



数值分析

计算机科学与技术系

软件所EDA

蔡懿慈

caiyc@tsinghua.edu.cn

第2章课后练习（2）



作业：二、3、4、5、6

预习：2.3、2.4

第2章 插值法



§ 2.1 引言

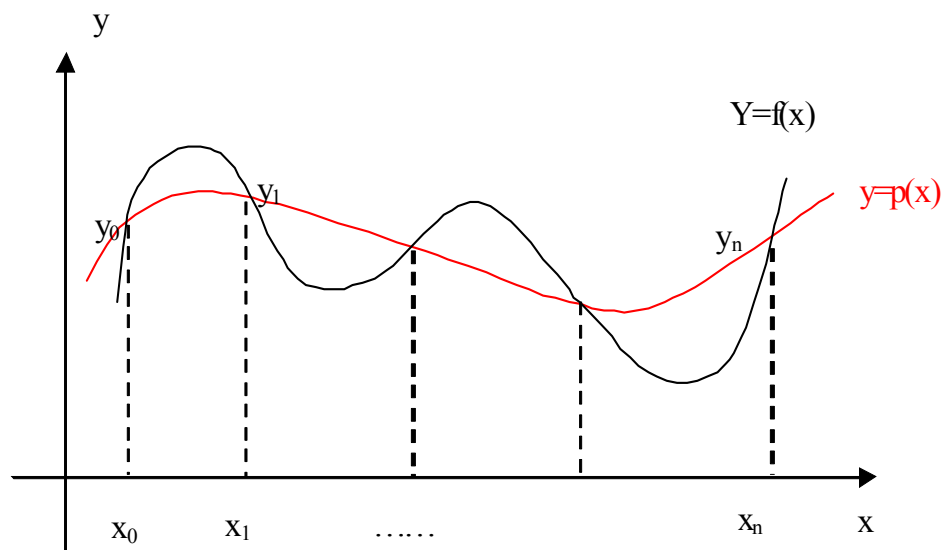
- 本章内容提要：解决科学与工程计算中，给定离散点配连续曲线，或给定离散点求函数表达式的数学问题。

问题描述：在区间 $[a, b]$ 上

已知： $y=f(x)$ 在若干离散点
 x_0, x_1, \dots, x_n 的函数值

y_0, y_1, \dots, y_n

求：曲线 $y=p(x)$ 严格通过
 $n+1$ 个离散点。



定义1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 且已知在点

$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上的值

y_0, y_1, \cdots, y_n

若存在一函数 $p(x)$, 使 $p(x_i)=y_i$ ($i=0,1,\dots,n$) (1.1) 成立,
称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。又称:

x_0, x_1, \dots, x_n ——为插值节点

$[a, b]$ ——为插值区间

$f(x)$ ——为被插值函数

- 插值方法的特点
 - 插值函数严格通过各离散点
 - 插值节点不重合

- 插值方法分类

插值函数 $p(x)$

代数多项式

三角函数

有理函数

样条函数

.....

插值方法

✓ 多项式插值

三角插值

有理插值

✓ 样条插值

讨论重点:

- 如何构造
- 是否存在唯一
- 误差估计

已知: $f(x)$ 在 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 上的值

$$y_0, y_1 \cdots y_n$$

求: 一多项式函数 $p(x)$, 使 $p(x_i)=y_i$ ($i=0,1,\dots,n$) 成立

容易想到的方法:

$$\text{令: } p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

利用 $p(x_i)=y_i$ ($i=0,1,\dots,n$) 的 $n+1$ 已知条件, 确定 a_0,\dots,a_n 的 $n+1$ 个待定常数。

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n(x_0) = y_0 = a_0 + a_1 x_0 \cdots + a_n x_0^n \\ P_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1 x_1 \cdots + a_n x_1^n \\ \dots\dots\dots \\ P_n(x_n) = y_n = a_0 + a_1 x_n \cdots + a_n x_n^n \end{array} \right.$$

求： a_0, \cdots, a_n

这种方法的问题是：当问题规模 n 很大时，所需要求解方程组的规模很大，并不是一种很好的方法。

有没有更好的方法？

§ 2.2 Lagrange插值

2.2.1 线性插值与抛物插值

从最简单的 $n=1$ 的情况开始, 讨论如何构造插值多项式。

$n=1$, 已知: x_k x_{k+1}

y_k y_{k+1}

求: $L_1(x)$

满足: $L_1(x_k) = y_k$ $L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}$

容易想到的一种方法是：

设： $L_1(x) = a + bx$

通过插值条件
$$\begin{cases} L_1(x_k) = a + bx_k = y_k \\ L_1(x_{k+1}) = a + bx_{k+1} = y_{k+1} \end{cases}$$

求出： a, b

前面指出：当问题规模 n 很大时，所需要求解方程组的规模很大，并不是一种很好的方法。

从解析几何的角度考虑：满足插值条件的多项式应当是通过两点的一条直线。如图2-2（p24）所示。

表示两点的直线方程有点斜式和两点式，从两点式表达式中我们可以受到启发。

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}$$

很显然， $L_1(x)$ 满足两个插值要求：

$$L_1(x_k) = y_k, \quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

在上述两点表达式里，将两个线性函数记为：

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

由两点式表示的线性插值函数可以写为：

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

结论： $L_1(x)$ 可表示为两个线性函数（一次多项式）的线性组合，而线性组合系数恰好是对应节点函数值。这种以节点函数值作为组合系数正是Lagrange插值多项式的**基本特点**。

考察 $l_k(x)$ 和 $l_{k+1}(x)$ 这两个线性函数的基本特点和性质：

1、次数：1次（线性）

2、个数：2个，一个节点对应一个：

$$\begin{cases} x_k \Rightarrow l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \\ x_{k+1} \Rightarrow l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \end{cases}$$

3、取值：很特殊！

	x_k	x_{k+1}
$l_k(x)$	1	0
$l_{k+1}(x)$	0	1

它们的图形在p24，图2-3给出。称 $l_k(x)$ 和 $l_{k+1}(x)$ 为Lagrange插值基函数。

总结：从两点式的启发：“线性插值多项式可以表示为以节点函数值为系数的线性插值基函数的线性组合；线性插值基函数是一组取值特殊的线性插值多项式。”

正是由于基函数的取值特殊，构造就十分简单，以 $l_k(x)$ 的构造为例。首先， $l_k(x_{k+1})=0$ ，它应该是 $l_k(x)=A(x-x_{k+1})$ 的形式。其次，因为 $l_k(x_k)=1$ ，则， $A=1/(x_k-x_{k+1})$ ，所以，

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$$

类似地构造 $l_{k+1}(x)$ 。

求Lagrange插值的两个基本步骤:

- (1) 求插值基函数
- (2) 以节点函数值作为线性组合系数

书上还给出了抛物型 ($n=2$) Lagrange插值多项式的构造方法分析, 与线性情形完全类似, 请大家自己看。下面的**2.2.2**将讨论一般情形。

2.2.2 Lagrange插值多项式

定义：已知： $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

y_0, y_1, \dots, y_n

求： $L_n(x)$

满足： $L_n(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, \dots, n)$

则：形如 $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$ 的插值多项式称为Lagrange插值多项式。

下面分两步讨论 n 次Lagrange插值多项式的构造。

一、构造基函数：

有 $n+1$ 个节点： $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

要构造 $n+1$ 个基函数： $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$

考察第 k 个基函数的性质：

1、 $l_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$)的性质

- 次数： n 次
- 取值：从Lagrange插值多项式可知

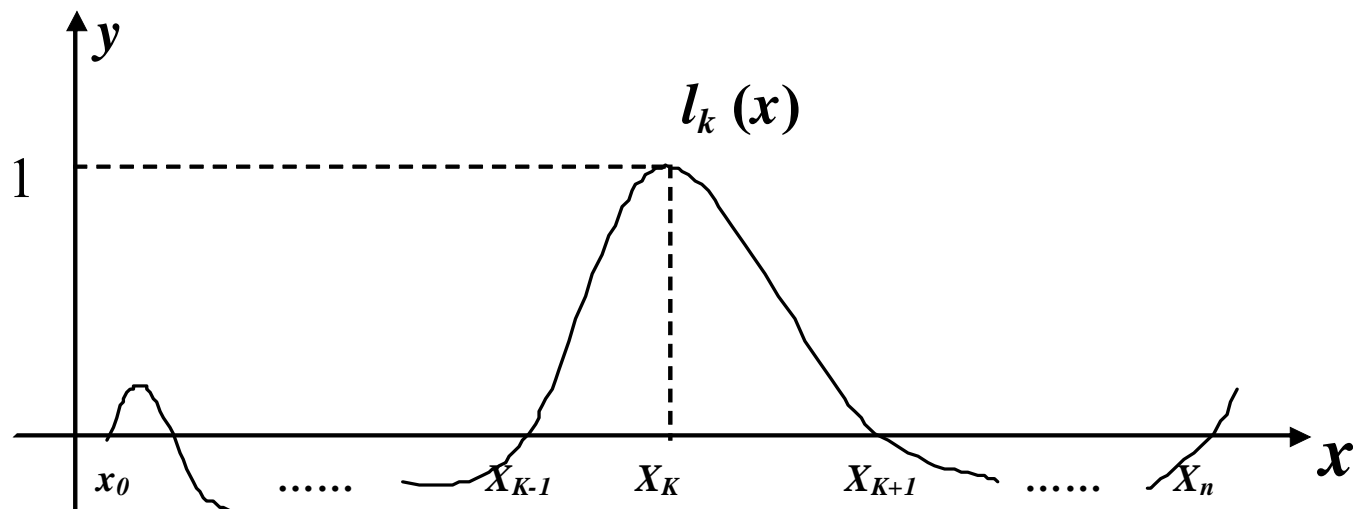
$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) \\ &= y_0 l_0(x) + \dots + y_k l_k(x) + \dots + y_n l_n(x) \end{aligned}$$

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + \cdots + y_k l_k(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

对于 $l_k(x)$ 来说 \longrightarrow 要满足 $L_n(x_k) = y_k$ ($k=0, \dots, n$)，应有如下性质：

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k \quad \text{第1部分（大部分条件）} \\ 1 & j = k \quad \text{第2部分（少数条件）} \end{cases}$$

从几何图形上看， $l_k(x)$ 是一个取值十分特殊的 n 次插值多项式。



2、 $l_k(x)$ 的构造

插值条件:

- 大部分容易满足的插值条件: $l_k(x_j) = 0 \quad j \neq k$ (第1部分)
- 少量需要通过计算满足的插值条件: $l_k(x_k) = 1$ (第2部分)

对于 $l_k(x)$ 除 x_k 结点以外的其余结点处, 函数值均为0的条件是很容易满足的, 而且是大部分条件, 由此可以构造:

$$l_k(x) = A \underbrace{(x-x_0) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}_{n \text{ 次多项式}}$$

待定

- (1) n 次多项式
- (2) 在 $l_k(x)$ 中第1部分插值条件都已经满足
- (3) 待定常数 A 可以由第2部分插值条件 $l_k(x_k)=1$ 求出。

$$A=1/(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

$$\text{则 } l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \quad (k=0,\dots,n)$$

—— n 次Lagrange插值基函数

二、线性组合：

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \end{aligned}$$

—— n 次Lagrange插值多项式

为了简化起见，引入记号：

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

则 $\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$

可将 n 次Lagrange插值多项式改写成：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

小结:

- $L_n(x)$ 满足插值条件: $L_n(x_k)=y_k \quad (k=0,1,\dots,n)$
- Lagrange插值多项式简单而优雅, 只要取定节点就可写出基函数, 进而得到插值多项式。易于计算机上实现。

存在唯一性讨论

构造一个次数不超过 n 次Lagrange插值多项式，满足插值条件，是一定可以构造出来的，即插值多项式 $L_n(x)$ 总是存在的。

又设： $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 满足： $P_n(x_i) = y_i (i=0,1,\cdots,n)$

$$\text{则: } \begin{cases} p_n(x_0) = y_0 = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n \\ \dots\dots\dots \\ p_n(x_n) = y_n = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n \end{cases}$$

系数行列式 $\neq 0 \iff (a_0, \cdots, a_n)$ 有解

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} |x_i - x_j| \neq 0$$

$x_i \neq x_j$ 插值条件

Vandermonde行列式

存在唯一性定理

这样两种方法构造的插值多项式是否唯一呢？

$$P_n(x) \stackrel{?}{=} L_n(x)$$

定理1： 给定 $n+1$ 个互异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值 y_0, y_1, \dots, y_n ，则满足插值条件(1.1)的 n 次插值多项式 $p_n(x)$ (1.2)是存在且唯一的。

定理证明很简单，自己看书。

2.2.3 插值余项与误差估计

$$L_n(x) \approx f(x)$$

在插值结点上，误差为零；在插值结点以外，误差是多少？

定理2、 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续， $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，在节点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 上， $L_n(x)$ 是满足插值条件： $L_n(x_j) = y_j = f(x_j)$ ($j=0,1,\dots,n$)的插值多项式，则对任一 $x \in [a,b]$ ，插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

其中 $\xi \in (a,b)$ 且依赖于 x ， $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ 。

