刚体定轴转动与质点直线运动的简单类比

摘要：在大学物理中，刚体定轴转动部分的内容，几乎全部物理概念、物理规律及推导过程都可以与质点直线运动进行类比。文章从运动的描述、动力学方程、做功及动能、冲量矩及角动量四个方面展开类比。通过类比把知识呈现给学生，可以使学生快速而牢固地掌握这部分内容。

关键词：**质点运动 刚体运动 类比学习**

（一）质点运动与刚体转动的基本物理量对比

表 1. 质点运动与刚体转动的基本物理量对比

	质点运动	刚体转动
位移	x	θ
速度	v	ω
时间	t	t
加速度	a	α

刚体的转动如果与质点的运动相对比，可以看成是连续的质点绕着一个轴进行转动。对比刚体的转动与质点的运动，如果在空间直角坐标系的环境下看，二者均具有三个自由度。质点的三个自由度体现在其运动可分解到三个坐标轴方向，而刚体的转动的三个自由度则体现在无论转动的情况多么复杂，其都可以分解为绕三个坐标轴的转动上去。因此，二者从运动学的本质上来看是极为相似的，如果按照上表的物理量之间的对照关系来看，如果在空间维度上让刚体成为一个质点，那么刚体的运动就成为了质点的运动；而如果将质点扩大成了一个刚体，那么质点绕轴转动的过程就变成刚体绕轴转动。因此，在研究刚体的转动时，如果将刚体取微元那么就是质点的运动；在研究质点的运动时如果将质点在空间上连续积分那么就是刚体的运动，

关于方向，刚体的转动用右手螺旋法则，右手四指绕向刚体转动的方向，拇指的指向即是角速度的方向，角加速度的方向也是类似。若沿转轴正方向，则刚体转动方向为正，反之为负。虽然转动的方向判定比质点运动复杂，但依然可以找到对应关系。当角速度和角加速度同向时，刚体做加速转动，这与质点直线运动是类似的。

结合运动的知识可以给出下列对应关系：

表 2. 运动公式比较

质点运动	刚体运动
$v\ =v_0+at$	$w=w_0+at$
$x=x_0+v_0+\frac{1}{2}at^2$	$\theta=\theta_0+w_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$	$w^2-w_0^2=2a(\theta-\theta_0)$

由此可见，二者的运动学公式的形式是极其相似的。

（二）质点的动力学方程与刚体的动力学方程的对比

表 3. 质点的动力学方程与刚体的动力学方程的对比

质点动力学	刚体动力学
$\vec{F}$	$\vec{M}$
M	J
$\vec{F}=m\vec{a}$	$\vec{M}=J\vec{\alpha}$

在质点力学中，若质点所受的合外力为零，则质点运动状态不变，即运动速度的大小和方向均不发生变化;若所受合外力不为零,质点将获得一个加速度,使其运动状态发生变化。因此，力是改变质点运动状态的原因。质点做直线运动时，力与加速度之间满足$\vec{F}=m\vec{a}$，这就是质点运动的动力学方程，人们熟知的牛顿第二定律。

在刚体定轴转动中，与力相对应的改变物体转动状态的物理量是力矩。与质点力学类似，若刚体所受的合外力矩为零，则刚体的转动角速度不发生变化;若所受合外力矩不为零，刚体将获得一个角加速度，使其转动状态发生变化（如图 1）。因此，力矩是改变刚体转动状态的原因。力矩与角加速度之间满足$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$，这就是刚体定轴转动的动力学方程，称为转动定律[1]。当然，这里需要注意，M、J、a 都必须是对于同一固定转轴而言的。J 为刚体的转动惯量，是一个描述刚体转动惯性的物理量，正如质点力学中的质量一样。

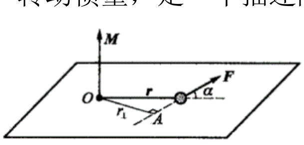

图 1

从质点动力学与刚体动力学的基本量之间的对比可以看出，在刚体动力学中，质点动力学中的力类比为力矩，质点动力学中的质量可以与转动惯量类比，这看似还无关联，但是仔细想质点运动与刚体运动的关系可以看出，刚体的运动实则是质点运动在空间维度上增加的结果，而力矩的加入实则是质点动力学中的力在空间维度上的提升。可以看到，力矩的定义式为$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$，如果把原来的力看成是一个平面

