数字世界精彩无限

Unit 2 布尔代数

张英涛

计算机科学与技术学院

哈尔滨工业大学

2 布尔代数

- 基本逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

基本逻辑运算

- 基本运算

  AND、OR、NOT

- 复合运算

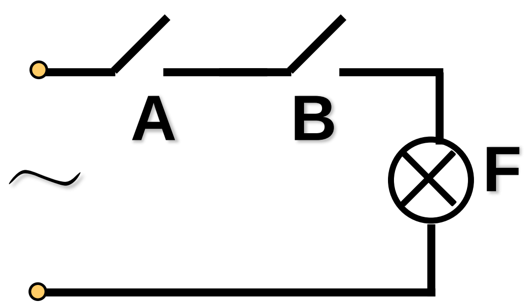
  NAND、NOR、 AND-OR-NOT、$\oplus$、 $\odot$

基本运算

1. AND（逻辑“与”）

$$F=A\bullet B$$

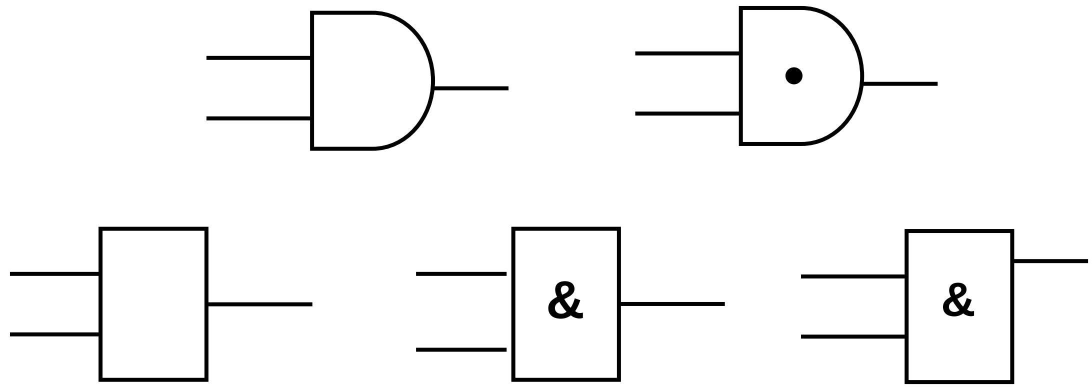
① **又称为 逻辑“乘”**（logic multiplication）



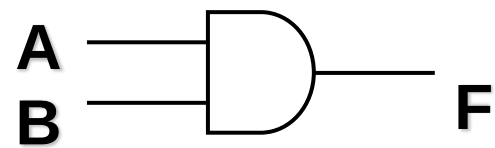
真值表

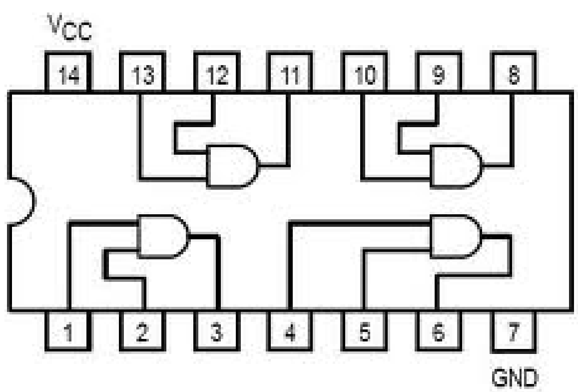
AB	F
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

