

数字世界精彩无限

Unit 4 卡诺图

张英涛

计算机科学与技术学院

哈尔滨工业大学

4. 卡诺图



- 布尔函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

布尔函数的最简形式

- 使用**AND**门、**OR**门来实现一个函数时，实现该函数的代价与所用 **逻辑门的个数**、**输入个数** 直接相关

$$F = AB + \bar{A}C$$

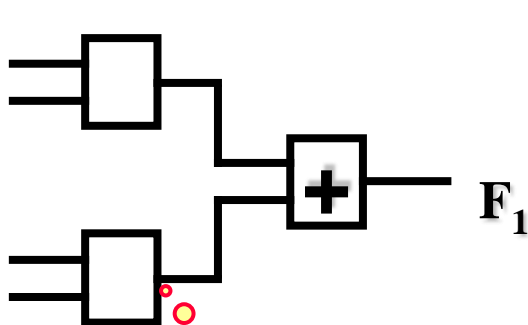
$$= AB + \bar{A}C + BC$$

$$= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$$

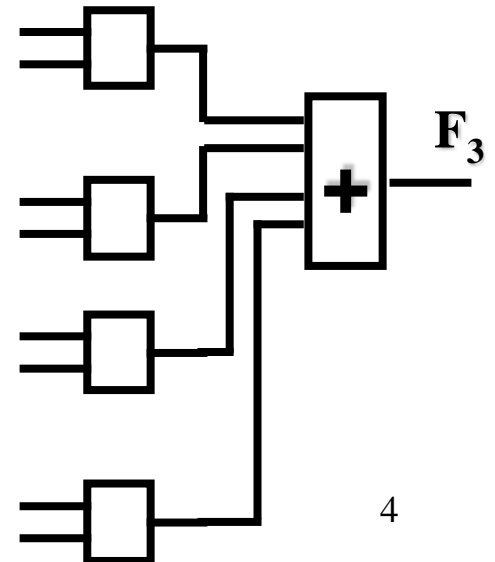
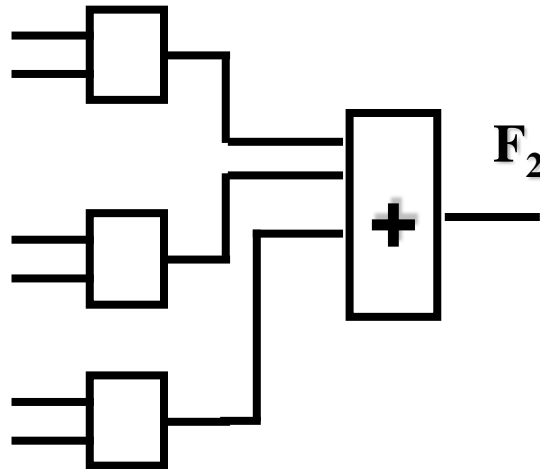
$$\dots\dots\dots \textcircled{1}F_1$$

$$\dots\dots\dots \textcircled{2}F_2$$

$$\dots\dots\dots \textcircled{3}F_3$$

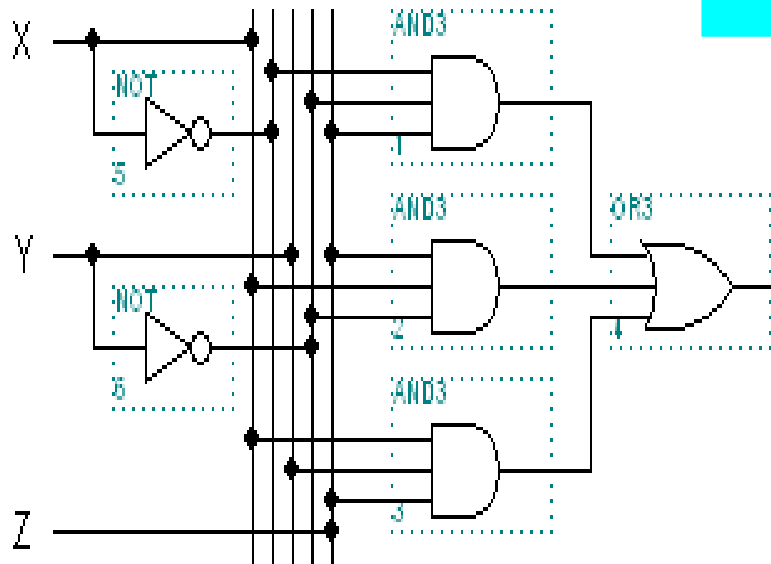


最小代价!

