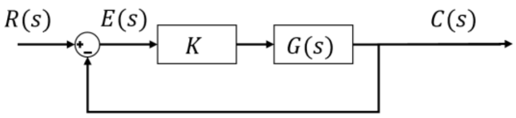
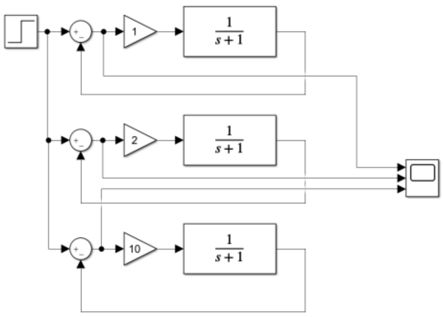


图 2 比例控制系统结构框图

同理在在系统稳定的调节下当$R(s)$为单位阶跃响应时有稳态误差：

$$e_{ss}^{P}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\frac{1}{1+K\frac{1}{Ts+1}}=\frac{1}{1+K}$$

搭建仿真平台如图，取T=1，分别取$K=1$，$K=2$，$K=10$进行仿真。



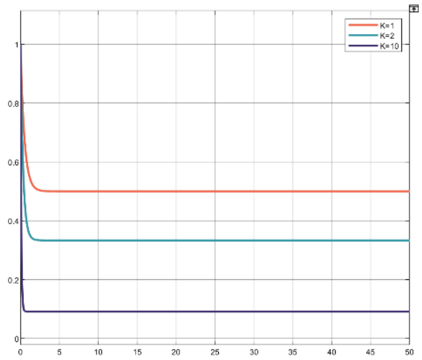


图 3 比例控制一阶系统仿真搭建示意图及示波器结果图

可以发现对于有稳态误差的系统，比例控制可以用于减小稳态误差但是稳态值并不会随着K的取值而从理论上变成阶跃响应的幅值 1。通过增加K的大小，只能得到更加接近于 1 的值，但是始终会有稳态误差。

动态特征

从直观感受而言，比例控制的添加会增加系统的**响应速度**，从图三结果也可以看出当比例控制系数越大其误差降低的速度越快，导致的就是输出到达稳态值的速度越快。

二阶系统

稳定性

同样可以从根轨迹的角度分析，当二阶系统在没有添加控制器的情况下如果两个极点全部位于左半平面，随着根轨迹增益的增加，极点始终位于左半平面，如图 4 所示。

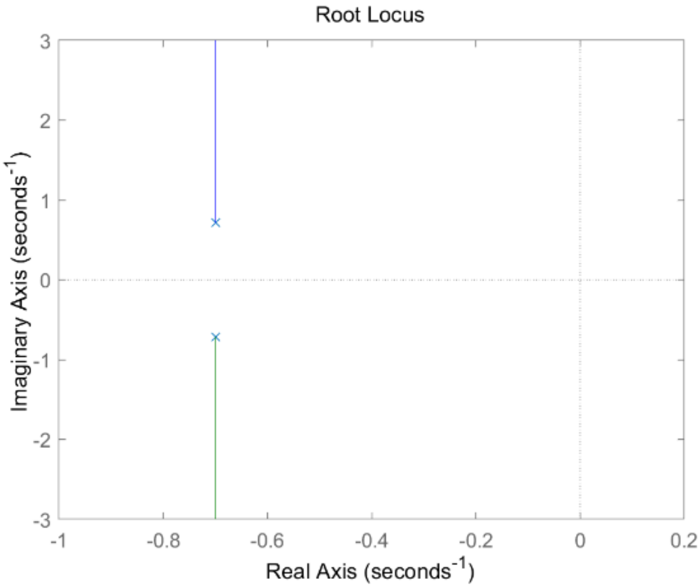


图 4 二阶系统根轨迹(欠阻尼)

稳态误差

当开环传递函数为

$$G(S)=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

当$R(s)$单位阶跃响应时稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}}=\frac{1}{2}$$

加入比例环节后

$$e_{ss}^P=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\frac{1}{1+K\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}}=\frac{1}{1+K}$$