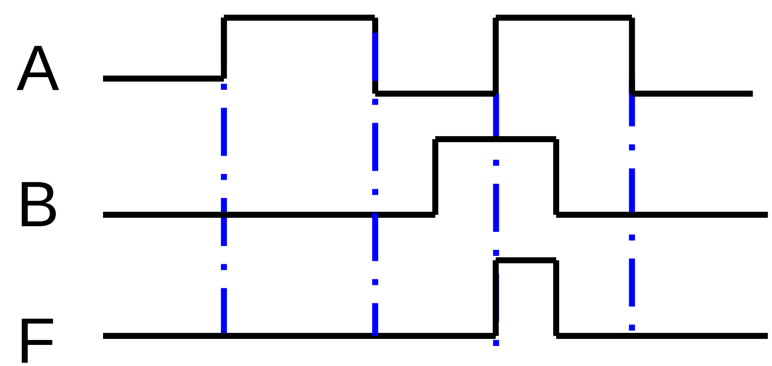
②与门（ AND gate）逻辑符号



③典型芯片: 74LS08







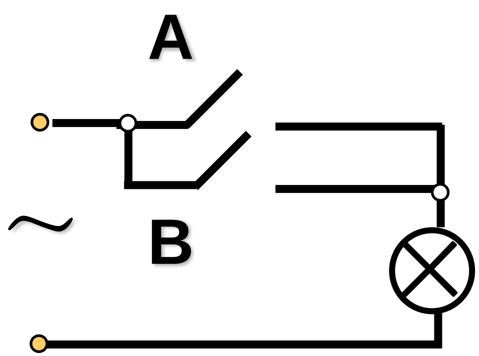
基本运算

2. OR（逻辑“或”）

$$F=A+B$$

① **又称为逻辑“加”**

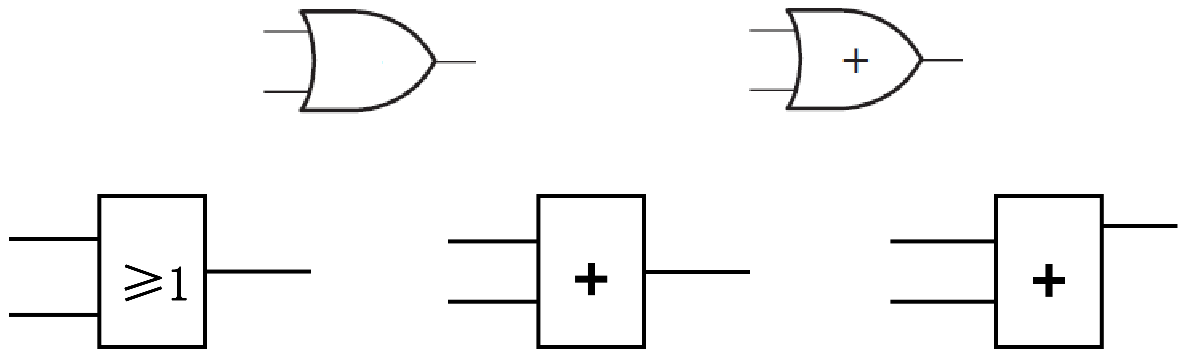
（logic addition）



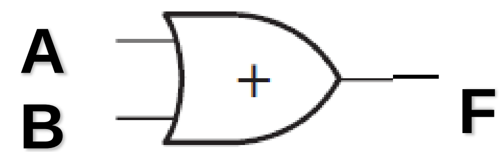
真值表

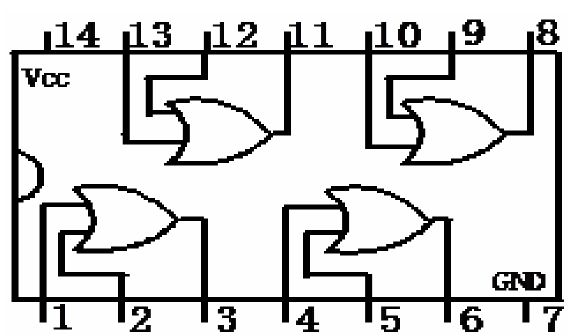
AB	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

