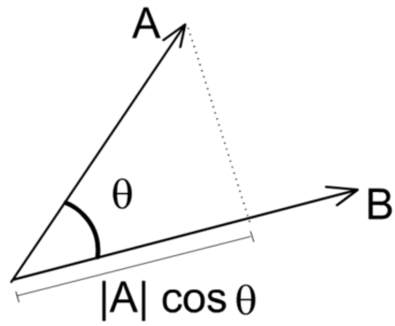
• 点积

• 代数定义：

- $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ 与 $\vec{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ 的点积定义为：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



• 几何定义：

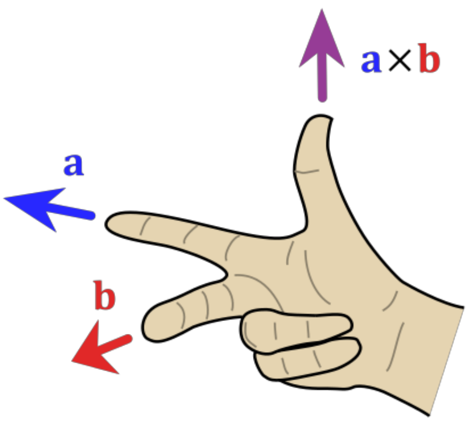
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

其中，θ 是两个向量的夹角

• 应用：

A. 计算机图形学常用来进行方向性判断，如两向量点积大于0，则它们的方向朝向相近；如果小于0，则方向相反。
B. 向量内积是人工智能领域中的神经网络技术的数学基础之一。
C. 此方法被用于动画渲染（Animation-Rendering）。

• 叉积



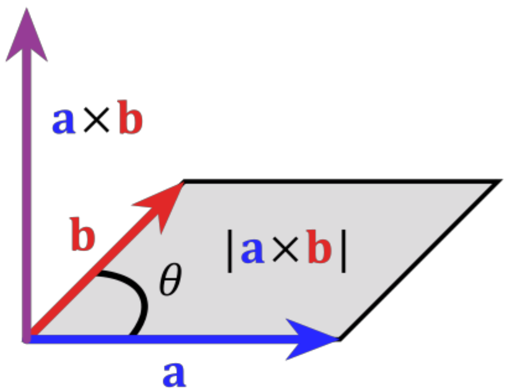
使用右手定则确定叉积的方向

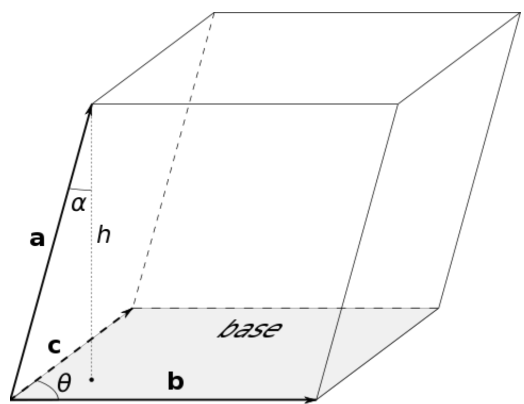
• 代数定义：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