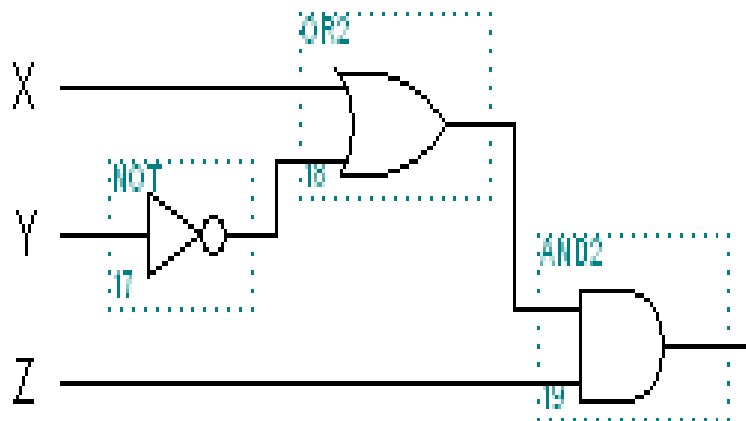
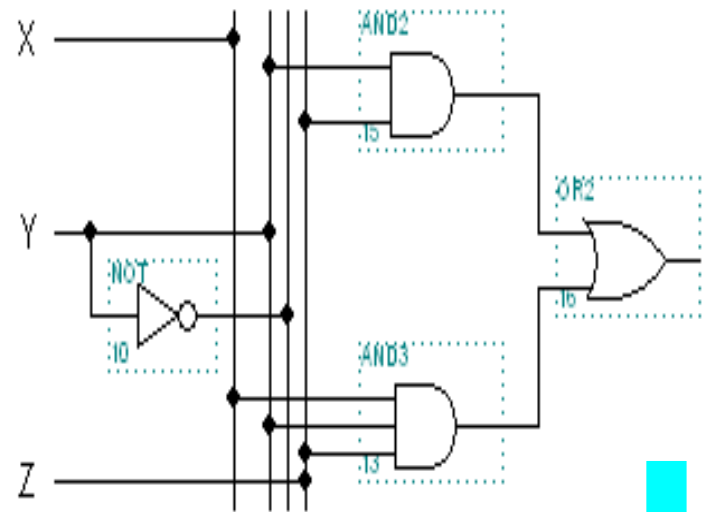


布尔函数的最简形式

$$F = \sum m(1,5,7) = x'y'z + xy'z + xyz$$



$$F = (x'y'z + xy'z) + xyz = y'z + xyz$$



$$F = (y' + xy)z = (y' + x)z$$

布尔函数的最简形式

最简表达式标准:

- ① 逻辑门的数量最少
- ② 逻辑门的输入个数最少

与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式**不一定是唯一的**.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

4. 卡诺图

- 布尔函数的最简形式



- 多变量卡诺图

- 填写卡诺图

- 卡诺图化简法

相邻单元格的属性

- 单元格对应的最小项，按格雷码摆放
- 任何两个相邻单元格对应的最小项只有一个变量取值不同

1. 两变量卡诺图

	\bar{B}	B
\bar{A}	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

(a)

	B	0	1
A	0	$0\ 0$ 0	$0\ 1$ 1
1	1	$1\ 0$ 2	$1\ 1$ 3

(b)

	B	0	1
A	0	0	1
1	1	2	3

	B	0	1
A	0	0	0
1	1	1	1

$$F = \bar{A}\bar{B} + AB = \sum m(2, 3)$$

相邻单元格的属性

2. 三变量卡诺图

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

相邻单元格的属性

3. 四变量卡诺图

CD		00	01	11	10
AB					
00		0	1	3	2
01		4	5	7	6
11		12	13	15	14
10		8	9	11	10

相邻单元格的属性

4. 五变量卡诺图

CDE									
AB		000	001	011	010	110	111	101	100
00		0	1	3	2	6	7	5	4
01		8	9	11	10	14	15	13	12
11		24	25	27	26	30	31	29	28
10		16	17	19	18	22	23	21	20

相邻单元格的属性

4. 五变量卡诺图

x_4x_5		00	01	11	10
x_2x_3	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$$x_1 = 0$$

x_4x_5		00	01	11	10
x_2x_3	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$$x_1 = 1$$