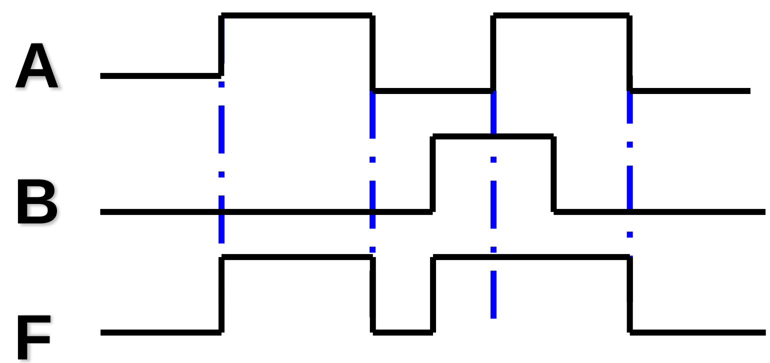
②或门（OR gate ）逻辑符号



③ 典型芯片： 74LS32







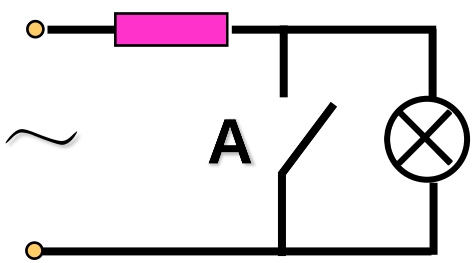
基本运算

3. NOT（逻辑“非”）

$$F=\overline{A}$$

$$(\ or\ F=A')$$

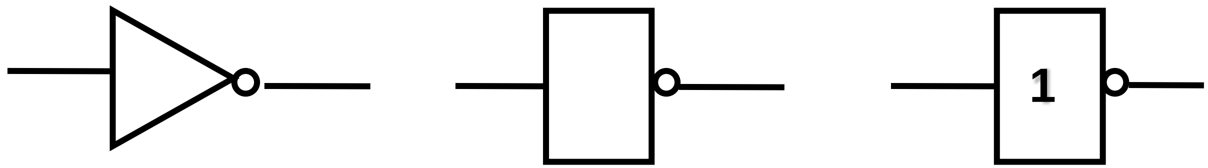
① 又称为反相器（inverse）



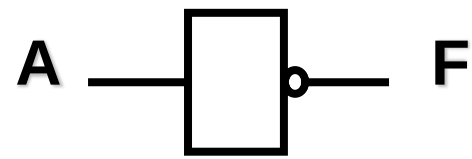
真值表

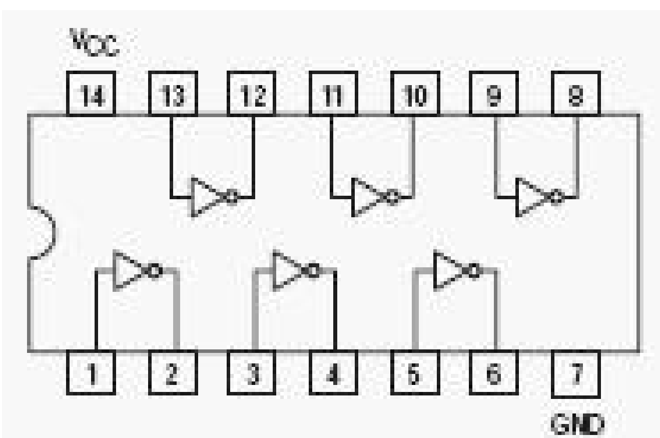
A	F
0	1
1	0

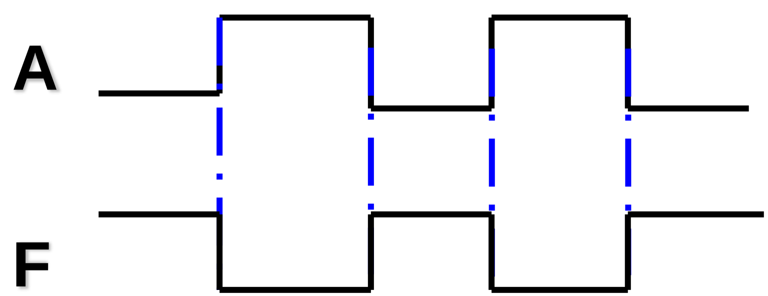
②非门（NOT gate）逻辑符号



③ 典型芯片: 74LS04







基本运算

- 基本运算

  AND、OR、NOT

- 复合运算

  NAND、NOR、 AND-OR-NOT、

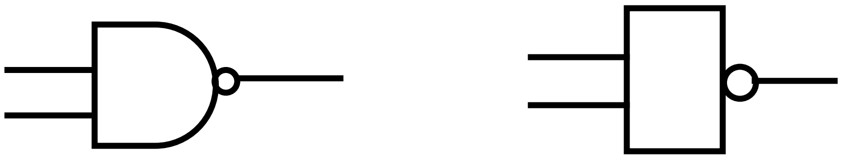
  $\oplus$、 $\odot$

复合运算

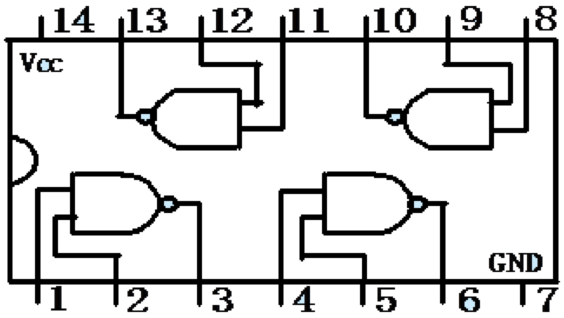
1.与非门（ NAND gate）

$$F=\overline{AB}$$

① 逻辑符号：



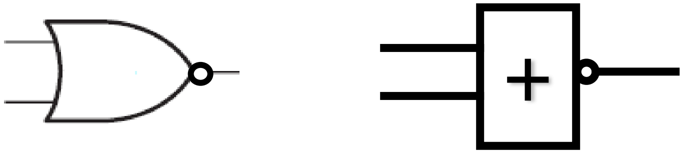
② 典型芯片： 74LS00



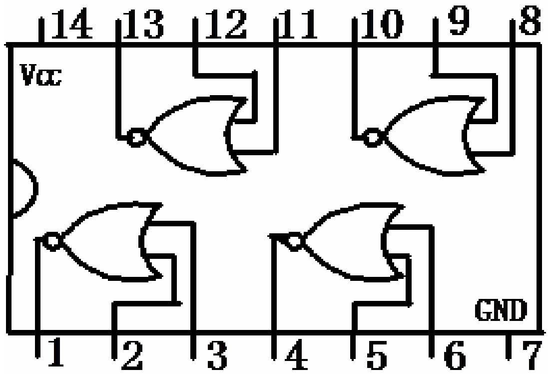
2.或非门（NOR gate）

$$F=\overline{A+B}$$