注意：定理的条件，主要是对被插值函数 $f(x)$ 的光滑性有着苛刻的要求，对 n 次插值要求：

$$(1) f^{(n)}(x) \in C[a, b]$$

$$(2) f^{(n+1)}(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 存在}$$

n 越大，对 $f(x)$ 光滑性的要求越高。这个余项公式一般称为**Lagrange插值余项**，其主要特点表现在对被插值函数很高的光滑性要求上。

证明：分为两步

一、确定 $R_n(x)$ 的形式

余项函数 $R_n(x)$ 在节点上为0，且为 $n+1$ 次多项式，即

$$R_n(x_k)=0, \quad (k=0,1,\dots,n)$$

因此， $R_n(x)$ 可以设为：

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - L_n(x) = k(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n) \\ &= k(x)\omega_{n+1}(x) \end{aligned}$$

$k(x)$ ——待定函数

二、求 $k(x)$

注意： $R_n(x)$ 表示 $f(x)$ 与 $L_n(x)$ 在 x 处的误差， x 是考察点。
因此， x 应看作**相对固定**。即，在 $[a, b]$ 区间内， x 相对固定，
其地位与其它节点 x_0, x_1, \dots, x_n 相似。

做辅助函数：

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(t) - L_n(t) - k(x)\omega_{n+1}(t) \\ &= f(t) - L_n(t) - k(x)(t - x_0)\cdots(t - x_n)\end{aligned}$$

注意： 自变量是 t ， $k(x)$ 看作相对固定。

分析 $\varphi(t)$ 的两个性质:

(1) $\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[a, b]$ 连续, $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 存在, 这是定理的条件关于 $f(x)$ 应满足的要求保证的。

(2) $\varphi(t)$ 至少有?个零点。 **$n+2$**

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)(t - x_0) \cdots (t - x_n)$$

- $t = x_i, i = 0, 1, \dots, n$ 共 $n+1$ 个零点。

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) - k(x)\omega_{n+1}(x_i) = 0$$

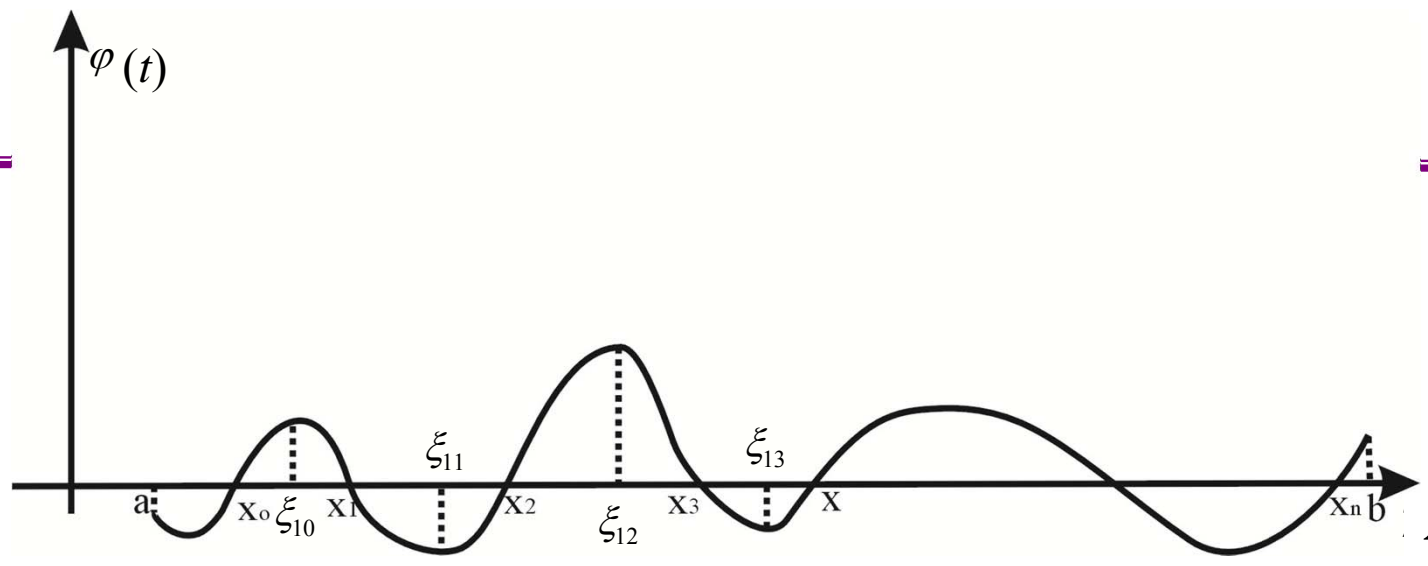
- $t = x,$ 1 个零点。

$$\varphi(x) = \underbrace{f(x) - L_n(x)}_{R_n(x)} - \underbrace{k(x)\omega_{n+1}(x)}_{R_n(x)} = 0$$

$R_n(x)$

$R_n(x)$

$n+2$ 个
零点



复习： 罗尔（Rolle）定理：

- 1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续
- 2) $f(x)$ 在 (a, b) 可微
- 3) $f(a)=f(b)$

则：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f'(\xi)=0$ 成立。

即：两个函数零点之间存在一阶导数的零点。

根据Rolle定理，即可分析 $\varphi(t)$ 各阶导数零点的分布情况：

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)(t - x_o) \cdots (t - x_n) \quad n+2 \text{ 个}$$

$$\varphi'(t)=0, \quad \xi_{1,0}, \quad \xi_{1,1}, \quad \dots, \quad \xi_{1,n} \quad n+1 \text{ 个}$$

$$\varphi''(t)=0, \quad \xi_{2,0}, \quad \xi_{2,1}, \quad \dots, \quad \xi_{2,n-1} \quad n \text{ 个}$$

.....

$$\varphi^{(n+1)}(t)=0, \quad \xi_{n+1,0} = \xi_x \quad 1 \text{ 个}$$

对 $\varphi(t)$ 求 $n+1$ 阶导数，并以 ξ_x 代入：

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(\xi_x) &= f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{L_n^{(n+1)}(\xi_x)} \overset{=0}{- k(x) \omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi_x)} \\ &= f^{(n+1)}(\xi_x) - 0 - (n+1)!k(x) = 0\end{aligned}$$

因此： $k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

则有： $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad \xi_x \in (a, b)$

证毕。

思考：为什么 ξ_x 依赖于 x ？

小结:

- 尽管余项表达式中的 ξ_x 一般无法知道，但在理论上，在许多实际应用中，上述的余项表达式具有十分重要的意义。P28例2给出了余项公式在误差估计中的应用。
- Lagrange 插值的优点：构造方便、结构对称。
- Lagrange 插值的缺点：无承袭性。增加一个节点，所有的基函数都要重新计算。

增加一个节点 x_{n+1} ，插值多项式需要做的改动：

(1) 增加一项

$$y_{n+1} \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_n)}{(x_{n+1}-x_0) \cdots (x_{n+1}-x_n)}$$

(2) 修改基函数 $l_k(x)$ ， $(k=0, \dots, n)$

$$l_k(x) \frac{(x-x_{n+1})}{(x_k-x_{n+1})}, \quad (k=0, \dots, n)$$

删除一个节点?

第二章课后练习 (3)



作业：二、7、8、9、12

预习：2.5、2.6

§ 2.3 均差与Newton插值公式

2.3.1 插值多项式的逐次生成

在引出Newton插值公式之前，首先讨论一下，为什么要讨论一种新的插值公式？新的插值方法在构造Newton插值公式的思想是什么？

一、Lagrange插值的优缺点：

优点：①构造方便，②结构对称，便于记忆与编程。

缺点：有时为了提高精度，需要增加一两个节点，而有时希望删除一、两个节点而使计算简单些，但这对Lagrange插值来说，是十分不方便的。如果要增加一个节点 x_{n+1} ，对插值多项式应有哪些改动呢？如果删除一个节点，要做哪些改动？

本章介绍Newton插值公式，恰恰具有**增加或删除节点方便**的优点，它的构造方法同样十分方便，有广泛的应用，下面讨论构造思想。

二、Newton插值构造思想：

从最简单情况入手，设：

已知： x_0

f_0

求0次插值多项式： $P_0(x)=f_0$

如果**增加一个节点**，即

已知： x_0 x_1
 f_0 f_1

求1次插值多项式： $P_1(x)= ?$

以 (x_0, f_0) 为基础，以 P_{24} 式 (2.1)，即解析几何的点斜式构造两点的直线方程，则有：

$$p_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

与 $P_0(x) = f_0$ 作对照， $p_1(x)$ 可以看作在 $p_0(x)$ 的基础上由于增加一个节点 (x_1, f_1) 而加上一项 $C_1(x - x_0)$ 所构成。

$$p_1(x) = f_0 + C_1(x - x_0)$$

(1) 点斜式表明：从0次插值增加一个节点构造线性插值仅需增加一项；反之，从线性插值删除一个节点也仅删除一项，十分方便。

(2) 点斜式这种多项式结构为构造便于节点增加与删除的高次插值多项式提供了有益的启发，就象两点式为Lagrange插值多项式的构造提供了有益的启示一样。



$$p_1(x) = f_o + C_1(x - x_o)$$

$$P_0(x) = f_o$$

在向高次插值推广之前，应当搞清楚，新增加的一项在结构上有什么特点？我们暂时不管新增加项前面的系数 C_1 ，而只看因子 $(x-x_0)$ 。

容易看到： x_0 的一个明显特点是：它是 $P_0(x)$ 与 $P_1(x)$ 的**共有插值节点**，这个因子保证了 $P_1(x)$ 与 $P_0(x)$ 在公共节点上满足相同的插值条件： $P_1(x_0)=P_0(x_0)=f_0$

下面把这种认识推广到一般情形：

$$\begin{array}{c} x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, \quad \boxed{x_n} \\ \underbrace{f_o, f_1, \cdots, f_{n-1}}_{P_{n-1}(x)} \quad \boxed{f_n} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{P_n(x)} \end{array}$$

那么, $p_{n-1}(x)$ 与 $p_n(x)$ 之间应具有如下关系:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + C_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

我们很容易从以下三个方面说明 (验证) $P_n(x)$ 这种结构的合理性, 并在一般意义上理解构造Newton插值公式的思想。

$$(1) \quad p_n(x_i) = p_{n-1}(x_i) = f_i \quad (i = 0, \cdots, n-1)$$

即 $P_n(x)$ 与 $P_{n-1}(x)$ 在公共节点上满足相同的插值要求。是由 $p_n(x) - p_{n-1}(x) = C_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$ 的结构形式所保证的。

(2) $\leq n$ 次多项式

(3) 引入 $C_n \Rightarrow p_n(x_n) = f_n \Rightarrow$ 定出 C_n

以上分析表明 $P_n(x)$ 的这种结构形式，使它可在满足前 n 个插值条件的多项式 $P_{n-1}(x)$ 基础上，通过添加一项即可满足增加的第 $n+1$ 个插值条件，这种结构形式显著地区别于Lagrange插值多项式的结构。

递推地应用上面的关系式，有：

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_{n-1}(x) + C_n(x-x_o)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= p_{n-2}(x) + C_{n-1}(x-x_o)\cdots(x-x_{n-2}) + C_n(x-x_o)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= C_o + C_1(x-x_o) + \cdots + C_n(x-x_o)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

—— Newton插值多项式 (p30 3.2)

2.3.2 均差及其性质

定义2:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

f 关于 x_k 的0阶均差

$$f[x_o, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_o)}{x_k - x_o}$$

f 关于 x_0, x_k 一阶均差

$$f[x_o, x_1 \cdots x_k] = \frac{f[x_o, \cdots x_{k-2}, x_k] - f[x_o, x_1 \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (3.3)$$

f 关于 x_0, \dots, x_k 的 k 阶均差。

0阶均差：是函数本身。

1阶均差：是函数值差与自变量差的比值，反映 $f(x)$ 在 $[x_0, x_k]$ 之间的平均变化率。当 x_0 与 x_k 很靠近时，1阶均差能很好近似区间 $[x_0, x_k]$ 内的1阶导数，有很强的直观意义。

k 阶均差：是用两个低一阶均差的平均变化状态来定义的。

特别注意：分母两个节点的取法，即两个非公共节点的差，以2阶均差为例：

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \dots\dots \end{aligned}$$

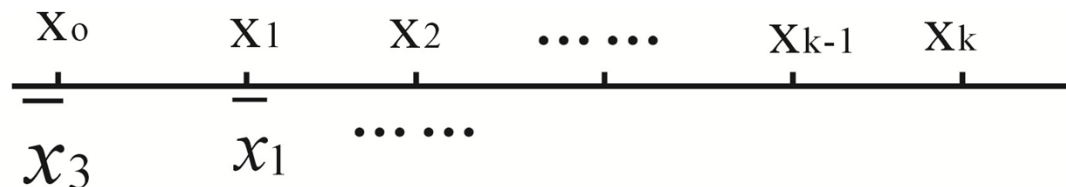
均差的3个基本性质，证明不要求，但结论十分重要。

1、均差对称性

$$f[x_o, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_o) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)} \quad (3.4)$$

这个性质表达了均差两个相互关联的含义：

- (1) 在均差计算中，各个节点的地位是平等、对称的。
- (2) 均差的数值与节点编号（次序）无关，改变节点编号，仅仅改变运算次序。用示意图表示为：



所以： $f[x_o, x_1 \cdots x_k] = f[x_1, x_o \cdots x_k] = \cdots = f[x_k, \cdots x_o]$

2、
$$f[x_o, \cdots x_k] = \frac{f[x_1, \cdots x_k] - f[x_o, \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_o} \quad (3.3)'$$

(3.3)' 给出与(3.3)相类似的 k 阶均差的定义，它强调的只是： $k+1$ 个节点所确定的 k 阶均差可由任意两个低一阶的 $k-1$ 阶均差取平均得到。

3、
$$f[x_o, \cdots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad \text{其中: } x_i \in [a, b], \xi \in (a, b) \quad (3.5)$$

用Rolle定理可以证明性质3，有兴趣的同学可试试。

2.3.3 Newton插值多项式

一个简单的推导与证明，仅用到以下两个事实：

(1) 均差定义。

(2) $x \in [a, b]$ **相对固定**，且设 $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ ，即



推导如下：

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

.....