可以发现稳态仍然无法消除. 以$\xi=0.7$，$\omega_n=1$为例建立仿真平台如图 5 所示。

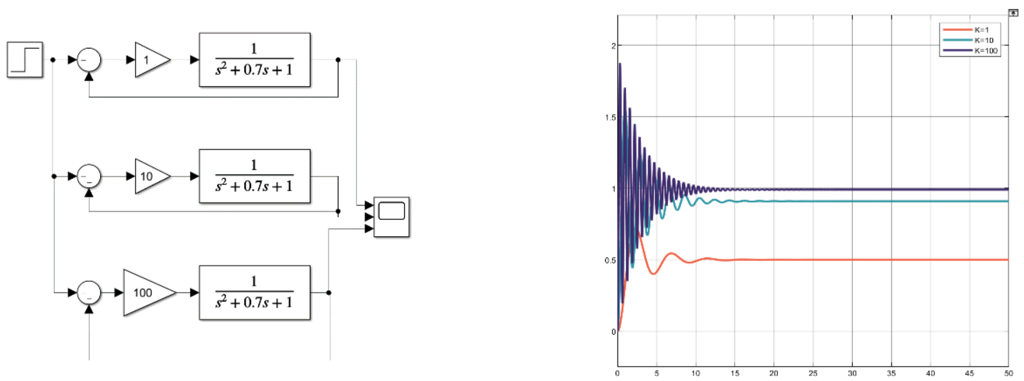


图 5 比例控制二阶系统仿真搭建示意图及示波器结果图

针对输出信号进行分析可以发现，大的K值系统稳态误差跟一阶系统一样较小但是不为 0。

动态特征

从图 4 可以看出，随着K值得逐渐增大，两个极点朝y轴增大方向移动且报纸x轴坐标不变，原理上响应速度将会有所提升，但是可能会导致超调量的增加以及振荡情况的加剧。如图 5 所示，系统响应速度提升，但是系统存在大超调和严重的振荡，验证了根轨迹的结论。

高阶系统

针对高阶系统，在减少稳态误差，增大超调量和振荡的同时，从根轨迹的角度出发不难想到如果K值过大还可能导致闭环系统的极点落入右半s平面，从而使系统变得不稳定。针对高阶系统的分析需要具体问题具体分析，在此不再赘述。

2.积分控制

对于添加积分控制的负反馈系统结构框图如图 6 所示。本节将从基础模型出发，针对任意模型探讨比例控制对于**稳定性、稳态误差、动态特征**的影响。

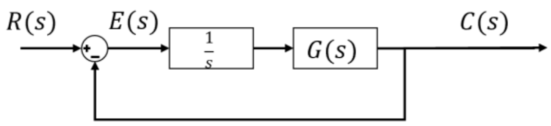


图 6 积分控制系统结构框图

稳定性分析

积分控制系统相较于比例控制系统在系统中加入了积分项，相当于引入了新的极点，这对于系统的稳定性分析产生了巨大影响。以二阶系统为例，对比图 5 图 6 可以发现，随着根轨迹的增大，带有积分项的二阶系统可能出现系统不稳定的情况。在稳态误差的分析时均假设系统处于稳定状态。

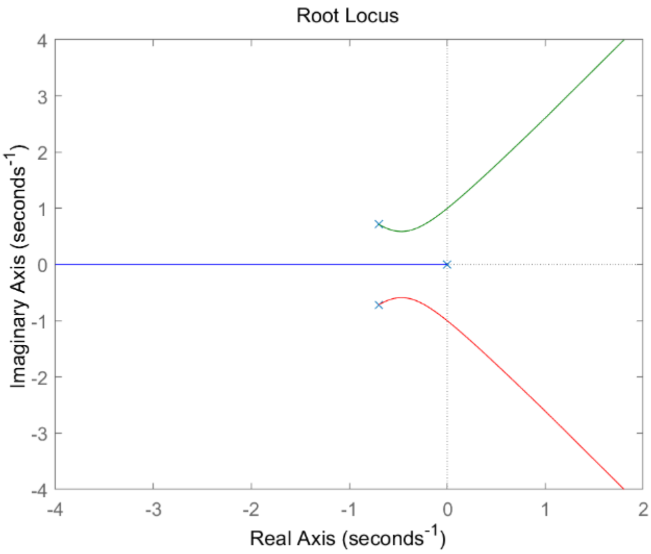


图 7 二阶系统增加积分项根轨迹(欠阻尼)