• 几何定义：

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\theta$$





$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

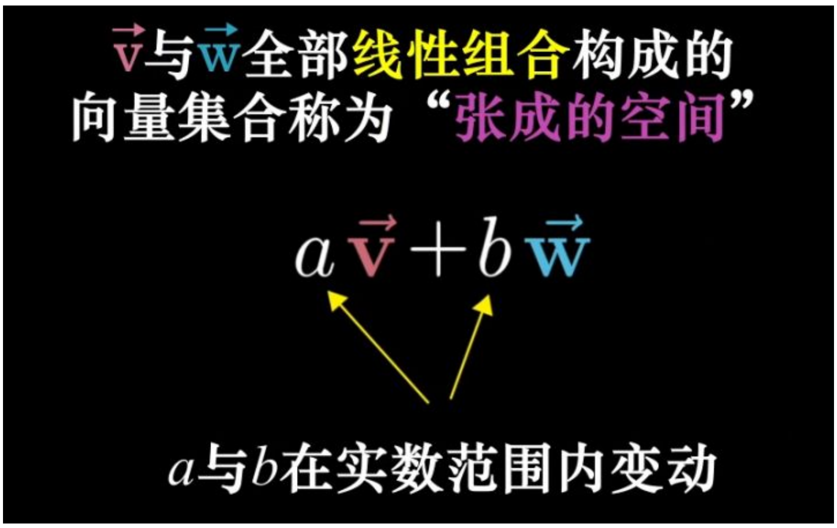
• 点积和叉积的异同

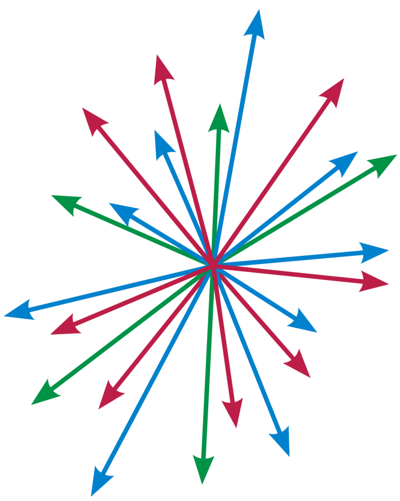
名称	标积/内积/数量积/点积	矢积/外积/向量积/叉积
运算式（a，b和c粗体字，表示向量）	**a**·**b**=|**a**||**b**|·cosθ	**a**×**b**=**c**，其中|**c**|=|**a**||**b**|·sinθ，**c**的方向遵守右手定则
几何意义	向量**a**在向量**b**方向上的投影与向量**b**的模的乘积	**c**是垂直a、b所在平面，且以|**b**|·sinθ为高、|**a**|为底的平行四边形的面积
运算结果的区别	标量（常用于物理）/数量（常用于数学）	矢量（常用于物理）/向量（常用于数学）

• 线性生成空间

• 定义：

向量空间中一个向量集合的**线性生成空间**（linear span，也称为**线性包** linear hull），是所有包含这个集合的线性子空间的交集，从而一个向量集合的线性生成空间也是一个向量空间。