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, \dots, x_n] + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_n)$$

把 x 看作相对固定，并用均差定义，就可以写出上述各式子。
逐次地将后一式子代入前一式子，就得到：

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\ & + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$

其中： $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots$
 $+ f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$

——Newton插值多项式 (3.6)

$$R_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

——Newton插值余项 (3.7)

上述推导表明，**Newton插值公式各项的系数就是相应的各阶均差**。因此，构造Newton插值公式的主要工作就是计算各阶均差。P31的表2-1给出了顺序计算各阶均差的一种格式，P32有一算例4，自己看看。

余项：

大家对推导出来的Newton插值余项可能会有一些疑问？根据插值多项式的存在唯一性定理，即定理1可知，对相同的 $n+1$ 的插值节点，应有： $L_n(x) = N_n(x)$ ，余项自然也应当相同。因此，有了Lagrange插值余项就够了，为什么还要讨论Newton插值余项呢？我们可以从两个方面作些说明：

(1) $f^{(n+1)}(\xi)$ 不存在, 即 $f(x)$ 不够光滑, 或者 $f(x)$ 本身就是表格函数, 并无任意阶导数可言。但这时它的各阶均差是存在的, 并可计算出来。因此, 以均差形式表达的余项是有意义的。

(2) 一个比较具体的实际应用是根据均差大小判断插值节点数目是否合适。

例如: P32的例子, 看表2-2, 第1列是 x 坐标, 第2列是节点函数值, 第3列是1阶均差,等等。题目要求构造一个4次Newton插值多项式, 并计算 $f(0.596)$ 的近似值。

下面讨论分析一下4次是否合理? 为什么?

从Newton插值余项:

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 \cdots x_n](x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

当 $n+1$ 个节点确定之后, 误差大小依赖于与 x 有关的 $n+1$ 阶均差的大小。

x 处的准确函数值并不知道, 决定余项大小的这个 $n+1$ 阶均差也无法确切算出。

但从表2-2看出, 5阶均差已接近于0, 即可粗略说明, 取4次插值多项式误差会比较小的。

小结：前面已详细讨论了Newton插值多项式的构造思想、构造方法及余项表达式等。比较基本和重要的是了解增加一个节点前后两个Newton插值多项式的递推关系：

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_o, \cdots x_n](x - x_o) \cdots (x - x_{n-1})$$

因此，增加或删除一个节点都只涉及一项，便于增加或删除节点是Newton插值多项式的主要优点，应用更加广泛。

2.3.4 差分与等距节点插值

前面讨论了Lagrange插值和Newton插值，都没有对插值节点的分布加任何限制，只要不同即可。而在实际应用当中，往往会遇到节点等距分布的情况，这时插值公式可这一步简化，计算更加简单。

由于Newton插值在实际当中应用更广泛些，所以以下仅讨论节点等距情形下的Newton插值公式。先介绍差分概念及与均差之间的关系。

一、差分及其性质

定义3,

已知 $y=f(x)$ 在等距节点 $x_k = x_0 + kh(k = 0, \dots, n)$ 上的值 $f_k = f(x_k)$,
 h 为步长, 则

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

x_k 的一阶向前差分

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

x_k 的一阶向后差分

$$\delta f_k = f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}$$

x_k 的一阶中心差分

.....

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$$

x_k 的 m 阶向前差分

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

x_k 的 m 阶向后差分

(1) 本书对中心差分讨论不多，这里也只做定义上的简单介绍。

(2) 与均差定义类似，高阶差分是用两个低一阶差分的差来定义的，作为一个简单例子，求 x_k 的二阶差分：

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

(3) 书上还提到了不变算子I、向前差分算子、向后差分算子、移位算子等概念，大家了解一下就可以了，不必证明。

(4) 3个差分的性质

性质1与性质2指出了各阶差分可用函数值的线性组合表示，反之，函数值也可用各阶差分线性组合表示。这从差分定义是不难解释的，比如二阶向前差分与函数值的关系。公式(3.9)

(3.10) 不必证明和死记，了解即可。

性质3指出差分与均差的关系，十分重要。

性质3, 差分与均差的关系:

$$\begin{aligned} f[x_k \cdots, x_{k+m}] &= \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k \quad (m=1, \cdots, n) \quad (3.11) \\ f[x_k \cdots, x_{k-m}] &= \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \nabla^m f_k \end{aligned}$$

证明: 我们用归纳法证明均差与向前差分的关系, 与向后差分的关系可类似证明。

$$(1) \quad m=1 \quad f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{h} \Delta f_k \quad \text{成立}$$

$$(2) \quad \text{设 } m-1 \text{ 时成立: } f[x_k, \cdots, x_{k+m-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{h^{m-1}} \Delta^{m-1} f_k$$

(3) 证明 m 时成立:

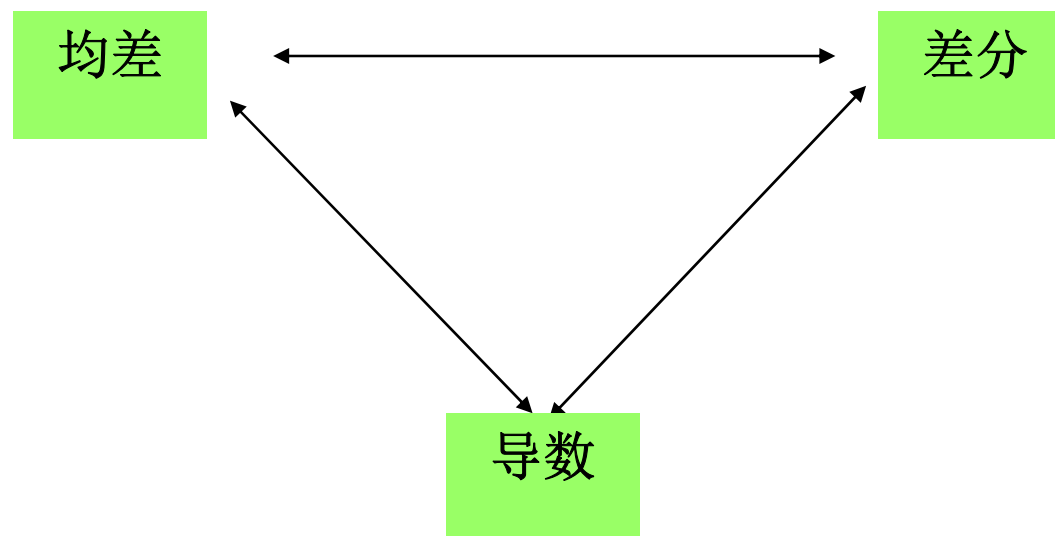
$$\begin{aligned} f[x_k, \dots, x_{k+m}] &= \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] - f[x_k, \dots, x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k} \\ &= \frac{\frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{h^{m-1}} \Delta^{m-1} f_{k+1} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{h^{m-1}} \Delta^{m-1} f_k}{mh} \\ &= \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k \end{aligned}$$

同理, 可证均差与向后差分的关系, 自己做。

由于均差与导数存在关系, 差分与导数也存在关系。

$$\begin{aligned} \Delta^n f_k &= h^n f^{(n)}(\xi) & \xi \in (x_k, x_{k+n}) & \quad (3.12) \\ \nabla^n f_k &= h^n f^{(n)}(\xi) & \xi \in (x_{k-n}, x_k) & \end{aligned}$$

小结：这两小节讨论了两个新概念，均差与差分，二者存在相互关系，并与导数存在关系：差分、均差、导数



三者之间的相互关系，希望着重搞清楚，认真总结一下。

二、等距节点插值公式

Newton插值公式: $N_n(x) = f_o + f[x_o, x_1](x - x_o) + \cdots + f[x_o, \cdots x_n](x - x_o) \cdots (x - x_{n-1})$

(1) Newton前插公式:

当我们要计算函数表前部函数近似值时, 应当如何选择插值节点呢? 这可以从两个方面考虑:

①使误差项较小, ②便于节点增加或删除。

①从减小插值误差来说, 余项表达式:

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x, x_o \cdots x_n](x - x_o) \cdots (x - x_n)$$

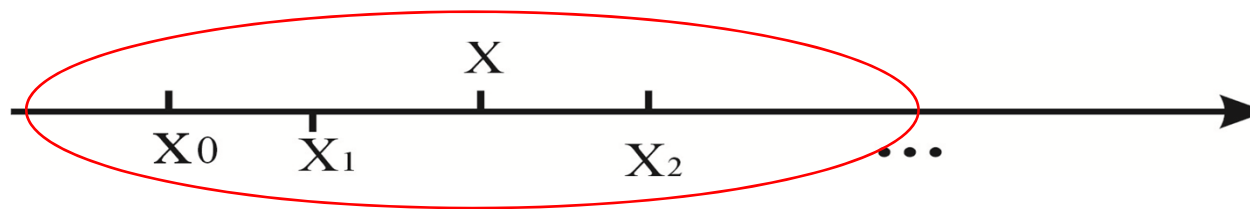
插值误差依赖于两个因素:

(a) $n+1$ 阶均差 (导数) 的性质

(b) x 与各节点的距离关系 $|\omega_{n+1}(x)|$

尽可能减少 $|\omega_{n+1}(x)|$ 的数值对减少插值误差是十分有意义的。
因此， x 靠近前部，用于构造插值公式的节点也应靠近前部。

②又从便于节点增删来说，可取 x_0 最优先，其次 $x_1 \dots$ 是比较方便的。



从 $N_n(x) = f_o + f[x_o, x_1](x - x_o) + \dots + f[x_o, \dots, x_n](x - x_o) \cdots (x - x_{n-1})$ 出发
作变量代替： $x = x_o + th$ 有： $x_k = x_o + kh$

再利用均差与差分的关系式： $f[x_k, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k$ ，不难推
导出Newton前插公式：

$$N_n(x_0 + th) = f_o + t \Delta f_o + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_o + \dots + \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1)}{n!} \Delta^n f_o \quad (3.13)$$

(2) Newton后插公式:

当我们要计算靠近函数表尾部的函数近似值时, 根据前面对插值误差的讨论, 选择尾部节点构造插值公式是比较自然的, 又同时考虑到便于节点增加与删除, 最好把Newton插值公式改写为最优先使用 x_n , 其次 x_{n-1}

$$N_n(x) = f_n + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \cdots + f[x_n, \cdots x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1)$$

作变量代替: $x = x_n - th$

$$x_k = x_n - (n - k)h \quad (k = n, n-1, \cdots 0)$$

再利用均差与向后差分的关系: $f[x_k, \cdots x_{k-m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \nabla^m f_k$

可推出Newton后插公式, 自己试试。

小结：当给出 $n+1$ 个插值条件： $x_o < x_1 < \cdots < x_n$
 $y_o, \quad y_1, \quad \cdots \quad y_n$

插值多项式，我们讨论了三种构造方法：

(1) $P_n(x) = a_o + a_1x + \cdots + a_nx^n$

(2) Lagrange插值法： $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$

(3) Newton插值法： $N_n(x) = f_o + f[x_o, x_1](x - x_o) + \cdots$
 $+ f[x_o, \cdots, x_n](x - x_o) \cdots (x - x_{n-1})$

根据插值多项式的存在唯一性定理，应有： $P_n(x) = L_n(x) = N_n(x)$

虽然这三种插值多项式是等价的，但它们的表达方式是不同的，构造方法也不同，实际运用中的优缺点也不相同。

§ 2.4 Hermite 插值

前面讨论的Lagrange与Newton插值，解决的是函数值相等的多项式插值问题。而在实际当中，有时除了要求函数值相等外，还要求导数值相等。这类插值问题统称Hermite插值。

Hermite插值多项式：在节点满足函数值及某些导数值要求的最低次数多项式。

2.4.1 一类带导数插值问题

一、提法:

已知: x_0, x_1, \dots, x_n
 y_0, y_1, \dots, y_n
 m_0, m_1, \dots, m_n

求: Hermite插值多项式 $H(x)$, 满足:

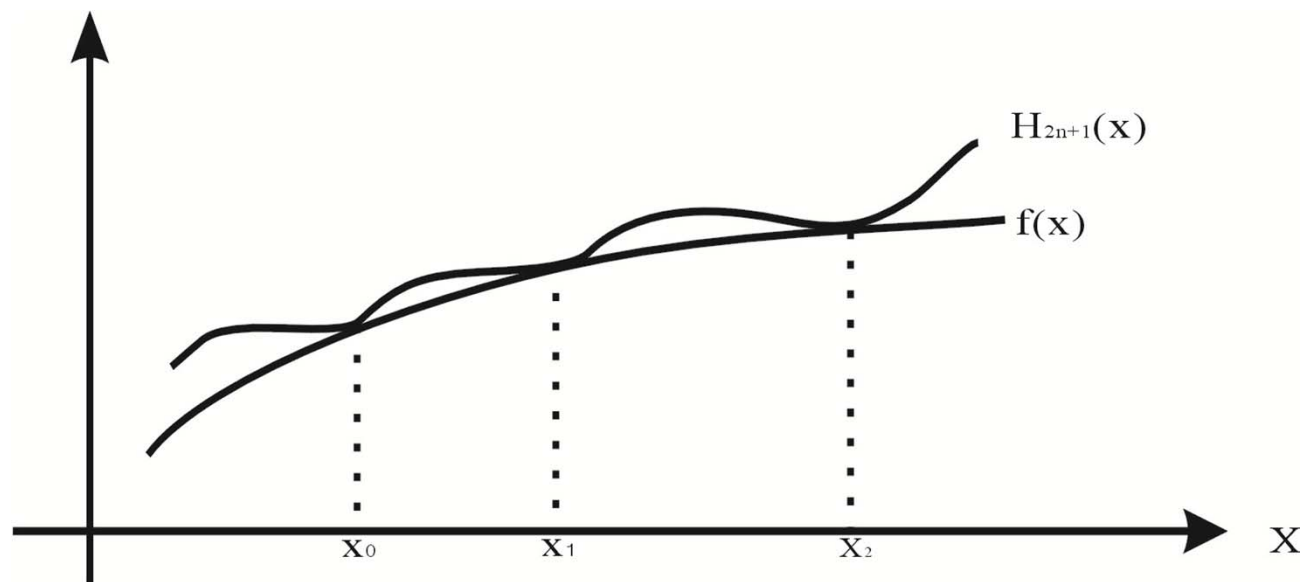
$$H(x_j) = y_j, \quad H'(x_j) = m_j (= f'(x_j)) \quad (j = 0, \dots, n)$$

插值多项式的最高次数不应高于: 插值条件数-1, 即:

$$2 \times (n + 1) - 1 = 2n + 1$$

记, 这种Hermite插值多项式为: $H_{2n+1}(x)$ 。

从几何上理解 $H_{2n+1}(x)$ 的意义:



我们看到, $H_{2n+1}(x)$ 严格通过已知离散点, 而且与被插值函数 $f(x)$ 在节点处有相同 (公共) 的切线。

二、构造思想：

一种容易想到的构造方法是设定： $H_{2n+1} = a_0 + a_1x + \cdots \cdots a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的多项式，有 $2n+2$ 个待定常数。由 $2n+2$ 个插值条件代入，列出 $2n+2$ 个线性代数方程确定它们。当 n 较大时，这不是一个好方法。

这里我们不妨回顾Lagrange插值多项式的构造方法：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

即在每个节点定义一个基函数，用以支撑相应节点的函数值。由于基函数取值特殊，易于构造，使Lagrange插值多项式也易于构造。

事实上，不难把构造Lagrange插值多项式的思想和方法推广至构造Hermite插值多次式。由于Hermite插值多项式要求在每个节点必须同时支撑函数值 y_i 与一阶导数值 m_i ，因此，应对每个节点定义两个基函数：

$$\begin{cases} \alpha_j(x) & \text{支撑} & y_j \\ \beta_j(x) & \text{支撑} & m_j \end{cases} \quad (j = 0, \dots, n)$$

Hermite插值多项式可以写成：

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)]$$

问题归结至如何确定这两组基函数？它们的基本性质是什么？

三、基函数 $\alpha_j(x)$ 与 $\beta_j(x)$ 的性质

(1) 次数: $2n+1$

(2) 取值: 从下两式在节点 x_k 应满足的插值情况进行分析。

(a) 函数值插值要求:

$$H_{2n+1}(x_k) = \underbrace{\sum_{j=0}^n y_j \alpha_j(x_k)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{j=0}^n m_j \beta_j(x_k)}_{\textcircled{2}} = y_k$$

首先, 让 $\textcircled{2}$ 中的 $n+1$ 项对任意节点 x_k 不起作用, 即取0:

其次, 让 $\textcircled{1}$ 中的 $n+1$ 项中, 只留一项 $y_k \alpha_k(x_k) = y_k$, 其余为0

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \alpha_k(x_k) = 1 & j = k \\ \alpha_j(x_k) = 0 & j \neq k \end{cases}$$

(b) 一阶导数插值要求:

$$H'_{2n+1}(x_k) = \sum_{j=0}^n y_j \alpha'_j(x_k) + \sum_{j=0}^n m_j \beta'_j(x_k) = m_k$$

①' ②'

同样, 让①'中的 $n+1$ 项对任意节点 x_k 不起作用, 取0

$$\textcircled{1}' \quad \alpha'_j(x_k) = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

而让支撑一阶导数值 $n+1$ 项仅留一项 $m_k \beta'_k(x_k) = m_k$, 其余为0

$$\textcircled{2}' \quad \begin{cases} \beta'_k(x_k) = 1 & j = k \\ \beta'_j(x_k) = 0 & j \neq k \end{cases}$$

为了方便以 j 为求和指标的基函数的构造，我们相对固定基函数的编号为 j ，考察它在各个节点取值的情况，那么，基函数的取值要求可整理为：

$\alpha_j(x)$	$\beta_j(x)$	
一、 $\alpha_j(x_k) = \alpha'_j(x_k) = 0 \quad (k \neq j)$	$\beta_j(x_k) = \beta'_j(x_k) = 0 \quad (k \neq j)$	$2n-2$ 条件
二、 $\alpha_j(x_j) = 1$ $\alpha'_j(x_j) = 0$	$\beta_j(x_j) = 0$ $\beta'_j(x_j) = 1$	4个条件

这两组基函数可分为两部分：

第一部分：代入节点的编号与基函数的编号不同时，两个基函数的函数值与导数值均为0，即：在 $x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ 节点为**二重零点**。

第二部分：代入节点编号与基函数编号相同时，则基函数 $\alpha_j(x)$ 与 $\beta_j(x)$ 的**取值情况恰好相反**。

四、基函数 $\alpha_j(x)$ 与 $\beta_j(x)$ 的构造

可以借用Lagrange插值基函数构造，先考察Lagrange插值基函数：

$$\ell_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

满足： $\ell_j(x_k) = 0 \quad k \neq j$

这说明， $\ell_j(x)$ 对编号不是 j 的节点均为单重零点。容易验证 $\ell_j^2(x)$ 有如下性质：

$$\ell_j^2(x_k) = (\ell_j^2(x_k))' = 0 \quad k \neq j$$

这表明， $\ell_j^2(x)$ 对编号不是 j 的节点是**二重零点**。这恰好是 Hermite插值基函数所要求的二重零点性质。

以 $\ell_j^2(x)$ 为基础构造Hermite基函数, $\ell_j^2(x)$ 为 $2n$ 次多项式。

$$\text{设: } \begin{cases} \alpha_j(x) = (ax+b)\ell_j^2(x) \\ \beta_j(x) = d(x-x_j)\ell_j^2(x) \end{cases} \quad \text{3个待定常数}$$

由于 $\alpha_j(x)$ 与 $\beta_j(x)$ 应是 $2n+1$ 次多项式, 都必须再乘一个一次式。

$\alpha_j(x)$ 中的 ***a*** 和 ***b***, 由余下的两个第二部分插值条件定出。

$\beta_j(x)$ 中的 ***d***, 由余下的一个第二部分插值条件 $\beta'_j(x_j)=1$ 定出。

$\alpha_j(x)$	$\beta_j(x)$	
一、 $\alpha_j(x_k) = \alpha'_j(x_k) = 0 \quad (k \neq j)$	$\beta_j(x_k) = \beta'_j(x_k) = 0 \quad (k \neq j)$	二重零点
二、 $\alpha_j(x_j) = 1$	$\beta_j(x_j) = 0$	
$\alpha'_j(x_j) = 0$	$\beta'_j(x_j) = 1$	

$$\alpha_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k} \right) \ell_j^2(x)$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j) \ell_j^2(x)$$

Hermite基插值函数

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)]$$

Hermite插值函数

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x)$$

Hermite插值余项

五、存在唯一性与余项

存在性：前面对Hermite插值多项式的推导与构造，就是一种构造性证明，由于总能构造出来，存在性得以证明。

唯一性：与Lagrange插值多项式唯一性证明完全一样，大家看看，希望能掌握它。

证明思路：

(一) 确定 $R_{2n+1}(x)$ 的形式

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = K(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 = K(x) \omega_{n+1}^2(x)$$

其中， $K(x)$ 是待定函数， $\omega_{2n+1}^2(x)$ 在节点上是二重零点。

(二) 求 $K(x)$

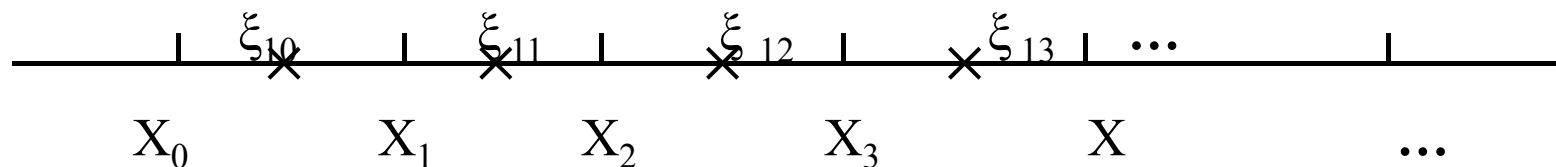
$x \in [a, b]$ 相对固定

作辅助函数: $\varphi(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - K(x)\omega_{n+1}^2(t)$

$\varphi(t) = 0$ $t = x_k$ ($k = 0 \cdots, n$) $n+1$ 个二重零点, 重根数: $2n+2$ 个
 $t=x$, 单重零点, 1个

零点按重根数计算, 共计: $2n+2+1=2n+3$

$\varphi'(t) = 0$ $2n+2$ 个不重合零点, 为什么?



根据Rolle定理，每两个函数值零点之间，必有至少一个一阶导数零点，记为： $\varphi'(\xi_{1j})=0$, $\xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12} \cdots \xi_{1n}$ $n+1$ 个

由于节点均为二重零点，它们也是一阶导数零点：

$$\varphi'(x_k)=0 \quad (k=0, \cdots, n) \quad n+1 \text{ 个}$$

共构成 $2n+2$ 个一阶导数零点，以下继续反复应用Rolle定理，即可得Hermite插值表达式。

第2章课后练习（4）



作业：二、15、16、18

预习：2.6

六、 $n=1$ 时的Hermite插值式项式

$$\begin{array}{cccc} n=1 & x_k & x_{k+1} & [x_k, x_{k+1}] \\ & y_k & y_{k+1} & \\ & m_k & m_{k+1} & 2n-1=3 \end{array}$$

$$H_{2n+1}(x) = H_3(x) = y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + m_k \beta_k(x) + m_{k+1} \beta_{k+1}(x)$$

它是Hermite插值的简单情况，是分段三次Hermite插值以及三次样条插值的基础，十分重要，我们作为例子，比较仔细讨论一下。

书上P37-38，用16个式子给出4个基函数以及它们的导数在两个节点的取值情况，并给了4个基函数的表达式（4.8）—（4.11）。

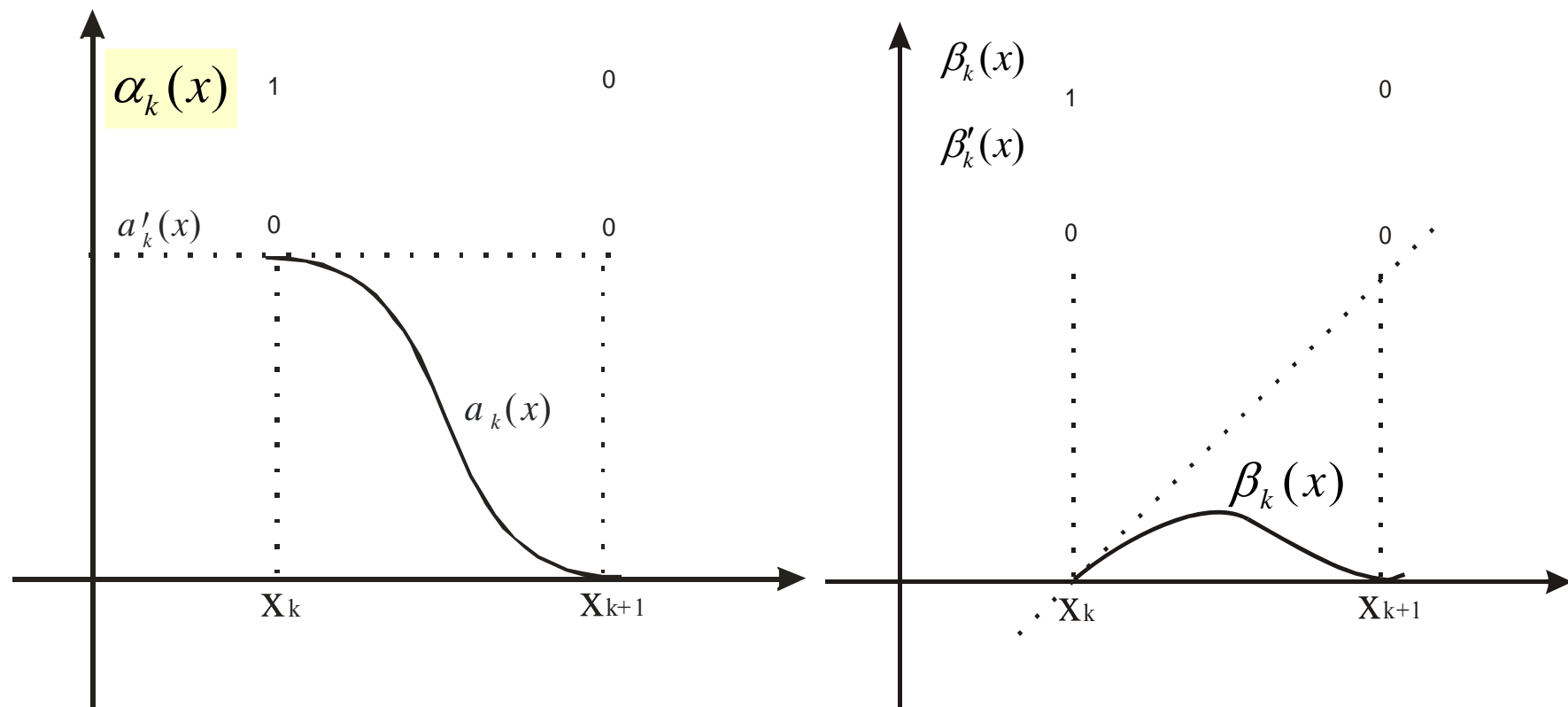
$$\alpha_k(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \quad (4.8)$$

