

算法设计与分析第五章学习指南

视频

<https://www.icourse163.org/course/HIT-356006>

(算法设计与分析(基础篇) 第五讲)

<https://mooc.study.163.com/learn/1000005000?tid=1000005001#/learn/content>

(算法设计与分析(进阶篇)第四讲)

阅读

算法导论(第三版) 第 16 章, 第 23 章

练习题

1. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是实数轴上的 n 个点, 尝试用单位长度的闭区间覆盖这些点, 设计贪心算法求解需要多少单位长度闭区间?
2. 设有 n 个物品, 第 i 个物品的价值是 v_i 、重量是 w_i , 假设物品可以任意分割, 给定一个背包, 其能容纳最大重量为 C , 求该背包能容纳物品的最大价值。要求写出伪代码并分析算法正确性和复杂性。
3. 考虑多背包问题, 即给定 n 个物品, 其中物品 i 的价格是 v_i , 重量是 w_i , 有 m 个背包, 背包 j 最大能装物品的重量均为 B_j , 求这些背包能够装下物品的最大价格, 其中每个物品要么完全放入背包, 要么不放入。

对于此问题一个显然的贪心算法如下:利用精确算法选择物品装第一个背包, 然后移除装入第一个背包的物品, 然后按此方法依次装后面的背包。

(a) 证明此贪心算法不能给出精确解, 在所有 B_j 都相等时也是如此。

(b) 证明当所有 B_j 都相等时, 此贪心算法是一个常近似比的近似算法。

4. 设有 6 种硬币, 面值是 1 分, 2 分, 5 分, 1 角, 5 角, 1 元, 给定一个钱数 n , 求出一个硬币组合, 要求面值总和为 n 且硬币个数最少, 假设每种硬币个数无限。要求写出伪代码并分析算法正确性和时间复杂性。

5. 给定一个城市集合, 一些城市之间由高速公路连接, 这些城市和城市之间的高速公路构成了一个无向图 $G = (V, E)$, 每条边 $e = (u, v) \in E$ 表示一条城市 u 到 v 的高速公路, e 上的权重 l_e 表示该高速公路的长度。一辆车需要从城市 s 到达城市 t , 但该车的油箱存油最多能走 L 公里, 每个城市有一个加油站, 但是城市之间没有加油站, 因此, 只有当 $l_e < L$ 的时候, 才能走 e 对应的高速公路。回答下列问题:

(1) 设计一个时间复杂性 $O(E)$ 的算法, 判定是否这辆车能够从城市 s 走到城市 t 。

(2) 如果准备买一辆新车, 需要知道保证车从城市 s 成功走到城市 t 最少要用多大的油箱, 请设计时间复杂性为 $O((|V| + |E|) \log |V|)$ 的算法解决该问题。

6. 考虑特殊的0-1背包问题：有n个物品，每个物品i价值和重量都是 w_i ，背包能容纳物品的最大重量是C，选择背包能容纳的物品集合，使得这些物品价值之和最大。回答下列问题：

(1) 若物品的重量(价值)分别是1, 2, ..., 2^{n-1} ，证明该0-1背包问题可以用贪心法求解并写出该贪心算法的伪代码。

(2) 请写出一个物品重量(价值)序列，使得上述贪心法无法得到最优解。

7. 判断下列说法的正误

(1) 能够用贪心算法求解的问题一定能用动态规划求解

(2) 哈夫曼编码算法使用的方法是贪心算法

(3) 同一个问题，其贪心算法的效率一定比动态规划设计的算法高

(4) Floyd 算法是一种贪心算法

(5) Kruskal 算法是一种贪心算法

8. 以下的问题用贪心法能得到最优解的问题包括_____。

A. 最小生成树 B.TSP C.0-1 背包 D.哈夫曼编码 E.顶点覆盖问题

9. 3.3. 下列问题用贪心法无法保证求得最优解的是()

A 任务安排问题 B 最小生成树 C 哈夫曼编码 D 0-1 背包问题

4. 下列不是贪心算法设计基本步骤的是 (D)。

A、分析贪心选择性 B、分析优化子结构 C、设计算法 D、定义最优解

10. 3.4设有n个正整数，将它们连接成一排，组成一个最大的多位整数。

例如：n=3 时，3 个整数 13，312，343，连成的最大整数为 34331213。

又如：n=4 时，4 个整数 7，13，4，246，连成的最大整数为 7424613。

输入是 n 个正整数，输出是这 n 个正整数连成的最大多位整数，要求用贪心法求解该问题。

答案要求包含以下内容：(1) 证明问题具有贪心选择性；(2) 证明问题具有优化子结构；(3)