① 逻辑符号：



② 典型芯片: 74LS02

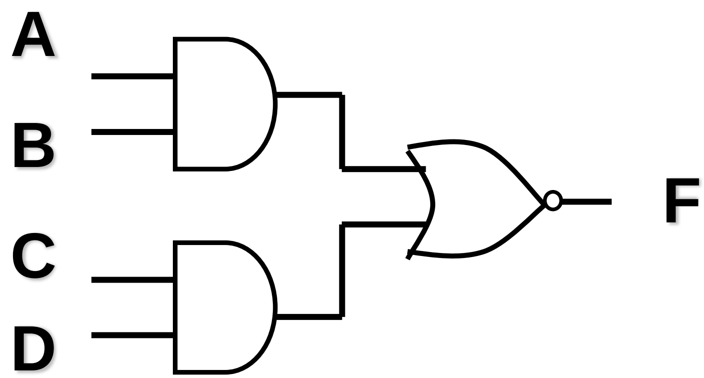


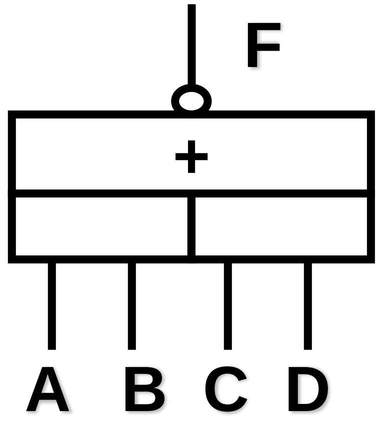
复合运算

3.与或非门（AND-OR-NOT gate）

$$F=\overline{AB+CD}$$

① 逻辑符号：





② 典型芯片： 74LS51,74LS55

复合运算

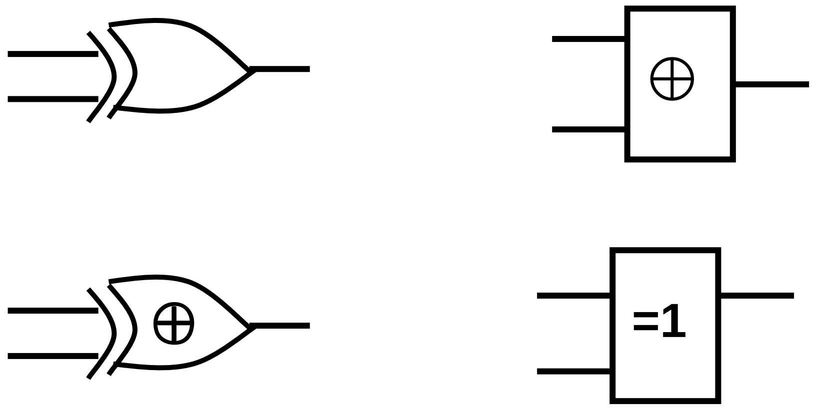
4.异或门 (Exclusive-OR operation， ⊕)

$$F = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

真值表

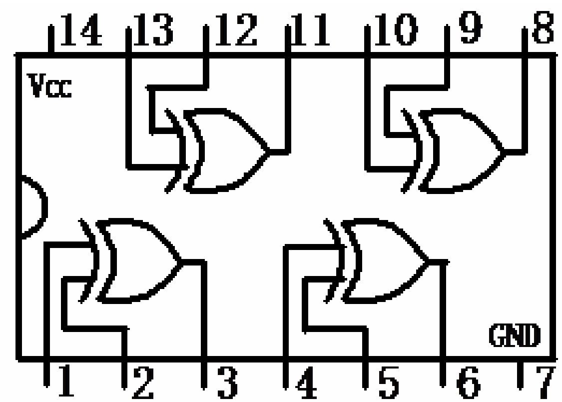
AB	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

① 逻辑符号



复合运算

② 典型芯片： 74LS86



③ 应用

全加器（Full adder）
半加器（Half-adder）

5.同或门 (Equivalence operation， ⊙ or ≡)

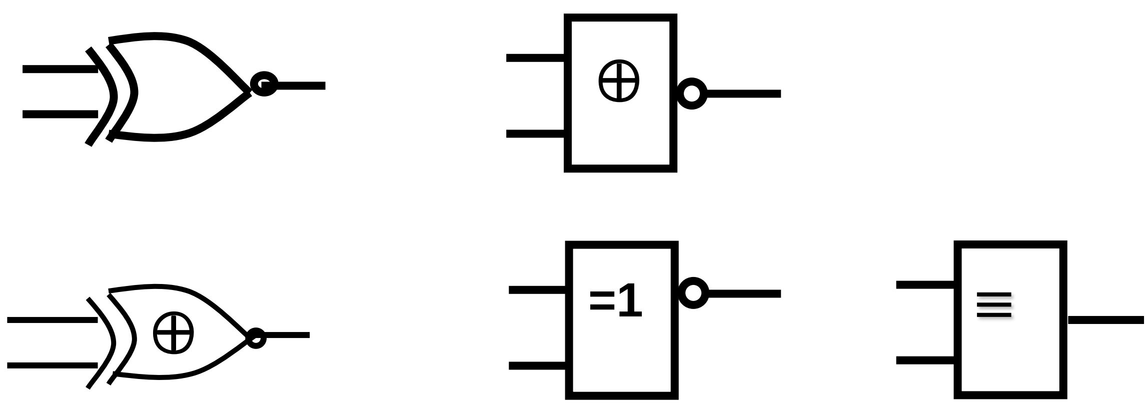
$F = A \equiv B$ or

$F = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$

真值表

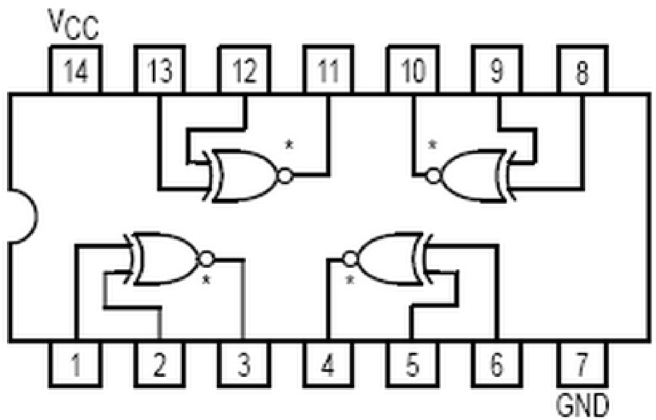
AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