$$\alpha_{k+1}(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \quad (4.9)$$

$$\beta_k(x) = (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \quad (4.10)$$

$$\beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \quad (4.11)$$

为了加深理解，下面给出 $\alpha_k(x)$ 与 $\beta_k(x)$ 的函数图形：



七、例题

已知: $x_0, \quad x_1, \quad x_2$
 $f_0, \quad f_1, \quad f_2$
 f'_1

求: $P(x)$ 及余项, 使: $p(x_i) = f_i \quad (i = 0, 1, 2)$
 $p'(x_1) = f'_1$

容易想到的构造方法是: 设定一个带4个待定常数的3次多项式: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, 由4个插值条件定4个常数, 但是不是有更简便的方法呢?

这里着重强调一种我们前边用过的构造插值多项式中很有效的
技巧：从4个插值要求可以看出，其中3个是函数值的插值要求，很容易先部分满足，比如利用Lagrange或Newton插值都可完成，书上取二次Newton插值多项式：

$$\bar{P}(x)(= N_2(x)) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$\text{满足: } \bar{P}(x_j) = f_j \quad (j = 0, 1, 2)$$

这里取： $\bar{P}(x) = N_2(x)$ ，实际上，取： $\bar{P}(x) = L_2(x)$ 也成立。

下面是设法满足 x_1 上一阶导数的插值要求 $P'(x_1) = f'_1$ ，我们可在 $\bar{P}(x)$ 的基础上再加一项： $P(x) = \bar{P}(x) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$$P(x) = \bar{P}(x) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

这个多项式结构的合理性可以从以下三方面加以说明：

①次数： $P(x) \leq 3$

②函数值插值要求： $P(x_j) = \bar{P}(x_j) = f_j \quad j = 0, 1, 2$

③导数插值要求，引入 $A \Rightarrow P'(x_1) = f'_1$ ，即由余下的导数插值条件定出待定常数A。

另外，关于插值余项也不能直接套公式，同样需要技巧求解，请看书。

构造插值多项式的上述技巧往往十分有效。在这里，将定4个待定常数的问题简化为只含一个待定常数问题。

构造插值多项式的上述技巧已经在构造Lagrange和Hermite插值基函数的构造当中多次强调和应用了，希望大家认真掌握。

小结:



Lagrange插值

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

Newton插值

$$N_n(x) = f(x_o) + \cdots + f[x_o \cdots x_n](x - x_o) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_o \cdots x_n](x - x_o) \cdots (x - x_n)$$

Hermite插值

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [y_j \alpha_j(x) + m_j \beta_j(x)]$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x)$$

到目前为止，介绍了两类插值问题：一是不带导数插值问题，另一类是带导数的Hermite插值问题。

按照给出的插值要求，整体地、统一地构造一个高次插值多项式满足全部插值要求，是前面讲的插值方法的共同特点，我们把这类插值方法称为“**高次插值**”。

如：有20个插值节点，若为不带导数插值：构造次数 ≤ 19 次的多项式；若为各节点一阶导数插值要求的Hermite插值：构造次数 $\leq 2 \times 20 - 1 = 39$ 次多项式。

一般来说，高次插值有以下**优点**：

①易于构造 ②使用方便 ③光滑性好

但是，高次插值也存在一些重大缺点。下面介绍的分级段低次插值，是近几十年发展起来的插值方法，60年代逐渐发展起来的样条插值是其中十分成功的一种。

§ 2.5 分段低次插值

2.5.1 高次插值的病态性质

高次插值的两种**病态**性质：

(1) 收敛性差：P39例子，是上世纪初德国数学家Runge给出的。

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

若在 $[-5, 5]$ 上取 $n+1$ 个等距节点， $x_k = -5 + 10\frac{k}{n}$ ($k=0, \dots, n$)
构造Lagrange插值多项式：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+x_k^2} \ell_k(x)$$

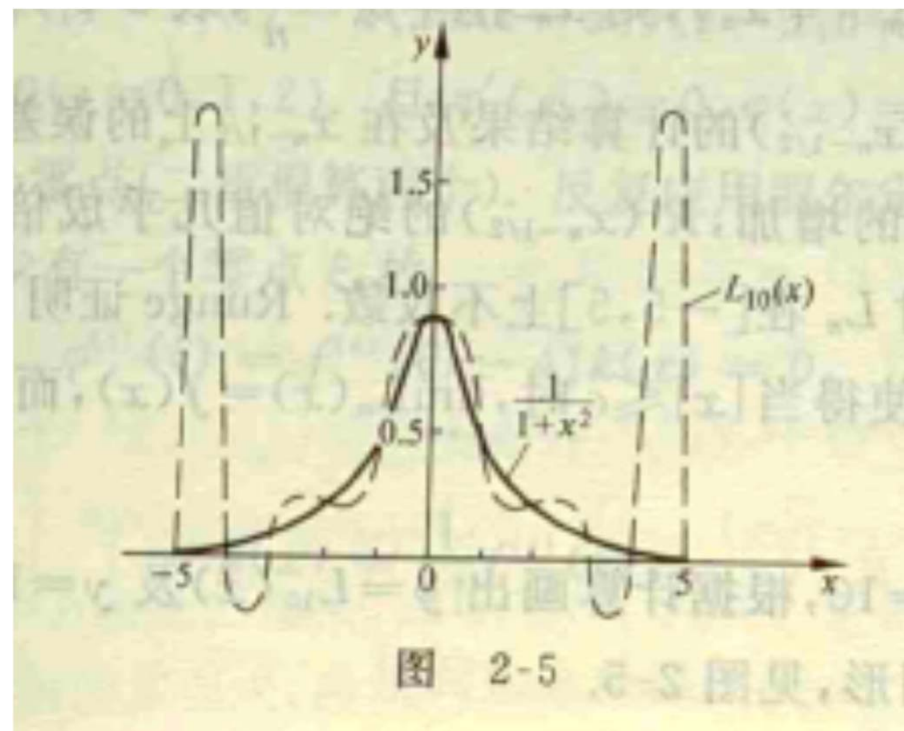
Runge证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq 3.63 \\ \infty & |x| > 3.63 \end{cases}$$

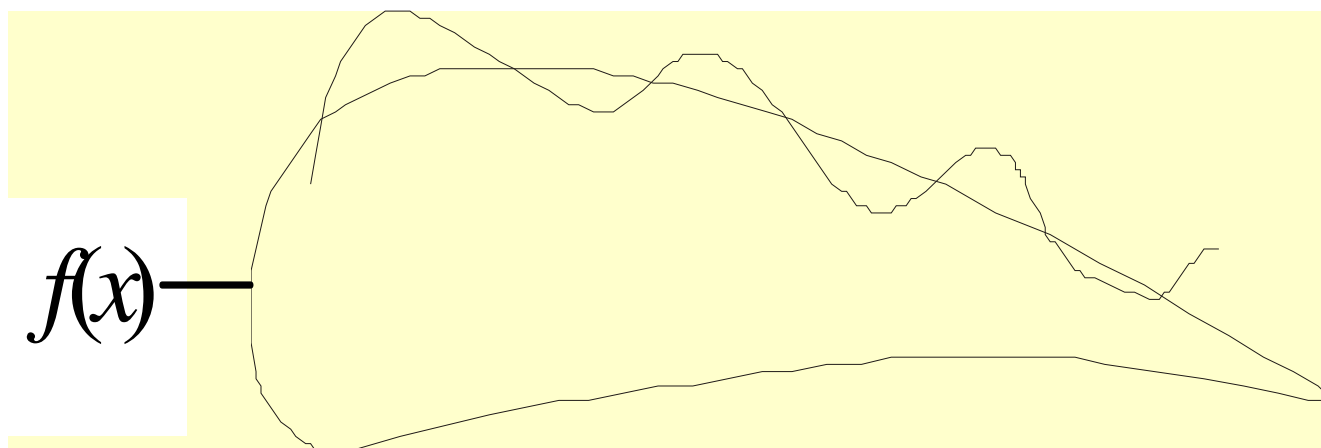
结论：当插值节点无限增加，节点间距无限缩小时，Lagrange插值并不是在整个插值区间内部都收敛。

P40的图2-5给出 $L_{10}(x)$ 的函数图形。可以看出，在靠近区间两端，插值多项式与 $f(x)$ 的误差大到不可接受的程度。

实际上，还可以找到很多高次插值不收敛的函数例子，如： $f(x)=|x|$ ， $x \in [-1, 1]$ 对等距插值不收敛。



(2) 保凸性差：实际当中，某些曲线的凸性是确定的，如飞机翼型。但若使用高次插值方法，往往引进许多不应有的拐点，损害了原有的曲线的凸性要求。



(3) 数值稳定性不好：也是高次插值存在的一些突出问题，这里不详细讨论。

2.5.2 分段线性插值 (P40自己看)

2.5.3 分段三次Hermite插值

(1) 定义:

设: 函数 $f(x)$ 在节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$f_0, f_1, \cdots, f_n$$

$$f'_0, f'_1, \cdots, f'_n$$

$I_h(x)$ 满足: 1、 $I_h(x) \in C'[a, b]$

$$2、 I_h(x_k) = f_k, I'_h(x_k) = f'_k \quad (k=0, \cdots, n)$$

$$3、 I_h(x) \text{ 为 3次多项式, } \forall x \in [x_k, x_{k+1}], (k=0, \cdots, n-1)$$

称 $I_h(x)$ 为 $f(x)$ 的分段三次Hermite插值函数。

指出两点：

(a) 分段三次Hermite插值满足的插值条件与要求，与前面讨论过Hermite插值相同，在节点处与被插值函数有相同的函数值与一阶导数值。但是不同的是插值函数改变了，前面构造的Hermite插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 是一个**整体高次插值**，而这里构造的是以**分段三次多项式**拼接起来的插值函数，是分段低次插值。

(b) 定义中关于分段三次Hermite插值函数的三条特征性质，只需2，3条即可，1是它们的推论。

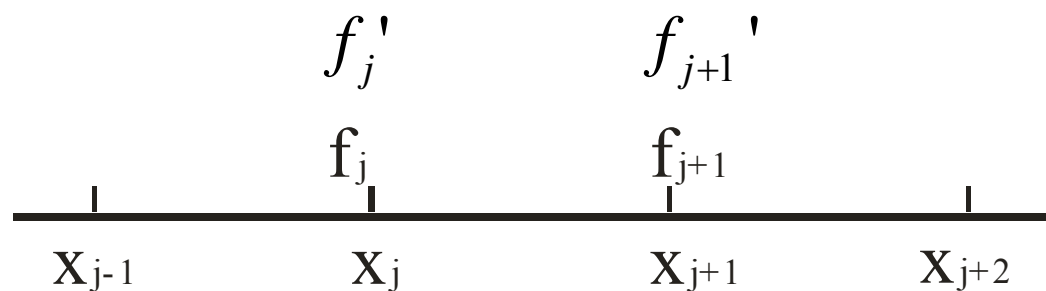
(2) 构造 $I_h(x)$

下面介绍分段三次插值函数的两种表达形式。

(a) $I_h(x)$ 的第一种表达式: 分区间表示法

由定义看出, 它是分段三次多项式拼接起来的, 我们可以考察每个小区间: $[x_j, x_{j+1}] \quad j = 0, \dots, n-1$

已知: $n=1$ 时, $2n+1=3$



在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上构造一个 $n=1$ 的三次Hermite插值多项式即可满足插值要求，可记为：

$$I_h(x) = H_3^j(x) \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

满足： $I_h(x_i) = H_3^j(x_i) = f_i$

$$I_h'(x_i) = H_3^{j'}(x_i) = f_i' \quad i = j, j+1$$

这就是P41式（5.3）所表示的 $I_h(x)$ 形式，我们用 $H_3^j(x)$ 表示第 j 个区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 的三次Hermite插值多项式。式（5.3）中各基函数表达式，即取自P38的式(4.8)—(4.11) 4个公式。