稳态误差

由自控原理知识可以知道，，比例控制器对于K阶参考信号想要产生恒定的稳态误差是有条件的，这个条件就是开环系统是K型系统，即包含K个积分器。如果系统阶次高于K，那么稳态误差就会变成 0。

当开环传递函数

$$G(S) = \frac{1}{Ts+1}$$

当$R(s)$单位阶跃响应时加入积分环节系统的稳态误差为：

$$e_{ss}^{I} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{1}{s}\frac{1}{Ts+1}} = 0$$

因此，在系统中加入积分环节，相当于对开环系统进行“升型”，则其对于阶跃信号的误差就变成为 0。搭建仿真平台如图 8 所示：

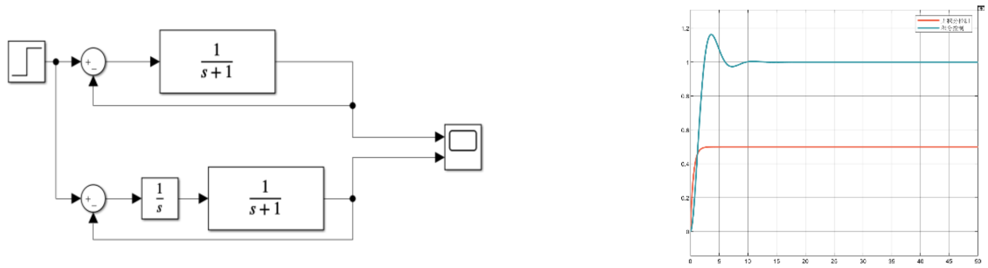


图 8 积分控制系统仿真搭建示意图及示波器结果图

由图 8 可以发现，增加了积分项的系统能够完全消除稳态误差。但是，积分

项消除稳态误差是有条件的：

如果系统是 0 型系统，那么引入积分控制环节能够消除常值输入信号和扰动的稳态误差，但是对于变化过快的信号，高于 0 阶的多项式信号，理论上需要引入多个积分环节进行消除，因此**单纯采用积分控制是不足以达到要求的**。

动态特征

从直观出发，由于积分的作用，系统对于误差具有时间的累积作用，导致系统在达到期望值时可能因为积分的作用其增量并不会减少为 0 即偏差量的负作用来不及作用于系统，这就导致了**系统的超调量和调节时间会有所增加**。图 8 的结果也验证了这一思想。

3.微分控制

对于添加微分控制的负反馈系统结构框图如图 9 所示。由于实际应用过程中微分控制往往与比例控制结合或者利用 PID 控制，本节只分析微分控制的一些特殊特性。

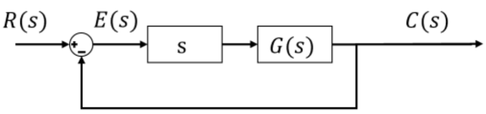


图 9 积分控制系统结构框图

动态特征

从结构框图出发，定义误差为参考输入与当前输出之间的差值，如果输出逐渐接近输入，误差将会不断减小，且为正数，那么误差的导数则为负数。微分控制将会防止输出变化过快而超过目标值，**防止振动幅度过大，减小调节时间**。

稳态误差

当开环传递函数

$$G(S) = \frac{1}{Ts+1}$$

当$R(s)$单位阶跃响应时加入积分环节稳态误差

$$e_{ss}^{D} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+s\frac{1}{Ts+1}} = 1$$

可以发现对于阶跃响应加入微分环节会导致稳态误差始终保持在 1，一般情况下不会单独使用微分控制。搭建实验平台如图所示

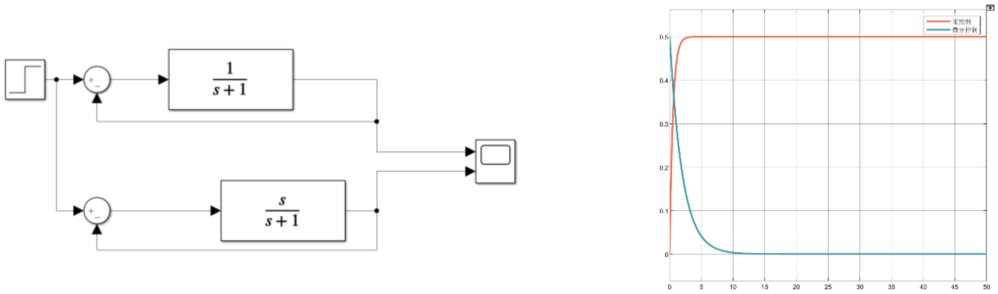


图 10 微分控制系统仿真搭建示意图及示波器结果图

高频信号扰动敏感

可以从很简单的例子进行解释，对于幅值很小的高频信号$d(t) = 0.1\sin(1000t)$，该信号经过微分后可以得到$d(t)' = 100\sin(1000t)$，频率信号没有改变，但是其幅值大幅度增加对系统产生巨大影响，具体分析可以间 PID 控制部分。