① 逻辑符号



复合运算

② 典型芯片: **74LS266**



③ 应用

比较器（comparator）

复合运算

④ 异或门、同或门的属性对比:

$A \oplus 1 = \overline{A}$ $A \odot 1 = A$

$A \oplus 0 = A$ $A \odot 0 = \overline{A}$

$A \oplus A = 0$ $A \odot A = 1$

$A \oplus \overline{A} = 1$ $A \odot \overline{A} = 0$

2 布尔代数

- 基本逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

布尔表达式（Boolean Expressions）

例：

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$

$$F = [A(C+D)]' + BE$$

- **布尔表达式：** 对一个或多个变量/常量应用基本运算 (and, or, not)，即构成布尔表达式.
- **符号(literal)：** 布尔表达式中的每个变量或该变量的补称为一个符号。

布尔表达式（Boolean Expressions）

规则:

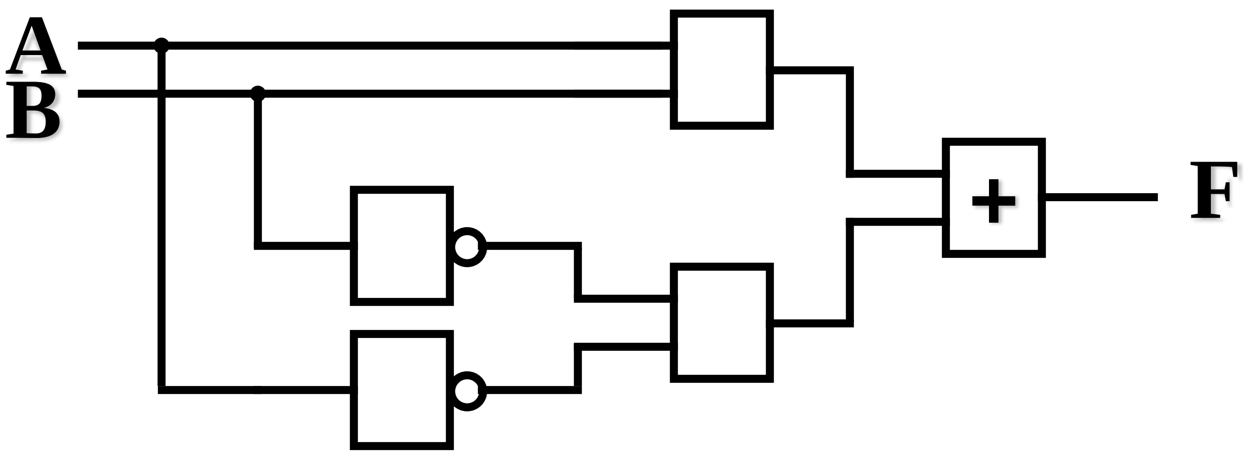
- 进行“非”运算可不加括号, 如 $\overline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$等,
- “与”运算符一般可省略, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 可写成 $\boldsymbol{AB}$,
- 运算级别： 非、与、或.

常用表达式的读法

- $A\overline{B}$----A与B非；
- $\overline{A}B$----A非与B;
- $\overline{AB}$----AB的与非；
- $\overline{A}+\overline{B}$——A非或B非；
- $A+\overline{B}$----A或B非；
- $\overline{A}+B$----A非或B;
- $\overline{A+B}$----AB的或非.

逻辑门电路

例： $F = AB + \overline{A}\,\overline{B}$



- 每个表达式对应一个逻辑门电路

真值表（ Truth Tables ）

例： $F=AB+\bar{A}\bar{B}$

- 真值表： 给出一个布尔表达式在所有可能的输入变量取值组合时的输出
- n 个输入变量—— 2^n 种取值组合

真值表

AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

真值表

- 如果两个逻辑表达式的真值表相等，则这两个逻辑表达式相等.