4. 卡诺图

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法



填写卡诺图

① 已知真值表

真值表

ABC	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1 ✓
1 0 0	0
1 0 1	1 ✓
1 1 0	1 ✓
1 1 1	1 ✓

② 已知标准与或式

$$F = \sum m^3 (3, 5, 6, 7)$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

填写卡诺图

① 已知真值表

真值表

ABC	F
0 0 0	0 ✓
0 0 1	0 ✓
0 1 0	0 ✓
0 1 1	1
1 0 0	0 ✓
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

② 已知标准与或式

$$F = \Sigma m^3 (3, 5, 6, 7)$$

③ 已知标准或与式

$$F = \Pi M^3 (0, 1, 2, 4)$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	0		0
1	0			

填写卡诺图

例： $F=AB+BC+AC$

$$= AB(C+\bar{C})+BC(A+\bar{A})+AC(B+\bar{B})$$

$$= ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C$$

111 110 111 011 111 101

		BC			
		00	01	11	10
A	0				
	1				

填写卡诺图

例： $F=AB+BC+AC$

$$= AB(C+\bar{C})+BC(A+\bar{A})+AC(B+\bar{B})$$

$$= ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C$$

111 110 111 011 111 101

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

例:

$$\begin{aligned} F &= \overline{(A \oplus B)} (C + D) \\ &= \overline{A \oplus B} + \overline{(C + D)} \\ &= \overline{A} \overline{B} + AB + \overline{C} \overline{D} \end{aligned}$$

$$\overline{A} \overline{B} = \underline{0000} + \underline{0001} + \underline{0010} + \underline{0011}$$

0 1 2 3

$$AB = \underline{1100} + \underline{1101} + \underline{1110} + \underline{1111}$$

12 13 14 15

$$\overline{C} \overline{D} = \underline{0000} + \underline{0100} + \underline{1000} + \underline{1100}$$

0 4 8 12

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01	1	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	0	0	0

例:

$$F = \overline{(A \oplus C)} \cdot \overline{B} (A\overline{C}\overline{D} + \overline{A}C\overline{D})$$

$$F = \overline{A \oplus C} + \overline{B} (A\overline{C}\overline{D} + \overline{A}C\overline{D})$$

$$= A \odot C + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$$

$$= AC + \overline{A}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$$

$$= \underline{1010} + \underline{1011} + \underline{1110} + \underline{1111} + \underline{0000} + \underline{0001} + \underline{0100} +$$

$$\underline{0101} + 1000 + 0010$$

$$= 0000 + 0001 + 0010 +$$

$$0100 + 0101 + 1010 +$$

$$1011 + 1110 + 1111$$

		CD			
AB \		00	01	11	10
	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	1	1

■ 基于卡诺图的逻辑运算

BC A	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	0	1

		BC			
A		00	01	11	10
	0	1	0	1	0
	1	1	0	0	1

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0

		BC			
		00	01	11	10
A	0	1	0	1	0
	1	0	0	0	1

卡诺图的属性

		F			
		00	01	11	10
C	0		1	1	
	1	1	1		



		$X \cdot F$			
		00	01	11	10
C	0		X	X	
	1	X	X		

		F			
		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	0	1	1	0



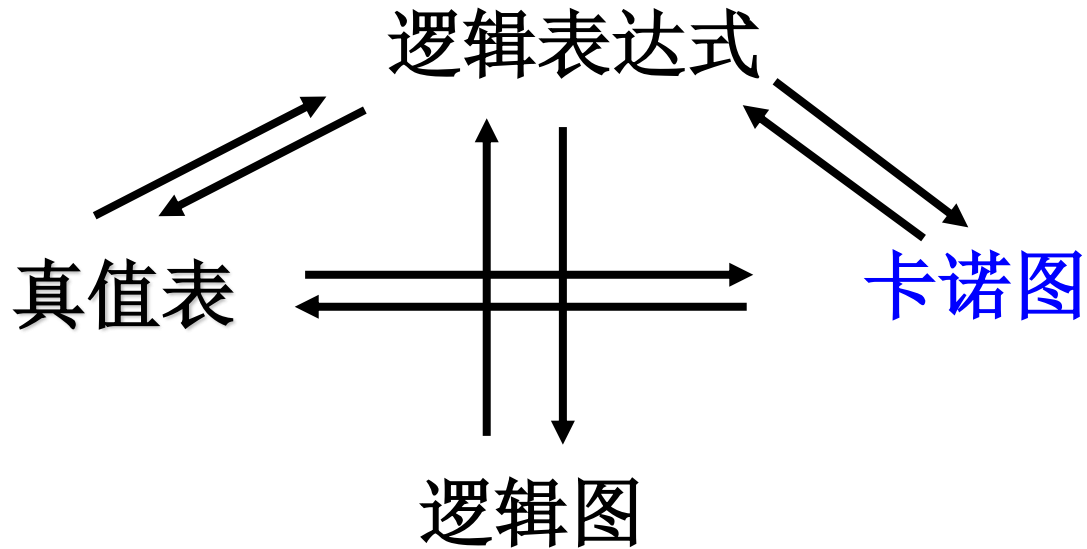
		\bar{F}			
		00	01	11	10
A	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	1

