

数字世界精彩无限

# Unit 3 布尔代数的应用、最小项、最大项展开式

张英涛

计算机科学与技术学院

哈尔滨工业大学



- 布尔代数的应用
- 最小项、最大项展开式
- 不完全给定函数

# 组合逻辑电路的设计方法

---

已知——设计要求  
待求——逻辑图



**步骤：**

1. 根据设计要求确定  $\longrightarrow$  真值表
2. 根据真值表  $\longrightarrow$  表达式 (卡诺图)
3. 化简
4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图

# 组合逻辑电路的设计方法

---

## 逻辑设计目标

- 实现逻辑功能
- 满足性能指标
- 综合考虑各项因素：

大小、功耗、价格、可靠性、

速度、易实现、易维修、美观等

**注：设计不唯一，最佳设计方案随新技术的不断推出而变化**

# 布尔代数的应用——组合逻辑设计

---

## How to design a combinational logic circuit?

1. 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式
2. 根据真值表，写出两种标准形式的逻辑表达式：

标准与或式 (minterm expansion: and-or)

标准或与式 (maxterm expansion: or-and)



# 组合逻辑设计——文字描述的功能直接转换为表达式

例：

逻辑关系

Mary watches TV **if** it is Monday night **and** she has finished her homework

定义：

$F=1$ ：看电视；  $F=0$ ：不看电视.

$A=1$ ：周一晚上；  $A=0$ ：不是周一晚上.

$B=1$ ：完成作业；  $B=0$ ：没完成作业

$$F = A \cdot B$$

# 组合逻辑设计——文字描述的功能直接转换为表达式

---

例：

The alarm will ring iff the alarm switch is on and  
the door is not closed or it is after 6 P.M. and  
the window is not closed



# 组合逻辑设计——文字描述的功能直接转换为表达式

---

例：

$$Z = AB' + CD'$$

The alarm will ring **iff** the alarm switch is on **and**

$Z$

$A$

the door is not closed **or** it is after 6 P.M. **and**

$B'$

$C$

the window is not closed

$D'$

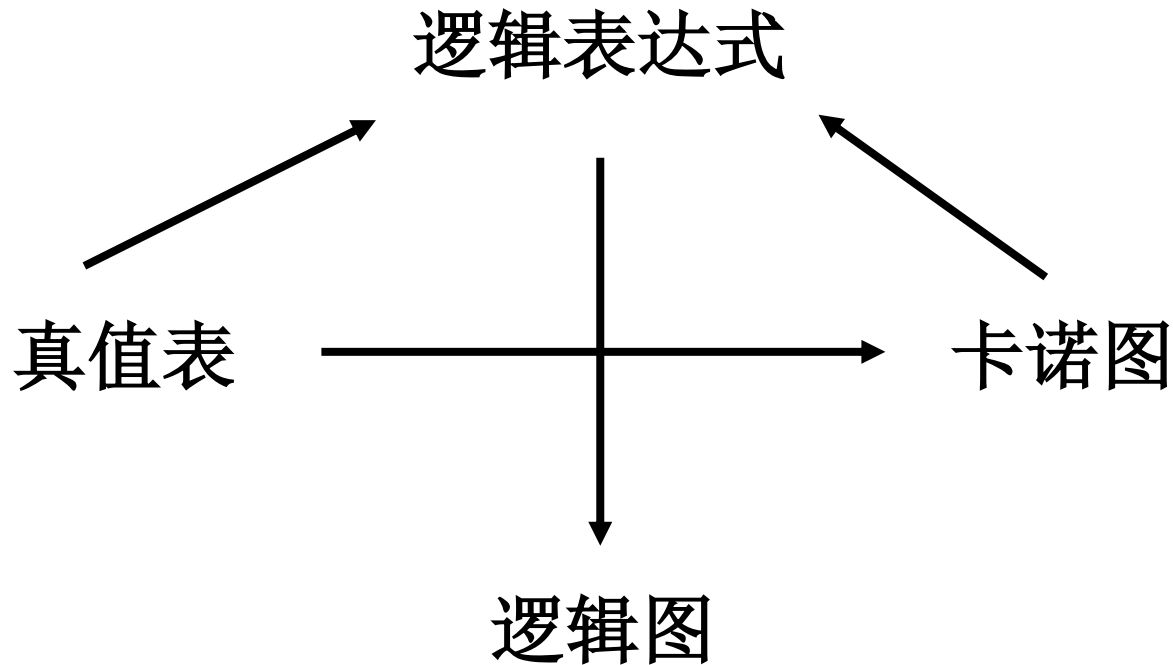
## How to design a combinational logic circuit?