例： $AB'+C \overset{?}{=} (A+C)(B'+C)$

A	B	C	$AB'+C$	$(A+C)(B'+C)$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

2 布尔代数

- 基本逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

1. 公理（Axiom）

(1) $0 \cdot 0 = 0$

(1)' $0 + 0 = 0$

(2) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

(2)' $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

(3) $1 \cdot 1 = 1$

(3)' $1 + 1 = 1$

(4) $\overline{0} = 1$

(4)' $\overline{1} = 0$

(5) If $A \neq 0$ then $A = 1$

(5)' If $A \neq 1$ then $A = 0$

2.基本定理（Basic Theorems）

- 单变量

0 - 1 律

(6) $X+0=X$ (6)' $X \bullet 1=X$

$X+1=1$ $X \bullet 0=0$

重叠率

(7) $X+X=X$ (7)' $X \bullet X=X$

还原律

(8) $\overline{\overline{X}}=X$

互补律

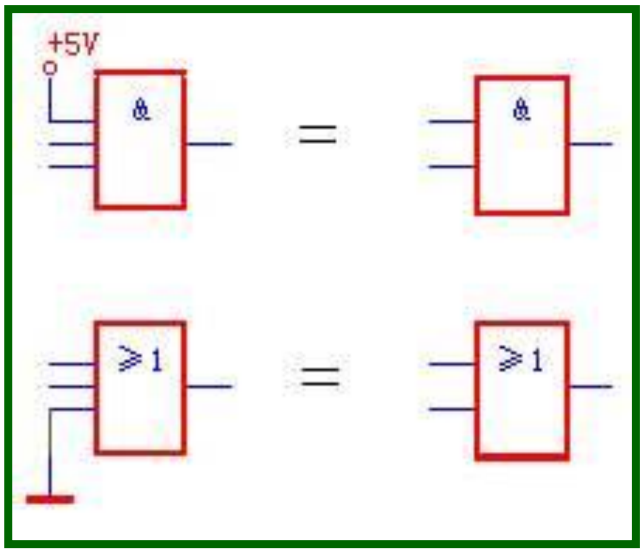
(9) $X+\overline{X}=1$ (9)' $X \bullet \overline{X}=0$

2.基本定理

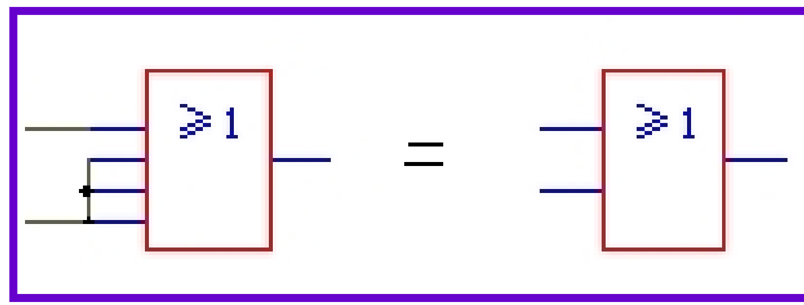
应用：

0−1律	(6)	$X+0=X$	(6)'	$X\bullet 1=X$
		$X+1=1$		$X\bullet 0=0$

0 - 1 律



重叠率



重叠律	(7)	$X+X=X$	(7)'	$X\bullet X=X$

2.基本定理

- 与普通代数相似的定理

交换律

⑽ $A+B=B+A$　　⑽' $A \cdot B = B \cdot A$

结合律

⑾ $(A+B)+C=A+(B+C)$　　⑾' $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

分配律

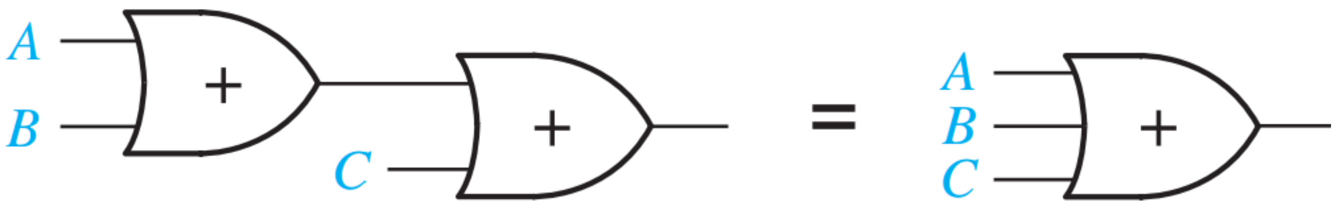
⑿ $A \cdot (B+C) = AB+AC$　　⑿' $A+BC=(A+B) \cdot (A+C)$

普通代数
不支持

2.基本定理

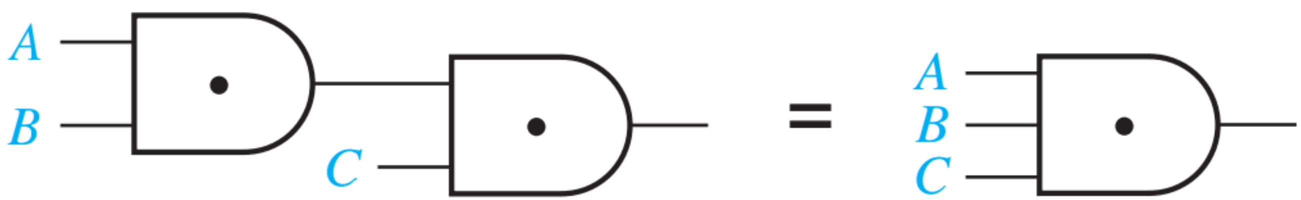
结合律

⑾ (A+B)+C = A+B+C = A+(B+C)



$(A + B) + C = A + B + C$

⑾’(A • B)• C = A • B • C = A • (B • C)



