人船模型中的质点运动学与刚体运动学

摘要：人船模型取自生活中的一个较为常见的场景进行一定程度的理想化后抽象出的一个模型，是动量与角动量的学习中的一个重要的模型，与许多模型有共通之处。相比较而言，单一使用动量的题目更多一些，但是角动量的使用也不容忽视。本文从几个经典的人船模型例题入手，将质点运动学与刚体运动学进行比较。

关键词：动量守恒 角动量守恒 刚体转动定律

1.人船运动中的平动问题

例一：如图 1 所示，设人的质量为 m，船的质量为 M，人以$\vec{v}$的速度跳离船，求人跳离后船的速度。

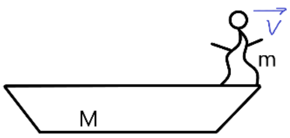

图 1

解：船与人组成的系统在水平方向动量守恒

设船速度为$\vec{u}$，则有：$m\vec{v}+M\vec{u}=0$

则有$\vec{u}=-\frac{m}{M}\vec{v}$，负号表示船的速度与人的速度反向。

从例一可以看出当人与船的作用效果为一个瞬间效果的时候，只需要对二者使用动量守恒即可。本题中的船可以看成是一个刚体，但是最终处理的时候却与对质点的处理类似。事实上在所有的分析中我们都希望简化问题，如果能将刚体转化为质点分析那么将极大简化题目。由此可见，当题目中的受力或者运动不涉及刚体所特有的一些性质的时候，刚体完全可以看成是一个质点。在这一类的题目中可以将质点看成是刚体在空间性质上退化的结果，而从普遍意义上看刚体之所以区别于质点就是因为其在空间特性上与质点不同导致了后续一系列特殊的地方。由此可见，我们对刚体这一较为质点复杂的模型的处理方式是需要哪些性质就将其的空间特性延伸至哪一层面，不涉及的特性就不讨论以简化问题。这不仅在刚体的分析中适用，在几乎所有的分析中都是如此，都希望将复杂的模型转化为几种基本模型的组合。

接下来看例二：

例二：一个质量为m的人站在一条质量为 M 长度为 L 的船的船头处。开始时静止。试求：当人从船头走到船尾时船的移动距离。[1]

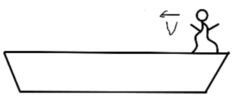

图 2

法一：

解：由于人与船的速度在同一直线上，不妨设船速为 v，人速度为 u。

由于人与船在水平方向动量守恒，则有：

$$mu-Mv=0;$$

$$\text{则 } u=\frac{M}{m}v;$$

设人相对于船的速度为v_0，则

$$v_0=v+u;$$

当人从船头走到船尾过程中，有：

$$t=\frac{L}{v_0};$$

$$\text{则 } s=vt=\frac{mL}{(M+m)}\text{，方向向前；}$$

法二：（引入质心概念）

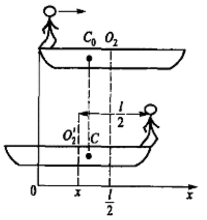

图 3

由于人与船系统水平方向不受外力，所以系统的质心位置不变；

则设人与船质心在运动前坐标x_0，运动后坐标x_c，运动后船自身质 心位置 x，

则有$x_0=\frac{m+M\cdot\frac{L}{2}}{m+M}$，$x_c=\frac{m\left(x+\frac{L}{2}\right)+Mx}{m+M}$

又因为$x_c=x_0$，则可以得出$x=\frac{(M-m)L}{2(m+M)}$

则有 $s=\frac{mL}{(M+m)}$，方向向前。

由例二可以看出，当人与船的作用是一个时间段内时情况略微复杂，这个时候如果引入质心的概念就可以简化题目的分析过程。质心的概念的引入相当于将一个复杂的系统简化成质心的运动和一个个质点相对质心的相对运动，质点的运动是我们熟悉的而且易解的，将刚体中的问题拆分成质点的问题就是将陌生问题化为熟悉问题求解，将简化分析过程。如果对于更加复杂的运动过程我们甚至可以建立质点系进行分析，从而不必进行大量的计算分析过程。

综合以上两道例题我们可以看出，人船模型中当船只进行平动的时候总体的解题思路是将系统简化为质点之间的关系，进而引出质心等概念，这一过程相对来说是较为简单的。

2.人船模型中刚体转动的引入

解释了人船模型中的平动问题后我们很容易提出问题，是否人船模型中只存在平动一种情况了呢？显然不是的，根据生活经验，很容易得出人跳船的时候船有可能在平动的同时会发生转动，那么将这种情况理想化之后可以得到另外一种题型。

为了讲解这一种情况我们不妨先介绍一下刚体转动的平行轴定理。平行轴定理建立了从

一个轴迁移到另外一个与之平行的轴上时的转动惯量的计算问题。其表示形式为$I = I_c + MR^2$,其中 R 表示两轴之间的水平距离，I_c为关于原轴的转动惯量。

那么在简要地了解了平行轴定理后我们来看一道例题。

例三.一个人站在一个竹筏的一端用力向垂直于筏身的方向水平跳出，筏由于受到反冲作用就要旋转起来，假定人的质量$m = 60kg$，筏的质量$M = 500kg$，筏长$L = 10m$，求竹筏获得的角速度（竹筏当做棍处理）。[2]