4. 卡诺图

- 布尔函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法



逻辑函数的表示方法



- 对于不多于4变量的逻辑函数的简化和运算，卡诺图非常有效

化简方法

- 代数法
- 卡诺图法—— 图形法化简逻辑函数

BC		00	01	11	10
A					
0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0

$$F(A,B,C)=\bar{A}BC+ABC=BC(\bar{A}+A)=BC$$

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取：



- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）
- 带无关项的卡诺图化简

1. 最简与或式

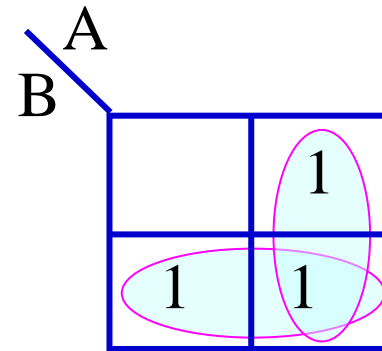
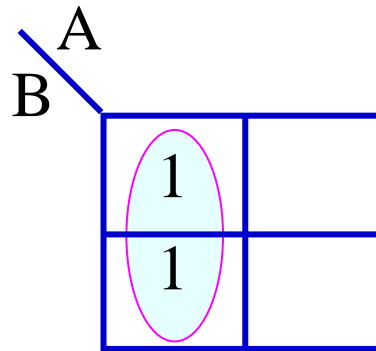
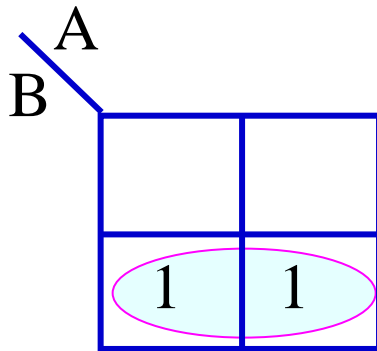
步骤①：画圈

- a). 将相邻为1的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , $m=0,1,2,\dots$)
- b). 圈越大越好
- c). 小方格可以重复使用



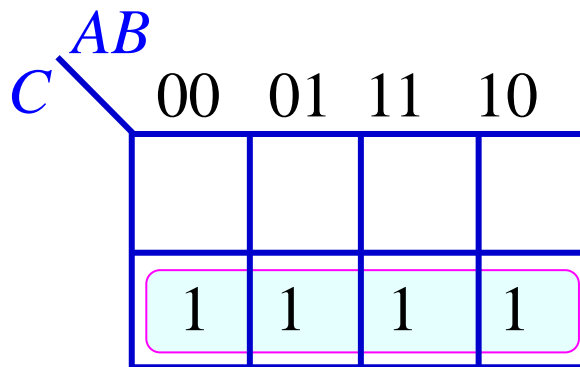
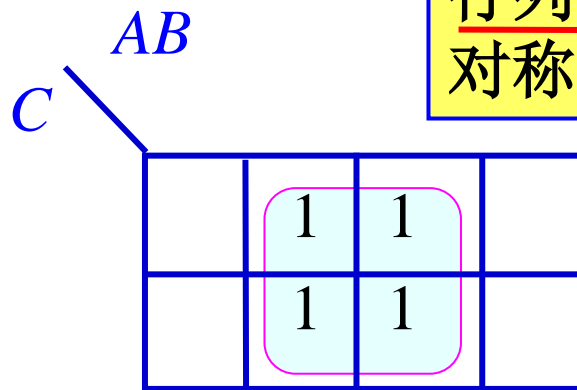
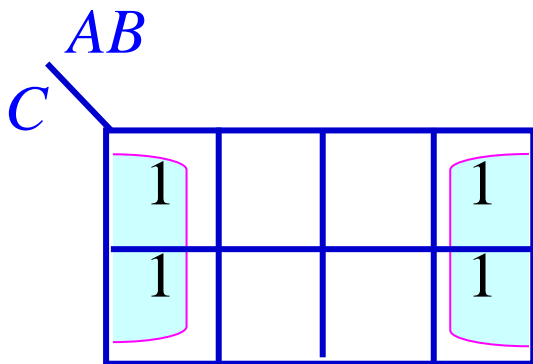
相邻：紧靠在一起的、
行列首尾的、
对称的