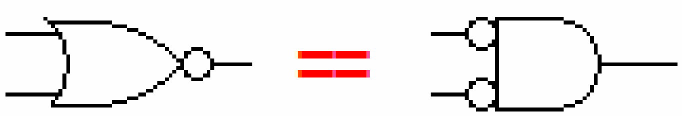
$(AB)\ C = ABC$

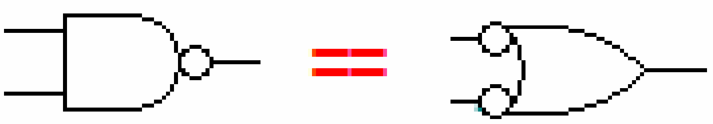
2.基本定理

- 特殊定理——

*摩根定理（**DeMorgan’s Laws**）*

(13) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (13)’ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$





2.基本定理

- 特殊定理——

  摩根定理（DeMorgan's Laws）

（1） $\overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \ldots \overline{X}_n$

（2） $\overline{X_1 X_2 \ldots X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_n$

2.基本定理

- 特殊定理—— *对偶规则（Dual Rule）*

变量: 不变

运算符:

$$\cdot \longrightarrow +$$
$$+ \longrightarrow \cdot$$
$$\oplus \longrightarrow \odot$$
$$\odot \longrightarrow \oplus$$

不能改变原来的优先级

$$F=A\cdot(B+C) \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = A+B\cdot C$$

$$F=A\cdot\overline{B}+AC \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D=(A+\overline{B})\cdot(A+C)$$

2.基本定理

- 特殊定理——　*对偶规则的推论*

① F $\xleftrightarrow{\text{Dual Rule}}$ $(F)^D$

② 两个逻辑表达式相等，它们的对偶也相等

例：

$$A+BCD = (A+B)(A+C)(A+D)$$

$\downarrow$ Dual Rule　　$\downarrow$ Dual Rule

$$A \cdot (B+C+D) = AB+AC+AD$$

2.基本定理

3. 常用公式

(15) $AB+A\bar{B} = A$ 合并律

(16) $A+AB=A$ 吸收律

(17) $A+\bar{A}B = A+B$ 消除律

(18) $AB+\bar{A}C+BC = AB+\bar{A}C$ 蕴含律/冗余律/包含律

(18)' $AB+\bar{A}C+BCD = AB+\bar{A}C$

(18)'' $(A+B)(\bar{A}+C)(B+C) = (A+B)(\bar{A}+C)$

2.基本定理

3. 常用公式

(15) $AB+A\overline{B} = A$ 合并律

(16) $A+AB=A$ 吸收律

(17) $A+\overline{A}B = A+B$ 消除律

(18) $AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C$ 冗余律

(18)' $AB+\overline{A}C+BCD = AB+\overline{A}C$

(18)'' $(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$

(18)的证明：

$AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$

$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$

$=AB+\overline{A}C$

2.基本定理

3. 常用公式

⒂ $AB+A\overline{B}=A$ 合并律

⒃ $A+AB=A$ 吸收律

⒄ $A+\overline{A}B=A+B$ 消除律

⒅ $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$ 冗余律

⒅' $AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$

⒅'' $(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

(18)'的证明：

$AB+\overline{A}C+BCD$

$=AB+\overline{A}C+BC+BCD$

$=AB+\overline{A}C+BC$

$=AB+\overline{A}C$

2.基本定理

(19) $\overline{A\bar{B}+\bar{A}B}=\bar{A}\,\bar{B}+AB$

“异或”取反 = “同或”

$$\overline{A\bar{B}+\bar{A}B}$$

摩根

$$=\overline{A\bar{B}}\cdot\overline{\bar{A}B}$$

摩根

$$=(\bar{A}+B)\cdot(A+\bar{B})$$

分配+互补

$$=\bar{A}\bar{B}+AB$$

2 布尔代数

- 基本逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

化简

■ 一个逻辑函数有多种不同的表达式

$F=AB+A\bar{C}$ .....与-或

$=\overline{\overline{AB+A\bar{C}}}$

$=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{A\bar{C}}}$ .....与非-与非

$=\overline{(\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+C)}$ .....或-与非