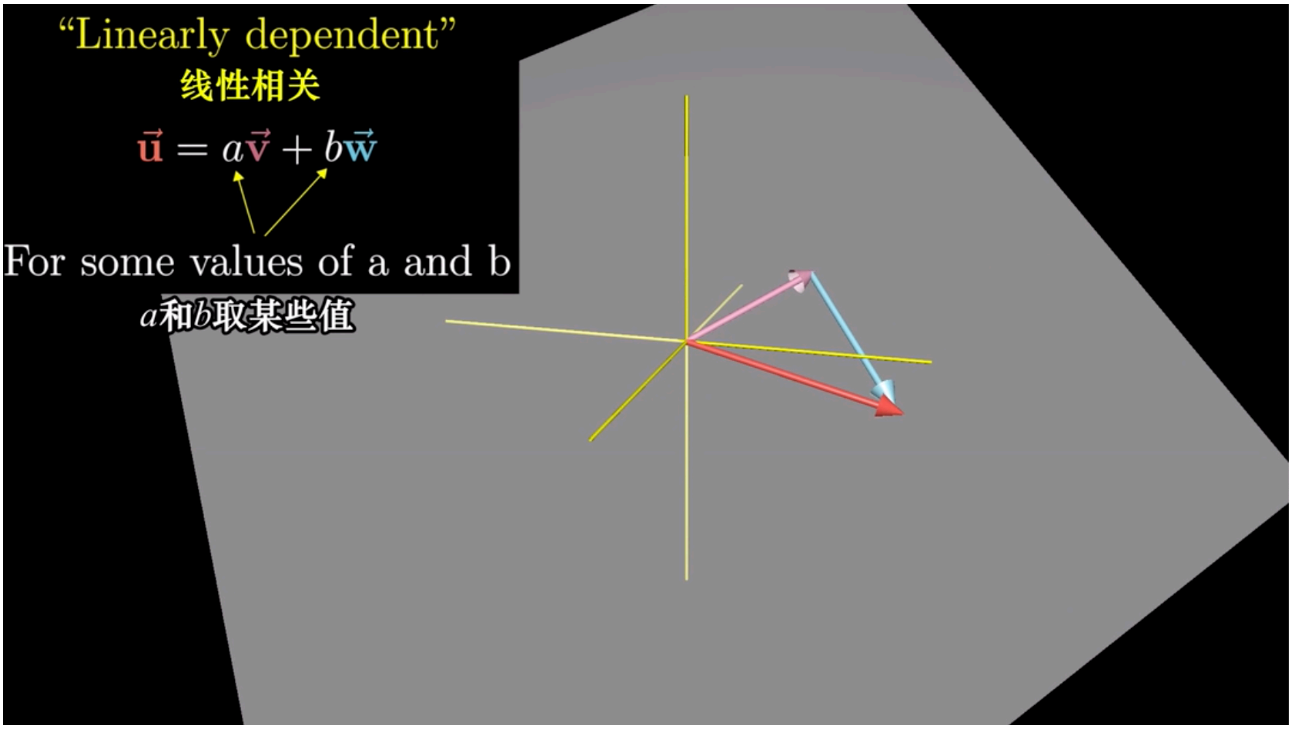


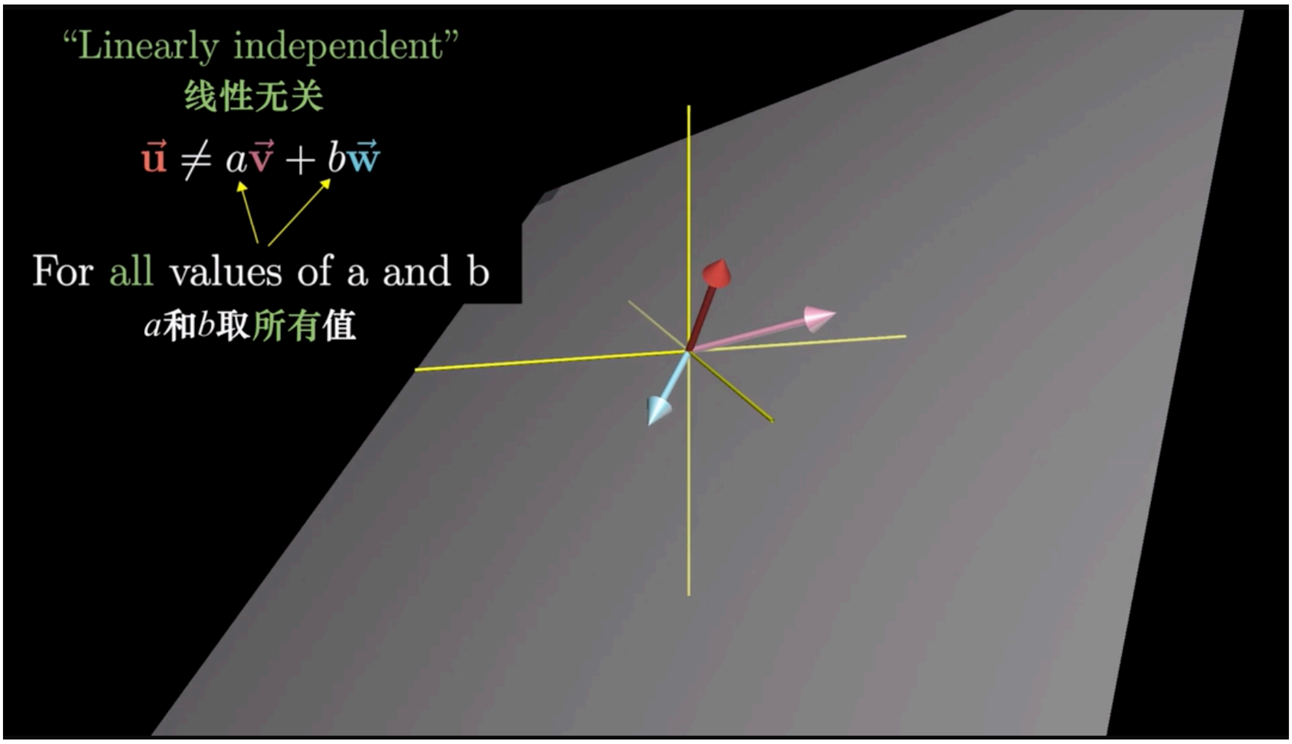


- # 线性相关

- ## 定义：

向量空间的一组元素中，若没有向量可用**有限个**其他向量的线性组合所表示，则称为**线性无关**或**线性独立**（linearly independent），反之称为**线性相关**（linearly dependent）。