1. 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式
2. 根据真值表，写出两种标准形式的逻辑表达式：

标准与或式 (minterm expansion: and-or)

标准或与式 (maxterm expansion: or-and)

## 逻辑函数的表示方法



## 组合逻辑设计——根据真值表写出表达式

真值表  $\longrightarrow$  表达式

真值表

AB C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

① 写出标准与或式（乘积之和）  
关注输出值为1的所有输入取值组合

## 组合逻辑设计——根据真值表写出表达式

真值表  $\longrightarrow$  表达式

真值表

AB C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1 ✓
1 0 0	0
1 0 1	1 ✓
1 1 0	1 ✓
1 1 1	1 ✓

① 写出标准与或式（乘积之和）  
关注输出值为1的所有输入取值组合

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

输入取值组合中

1——原变量

0——反变量

## 组合逻辑设计——根据真值表写出表达式

真值表  $\longrightarrow$  表达式

②写出标准或与式（和之积）  
关注输出值为0的所有输入取值组合

输入取值组合中

0——原变量

1——反变量

真值表

AB C	F
0 0 0	0 ✓
0 0 1	0 ✓
0 1 0	0 ✓
0 1 1	1
1 0 0	0 ✓
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

## 组合逻辑设计步骤

---

例：

某电路有三个输入端  $A, B, C$ , 当  $ABC \geq 011$  时, 输出  $f = 1$ , 否则  $f = 0$ .

步骤：

1. 根据设计要求确定 —— 真值表
2. 根据真值表 —— 表达式(卡诺图)
3. 化简
4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图



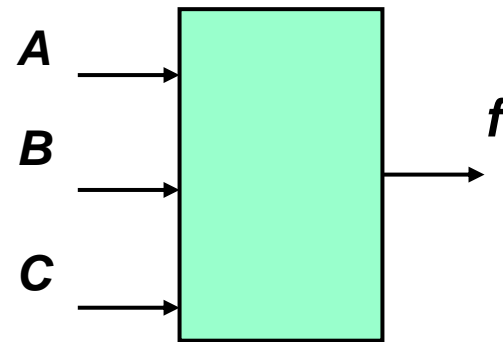
# 布尔代数的应用——组合逻辑设计例子

例：

某电路有三个输入端  $A, B, C$ , 当  $ABC \geq 011$  时, 输出  $f = 1$ , 否则  $f = 0$ .

① 真值表

$A$	$B$	$C$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



# 布尔代数的应用——组合逻辑设计例子

## ② 根据真值表写出表达式

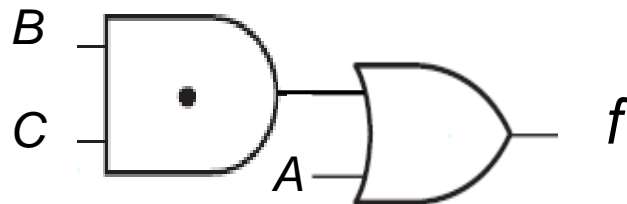
$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

## ③ 化简

$$\begin{aligned} f &= A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC \\ &= A'BC + AB' + AB \\ &= A'BC + A = BC + A \end{aligned}$$

## ④ 逻辑电路



- 布尔代数的应用



- 最小项、最大项展开式

- 不完全给定函数

## ■ 最小项、最大项展开式



- 最小项、最大项的概念
- 如何根据真值表写最小项、最大项展开式
- 最小项、最大项的特性
- 如何将逻辑函数转换为最小项、最大项展开式
- $F$  和  $\bar{F}$  的最小项、最大项展开式之间的转换

## 最小项和最大项

Row No.	A B C	Minterms	Maxterms
0	0 0 0	$A'B'C' = m_0$	$A + B + C = M_0$
1	0 0 1	$A'B'C = m_1$	$A + B + C' = M_1$
2	0 1 0	$A'BC' = m_2$	$A + B' + C = M_2$
3	0 1 1	$A'BC = m_3$	$A + B' + C' = M_3$
4	1 0 0	$AB'C' = m_4$	$A' + B + C = M_4$
5	1 0 1	$AB'C = m_5$	$A' + B + C' = M_5$
6	1 1 0	$ABC' = m_6$	$A' + B' + C = M_6$
7	1 1 1	$ABC = m_7$	$A' + B' + C' = M_7$

