计　算　方　法

实验指导与实验报告

姓名______ __

学号____

院系____计算学部__

专业______________

哈尔滨工业大学

题目（摘要）
牛顿迭代法

前　言：（目的和意义）

目的：利用牛顿迭代法求 $f(x)=0$ 的根

意义：牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程的单根附近具有平方收敛，而且该法还可以用来求方程的重根、复根，此时线性收敛，但是可通过一些方法变成超线性收敛。另外该方法广泛用于计算机编程中。

数学原理
牛顿迭代法计算公式

$$x_0=\alpha$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$n=0,1,\cdots$$

一般地，牛顿迭代法具有局部收敛性，为保证迭代收敛，要求，对充分小的 $\delta>0$，$\alpha\in O(x^*,\delta)$。如果 $f(x)\in C^2[a,b]$，$f(x^*)=0$，$f'(x^*)\neq 0$，那么，对充分小的 $\delta>0$，当 $\alpha\in O(x^*,\delta)$ 时，由牛顿迭代法计算出的 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，且收敛速度是 2 阶的；如果 $f(x)\in C^m[a,b]$，$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$，$f^{(m)}(x^*)\neq 0(m>1)$，那么，对充分小的 $\delta>0$，当 $\alpha\in O(x^*,\delta)$ 时，由牛顿迭代法计算出的 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*，且收敛速度是 1 阶的；

程序设计流程

1 置 $n=1$

2 当 $n\le N$ 时，做 2.1—2.4

2.1 置 $F=f(x_0),DF=f'(x_0)$

如果 $|F|<\varepsilon_1$，输出 x_0；停机

如果 $|DF|<\varepsilon_2$，输出失败标志；停机

2.2 置 $x_1=x_0-F/DF$

2.3 置 $Tol=|x_1-x_0|$

如果 $|Tol|<\varepsilon_1$，输出 x_1；停机

2.4 置 $n=n+1$，$x_0=x_1$

3 输出失败标志

4 停机

实验结果、结论与讨论

问题 1：（1） $\cos x - x = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 10$ ， $x_0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398163$

（2） $e^{-x} - \sin x = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 10$ ， $x_0 = 0.6$

(1). X=0.739085

(2). X= 0.588533

问题 2：（1） $x - e^{-x} = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 10$ ， $x_0 = 0.5$

（2） $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0$ ， $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ， $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ ， $N = 20$ ， $x_0 = 0.5$

(1). X=0.567143

(2).X= 0.566606

问题 3：（1）由下面的递推公式可以生成勒让德（Legendre）多项式

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_{n+2}(x) = \frac{2n+3}{n+2} x P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2} P_n(x), n \ge 0$$

①试确定 $P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ 和 $P_5(x)$

②确定 $P_6(x)$ ，求 $P_6(x)$ 得所有零点，精度 $\varepsilon = 10^{-6}$

±0.9324695142，±0.6612093865，±0.2386191861

①

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$
$$P_3(x) = (5x^2 - 3x)/2$$
$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$
$$P_5(x) = (63x^4 - 70x^3 + 15x)/8$$

② $P_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$

零点：±0.932470，±0.661209，±0.238619

（2）由下面的递推公式可以生成切比雪夫勒让德（Chebyshev）多项式

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), n \ge 0$$

①试确定 $T_2(x), T_3(x), T_4(x)$ 和 $T_5(x)$

②确定 $T_6(x)$，求 $T_6(x)$ 得所有零点，精度 $\varepsilon = 10^{-6}$

$$x_j = \cos(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi)，\quad j = 0,1,\cdots,n$$

①

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

② $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

零点：±0.965926，±0.866025，±0.707107，±0.258819

（3）由下面的递推公式可以生成拉盖尔（Laguerre）多项式

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$\cdots\cdots$$
$$L_{n+2}(x) = (2n+3-x)L_{n+1}(x) - (n+1)^2 L_n(x), n \ge 0$$

①试确定 $L_2(x), L_3(x), L_4(x)$ 和 $L_5(x)$

②求 $L_5(x)$ 得所有零点，精度 $\varepsilon = 10^{-6}$

0.2635603197，1.4134030591，3.5964257710，7.0858100059，12.6408008443

①

$\mathrm{L}_2(x) = (x^2 - 4x + 2)/2$

$L_3(x) = (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)/6$

$L_4(x) = (x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)/24$

$L_5(x) = (-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)/120$

②零点为：

0.26356，1.4134，3.59643，7.08581，12.6408

（4）由下面的递推公式可以生成埃尔米特（Hermite）多项式

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = x$$
$$\cdots\cdots$$
$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x), n \ge 0$$

①试确定 $H_2(x), H_3(x), H_4(x)$ 和 $H_5(x)$

②确定 $H_6(x)$，求 $H_6(x)$ 得所有零点，精度 $\varepsilon = 10^{-6}$

±2.3506049737，±1.3358490740，±0.4360774119

①

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

③ 零点如下

±2.3506，±1.33585，±0.43607

思考题：

1. 对实验 1 确定初值的原则是什么？实际计算中应如何解决？
2. 对实验 2 如何解释在计算中出现的现象？试加以说明
3. 对实验 3 存在的问题的回答，试加以说明

1. 牛顿迭代法具有局部收敛性，因此实验 1 确定的初值应该与真实的零点距离不是太远，如果距离太远可能不收敛到真实零点或是需要多次迭代才能到达真实的零点。在真实计算中可以使用二分法确定一个大致的零点区间，在这一区间中进行迭代，可以在一定程度上减少迭代次数。

2.经过观察可以发现实验二中第二个等式是上一个等式的平方，那么它们的零点应该是一样的，区别仅在于第二个等式有重根。但是经过迭代后发现两个式子的收敛的零点不一样。这是由于第二个方程在根处导数为 0，且在零点附近导数值很小，使得牛顿法收敛速度变慢，精度变低。

3.从实验三可以发现，有的式子是存在多个根的，且这些根的距离并不是很远。在这种情况下牛顿迭代的初值很难确定，如果仅靠定出大致区间之后猜测初值的话很可能漏过某些零点。此时需要结合较为稳定的二分法搜索零点，才比较容易把所有的零点一次性全部找到。