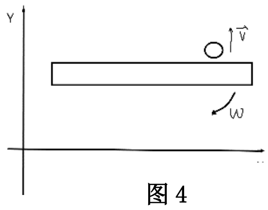

图 4

分析：很容易发现，这一题中的人船模型与上两例差别很大，首先最大的区别就是船转起来了，并不单纯是平动，那么很自然地就会想到使用刚体的转动定律。但是顺着这一思路走下去，我们会发现一点问题：与一般一段固定的题目不一样，本题没有明显固定点，那么刚体的转轴在哪里呢？

经过简单的调研，大多数同学的解法如下所示：

解：由于人与船组成的系统不受外力，因此由角动量守恒：

解法一：

$$Jw = mv \times \frac{L}{2}，由于J = \frac{1}{12}\mathrm{M}L^2$$

$$带入解得，w = -0.216rad/s$$

与答案对比，答案一致，那么是否意味着这种解法就是正确的呢？

有文献提出，这种解法存在两点错误：1.刚体转动定律只适用于惯性参照系或者质心系。2.人的速度v是相对于岸的速度而不是相对于船质心的速度，使用不正确。[3]

首先不论这种看法是否正确，那么我们不妨对这种解法进行一定的修改：

解法二：

在建立解法一中的s坐标系的同时我们不妨建立一个s'系，s'与s最初O点与O'重合，s'沿s系y轴负方向以v_c速度移动，其中v_c是人跳离后船质心获得的平动速度，则在s'系中船只做转动，那么就有：

$$mv = Mv_c \quad 则v_c = \frac{m}{M}v;$$

在s'系中船与人最初的角动量并不为 0，而等于$\frac{-mv_cL}{2}$

那么在s'系中由角动量守恒有$\frac{-mv_cL}{2} = \frac{m(v-v_c)L}{2} + Jw$　　(1.1)

解得$w = -0.216rad/s$,与解法一是一致的。

那么解法二的是否严谨呢？不妨看（1.1）式的左右相对参考点是否一致：等号左侧参考点是s'系中的船的质心，右侧两个式子的参考点同样是s'系中的船的质心，其他形式与解法一中一致，因此解法二是正确且严谨的解法。由此种解法可以看出在此类题目中速度的分解与一般题目略显不同，不是沿固定坐标轴分解，而是分解为平动与转动。这一点可以与轮胎的转动类比，同样是平动与转动相结合。

那么我们不妨继续分析一下解法一答案正确的原因，是本题恰好撞上还是一个必然？

经过简单的分析我们发现，解法一忽略了筏在人离开后的平动的过程，而由解法二中选定新坐标系所列式可以看出，算上平动的影响后的式子与没算上平动的式子经过化简是一致的，所以从数学计算层面我们发现解法一解出的一定是正确答案而不是凑巧。

那么从物理层面上呢？我们知道，刚体的角动量守恒只能应用于惯性系或是质心系，而船的质心并不是系统质心也不是静止的点，因此认为解法一错误的文献一般以此作为一点理由，但是这真的正确吗？其实并非如此，我们可以这样理解，人与船的作用是瞬间完成的，船的质心在瞬间获得了v_c的速度，如果忽略船的加速过程事实上船的质心参考系在获得速度后可以将整个系统看成一个连续的质点系，这样事实上并没有违背角动量定律的使用条件。或者可以这样理解：可以推出系统总动量为零时，系统总角动量值与矩心的选择无关[4]，本题符合此条件，那么我们可以求得筏上会有一个静止点可以作为转动中心，但是将该转动中心移动至船的质心并不影响求解的过程，或者说，这个解法的实质在于选取这样一点作为矩心:它相对于惯性参考系静止,而在人跳出的瞬时重合于筏的质心[5]。因此解法一解法看似有问题实则是正确的。

由本题我们可以延展出许多类似的模型：沿转轴转动时突然飞出的杆，投掷时发生转动的物体等，均可以采取平动与转动分别研究的方法，平动时当做质点研究，在研究转动时再加上刚体所特有的属性。

3. 总结

因此我们可以对人船模型进行总结：在只涉及平动的题目中可以使用动量守恒，在一定程度上将船这一刚体看成质点进行处理。在涉及力的作用是一段时间内时可以选用质心或是使用运动学公式求解;而若涉及平动与转动的题目较不易引起争议的方法是引入一个运动的坐标系人为将转动与平动分离，这其实符合运动的分解。而如果直接采用船的质心作为参考系也是正确的。因此事实上角动量定律的使用范围很广，也是比较不容易用好的，因此需要下功夫学习。

参考文献：

[1] 赵远，王晓鸥，张宇，霍雷.大学物理学[M].第六版.北京.高等教育出版社.2012.74
[2] 程守洙，江之永．普通物理学[M]（第六版）．北京：高等教育出版社，2006
[3] 高文亭，尹道先．有关刚体运动的两个习题解答[J].大学物理,1984(02):44-47
[4] 乐小云.对在惯性参考系中动量矩应用的讨论[J].中国民航学院学报,1990(01):68-74.
[5] 吴秀芳.“双重错误的解法”其实是正确解法[J].大学物理,1989(07):18.