- **n**个变量组成的**最小项**：是一个与项（包含**n**个变量）
- **n**个变量组成的**最大项**：是一个或项（包含**n**个变量）
- 每个变量或者以原变量的形式、或者以反变量的形式出现，并且只出现一次。
- **n**个变量能组成的最小（大）项的个数是  $2^n$

# 最小项和最大项

Row No.	A B C	Minterms	Maxterms
0	0 0 0	$A'B'C' = m_0$	$A + B + C = M_0$
1	0 0 1	$A'B'C = m_1$	$A + B + C' = M_1$
2	0 1 0	$A'BC' = m_2$	$A + B' + C = M_2$
3	0 1 1	$A'BC = m_3$	$A + B' + C' = M_3$
4	1 0 0	$AB'C' = m_4$	$A' + B + C = M_4$
5	1 0 1	$AB'C = m_5$	$A' + B + C' = M_5$
6	1 1 0	$ABC' = m_6$	$A' + B' + C = M_6$
7	1 1 1	$ABC = m_7$	$A' + B' + C' = M_7$

- 真值表的第  $i$  行对应的 **最小项 (minterm)** 记为  $m_i$  ( $i$  通常用十进制表示).
- **最大项 (maxterm)** 记为  $M_i$ .
- $M_i = m_i'$  (最大项与最小项互补)

例:  $\overline{\overline{\overline{m_0}}} = \overline{\overline{\overline{ABC}}} = A + B + C = M_0$

## ■ 最小项、最大项展开式

➤ 最小项、最大项的概念



➤ 如何根据真值表写最小项、最大项展开式

➤ 最小项、最大项的特性

➤ 如何将逻辑函数转换为最小项、最大项展开式

➤  $F$  和  $\bar{F}$  的最小项、最大项展开式之间的转换



# 最小项表达式

例: 011 101 110 111

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$= m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$= \Sigma m(3, 5, 6, 7)$$

*Minterm expansion:* 标准与或式

*Minterm list:* list of 1

$$\bar{F} = \sum m(0, 1, 2, 4)$$

<i>A B C</i>	<i>F</i>
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

# 最大项表达式

例:                      000                      001                      010                      100

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$
$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$
$$= \prod M(0, 1, 2, 4)$$


A B C	F
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

*Maxterm expansion*: 标准或与式.

*Maxterm list*:                      list of 0

$$\bar{F} = \prod M(3, 5, 6, 7)$$

## ■ 最小项、最大项展开式

- 最小项、最大项的概念
- 如何根据真值表写最小项、最大项展开式
-  ➤ 最小项、最大项的特性
- 如何将逻辑函数转换为最小项、最大项展开式
- $F$  和  $\bar{F}$  的最小项、最大项展开式之间的转换

## 最小项、最大项的特性

$\textcircled{1} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$	$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$
$\textcircled{2} \quad m_i \bullet m_j = 0, \quad i \neq j$	$M_i + M_j = 1, \quad i \neq j$
$\textcircled{3} \quad \text{对于任意输入组合, 只有一个最小项为 1 (}\mathbf{m_i = 1}\mathbf{);}$	$\text{对于任意输入组合, 只有一个最大项为 0 (}\mathbf{M_i = 0}\mathbf{)}$

# 最小项的特性

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \quad \text{👉}$$

$$\textcircled{2} \quad m_i \bullet m_j = 0, \quad i \neq j$$

$\textcircled{3}$  对于任意输入组合，  
只有一个最小项为  
1 ( **$m_i = 1$** );

$$\because f + f' = 1$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

即 $n$ 个变量的所有最小项之和恒等于1。

## 最小项的特性

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

$$\textcircled{2} \quad m_i \cdot m_j = 0, i \neq j$$

③ 对于任意输入组合，  
只有一个最小项为  
1 ( **$m_i = 1$** );

1. 假设  $i = 0$ ,  $m_i = 1$ , 则

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = 1,$$

即  $\overline{A} = \overline{B} = \overline{C} = 1$ ,

$$A = B = C = 0;$$

2.  $m_j (j \neq 0)$  必包含

$A$ 、 $B$ 、 $C$  中的 1 个或多个，

所以  $m_j = 0$ ,

$$m_i \cdot m_j = 0.$$

# 最小项的特性

	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	$ABC$
000	1	0	0	0	0	0	0	0
001	0	1	0	0	0	0	0	0
010	0	0	1	0	0	0	0	0
011	0	0	0	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	0	0	0
101	0	0	0	0	0	1	0	0
110	0	0	0	0	0	0	1	0
111	0	0	0	0	0	0	0	1

$$\textcircled{1} \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

$$\textcircled{2} m_i \bullet m_j = 0, \quad i \neq j$$

③ 对于任意输入组合，  
只有一个最小项为1  
( $m_i = 1$ );