上的力，空间维度是二维。那么与向径进行矢量积后，力矩的空间维度相比于力就提升成了三维，这与刚体运动可以看成连续质点在空间上的积分是可以联系在一起的。而转动惯量对质量的类比可以看做转动惯量实则表征了连续质点在运动的情况下质量意义的延展，质量在质点的运动中表现的是质点运动状态改变的难易程度，而转动惯量在刚体转动中则表示了刚转动状态改变的难易程度。由于质点属于一维物体，所有质量对物体状态改变的影响全集中在一点，只需要用单一的质量表示改变状态的难度。而刚体属于二维或是三维物体，所以在转动时需要加入向径的作用效果表示其对运动效果改变的影响，可以理解成各个位置取微元的得到的质点的质量对与整体转动状态改变的影响程度不同，因此加入与轴的距离的平方这一影响式使其成为在刚体转动中能与质点运动中的质量进行类比的物理量。[2]

*刚体转动惯量的计算

转动惯量是刚体转动惯性大小的量度.根据转动惯量的定义，一个刚体的转动惯量的大小与刚体的总质量、质量的分布以及转轴的位置有关[3]。作为表征刚体转动状态改变的难易程度的物理量，转动惯量的定义式为 J=$\int mr^2 d\Omega$由这个式子可以计算所有刚体的转动惯量。当然，为了简化转动惯量的计算以及结合转动惯量的性质可以得到刚体转动的平行轴定理和垂直轴定理。 平行轴定理建立了从一个轴迁移到另外一个与之平行的轴上时的转动惯量的计算问题。其表示形式为 I= I_c+MR^2,其中 R 表示两轴之间的水平距离，I_c为关于原轴的转动惯量。这一形式可以与质点系的运动定理加以类比。质点系在运动时可以建立质心坐标系，质点系整体的运动就可以分解成质心相对于参考点的运动以及质点系内部质点相对于质心的运动，而从刚体转动的平行轴定理来看，MR^2一项可以类比为是质心相对于原轴线的转动惯量，而I_C一项可以类比为质点系中其他质点相对于质心的转动的转动惯量的表述，因此，在与质点系运动定理的对比过程中我们从这一方面可以验证了这一公式的真实性，这一公式也将大大简化刚体转动惯量的计算。

作为一个简单的例子,我们考虑一根木棒绕穿过其一端的垂直轴转动的情况。 现在应该对所有质量与 x 距离平方的乘积求和(在此例中 y 为零)。“求和"指的是什么呢?当然是指x^2乘小质量元的积分。假如我们把木棒分成很小的长度元 dx ,相应的质量元和 dx 成比例,并用 L 表示整个棒的长度,M 表示总质量。因此有$dm = \frac{Mdx}{L}$,于是有$J = \int_0^L x^2\, dm = \frac{ML^2}{3}$假如转轴取在棒的中心，那么 J 是什么呢?我们可以重做一次积分，将 x 的范围取为从$-\frac{L}{2}$到+$\frac{L}{2}$。但是我们注意关于转动惯量的几个特点。可以把这根棒设想成两根棒, 每根棒的质量和长度

变为一半，则两根小棒的转动惯量相等，且都由上式给出。因此，转动惯量为$J = \frac{2\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}$。由此可见，绕中心转动的一根棒要比绕它的端点转动容易得多。

垂直轴定理的表述则在质点的运动中较难找到与之对应的关系，可以理解为是刚体转动与质点运动差异较大的一点，其表示形式可以简化为$I_z = I_x + I_y$，即假如有一平面物体与在该平面上的一系列点（不妨假设该平面为xOy平面），则该物体关于 z 轴的转动惯量等于其相对于 x 轴与 y 轴的转动惯量之和。这也是极好理解的，简单的证明如下，

$I_x = \sum(y_i^2 + z_i^2)m_i = \sum m_i \cdot y_i^2$（由于$z_i = 0$）

则同理$I_y = \sum m_i x_i^2$；

又$I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$

故$I_z = I_x + I_y$，则垂直轴定理得证。

举一个例子,有一质量为 M,宽为 w,长为 L 的均匀矩形板,对于穿过平板中心且与之垂直的轴线来说,平板的转动惯量为 .因为相对于一根在平面内并且平行于它的边长的轴来说,就像长为 w 的棒一样,它的转动惯量是 ;而相对于平面内的另一根轴,也像长为 L 的棒一样,它的转动惯量是 $\frac{ML^2}{12}$。表 4 列出一些质量密度均匀的基本图形的转动惯量。

