计　算　方　法

实验指导与实验报告

姓名______ __

学号__

院系____计算学部__

专业______________

哈尔滨工业大学

题目（摘要）
拉格朗日插值

前　言：（目的和意义）

目的：利用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 求 $f(x)$ 的近似值

意义：数学上来说，拉格朗日插值法可以给出一个恰好穿过二维平面上若干个已知点的多项式函数。而拉格朗日插值法就是一种一般可以在 O(n^2)的复杂度下求出多项式的方法。通过这个实验可以对拉格朗日插值法产生更深刻的理解。

数学原理

给定平面上 $n+1$ 个不同的数据点 $(x_k, f(x_k))$，$k=0,1,\cdots,n$，$x_i \neq x_j$，$i \neq j$；则满足条件

$$P_n(x_k) = f(x_k)\text{，}\quad k=0,1,\cdots,n$$

的 n 次拉格朗日插值多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

是存在唯一的。若 $x_k \in [a,b], k=0,1,\cdots,n$，且函数 $f(x)$ 充分光滑，则当 $x \in [a,b]$ 时，有误差估计式

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\text{，}\quad \xi \in [a,b]$$

程序设计流程

程序流程：

1 置 $y=0.0$；$k=0$

2 当 $k \le n$ 时，做 2.1—2.4

2.1 置 $l=1.0$；

2.2 对 $j=0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$，置 $l = l\cdot(x-x_j)/(x_k-x_j)$

2.3 置 $y = y + l\cdot f(x_k)$

2.4 置 $k=k+1$

3 输出 x, y

4 停机

实验结果、结论与讨论

问题一：拉格朗日插值多项式的次数 n 越大越好吗？

实验结果：

（1）.对于 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in[-5,5]$,考虑等距节点的拉格朗日插值多项式 ，即将区间进行 n 等分，分别取 $n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算 $P_n(x)$ 在 $x=0.75$，$x=1.75$，$x=2.75$，$x=3.75$，$x=4.75$ 处的函数值。

	X=0.75	**X=1.75**	**X=2.75**	**X=3.75**	**X=4.75**
N=5	Y=0.528974	Y=0.373325	Y=0.153733	Y=-0.025954	Y=-0.0157377
N=10	Y=0.67899	Y=0.19058	Y=0.215592	Y=-0.231462	Y=1.92363
N=20	Y=0.63675	Y=0.23844	Y=0.08065	Y=-0.44705	Y=-39.952
真实值	Y=0.64	Y=0.246153	Y=0.116788	Y=0.066390	Y=0.042440

（2）设 $f(x)=e^x$ 考虑等距节点的拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$，即将区间 $[-1,1]$ 进行 n 等分，记 $h=\dfrac{2.0}{n}$，$x_k=-1.0+k\cdot h$，$k=0,1,\cdots,n$，构造 $P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。分别取 $n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算 $P_n(x)$ 在 $x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$ 处的函数值。

	X=-0.95	**X=-0.05**	**X=0.05**	**X=0.95**
N=5	Y=0.386798	Y=0.951248	Y=1.05129	Y=2.58578
N=10	Y=0.386741	Y=0.951229	Y=1.05127	Y=2.58571
N=20	Y=0.386741	Y=0.951229	Y=1.05127	Y=2.58571
真实值	Y=0.386741	Y=0.951229	Y=1.05127	Y=2.58571

结论：拉格朗日插值多项式的次数 n 并不是越大越好

讨论：从上述两个例子可以看出，很显然第一个例子中 n=5 时拟合效果较好，第二个例子中 n=20 时拟合效果较好。当插值点比较多的时候，拉格朗日插值多项式的次数可能会很高，因此具有数值不稳定的特点，也就是说尽管在已知的几个点取到给定的数值，但在附近却会和“实际上”的值之间有很大的偏差。这类现象也被称为龙格现象，解决的办法是分段用较低次数的插值多项式。由此可见，n 并不是越大越好，需要根据实际情况来取合适的值。

问题 2 插值区间越小越好吗？

（1） 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in[-1,1]$，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$，即将区间 $[-1,1]$ 进行 n 等分，记 $h=\dfrac{2.0}{n}$，分别取 $n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算 $P_n(x)$ 在 $x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$ 处的函数值。

	X=-0.95	**X=-0.05**	**X=0.05**	**X=0.95**
N=5	Y=0.517147	Y=0.992790	Y=0.992790	Y=0.517147
N=10	Y=0.526407	Y=0.997506	Y=0.997506	Y=0.526407
N=20	Y=0.525620	Y=0.997506	Y=0.997506	Y=0.525620
真实值	Y=0.525624	Y=0.997506	Y=0.997506	Y=0.525624

（2）设 $f(x)=e^x$，$x\in[-5,5]$，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$，即将区间 $[-5,5]$ 进行 n 等分，记 $h=\dfrac{2.0}{n}$，$x_k=-1.0+k\cdot h$，$k=0,1,\cdots,n$，构造 $P_n(x)$，利用拉

格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。分别取 $n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算 $P_n(x)$ 在 $x=-4.75$，$x=-0.25$，$x=0.25$，$x=4.75$ 处的函数值。