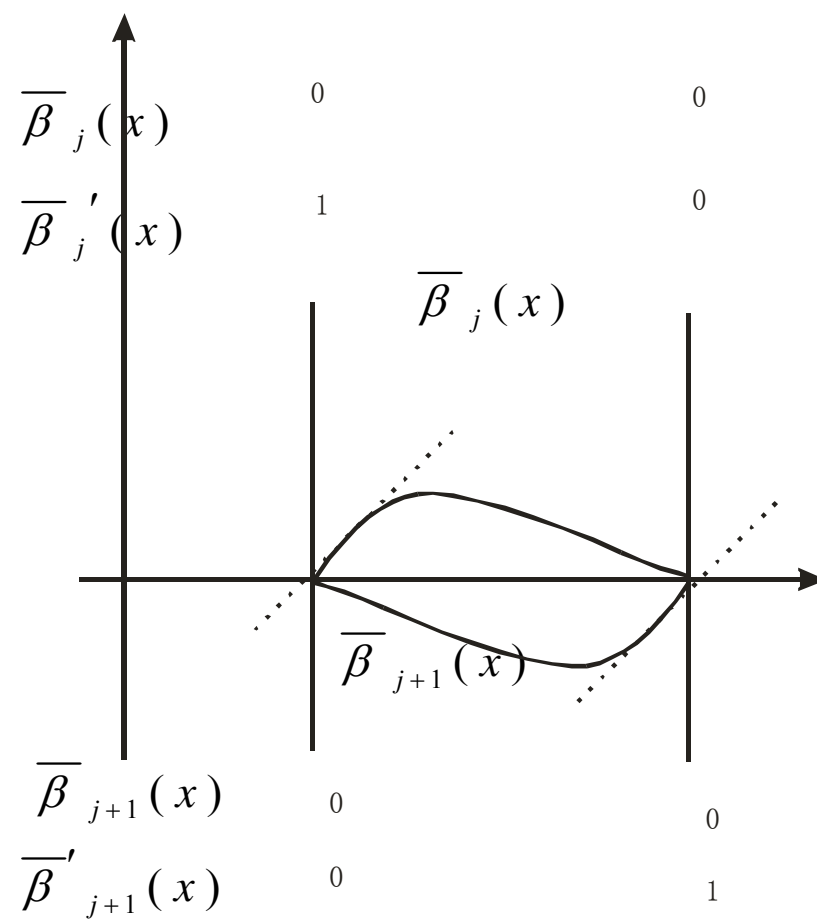
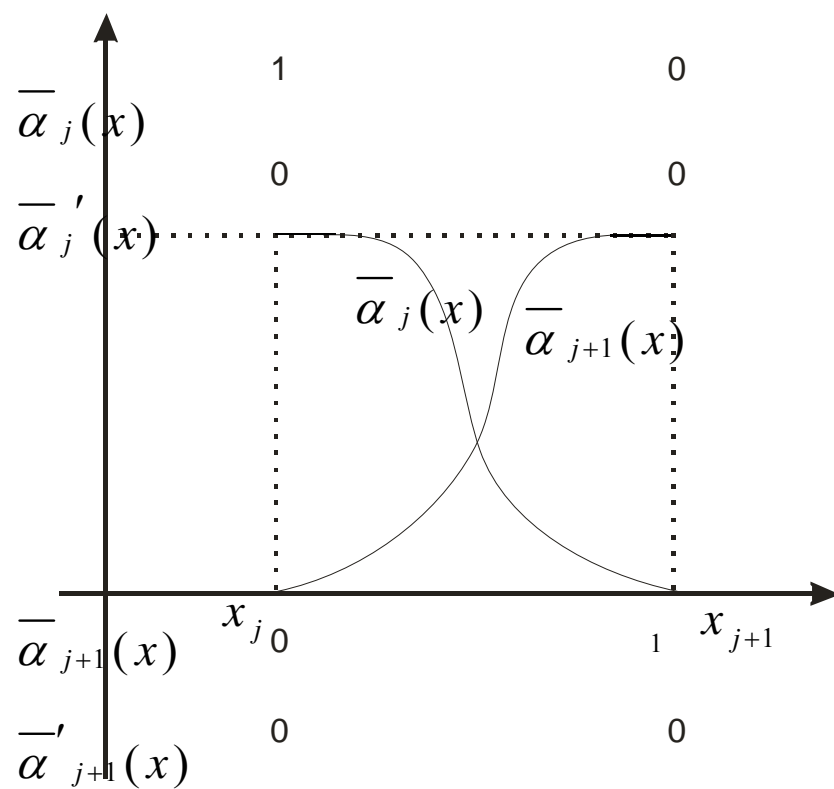
$$H_3^j(x) = f_j \overline{\alpha_j}(x) + f_{j+1} \overline{\alpha_{j+1}}(x) + f_j' \overline{\beta_j}(x) + f_{j+1}' \overline{\beta_{j+1}}(x)$$

$$\begin{aligned} H_3^j(x) = & \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right) f_j + \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right) f_{j+1} \\ & + \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right)^2 (x - x_j) f_j' + \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 (x - x_{j+1}) f_{j+1}' \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

——分区间表示的分段三次Hermite插值多项式

它们的函数图形如下：



概括起来说，分段三次Hermite插值函数 $I_h(x)$ 是由各子区间上 $n=1$ 的三次Hermite的插值多项式“拼接” ^{h} 起来的，从满足实际计算要求来讲，P41的式（5.3）足够了，但是，从表达的简洁以及理论分析的需要考虑，往往希望能有一种更为简洁的**统一**的表达式。

(b) $I_h(x)$ 的第二种表达式：整体表示法

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \alpha_j(x) + f'_j \beta_j(x)] \quad x \in [a, b]$$

这里容易与上节课介绍的对 $n+1$ 个节点作整体多次Hermite插值所得到的多项式 $H_{2n+1}(x)$ 作比较：

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \bar{\alpha}_j(x) + f'_j \bar{\beta}_j(x)] \quad x \in [a, b]$$

二者有完全相同的表达式，但函数性质完全不同。

引入两个符号：

- I_H ：分段三次Hermite插值函数（对节点 x_0, \dots, x_n ）全体组成的线性空间。
- P_{2n+1} ：次数 $\leq 2n+1$ 次多项式全体。

$$I_h(x) \in I_H \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_j(x) \\ \beta_j(x) \end{array} \right\} \in I_H \quad (j = 0, \dots, n)$$

$$H_{2n+1}(x) \in P_{2n+1} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{\alpha}_j(x) \\ \bar{\beta}_j(x) \end{array} \right\} \in P_{2n+1} \quad (j = 0, \dots, n)$$

结论：分段三次Hermite的插值基函数与整体Hermite插值基函数有根本性的区别，它们分属不同的函数类。

(3) 分段三次Hermite插值基函数的构造

$\alpha_j(x)$ $\beta_j(x)$ ($j = 0, \dots, n$) 应满足要求:

(1) 函数类: $\in I_H$

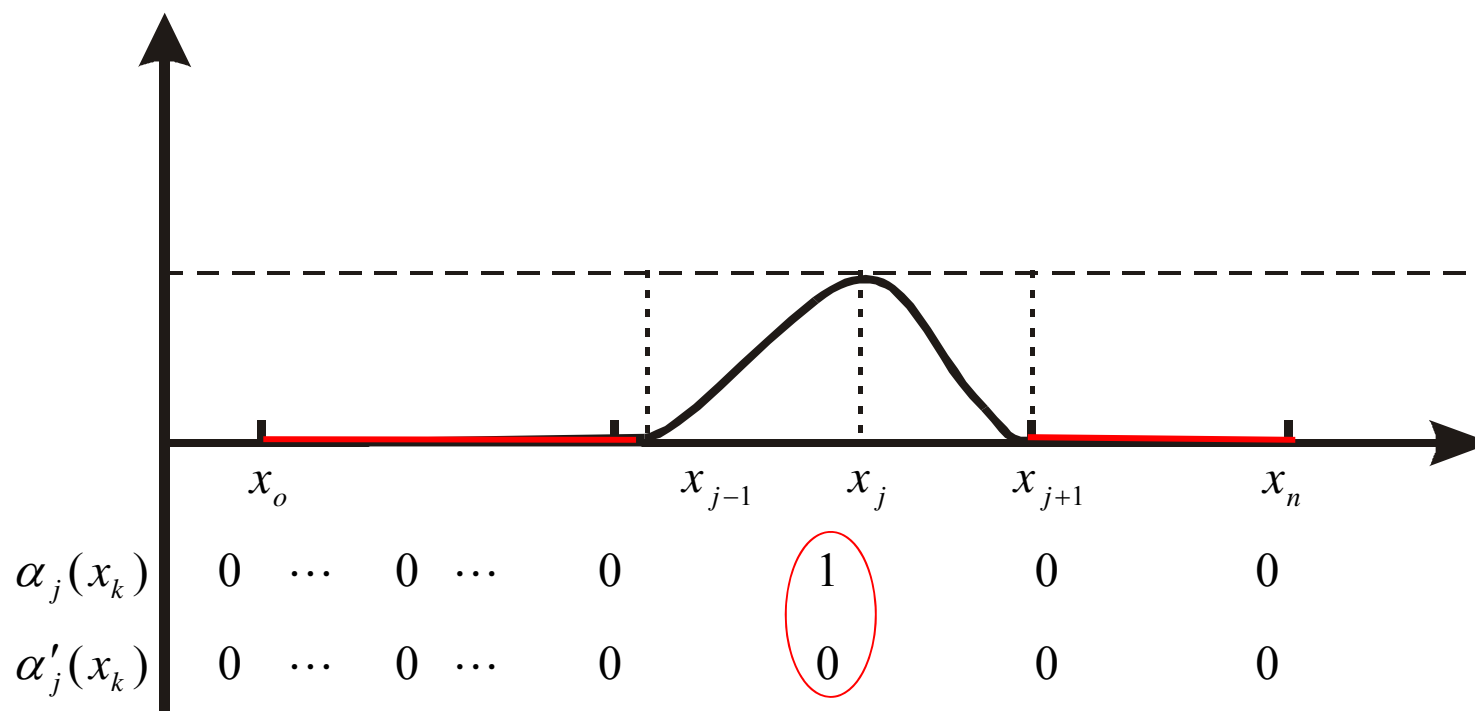
(2) 定义域: $[a, b]$

(3) 取值: 由于分段三次Hermite插值与高次Hermite插值满足相同的插值要求, 则两组基函数在节点的取值应当完全相同。因此, 类似地, 我们相对固定基函数编号为 j , 列出它在各节点的取值情况:

$\alpha_j(x)$	$\beta_j(x)$
一、 $\alpha_j(x_k) = \alpha'_j(x_k) = 0$ ($k \neq j$)	$\beta_j(x_k) = \beta'_j(x_k) = 0$ ($k \neq j$)
二、 $\alpha_j(x_j) = 1$	$\beta_j(x_j) = 0$
$\alpha'_j(x_j) = 0$	$\beta'_j(x_j) = 1$

从图上理解更直观：

(a) 定 $\alpha_j(x)$ ($j=1, \dots, n-1$), $\alpha_1(x) \cdots \alpha_{n-1}(x)$



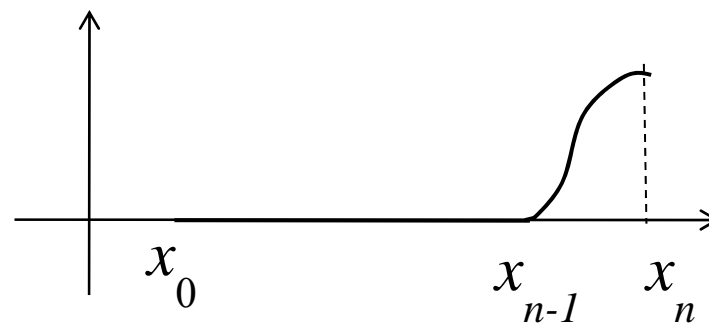
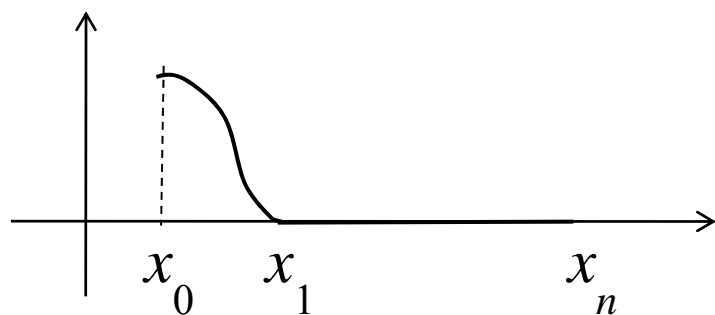
在两端函数与一阶导数值均为0的区间内, $\alpha_j(x)=0$ 。为什么?