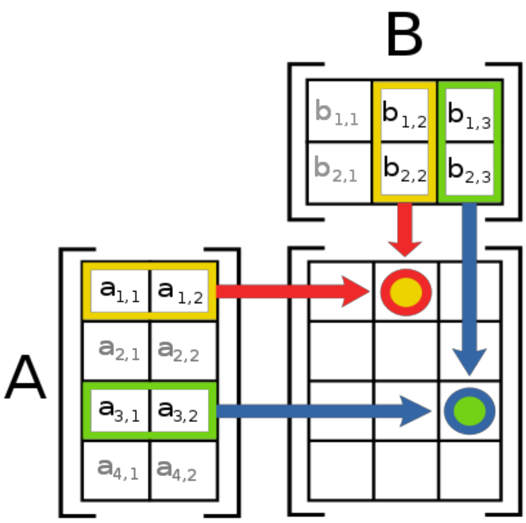
• 矩阵运算

运算	定义	例子
加（减）法	$m\times n$矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的和（差）：$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$为一个$m\times n$矩阵，其中每个元素是$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$相应元素的和（差）， $(\mathbf{A}\pm\mathbf{B}_{i,j})=\mathbf{A}_{i,j}\pm\mathbf{B}_{i,j}$， 其中$1\le i\le m$ $1\le j\le n$	$\begin{bmatrix}1&3&1\\1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&5\\7&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&3+0&1+5\\1+7&0+5&0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\8&5&0\end{bmatrix}$
数乘	标量c与矩阵$\mathbf{A}$的数乘：$c\mathbf{A}$的每个元素是$\mathbf{A}$的相应元素与c的乘积， $(c\mathbf{A})_{i,j}=c\cdot\mathbf{A}_{i,j}$	$2\cdot\begin{bmatrix}1&8&-3\\4&-2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1&2\cdot8&2\cdot(-3)\\2\cdot4&2\cdot(-2)&2\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&16&-6\\8&-4&10\end{bmatrix}$
转置	$m\times n$矩阵$\mathbf{A}$的转置是一个$n\times m$的矩阵，记为$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$（有些书中也记为$\mathbf{A}^{\mathrm{tr}}$或${}^{t}\mathbf{A}$、$\mathbf{A}'$），其中的第i个行矢量是原矩阵$\mathbf{A}$的第i个列矢量；或者说，转置矩阵$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$第i行第j列的元素是原矩阵$\mathbf{A}$第j行第i列的元素， $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{i,j}=\mathbf{A}_{i,j}$	$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-6&7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0\\2&-6\\3&7\end{bmatrix}$

注意：数乘时标量的位置，须满足 $A_{m\times n}\,.\,B_{n\times p}=C_{m\times p}$，以下为标准书写模式：

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\cdot 2 \qquad \& \qquad 2\cdot\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}$$

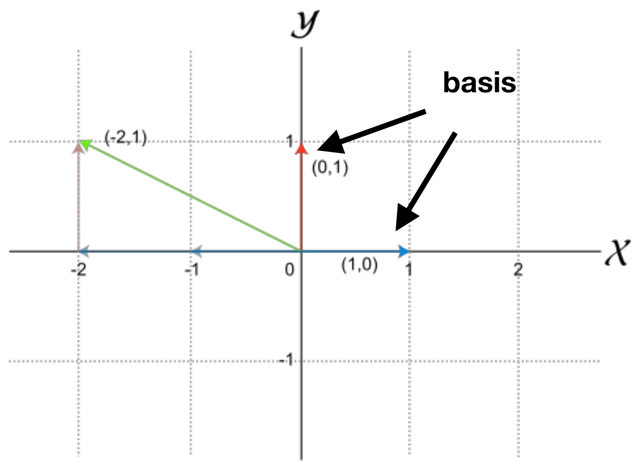
• 矩阵乘法



• 基：

• 定义：

基(basis)（也称为**基底**）是描述、刻画向量空间的基本工具。向量空间的基是它的一个特殊的子集，基的元素称为**基向量**。向量空间中任意一个元素，都可以唯一地表示成基向量的线性组合。



The Standard Basis of $\mathbb{R}^2$

- # 域：

  - ## 定义：

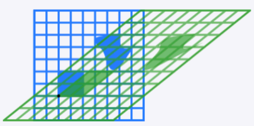
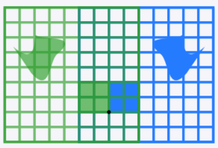
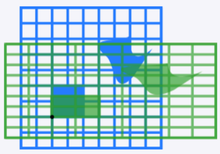
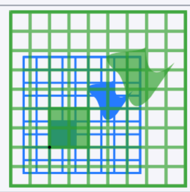
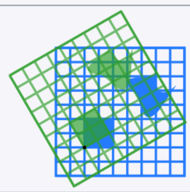
    域（Field）是一种可进行加、减、乘和除（除了除以零之外，“零”即加法单位元）运算的代数结构。**域**的概念是**数域**以及四则运算的推广。

    - 正整数，整数都不是域
    - 有理数，实数，复数是域
    - 所有有序对的集合是域
    - 元素的映射是域
    - 集合到集合的映射是域

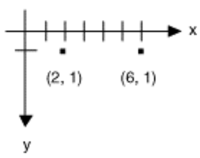
- # 线性变换

详见：线性代数的本质 - 03 - 矩阵与线性变换

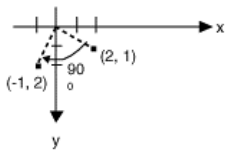
https://www.bilibili.com/video/av6043439?from=search&seid=2220423731251678544

推移，幅度m=1.25.	水平镜射变换	“挤压”变换，压缩程度r=3/2	伸缩，3/2倍	旋转，左转30°
$\begin{bmatrix}1 & 1.25\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0\\0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0\\0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6})\\\sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6})\end{bmatrix}$
				

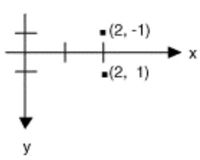
缩放 $\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 1\end{bmatrix}$



旋转 90 度 $\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}$



相对于 x 轴取镜像 $\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 6\end{bmatrix}$$