# 最小项的特性

■  $n$  变量的最小项有  $n$  个相邻项。

相邻项：只有一个变量不同

（以相反的形式出现）。

一对相邻项可以消去一个变量。

$A B C$	$F$
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1


$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\ = BC + AC + AB$$

# 最大项的特性

$$\because f \bullet f' = 0$$

$$\therefore \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

即 $n$ 个变量的所有最大项之积恒等于0。


$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

$$M_i + M_j = 1$$

对于任意输入组合，  
只有一个最大项为 0  
( **$M_i = 0$** )

# 最大项的特性

1. 假设  $i = 0$ ,  $M_i = 0$ , 则

$$A + B + C = 0,$$

即  $A = B = C = 0$ ,

$$\overline{A} = \overline{B} = \overline{C} = 1;$$

2.  $M_j (j \neq 0)$  必包含  
 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$  中的一个或多个,  
所以  $M_j = 1$ ,

$$M_i + M_j = 1.$$

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$



$$M_i + M_j = 1$$

对于任意输入组合,  
只有一个最大项为 0  
( **$M_i = 0$** )

# 最大项的特性

	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$	$\overline{\overline{A+B+C}}$
000	1	1	1	1	1	1	1	0
001	1	1	1	1	1	1	0	1
010	1	1	1	1	1	0	1	1
011	1	1	1	1	0	1	1	1
100	1	1	1	0	1	1	1	1
101	1	1	0	1	1	1	1	1
110	1	0	1	1	1	1	1	1
111	0	1	1	1	1	1	1	1

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

$$M_i + M_j = 1, \quad i \neq j$$

对于任意输入组合，  
只有一个最大项为 0  
( $M_i = 0$ )

# 最大项的特性

- $n$ 变量的最大项有 $n$ 个相邻项。

相邻项：只有一个变量不同  
(以相反的形式出现)。


一对相邻项可以消去一个变量。

$$\begin{aligned} F &= (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C) \\ &= (A + B)(A + C)(B + C) \end{aligned}$$

$A \ B \ C$	$F$
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

## ■ 最小项、最大项展开式

- 最小项、最大项的概念
- 如何根据真值表写最小项、最大项展开式
- 最小项、最大项的特性
-  ➤ 如何将逻辑函数转换为最小项、最大项展开式
- $F$  和  $\bar{F}$  的最小项、最大项展开式之间的转换

# 逻辑函数表达式的转换

---

- 任何一个逻辑函数，总可以将其转换成“最小项之和”及“最大项之积”的形式；
- 常用方法：代数转换法、真值表转换法



# 一、代数转换法——最小项展开式

---

用代数法求一个函数“最小项之和”的形式，一般分为两步：

1. 将函数表达式变换成一般的“与或”式。
2. 反复使用 $X = X(Y + \bar{Y})$  将非最小项的“与项”扩展为最小项。

如果给出的函数已经是“与或”式，则直接进行第二步。

## 一、代数转换法——最小项展开式

---

**例：** 将  $F(A, B, C) = \overline{(\overline{A\overline{B}} + \overline{B\overline{C}})} \cdot \overline{AB}$  转换成最小项展开式.

**解：** 1.  $F(A, B, C) = \overline{\overline{A\overline{B}} + \overline{B\overline{C}}} + AB$

$$= \overline{\overline{A\overline{B}}} \cdot \overline{\overline{B\overline{C}}} + AB$$

$$= (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) \cdot (\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}) + AB$$

$$= \overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}}\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}} + AB$$