不属于这种情况的只有两个区间： $[x_{j-1}, x_j]$ 与 $[x_j, x_{j+1}]$ 。

$[x_j, x_{j+1}]$ 内如何定 $\alpha_j(x)$ ：根据区间两端点的取值情况，对 $n=1$ 时的三次Hermite插值基函数的取值情况，只能取 $\bar{\alpha}_j(x)$ 的一支，并移至上图。

$[x_{j-1}, x_j]$ 内如何定 $\alpha_j(x)$ ：根据区间两端点的取值情况，对 $n=1$ 时的三次Hermite插值基函数的取值情况，只能取 $\bar{\alpha}_{j+1}(x)$ 的一支，并移至上图。

同理，可求出 $\alpha_o(x)$ 和 $\alpha_n(x)$



$$\alpha_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} \right) & x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right) & x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5.5)$$

(b) 定 $\beta_j(x)$, 把草图画出来, 可求得式 (5.6)

$$\beta_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)^2 (x - x_j) & x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \right)^2 (x - x_j) & x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5.6)$$

这样，我们构造了全部分段三次Hermite插值基函数 $\alpha_j(x)$ 与 $\beta_j(x)$ ($j=0,1,\dots,n$)，分段三次Hermite插值函数可用简洁统一形式表示：

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \alpha_j(x) + f'_j \beta_j(x)] \quad (5.4)$$

事实上，

$$(5.3) \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

$$= (5.4) + (5.5) + (5.6) \quad \forall x \in [a, b]$$

- Hermite插值函数:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \bar{\alpha}_j(x) + f_j' \bar{\beta}_j(x)] \quad x \in [a, b]$$

- 分段三次Hermite插值函数（区间表示法）：

$$H_3^j(x) = f_j \bar{\alpha}_j(x) + f_{j+1} \bar{\alpha}_{j+1}(x) + f_j' \bar{\beta}_j(x) + f_{j+1}' \bar{\beta}_{j+1}(x)$$

- 分段三次Hermite插值函数（整体表示法）：

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n [f_j \alpha_j(x) + f_j' \beta_j(x)]$$

它们的基函数有何不同？

(4) 插值余项

定理4 $f \in C^4[a, b]$, $I_h(x)$ 为 $f(x)$ 在节点

$$a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$$

上的分段三次埃尔米特插值多项式, 则有:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

其中: $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$

(5) 优良性质

由于分段三次Hermite插值函数区别于整体多次Hermite插值多项式，使它具有许多高次插值所不具备的。

(a) 具有良好的收敛性

(b) 在插值基函数的构造中可以看到，分段三次Hermite插值基函数具有**局部非零**的性质，对数值稳定性有好处。

小结：与多次插值相比，分段低次插值有如下优点：

- (1) 收敛性好
- (2) 稳定性好（误差影响仅具有局部化特点）
- (3) 保凸性好

缺点：光滑性不好

如：分段Lagrange插值 $\in C^0[a, b]$

分段三次Hermite插值 $\in C^1[a, b]$

这里，分段三次Hermite插值函数的光滑性比分段低次Lagrange插值函数的光滑性高一阶，代价是除给出节点函数值外，必须再提供 $n+1$ 个节点上的一阶导数值，但这往往在实际当中是难以做到的。

给分段低次插值提出新的需求：

- (1) 仅提供节点函数值（基本上）
- (2) 具有尽可能高的光滑性（整体上）

样条插值为这问题的解决提供了一个有效的方法，下面简单介绍应用广泛的三次样条插值。

§ 2.6 三次样条插值

2.6.1 三次样条函数

一、定义3, 设: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$S(x)$ 满足:

(1) $S(x) \in C^2[a, b]$

(2) 次数 ≤ 3 次多项式, $\forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, \cdots, n-1)$

称 $S(x)$ 为关于节点 x_0, x_1, \cdots, x_n **三次样条函数**。

若给定 $y_j = f(x_j) \quad (j = 0, \cdots, n)$ 且三次样条函数 $S(x)$ 满足 $S(x_j) = y_j \quad (j = 0, \cdots, n)$, 称 $S(x)$ 为**三次样条插值函数**。

定义3给出了两个定义，**首先**，定义了一个新的函数类，称为“三次样条函数”的函数类，它具有两个基本性质：

- ①由分段三次多项式“拼接”而成，即定义中第2条所界定的。
- ②具有整体二阶光滑性。

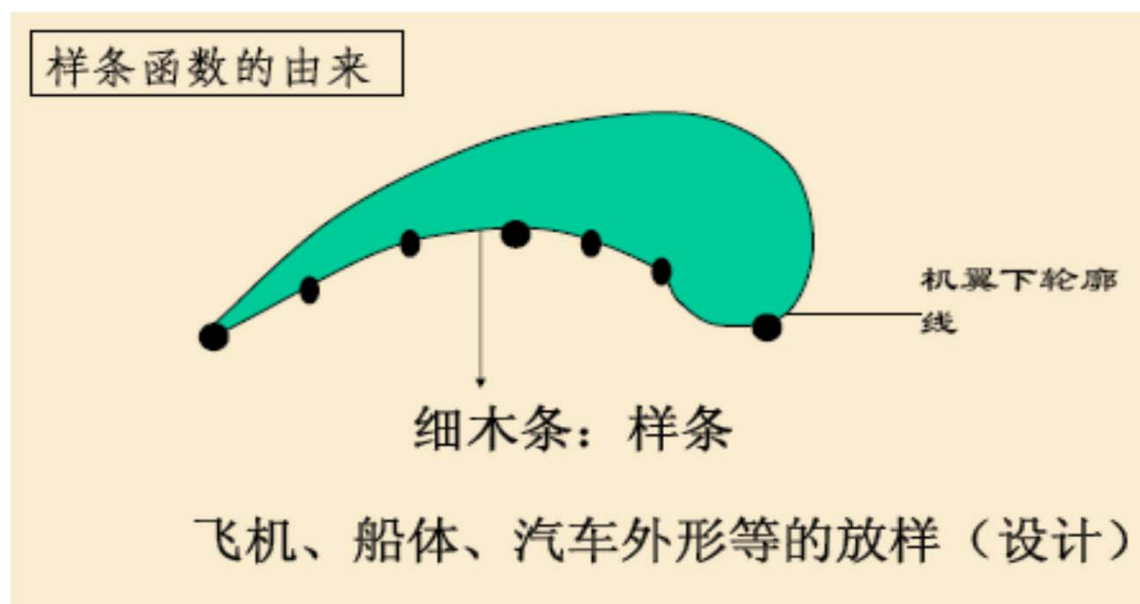
事实上， $S(x)$ 在各小区间内是三次式项式，二阶导数显然连续，因此，整体光滑性的要求是对节点而言的。

这就是说，各小区间定义的三次多项式，在交接点即区间端点（节点）处必须具有二阶光滑性的连接，因此，三次样条函数可概括为：**三次样条函数是二阶光滑连接的分段三次多项式。**

其次，定义3给出“三次样条插值函数”的定义，即，用三次样条函数作插值函数，就称为“三次样条插值”。

样条函数

一类分段光滑，各段交接处具有一定光滑性的函数，简称样条函数。样条函数的名称来源于船体放样时用来画光滑曲线的机械样条——弹性的细长条。它产生的背景是离散数据的处理。20世纪60年代中期，它与计算机辅助几何设计相结合，在外形设计（汽车、飞机等）方面得到了成功的应用。同时，样条理论研究亦逐步深入，后被作为函数逼近的有力工具。



三次样条插值函数 $S(x)$ 具有的**基本特点**:

- (1) $S(x)$ 分段三次多项式
- (2) $S(x) \in C^2[a, b]$, 二阶导数连续的函数空间
- (3) $S(x_j) = y_j, (j = 0, \dots, n)$, 满足插值要求

三次样条插值的**优点**:

(a) 具分段低次插值全部优点:

收敛性

稳定性

保凸性好

(b) 整体光滑性好

分段Lagrange插值 $\in C^0[a, b]$

分段三次Hermite插值 $\in C^1[a, b]$

三次样条插值函数 $S(x) \in C^2[a, b]$: 具有最高整体光滑性

(c) 仅需节点函数值 y_j ($j = 0, \dots, n$) (基本上)

结论：三次样条插值 “基本上只需提供节点函数值，即可得到一条整体光滑性较高的分段低次多项式的插值曲线”。近十多年来，得到广泛应用。

二、边界条件

样条插值中一个十分重要的概念：**边界条件**。之所以引入边界条件，是为了使三次样条插值函数能唯一确定下来。

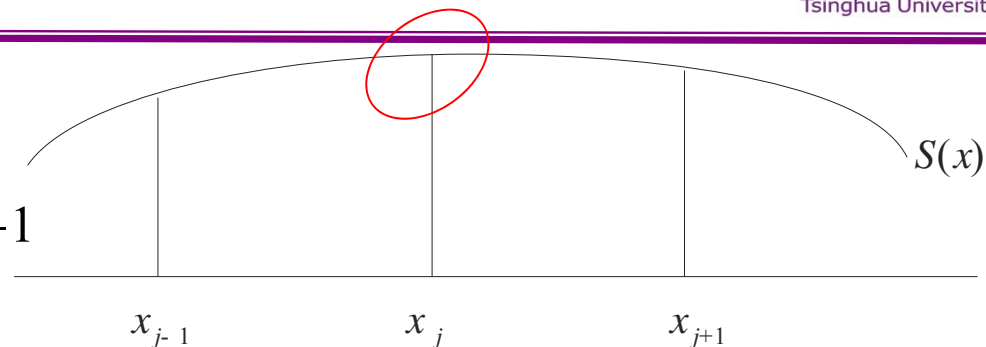
$S(x)$ 是分段定义的，可表示为：

$$S(x) = a_j + b_j x + c_j x^2 + d_j x^3, \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

要唯一确定 $S(x)$ ，就要确定全部待定常数： $4 \times n = 4n$ 个待定常数。

另一方面，根据定义3， $S(x)$ 应具有二阶光滑性的连续性质，可转化为对上述 $4n$ 个待定常数的如下约束条件：

$$\left. \begin{aligned} S(x_j - 0) &= S(x_j + 0) \\ S'(x_j - 0) &= S'(x_j + 0) \\ S''(x_j - 0) &= S''(x_j + 0) \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, n-1$$



即在全部内点，上述连续性应当得到满足，每一个连续性条件可以转化为上述待定系数应满足的一个方程，共有 $3(n-1)=3n-3$ 个。

再加上 $n+1$ 个节点上的插值条件： $S(x_j) = y_j$ ($j = 0, \dots, n$) 共 $n+1$ 个

总共可列出 $(3n-3) + (n+1) = 4n-2$ 个方程，所缺的两个条件一般在两个区间端点给出，故称“边界条件”。

常用的有以下三类边界条件：

I、已知两端点一阶导数： $S'(x_o) = f'_o$ ， $S'(x_n) = f'_n$

II、已知两端点二阶导数： $S''(x_o) = f''_o$ ， $S''(x_n) = f''_n$

若： $f''_o = f''_n = 0$ 称自然边界条件

III、周期边界条件：

当 $f(x)$ 是以 $x_n - x_o$ 为周期的周期函数，

则有： $S'(x_o + 0) = S'(x_n - 0)$

$$S''(x_o + 0) = S''(x_n - 0)$$

概括一下, $S(x)$ 满足:

(1) 分段三次

(2) $S(x_j) = y_j \quad (j = 0, \dots, n)$

(3)
$$\left. \begin{aligned} S(x_j - 0) &= S(x_j + 0) \\ S'(x_j - 0) &= S'(x_j + 0) \\ S''(x_j - 0) &= S''(x_j + 0) \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, n-1$$

(4) 边界条件

第二章课后练习 (5)



作业：二、17、19、21

预习：3.1、3.2

2.6.2 样条插值函数的建立



构造三次样条插值函数的方法有很多，比如在每个小区间上设定一个含4个特定常数的三次多项式，再通过建立节点的连续性条件方程、插值条件及边界条件定出 $4n$ 个待定常数。

除此，还有两种常用方法，以节点一阶导数值作为参数表达式的构造方法和以节点二阶导数值作为参数表达式的构造方法。下面着重介绍以节点二阶导数值作为参数表达式的构造思想和推导。

一、构造思想

我们来分析P43式 (6.8) 给出的函数表达式的性质

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j}$$

$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

其中： y_j ： 节点函数值（已知）

M_j ： 节点二阶导数值（待定）

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j}$$

$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}]$$



清华大学
Tsinghua University

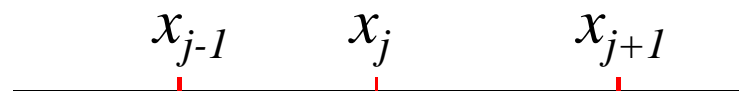
暂且不讨论这公式是如何推导出来的，而是先关注它具有的一些基本性质：

(1) 分段三次

(2) 节点取值:
$$S(x_j) = M_j \frac{h_j^3}{6h_j} + 0 + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{h_j}{h_j} + 0 = y_j$$

类似地有:
$$S(x_{j+1}) = y_{j+1}$$

(3) 连续性:



$$\begin{cases} S(x_j - 0) = y_j, [x_{j-1}, x_j]; & S(x_j + 0) = y_j, [x_j, x_{j+1}] \\ S(x_j - 0) = S(x_j + 0) & (j = 1, \dots, n-1) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

上述表达式已具备三次样条插值函数应具有“函数性质”。

(4) 考察二阶导数取值情况:

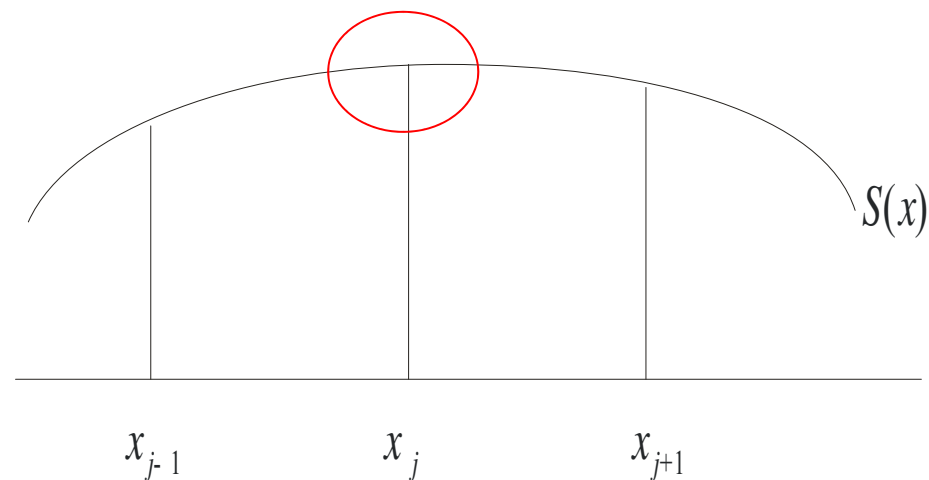
$$(a) \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}], \quad S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j}$$

代入 x_j , 有 $S''(x_j + 0) = M_j$

$$(b) \quad \forall x \in [x_{j-1}, x_j], \quad S''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_{j-1}} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}}$$

代入 x_j , 有 $S''(x_j - 0) = M_j$

则: $S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) = M_j$



上述分析表明，（6.8）给出的函数具备了三次样条插值函数 $S(x)$ 所需要的大多数性质：

$S(x)$ 满足的条件：

（1）分段三次

（2） $S(x_j) = y_j \quad (j = 0, \dots, n)$

（3）
$$\left. \begin{aligned} S(x_j - 0) &= S(x_j + 0) \\ S'(x_j - 0) &= S'(x_j + 0) \\ S''(x_j - 0) &= S''(x_j + 0) \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, n-1$$

（4）边界条件

可以把 (6.8) 概括为: $S(x, M_o, \cdots M_n)$

其中, $M_o, \cdots M_n$ 是节点二阶导数值, 可取为待定常数, 由余下的两组条件:

$$\begin{cases} S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0) & (j = 1, \cdots, n-1) \\ \text{边界条件} \end{cases} \quad \text{来确定。}$$

在力学上，细梁在 x_j 截面处的弯矩一般与该处的二阶导数有联系。同时，由节点 x_j 建立的一阶导数连续方程，一般将 x_{j-1} ， x_j ， x_{j+1} 三点处的二阶导数 M_{j-1} ， M_j ， M_{j+1} 联系起来，常称“**三弯矩**”方程。

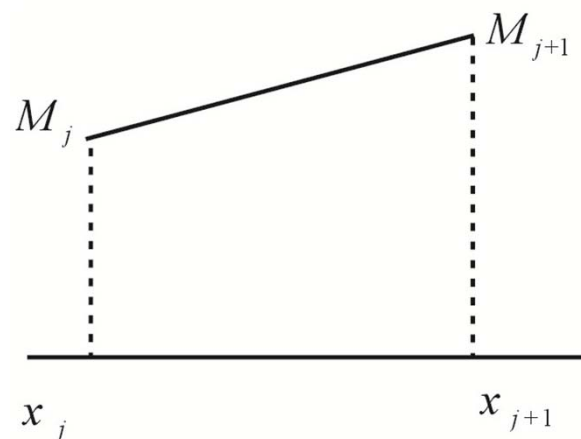
经三弯矩方程构造三次样条插值函数的思想概括为：从

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j}$$
$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, \dots, n-1) \quad (6.8)$$

出发，用 $S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$ ($j = 1, \dots, n-1$) 及两个边界条件列出三弯矩方程，求出 M_j ($j = 0, \dots, n$)

二、推导 $S(x, M_0, \dots, M_n)$ (6.8)

思路：三次样条插值函数是分段三次多项式拼接起来的，因此，在每个小区间内，其二阶导数应为一个一次式项式，当节点的二阶导数记为： $S''(x_j) = M_j$ ($j = 0, \dots, n$)，对区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 的二阶导函数表达式应有：


$$\begin{aligned} S''(x) (= L_1(x)) &= M_j \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \\ &= M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j} \end{aligned} \quad (6.7)$$

这里， $S''(x)$ 是准确表达式，为什么？

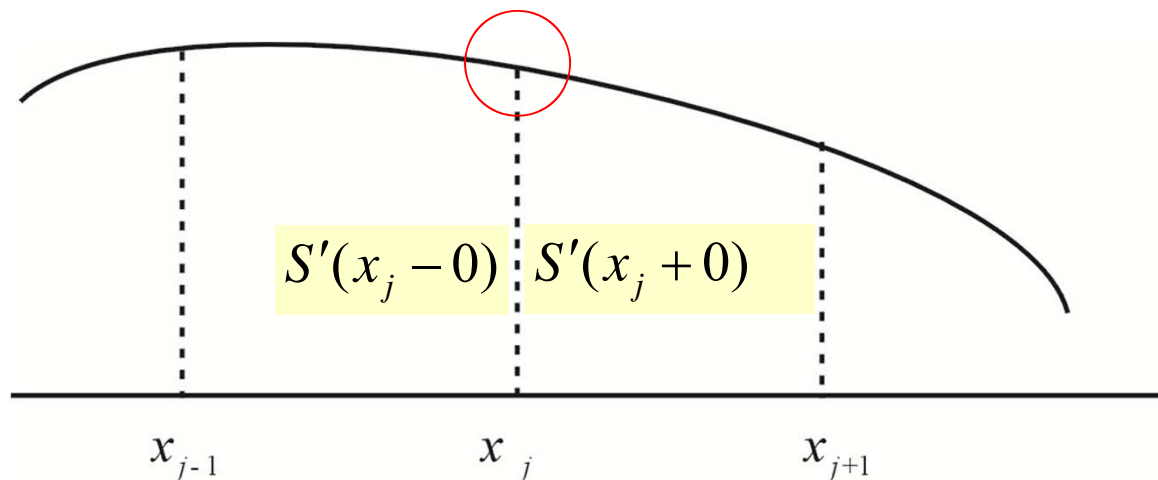
对 $S''(x)$ 作两次不定积分，用节点函数值 $S(x_j) = y_j$ 及 $S(x_{j+1}) = y_{j+1}$ 代入，确定两个积分常数即可得到P43的式 (6.8)。

三、推导三弯矩方程

三弯矩方程包括两部分，第一部分保证内点一阶导数连续，第二部分满足边界条件，先讨论第一部分方程的建立。

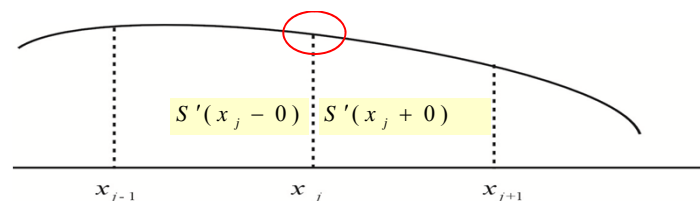
1、连续性： $S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$ ($j = 1, \dots, n-1$)

三次样条插值函数是按区间定义的，必须分别考察与 x_j 紧邻的两个小区间。





$[x_{j-1}, x_j]$



$[x_j, x_{j+1}]$

$$S(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_{j-1}} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_{j-1}} \\ + (y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_{j-1}^2}{6}) \frac{x_j - x}{h_{j-1}} + (y_j - \frac{M_j h_{j-1}^2}{6}) \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}}$$

求一阶导数:

$$S'(x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_{j-1}} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_{j-1}} \\ + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_{j-1}$$

用 x_j 代入求左侧导数:

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} \\ + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j} \quad (6.8)$$

$$S'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_j} \\ + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j \quad (6.9)$$

用 x_j 代入求右侧导数:

$$S'(x_j + 0) = -\frac{h_j}{3} M_j - \frac{h_j}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

$$\text{利用 } S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), \quad \mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (6.10)$$

$$\text{其中: } \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \quad \lambda_j = 1 - \mu_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \quad d_j = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}
 \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\
 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\
 & & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M_0 \\
 M_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 M_{n-2} \\
 M_{n-1} \\
 M_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 d_{n-2} \\
 d_{n-1}
 \end{bmatrix}$$

$(n-1)(n+1)$

$(n+1) \times 1 \quad (n-1) \times 1$

$n+1$ 个变量, $n-1$ 个方程, 还缺少两个方程。



2、边界条件:

(1) 已知: f'_0, f'_n

(a) f'_0 , 即已知区间 $[x_0, x_1]$ 左端点右侧导数:

$$\begin{array}{c} f'_0 + 0 \\ \hline x_0 \qquad x_1 \end{array} \qquad S'(x_j + 0) = -\frac{h_j}{3}M_j - \frac{h_j}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

由右侧导数表达式可知: $-\frac{h_0}{3}M_0 - \frac{h_0}{6}M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_0} = f'_0$

移项: $2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'_0)$ (6.12)

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{3}M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

(b) f'_n , 即已知区间 $[x_{n-1}, x_n]$ 右端点左侧导数:

类似上面的推导, 可得: $M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n])$ (6.12)

若引入 λ_0, d_0, M_n, d_n , 并作相关约定（如书）所给出的, 已知两端一阶导数的完整三弯矩方程可用如下矩阵形式表示:

$$\begin{bmatrix}
 2 & \lambda_0 & & & \\
 \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
 & & & & \mu_n & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 M_0 \\
 M_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 M_{n-1} \\
 M_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d_0 \\
 d_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 d_{n-1} \\
 d_n
 \end{bmatrix}
 \quad (6.13)$$

(n+1)(n+1)
(n+1)×1
(n+1)×1

(2) 已知: $M_o = f_o''$, $M_n = f_n''$

有:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_o'' \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

$(n-1)(n-1)$

$(n-1) \times 1$

$(n-1) \times 1$

(3) 周期边界条件: $M_o = M_n$, $\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$

其中:

$$\lambda_n = \frac{h_o}{h_{n-1} + h_o} , \quad \mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_o} , \quad d_n = 6 \frac{f[x_0 - x_1] - f[x_{n-1} - x_n]}{h_0 + h_{n-1}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$n \times n$ $n \times 1$ $n \times 1$

四、求解三弯矩方程

求解三弯矩方程就可以得到节点上的二阶导数，即可得到节点二阶导数作为待定常数的三次样条插值函数。

可以看到（1）（2）两类边界条件对应的三弯矩方程是十分典型的为三对角方程。我们给出一个常用的递推算法。

事实上，周期边界条件列出的三弯矩方程同样可采用类似递推算法。

求解三对角方程的追赶法

设求解如下三对角方程：

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & b_{m-1} & a_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & b_m & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{bmatrix}$$

从第一个方程解出 x_1 ：

$$x_1 = -\frac{c_1}{a_1}x_2 + \frac{q_1}{a_1} = -\frac{c_1}{p_1}x_2 + \frac{q_1}{p_1} = -r_1x_2 + g_1,$$

再以 x_1 代入第二个方程,并解出 x_2 ：

$$x_2 = -\frac{c_2}{a_2 - b_2r_1}x_3 + \frac{q_2 - b_2g_1}{a_2 - b_2r_1} = -\frac{c_2}{p_2}x_3 + \frac{q_2 - b_2g_1}{p_2} = -r_2x_3 + g_2$$

继续上述过程,可得递推式:

$$x_i = -\frac{c_i}{p_i}x_{i+1} + \frac{q_i - b_i g_{i-1}}{p_i} = -r_i x_{i+1} + g_i, \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

其中的系数可由如下递推关系式给出：

$$\begin{cases} p_1 = a_1, & r_{i-1} = c_{i-1}/p_{i-1}, p_i = a_i - b_i r_{i-1} \\ g_1 = q_1/p_1, & g_i = (q_i - b_i g_{i-1})/p_i \end{cases} \quad (i=2, \dots, m).$$

以上称为“追过程”。当求出 g_m ，即有 $x_m = g_m$ ，再利用前面导出的递推关系式，可倒推地求出 x_{m-1}, \dots, x_1 ，即：

$$\begin{cases} x_m = g_m \\ x_j = g_j - r_j x_{j+1}, \end{cases} \quad (j=m-1, m-2, \dots, 1).$$

以上称为“赶过程”。

实际上，“追过程”相当于代入消元，而“赶过程”即回代。追赶法是 Gauss 消去法的特殊形式。

小结：以节点二阶导数作为参数构造的三次样条插值函数只需求解大约 n 个未知数的线性代数方程组，比在每个小区间设定一个带4个待定常数的三次多项式构造三次样条插值函数，计算量得到极大节省。 $4n \rightarrow n+1$ 。

除此，以节点一阶导数作为待定常数构造的三次样条插值函数也是常用和有效的方法。P42简单提到这种构造方法。书上给上两个例子，自己看看。

2.6.3 误差界与收敛性（不要求）

插值方法总结

- (1) 插值方法是经典而实用的方法，是函数逼近、数值微分、数值积分以及微分方程数值解的基础。
- (2) Lagrange插值理论上较为重要；Newton插值实际应用较为方便，尤其是等距节点的Newton前插和后插公式应用更加广泛。
- (3) 对于充分光滑的被插值函数，可以用微分形式给出误差估计，其它情况下用均差形式给出误差估计。
- (4) 由于高次插值存在病态性质，实际应用中很少使用高次插值，更多使用分段低次插值。本书介绍的分段线性插值、分段三次Hermite插值和三次样条插值。其中，**三次样条插值**由于具有良好的收敛性、稳定性、二阶光滑性，在理论和实践中均具有重要意义。

对于样条函数理论，本书仅仅介绍了最常用的三弯矩方程。