表 4. 部分物体转动惯量

物体	Z 轴	I_z
细棒，长为 L	与棒垂直，通过中心	$ML^2/12$
细同心圆环，半径为r_1和r_2	与环垂直，通过中心	$M(r_1^2 + r_2^2)/2$
球，半径为 r	穿过球心	$2Mr^2/5$

[4]*例题与表格数据来自费曼恩，莱顿，桑兹. 费曼恩物理学讲义[M]. 第一卷. 上海. 科学技术出版社. 2013. 4:198-201.

概括地说,一个物体对某一给定轴(不妨设为 z 轴)的转动惯量具有如下性质:

(1)转动惯量是 $J = \int(x^2+y^2)\,dm = \int(x^2+y^2)\,\rho dv$

(2)假如一个物体由很多部分组成每–部分的转动惯量已知，则总转动惯量就是各部分转动惯量之和。

(3)相对于任–给定轴的转动惯量等于相对于通过质心的平行轴的转动惯量再加上总质量与给定轴到质心距离平方的乘积。

(4)假如物体是一个平面图形，它相对于与平面垂直的轴的转动惯量等于相对于在平面内两根相互垂直且与前述垂直轴相交的任意两根轴的转动惯量之和。

（三）质点运动与刚体运动能量与做功对比

表 5. 质点运动与刚体运动能量与做功对比

质点	刚体
$A=\int Fdx$	$A=\int Md\theta$
$E_k=\frac{1}{2}mv^2$	$E_k=\frac{1}{2}Jw^2$

根据前文中的讨论，用在刚体动力学中用力矩 M 代替质点运动学中力 F 的效果，用转动惯量 J 代替质量 m 的效果，则经过验证可以得到上述的对照关系。可以看到，刚体运动中的做功是力矩沿 θ 增加的方向积分的结果，也就是说刚体做功是由力矩在 θ 方向的移动导致的，那么就可以得出一个小小的推论：力矩做功为零情况可以是力矩为零，同样可以是力矩方向始终与 θ 增加的方向垂直，这与质点运动中力的方向与位移的关系类似。

（四）质点运动动量与刚体运动角动量的对比

表 6. 质点运动动量与刚体运动角动量的对比

质点		刚体	
冲量	$I=\int Fdt$	冲量矩	$\int_{t_1}^{t_2} Mdt$
动量	p=mv	角动量	$L=Jw$

在质点力学中，有两个非常重要的物理量:冲量和动量。力对时间的积分称为冲量，惯性质量和速度的乘积称为动量，用 p 表示： P=mv。一段段时间内，作用于质点上的合外力的冲量等于质点动量的增量，这就是质点的动量定理。该定理可以从质点运动的动力学方程牛顿第二定律推导而来:

$$F=ma=\frac{m\,dv}{dt};$$

$$Fdt=mdv;$$

$$\int Fdt = mv - mv_0$$

类似地，在刚体定轴转动中，也有两个对应于冲量和动量的物理量:冲量矩和动量矩，动量矩常称为角动量。力矩对时间的积分称为冲量矩，转动惯量和角速度的乘积称为角动量，

通.常用 L 表示： L=Jω。一段时间内，作用于刚体.上的冲量矩等于刚体角动量的增量，这称为刚体的角动量定理。同样，这个定理也可以从刚体定轴转动的动力学方程转动定律推导.而来: $\int Mdt = J\omega - J\omega_0$与质点力学相似同样满足角动量守恒定律。

（五）总结

很显然，同样作为运动学的一部分，刚体运动学与质点运动学具有极其相似的一面。在学习刚体运动学的过程中如果能够通过与质点运动学的类比来学习将达到事半功倍的效果。

参考文献：

[1] 赵远，王晓鸥，张宇，霍雷.大学物理学[M].第六版.北京.高等教育出版社.2012.74

[2] 钱卉仙.对称性原理在刚体定轴转动教学中的应用[J].科技信息，2010（04）：516.

[3] 廖耀发，陈义万.大学物理学（上册）[M].北京：高等教育出版社，2014.

[4] 费曼恩，莱顿，桑兹.费曼恩物理学讲义[M].第一卷.上海.科学技术出版社.2013.4:198-201.