相邻：
紧靠在一起的、
行列首尾的、
对称的



二变量卡诺图的典型合并情况

相邻：
紧靠在一起的、
行列首尾的、
对称的



三变量卡诺图的典型合并情况

相邻：
紧靠在一起的、
行列首尾的、
 对称的

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		1	1	
01	1			1
11	1			1
10		1	1	

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1	1	1	1
10		1	1	

四变量卡诺图的典型合并情况

相邻：
紧靠在一起的、
行列首尾的、
对称的

x_4x_5 x_2x_3					
		00	01	11	10
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

$$x_1 = 0$$

x_4x_5 x_2x_3	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$$x_1 = 1$$

五变量卡诺图

例:

DEF ABC								
	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

六变量卡诺图

例:

DEF ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

六变量卡诺图

1. 最简与或式

步骤②：每个圈代表一个与项

观察 $\left. \begin{array}{l} \text{Left} \\ \text{Top} \end{array} \right\}$ 变量取值不同——消去

变量取值相同 $\left\{ \begin{array}{l} 1: \text{原变量} \\ 0: \text{反变量} \end{array} \right.$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	0	0	1

$\bar{B}\bar{D}$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	1	0

$\bar{B}D$

1. 最简与或式

步骤 ③: 将所有的与项相加

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	1	1

$\bar{B}\bar{D}$

$\bar{A}\bar{C}$

AC

$$F = \bar{A}\bar{C} + AC + \bar{B}\bar{D}$$

1. 最简与或式

$a \backslash bc$	0	1
00	1	
01	1	1
11		1
10	1	1

$$F = \bar{a}\bar{b} + b\bar{c} + ac$$

$a \backslash bc$	0	1
00	1	
01	1	1
11		1
10	1	1

$$F = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c + ab$$

表达式可能不唯一

小结

一个卡诺圈中的小方格满足以下规律：

- 1) 卡诺圈中的小方格的数目为 2^m , m 为整数且 $m \leq n$;
- 2) 2^m 个小方格含有 m 个不同变量和 $(n-m)$ 个相同变量;
- 3) 2^m 个小方格可用 $(n-m)$ 个变量的"与项"表示, 该"与项"由这些最小项中的相同变量构成。
- 4) 当 $m=n$ 时,卡诺圈包围整个卡诺图,可用 1 表示, 即 n 个变量的全部最小项之和为 1 。

五变量卡诺图

$$F = f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$$

x_4x_5 x_2x_3					
		00	01	11	10
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

$$x_1 = 0$$

x_4x_5 x_2x_3					
		00	01	11	10
00	16	17	19	18	
01	20	21	23	22	
11	28	29	31	30	
10	24	25	27	26	

$$x_1 = 1$$

		X_4X_5			
		00	01	11	10
X_2X_3	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

		X_4X_5			
		00	01	11	10
X_2X_3	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

$$F = \Sigma m(0, 1, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 16, 20, 22, 28, 30, 31)$$

		DE			
		00	01	11	10
BC	00	1	1	0	0
	01	1	1	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	1	0

$A = 0$

		DE			
		00	01	11	10
BC	00	1	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	1	1
	10	0	0	0	0

$A = 1$

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{B}\overline{D}\overline{E} + ABCD + \overline{A}B\overline{C}DE + C\overline{E}$$

六变量卡诺图

例:

DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

$$F = C'F' + B'CD'F + ACD'F + A'BD'EF' + A'BDE'F' + ABC'DE'$$

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取：

- 最简与或式（**AND-OR**）
 - 最简或与式（**OR-AND**）
 - 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）
-
- 带无关项的卡诺图化简



2. 最简或式

步骤 ①: 画圈

- a). 将相邻为0的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , $m=0,1,2,\dots$)
- b). 圈越大越好
- c). 小方格可以重复使用



相邻: 紧靠在一起的、行列首尾的、对称的

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

Diagram illustrating a 2x4 Karnaugh map for variables A, B, and C. The map shows the following values: (0,0)=1, (0,1)=1, (0,3)=1, (1,0)=1, (1,2)=0, (1,3)=0. Circles highlight groups of 0s: a red circle around (0,3) and (1,2), a blue circle around (1,2) and (1,3), and a purple circle around (1,1) and (1,2).