$=\overline{(\bar{A}+\bar{B})}+\overline{(\bar{A}+C)}$ .....或非-或

$F=(A+B)\cdot(A+\bar{C})$ .....或-与

$=\overline{\overline{(A+B)\cdot(A+\bar{C})}}$

$=\overline{\overline{(A+B)}+\overline{(A+\bar{C})}}$ .....或非-或非

$=\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot C}$ .....与-或非

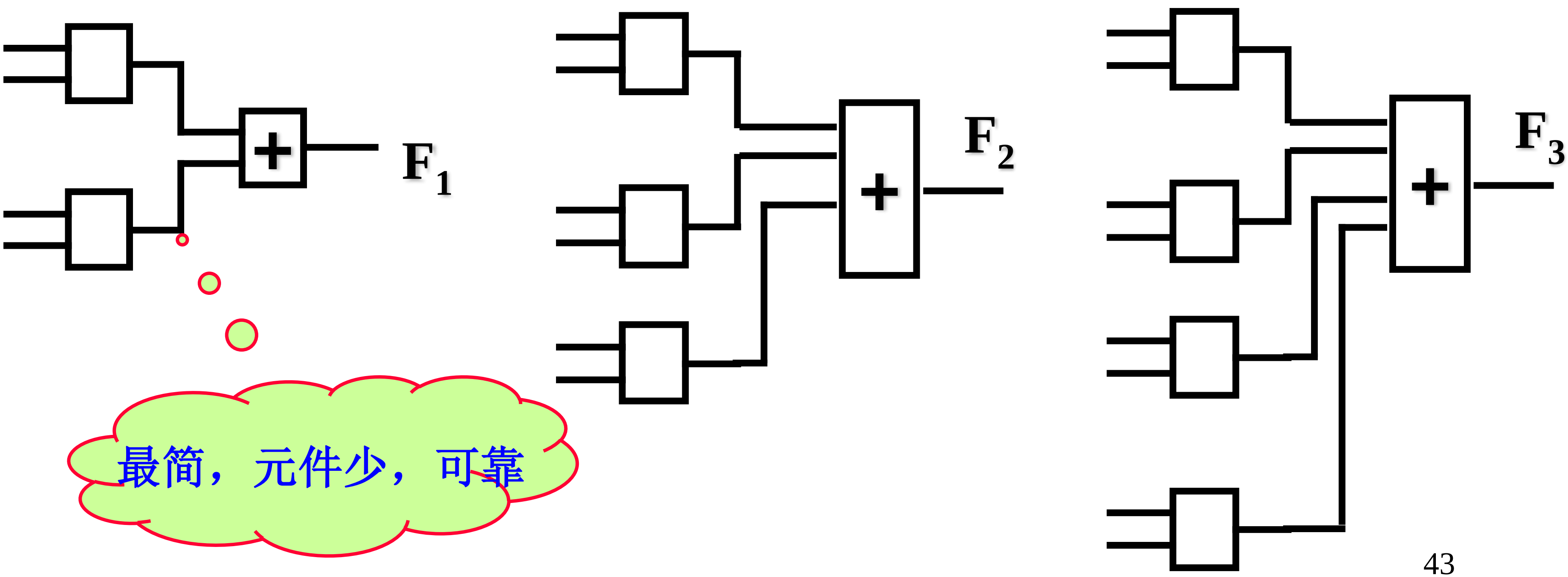
$=\overline{\bar{A}\bar{B}}\cdot\overline{\bar{A}C}$ .....与非-与

■ 同一类型的表达式也不是唯一的

$$F=AB+\bar{A}C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \ F_1$$

$$=AB+\bar{A}C+BC \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \ F_2$$

$$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \ F_3$$



代数化简法

最简（Minimum Expressions）？

① 与项（和项）的个数最少

② 每个与项（和项）中变量的个数最少

最小成本：

① 逻辑门的数量最少

② 逻辑门的输入个数最少

目的：

① 降低成本

② 提高可靠性

方法：
- 代数法（Algebraic techniques）
- 卡诺图法（K. map method）

代数化简法

例：

吸收律

消除律

分配律

摩根

消除律

$$F = \underline{A + A\bar{B}\bar{C}} + \bar{A}CD + \bar{C}E + \bar{D}E$$

$$= \underline{A + \bar{A}CD} + \bar{C}E + \bar{D}E$$

$$= A + CD + \underline{\bar{C}E + \bar{D}E}$$

$$= A + CD + E(\bar{C} + \bar{D})$$

$$= A + \underline{CD + E\overline{CD}}$$

$$= A + CD + E$$

例:

$$F=AB+A\bar{C}+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$$

分配+摩根

$$=A(\overline{\bar{B}C})+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$$

消除律

$$=A+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+ADE(F+G)$$

吸收律

$$=A+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+C\bar{D}$$

冗余律

$$=A+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+B\bar{D}+C\bar{D}$$

冗余律

$$=A+\bar{B}C+B\bar{C}+\bar{B}D+C\bar{D}$$

冗余律

$$=A+B\bar{C}+\bar{B}D+C\bar{D}$$

代数化简法

例：

$$F = A + AB + \bar{A}C + BD + ACEF + \bar{B}E + DEF$$

吸收律

$$= A + \bar{A}C + BD + \bar{B}E + DEF$$

消除律

$$= A + C + BD + \bar{B}E + DEF$$

冗余律

$$= A + C + BD + \bar{B}E$$

代数化简法

例:

$$F = (\overline{B}+D)(\overline{B}+D+A+G)(C+E)(\overline{C}+G)(A+E+G)$$

Dual Rule:

$$J = \overline{B}D+\overline{B}DAG+CE+\overline{C}G+AEG$$

吸收律

$$= \overline{B}D+CE+\overline{C}G+AEG$$

冗余律

$$= \overline{B}D+CE+\overline{C}G$$

Dual Rule:

$$F = (\overline{B}+D)(C+E)(\overline{C}+G)$$

代数化简法

优点——

- 不受变量数目的约束；
- 对公理、定理和规则十分熟练时，化简较方便。

缺点——

- 技巧性强
- 在很多情况下难以判断化简结果是否最简

2 布尔代数

- 基本逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法