3.PID 控制

对于添加 PID 控制的负反馈系统结构框图如图 11 所示。本节将结合比例、积分、微分控制对 PID 控制进行分析讨论。

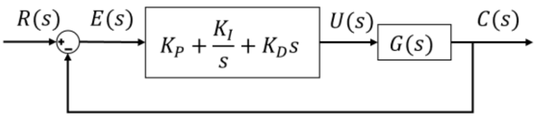


图 11 PID 控制系统结构框图

PID 控制算法结合了 PI 控制和 PD 控制的优势，其函数表达形式为：

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

对等式两边进行拉式变换后可得

$$U(s) = (K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s)E(s)$$

可以使用实例对 PID 算法进行分析如下：

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

假设初始条件$x(t) = \dot{x}(t) = 0$，期望目标值$r = 10$。并搭建仿真平台如图 12 所

示。

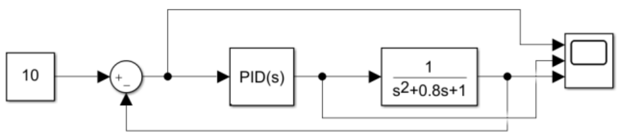


图 12 PID 控制系统仿真搭建示意图

$K_P = 10$，$K_I = 0$，$K_D = 0$

当$K_P = 10$，$K_I = 0$，$K_D = 0$时，即仅为比例控制时，运行结果如图 13 所示：

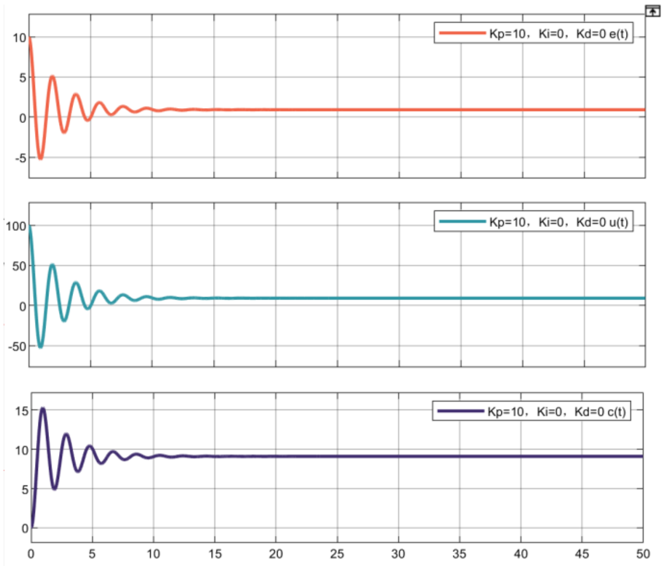