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

Diagram illustrating a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, and D. The map shows the following values: (0,0)=0, (0,3)=0, (1,3)=0, (2,3)=0, (3,0)=0, (3,3)=0. Circles highlight groups of 0s: a red circle around (0,0) and (3,0), a blue circle around (0,3) and (3,3), and a purple circle around (1,3) and (2,3).

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

Diagram illustrating a 4x4 Karnaugh map for variables A, B, C, and D. The map shows the following values: (0,0)=1, (0,3)=1, (1,0)=1, (1,1)=1, (1,2)=1, (1,3)=1, (2,0)=1, (2,1)=1, (2,2)=1, (2,3)=1, (3,0)=1, (3,3)=1. Circles highlight groups of 0s: a red circle around (0,1) and (3,1), a blue circle around (0,2) and (3,2), and a purple circle around (1,0) and (2,0).

2. 最简或与式

步骤②：每个圈代表一个和项

观察 $\left. \begin{array}{l} \text{Left} \\ \text{Top} \end{array} \right\}$ 变量取值不同——消去

变量取值相同 $\left\{ \begin{array}{l} 0: \text{原变量} \\ 1: \text{反变量} \end{array} \right.$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	1	1	1	0
	11	1	1	1	0
	10	0	1	1	0

$B+D$

$C'+D$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	1	0	0	1

$B+D'$

2. 最简或与式

步骤 ③: 将所有的和项相乘

$AB \backslash CD$		CD			
		00	01	11	10
00	0	0	1	0	
01	0	0	1	1	
11	1	1	0	0	
10	0	1	0	0	

$B+D$

$A+C$

$A'+C'$

$$F = (A+C) \cdot (\bar{A}+\bar{C}) \cdot (B+D)$$

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取：

- 最简与或式（**AND-OR**）
 - 最简或与式（**OR-AND**）
 - 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）
-
- 带无关项的卡诺图化简



3. 最简 与或非式

步骤①：读 \bar{F} 的与或式

方法：同于最简与或式，但关注 “0”

BC		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C$$

步骤②：对 \bar{F} 求反

$$F = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C}$$

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取：

- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）



- 带无关项的卡诺图化简

无关项的处理

例 1: 数据判断与操作:

输入 X is 4-bits BCD8421 code, 若 $X \geq 5$, 输出 $F=1$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	Φ	1
01	0	1	Φ	1
11	0	1	Φ	Φ
10	0	1	Φ	Φ

$$F = A + BD + BC$$

无关项的处理

例 2:

4-bit 二进制串转换为余-3码

二进制				余-3 码				二进制				余-3 码			
W	X	Y	Z	A	B	C	D	W	X	Y	Z	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	Φ			
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	Φ			
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	Φ			
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	Φ			
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	Φ			
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	Φ			

无关项的处理

0101, 0110, 0111, 1000, 1001 $\rightarrow 1$

1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 $\rightarrow \Phi$

0001, 0010, 0011, 0100, 1001 $\rightarrow 1$

1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 $\rightarrow \Phi$

A:

WX \ YZ	00	01	11	10
00			Φ	1
01		1	Φ	1
11		1	Φ	Φ
10		1	Φ	Φ

$$A = W + XZ + XY$$

B:

WX \ YZ	00	01	11	10
00		1	Φ	
01	1		Φ	1
11	1		Φ	Φ
10	1		Φ	Φ

$$B = \bar{X}Z + \bar{X}Y + X\bar{Y}\bar{Z}$$

无关项的处理

C:

$\begin{array}{c} WX \\ YZ \end{array}$	00	01	11	10
00	1	1	Φ	1
01			Φ	
11	1	1	Φ	Φ
10			Φ	Φ

$$C = \bar{Y}\bar{Z} + YZ$$

D:

$\begin{array}{c} WX \\ YZ \end{array}$	00	01	11	10
00	1	1	Φ	1
01			Φ	
11			Φ	Φ
10	1	1	Φ	Φ

$$D = \bar{Z}$$

4. 卡诺图

- 布尔函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法