写出算法伪代码并分析算法的时间复杂度。

11. 存放于磁带上文件需要顺序访问。故假设磁带上依次存储了 n 个长度分别是 $L[1], \dots, L[n]$

的文件，则访问第 k 个文件的代价为 $\sum_{j=1}^k L[j]$ 。现给定 n 个文件的长度 $L[1], \dots, L[n]$ ，并

假设每个文件被访问的概率相等，试设计一个算法输出这 n 个文件在磁带上的存储顺序使得平均访问代价最小。。答案要求包含以下内容：(1) 证明问题具有贪心选择性；(2) 证明问题具有优化子结构；(3) 给出算法并分析算法的时间复杂度。

12. 考虑下述最小生成树算法，初始时，G中的每个顶点被视为一个单结点的树，不选择任何边，在每一步，为每棵树选择一条最小权的边e，是的e只有一个顶点在T中，如果必要的话，出去所选边的备份，当只得到一棵树或者所有边都被选中了，那么终止算法。证明算法的正确性并且求出算法的最大步数。

13. $G=(V, E)$ 是一个具有n个顶点m条边的连通图，且可以假设边的代价为正且各不相同，设，定义T的瓶颈边是T中代价最大的边，G的一个生成树T是一棵最小瓶颈生成树，如果不存在G的生成树T'是的它具有代价更小的瓶颈边。问：(1)G的每棵最小瓶颈树一定是G的一棵

生成树吗？证明或者给出反例；(2) G 的每棵生成树都是 G 的最小瓶颈树吗？证明或者给出反例。

14. 给定 n 个自然数 d_1, d_2, \dots, d_n ，设计算法，在多项式时间确定是否存在一个无向图 G ，使它的结点度数准确地就是 d_1, d_2, \dots, d_n ，要求 G 中在任意两个结点之间至多有一条边，且不存在一个结点到自身的边。
15. 考虑一种特殊的 0-1 背包问题，有 n 个物品，每个物品价值和重量都相等，背包能容纳的最大重量是 C ，回答下列问题：

若物品的重量(价值)分别是 $1, 2, \dots, 2^n$ ，证明该 0-1 背包问题可以用贪心法求解并写出该贪心法。

请写出一个物品重量(价值)序列，使得上述贪心法无法得到最优解。

16. 考虑下述“逆贪心”算法，输入是连通有权无向图 G ，用邻接表描述

```
REVERSEGREEDYMST( $G$ ):
  sort the edges  $E$  of  $G$  by weight
  for  $i \leftarrow 1$  to  $|E|$ 
     $e \leftarrow i$ th heaviest edge in  $E$ 
    if  $G \setminus e$  is connected
      remove  $e$  from  $G$ 
```

(1). 该算法的最坏运行时间是多少？在什么情况下发生？

(2). 证明这个算法可以找到 G 的最小生成树。

17. 给定一个城市集合，一些城市之间由高速公路连接，这些城市和城市之间的高速公路构成了一个无向图 $G = (V, E)$ ，每条边 $e = (u, v) \in E$ 表示一条城市 u 到 v 的高速公路， e 上的权重 l_e 表示该高速公路的长度。一辆车需要从城市 s 到达城市 t ，但该车的油箱存油最多能走 L 公里，每个城市有一个加油站，但是城市之间没有加油站，因此，只有当 $l_e < L$ 的时候，才能走 e 对应的高速公路。回答下列问题：

(1) 设计一个时间复杂性 $O(E)$ 的算法，判定是否这辆车能够从城市 s 走到城市 t 。

(2) 如果准备买一辆新车，需要知道保证车从城市 s 成功走到城市 t 最少要用多大的油箱，请设计时间复杂性为 $O((|V| + |E|) \log |V|)$ 的算法解决该问题。

18. 要为即将到来的哈尔滨世界博览会设计和生产 n 个不同的展品，每一个项目首先用 CAD 软件设计，然后送到外面加工厂加工，第 i 个展品的设计时间为 d_i ，加工时间为 f_i 。加工厂能力很强，可以同时加工 n 个展品，所以对于每件展品，只要设计结束就可以立刻开始加工。但是，只有一位设计师，所以需要确定产品设计的顺序，以最快时间完成所有 n 件展品的设计和加工。

比如，完成了第一件展品的设计，可以将其交给加工厂，然后立刻开始第二件展品的加工。当完成第二件展品的设计时，可以将其交给加工厂而不需要考虑是否第一件展品已经加工完成。