图 13 $K_P = 10$，$K_I = 0$，$K_D = 0$时$e(t)$，$u(t)$，$c(t)$输出结果

由图中结果可以看出，系统误差和 PID 控制器输出呈比例关系，但是存在稳态误差，与比例控制结论相同。

$K_P = 10$，$K_I = 5$，$K_D = 0$

当$K_P = 10$，$K_I = 5$，$K_D = 0$时与图 13 结果进行对比如图 14 所示：

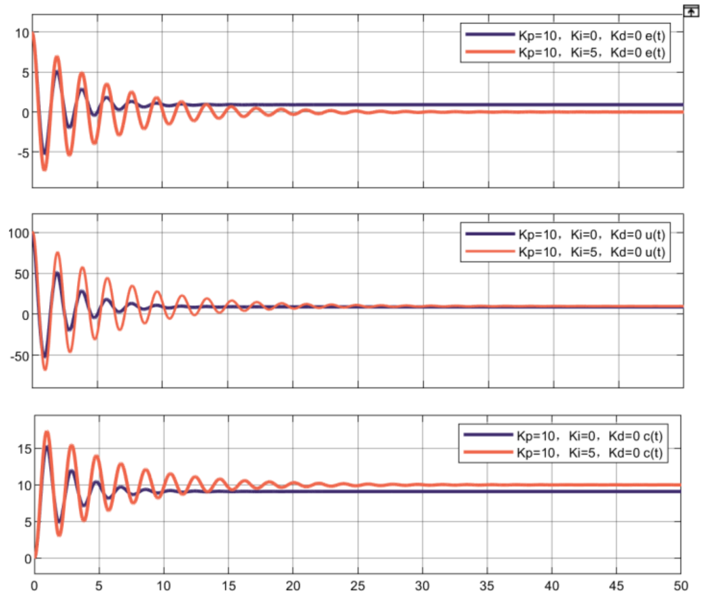


图 14 $K_P=10$，$K_I=5$，$K_D=0$时$e(t)$，$u(t)$，$c(t)$输出结果

当系统在原本比例控制的基础上增加了积分控制可以发现稳态误差变为 0，振荡更加强烈，超调量更大，稳定时间加长，与积分控制的特性分析相符合。

$K_P=10$，$K_I=0$，$K_D=3$

当$K_P=10$，$K_I=5$，$K_D=3$时与图 13、图 14 结果进行对比如图 15 所示：

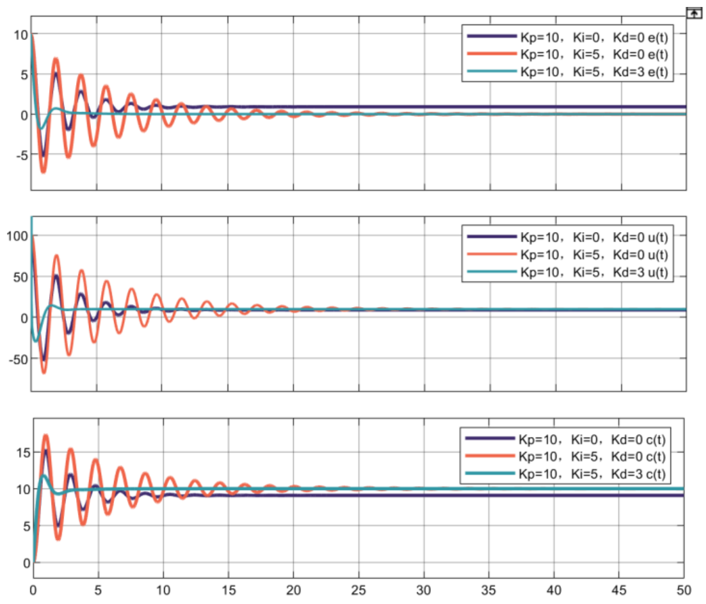


图 15 $K_P=10$，$K_I=5$，$K_D=3$时$e(t)$，$u(t)$，$c(t)$输出结果

当系统在 PI 控制的基础上添加微分控制后可以发现系统性能得到了显著的提升，可以发现稳态误差变为 0，超调量减小，稳定时间缩短。但是由于微分对于偏差量敏感且由于在系统开始运行之初有大小为 10 的偏差量，导致微分项在