# 一、代数转换法——最小项展开式

**例：** 将  $F(A, B, C) = \overline{(A\bar{B} + B\bar{C})} \cdot \bar{A}\bar{B}$  转换成最小项展开式。

**解：** 2.  $F(A, B, C)$

$$\begin{aligned} &= \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{C}(B + \bar{B}) + BC(A + \bar{A}) + AB(C + \bar{C}) \\ &= \underline{\bar{A}\bar{B}C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \underline{\bar{A}B\bar{C}} + ABC + \underline{\bar{A}BC} + ABC + AB\bar{C} \\ &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + ABC + AB\bar{C} + ABC + AB\bar{C} \end{aligned}$$

$$F(A, B, C) = m_0 + m_1 + m_3 + m_6 + m_7$$

$$= \sum m(0, 1, 3, 6, 7)$$

# 一、代数转换法——最大项展开式

---

类似地，用代数法求一个函数“最大项之积”的形式，也可分为两步：

- 1: 将函数表达式转换成一般“或与”式；
- 2: 反复使用  $X = (X + Y)(X + \bar{Y})$  项的“或项”扩展成为最大项。

如果给出的函数已经是“或与”式，则可直接进行第二步。

# 一、代数转换法——最大项展开式

**例：**将  $F(A, B, C) = \overline{AB} + \overline{AC}$  转换成最大项展开式。

**解：**

$$X = (X + Y)(X + \overline{Y})$$

$$1. F(A, B, C) = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (A + \overline{C})$$

$$\begin{aligned} 2. F(A, B, C) &= (\overline{A} + \overline{B} + \underline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \underline{\overline{C}}) \cdot (A + \underline{B} + \overline{C}) \cdot (A + \underline{\overline{B}} + \overline{C}) \\ &= (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \end{aligned}$$

$$F(A, B, C) = M_1 \cdot M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$= \prod M(1, 3, 6, 7)$$

## 二、真值表转换法

- 一个逻辑函数的真值表与它的最小项展开式、最大项展开式均存在一一对应的关系。转换步骤：


1. 写出逻辑函数  $F$  的真值表。
2. 函数  $F$  的最小项展开式由使  $F$  取值为 **1** 的全部最小项之和组成。
3. 函数  $F$  的最大项展开由使  $F$  取值为 **0** 的全部最大项之积组成。

$A B C$	$F$
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1

$$F = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

$$F = \prod M(0, 1, 2, 4)$$

## ■ 最小项、最大项展开式

- 最小项、最大项的概念
- 如何根据真值表写最小项、最大项展开式
- 最小项、最大项的特性
- 如何将逻辑函数转换为最小项、最大项展开式
-  ➤  $F$  和  $\bar{F}$  的最小项、最大项展开式之间的转换

## $F$ 和 $\bar{F}$ 的最小项\最大项展开式之间的转换

例:  $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC$   
 $= \sum m(2, 3, 6, 7) \quad \Rightarrow \bar{F} = \sum m(0, 1, 4, 5)$

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC} \\&= \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{\bar{A}BC} \cdot \overline{A\bar{B}\bar{C}} \cdot \overline{ABC} \\&= (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\&= (A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\&= \prod M(2, 3, 6, 7) \quad \Rightarrow \bar{F} = \prod M(0, 1, 4, 5)\end{aligned}$$



# $F$ 和 $\bar{F}$ 的最小项\最大项展开式之间的转换

	Minterm Expansion of $f$	Maxterm Expansion of $f$	Minterm Expansion of $f'$	Maxterm Expansion of $f'$
$f =$ $\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$	_____	$\Pi M(0, 1, 2)$	$\Sigma m(0, 1, 2)$	$\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$
$f =$ $\Pi M(0, 1, 2)$	$\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$	_____	$\Sigma m(0, 1, 2)$	$\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项展开式
- 不完全给定函数

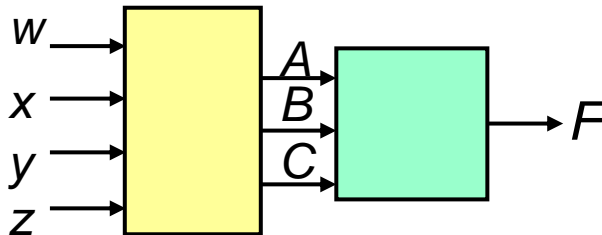


# 不完全给定函数

## 1. 无关项 (Don't care terms) ——

- 不可能存在的输入取值组合
- 虽然所有输入都可能出现，但对于某些输入组合，我们不关心输出是0还是1

例：



A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	1

无关项

无关项

## 不完全给定函数

### 2. 不完全给定函数

$$F = \sum m(0, 3, 7) + \sum d(1, 6)$$

$$F = \prod M(2, 4, 5) \cdot \prod D(1, 6)$$

<i>A B C</i>	<i>F</i>
0 0 0	1
0 0 1	X
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	X
1 1 1	1

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项展开式
- 不完全给定函数