	X=-4.75	**X=-0.25**	**X=0.25**	**X=4.75**
N=5	1.147034	1.30215	1.84121	119.6211
N=10	-0.001956	0.778686	1.28414	115.607
N=20	0.008651	0.778800	1.28402	115.584
真实值	Y=0.008651	Y=0.778800	Y=1.284025	Y=115.584

结论：拉格朗日插值多项式的插值区间越小越好

讨论：从上述两个例子可以看出，很显然与第（1）问相比，两个函数减小插值区间之后的估计误差明显下降，因此我们可以推测拉格朗日插值多项式的插值区间越小越好。

问题 3 在区间 $[-1,1]$ 考虑拉格朗日插值问题，为了使得插值误差较小，应如何选取插值节点？

（1）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in[-1,1]$，考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$，记 $x_k=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$，$k=0,1,\cdots,n$，构造 $P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。分别取 $n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算 $P_n(x)$ 在 $x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$ 处的函数值。

	X=-0.95	**X=-0.05**	**X=0.05**	**X=0.95**
N=5	0.523881	0.987881	0.987881	0.523881
N=10	0.525682	0.997509	0.997509	0.525682
N=20	0.525624	0.997506	0.997506	0.525624
真实值	Y=0.525624	Y=0.997506	Y=0.997506	Y=0.525624

（2）设 $f(x)=e^x$，$x\in[-1,1]$，考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$，记 $x_k=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$，$k=0,1,\cdots,n$，构造 $P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。分别取 $n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算 $P_n(x)$ 在 $x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$ 处的函数值。

	X=-0.95	**X=-0.05**	**X=0.05**	**X=0.95**
N=5	Y= 0.386754	Y=0.951272	Y=1.05131	Y=2.58573
N=10	Y= 0.386741	Y=0.951229	Y=1.05127	Y=2.58571
N=20	Y=0.386741	Y=0.951229	Y=1.05127	Y=2.58571
真实值	Y=0.386741	Y=0.951229	Y=1.05127	Y=2.58571

结论：合适地选择插值点确实可以增加拉格朗日插值的插值精度。

讨论：从上述两个例子可以看出，很显然与第（1）问相比，当两个函数的插值点不再使用等距节点之后，拉格朗日插值精度都有了一定的上升，因此可以得出合适选择插值点确实可以使得插值误差变小。

问题 4 考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗？

（1）设 $f(x)=\sqrt{x}$，关于以 $x_0=1$，$x_1=4$，$x_2=9$ 为节点的拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。同时计算 $P_2(x)$ 在 $x=5$，$x=50$，

$x=115$，$x=185$处的函数值。

X	5	50	115	185
Y	2.26667	-20.2333	-171.9	-492.733

（2）设 $f(x)=\sqrt{x}$，关于以 $x_0=36$，$x_1=49$，$x_2=64$ 为节点的拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。同时计算 $P_2(x)$ 在 $x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$ 处的函数值。

X	5	50	115	185
Y	3.11575	7.07179	10.167	10.0388

（3）设 $f(x)=\sqrt{x}$，关于以 $x_0=100$，$x_1=121$，$x_2=144$ 为节点的拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。同时计算 $P_2(x)$ 在 $x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$ 处的函数值。

X	5	50	115	185
Y	4.43911	7.28496	10.7228	13.5357

（4）设 $f(x)=\sqrt{x}$，关于以 $x_0=169$，$x_1=196$，$x_2=225$ 为节点的拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式 $P_2(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值。同时计算 $P_2(x)$ 在 $x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$ 处的函数值。

X	5	50	115	185
Y	5.49717	7.80013	10.8005	13.6006

结论：内插比外推更可靠

讨论：从上述四个例子来看，很显然内插比外推更可靠。

思考题

1. 对实验 1 存在的问题，应如何解决？

   拉格朗日插值过程中如果插值的次数 n 过大很容易出现龙格现象，为了解决这种问题，需要确定合适的插值次数，使得插值误差达到最小，不能追求高次的拟合方式，如果选用较低次的多项式拟合已经开始可以达到预期的精度，那么就可以选用该次数；如果低次拟合无法满足要求，那么可以将待拟合的函数分为多段，进行多段的线性拟合。

2. 对实验 2 存在的问题的回答，试加以说明

   对于拉格朗日插值而言，插值区间越小意味着多项式需要拟合的函数的区间越小，在给出同样的插值点数量的条件下，插值区间越小意味着插值过程中得到的区间的信息更完整。同时，由于拉格朗日插值需要拟合的是一个非多项式的函数，因此在较小的插值区间上这一函数更有可能被一个多项式拟合。

3. 对实验 3 存在的问题的回答，试加以说明

考虑到拉格朗日插值法的插值余项的形式，其中含有插值函数的 n+1 阶导数和两个插值点之间的距离，在选取插值点的时候如果能保证这两者的乘积之和达到最小那么就意味着拉格朗日插值的插值误差达到了最小，因此根据每一个不同的待插值的函数可以合理选择不同的插值点，从而使得拉格朗日插值的插值误差减小。

4. 如何理解插值问题中的内插和外推？

内插就是需要估计函数值的点在插值区间之内，而外推就是需要估计函数值的点在插值区间之外。