系统开始时产生了巨大的作用，其结果如图 16 所示，PID 模块输出在瞬间高达 3000，在工业现场实际应用过程中可能会对执行器进行损坏。

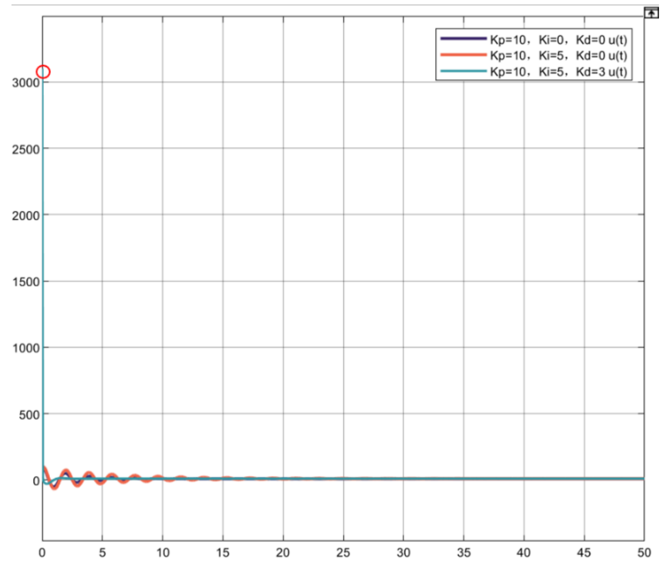


图 16 PID 控制器输出特征曲线

在最后，为了测试微分项对于高频信号的敏感程度，在系统输入部分添加了白噪声模块，$e(t)$，$u(t)$，$c(t)$的结果如图 17 所示。

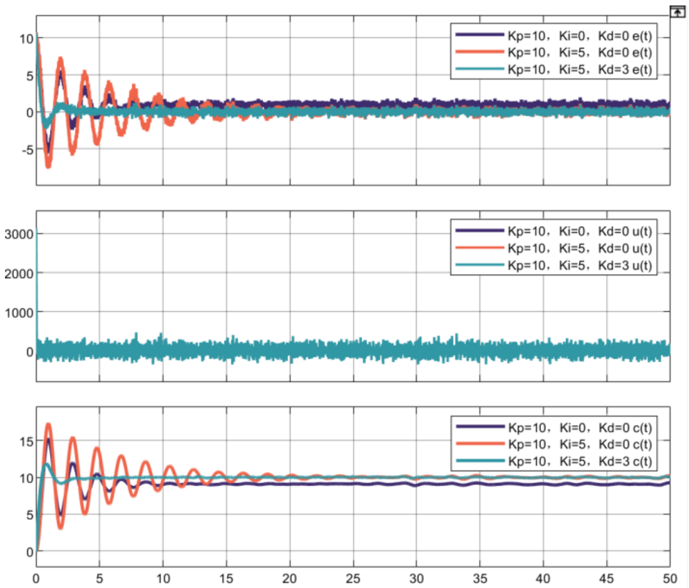
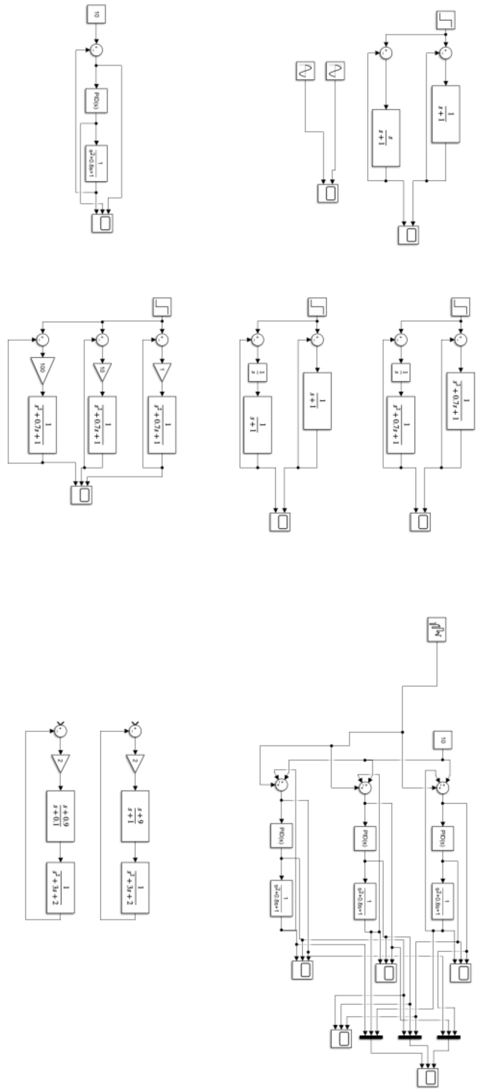


图 16 PID 控制器白噪声干扰输出特征曲线

加入高频白噪声后发现，微分项对高频信号比较敏感，模块输出部分添加微分项的系统图像覆盖住了整个画面，表现出明显的噪声干扰。

附录

MATLAB Simulink 仿真界面



MATLAB 画图代码

%根轨迹绘制

```
num1=1;den1=[1 1.4 1];
G1=tf(num1,den1);
rlocus(G1)
num1=1;den1=[1 1.4 1 0];
G1=tf(num1,den1);
rlocus(G1)
```