设计多项式贪心算法求解此问题，分析时间复杂度，并证明其正确性。

19. 设有 n 个正整数，将它们连接成一排，组成一个最大的多位整数。

例如： $n=3$ 时，3 个整数 13，312，343，连成的最大整数为 34331213。

又如： $n=4$ 时，4 个整数 7，13，4，246，连成的最大整数为 7424613。

输入是 n 个正整数，输出是这 n 个正整数连成的最大多位整数，要求用贪心法求解该问题。

答案要求包含以下内容：(1) 证明问题具有贪心选择性；(2) 证明问题具有优化子结构；(3) 写出算法伪代码并分析算法的时间复杂度。

20. 在一个操场上摆放着 n 堆石子，现要将石子有次序地合并成一堆。规定每次只能选择任意两堆石子合并成新的一堆，并将新一堆石子数记为该次合并的得分。试设计贪心算法，计算出将 n 堆石子合并成一堆的最小得分和最大得分，写出算法的伪代码并分析算法的计算复杂性。

21. 利用贪心法设计算法求解下述问题：

输入：正整数集合 S ，正整数 W

输出： S 的子集合 S' ，其中元素之和不小于 W ，且 S' 是满足这个条件的子集中包含元素数量最少的。

要求：(1) 阐明贪心思想 (2) 写出伪代码 (3) 证明算法正确性 (4) 分析算法时间复杂度

22. 现有一块草坪，长为 m 米，宽为 n 米，要在横中心线上放置半径为 R_i 的喷水装置，每个喷水装置的效果都会让以它为中心的半径为实数 R_i 的圆被湿润，设有充足的喷水装置，并且一定能把草坪全部湿润，设计算法选择尽量少的喷水装置，把整个草坪的全部湿润。要求写出伪代码并分析算法正确性和复杂性。

23. 设计贪心算法求解如下的最大生成树问题。

输入：无向连通图 $G=(V,E)$ ，非负加权函数 $w:E \rightarrow R^+$ ；

输出：各边权值之和达到最大值的生成树 $T=(V,E')$

1. 简述算法的贪心思想；
2. 叙述并证明问题的贪心选择性；
3. 叙述问题的优化子结构
4. 用伪代码表述算法并分析其时间复杂度

24. 3.6 在黑板上写了 n 个正数组成的一个数列，进行如下操作：每一次擦去其中两个数 a 和 b ，然后在数列中加入一个数 $a*b+1$ ，如此下去黑板上只剩下一个数。在所有按这种方法最后得到的树中，最大的数记为 \max ，最小的数记为 \min ，则该数列的极差 M 定义为 $M=\max-\min$ 。对于给定数列，设计贪心算法计算出其极差 M ，要求分析算法的正确性，写出算法的伪代码并分析其复杂性。

25. 要为即将到来的哈尔滨世界博览会设计和生产 n 个不同的展品，每一个项目首先用 CAD 软件设计，然后送到外面加工厂加工，第 i 个展品的设计时间为 d_i ，加工时间为 f_i 。加工厂能力很强，可以同时加工 n 个展品，所以对于每件展品，只要设计结束就可以立刻开始加工。但是，只有一位设计师，所以需要确定产品设计的顺序，以最快时间完成所有 n 件展品的设计和加工。比如，完成了第一件展品的设计，可以将其交给加工厂，然后立刻开始第二件展品的加工。当完成第二件展品的设计时，可以将其交给加工厂而不需要考虑是否第一件展品已经加工完成。设计多项式贪心算法求解此问题，分析时间复

杂度，并证明其正确性。

26. 哈工大的机器人研究团队现有不同类型的登山机器人，这些登山机器人可以携带有限的能量登山。在登山过程中，登山机器人需要消耗一定能量，连续攀登的路程越长，其攀登的速度就越慢。在对 m 种不同类型的机器人进行性能测试时，已测定出机器人 i 连续攀登 $1, 2, \dots, n$ 米所用的时间分别为 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}$ 。现在要对这 m 个机器人进行综合性能测试，举行机器人接力连续攀登演习。攀登的总高度为 s 米。规定每个机器人攀登 1 次，每次至少攀登 1 米，最多攀登 n 米，而且每个机器人攀登的高度必须是整数，即只能在整米处接力。安排每个机器人攀登适当的高度，使完成接力攀登的总时间最短，完成下列问题。

例子：若有 3 个机器人，每个机器人连续攀登 $1, 2, 3$ 米所用的时间如表中所示。每个机器人最多可以攀登 3 米，攀登的总高度为 5 米，则使完成接力攀登的总时间最短的安排方案为 1 号机器人攀登 2 米， 2 号机器人攀登 2 米， 3 号机器人攀登 1 米。

	1 米	2 米	3 米
1 号	24	49	75
2 号	23	48	75
3 号	22	49	80

- (1) 证明该问题具有贪心选择性；
- (2) 证明该问题具有优化子结构；
- (3) 根据该贪心选择性和优化子结构用伪代码写出算法；
- (4) 分析算法的时间复杂度。