

计 算 方 法

实验指导与实验报告

姓名_____

学号_____

院系_____计算学部__

专业_____

哈尔滨工业大学

题目（摘要）

四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法

前言：（目的和意义）

利用四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法求解微分方程初值问题

根据实际问题建立的数学模型，一般不能求出所谓的解析解，必须针对数学模型的特点确定适当的计算方法，编制出计算机能够执行的计算程序，输入计算机，进行调试，完成运算，如果计算结果存在问题或不知是否正确，还需要重新确定新的计算方法，再编制出计算程序，输入计算机，重新调试，完成运算，直至获得正确的计算结果，这就是数值计算的全部过程。

数学原理

给定常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \quad h = \frac{b-a}{N} \end{cases}$$

记 $x_n = a + n \cdot h$ ， $n = 0, 1, \dots, N$ ，利用四阶龙格—库塔方法

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

可逐次求出微分方程初值问题的数值解 y_n ， $n = 1, 2, \dots, N$ 。

程序设计流程

1 置 $x_0 = a, y_0 = \alpha, h = \frac{b-a}{N}$

2 对 $n = 1, 2, \dots, N$ ，做 2.1—2.4

2.1 置

$$K_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2})$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3)$$

2.2 置 $x_1 = x_0 + h$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

2.3 输出 x_1, y_1

2.4 置 $x_0 = x_1, y_0 = y_1$

3 停机

实验结果、结论与讨论

问题 1

(1)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = -1 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = -x - 1$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.2	-1.20	0	0.1	-1.10	0	0.05	-1.05	0
3	0.4	-1.40	0	0.2	-1.20	2e-016	0.10	-1.1	0
4	0.6	-1.60	-2e-016	0.3	-1.30	2e-016	0.15	-1.15	2e-016
5	0.8	-1.80	-2e-016	0.4	-1.40	4e-016	0.20	-1.2	2e-016
6	1.0	-2.00	-2e-016	0.5	-1.50	4e-016	0.25	-1.25	2e-016
7				0.6	-1.60	4e-016	0.30	-1.3	2e-016
8				0.7	-1.70	7e-016	0.35	-1.35	2e-016
9				0.8	-1.80	9e-016	0.40	-1.4	4e-016
10				0.9	-1.90	9e-016	0.45	-1.45	4e-016
11				1.0	-2.00	9e-016	0.50	-1.5	4e-016
12							0.55	-1.55	7e-016
13							0.60	-1.6	4e-016
14							0.65	-1.65	7e-016
15							0.70	-1.7	4e-016
16							0.75	-1.75	7e-016
17							0.80	-1.8	4e-016

18							0.85	-1.85	7e-016
19							0.90	-1.9	4e-016
20							0.95	-1.95	7e-016
21							1.00	-2	9e-016

(2)

$$\frac{dy}{dx} = -y^2, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = 1 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = \frac{1}{x+1}$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	0.2	0.8333	-6e-6	0.1	0.9090	-3e-7	0.05	0.9524	-1e-8
3	0.4	0.7143	-6e-6	0.2	0.8333	-4e-7	0.10	0.9090	-2e-8
4	0.6	0.6250	-6e-6	0.3	0.7692	-4e-7	0.15	0.8696	-2e-8
5	0.8	0.5556	-5e-6	0.4	0.7143	-4e-7	0.20	0.8333	-3e-8
6	1.0	0.5000	-4e-6	0.5	0.6667	-4e-7	0.25	0.8000	-3e-8
7				0.6	0.6250	-4e-7	0.30	0.7692	-3e-8
8				0.7	0.5882	-4e-7	0.35	0.7407	-3e-8
9				0.8	0.5556	-3e-7	0.40	0.7143	-3e-8
10				0.9	0.5263	-3e-7	0.45	0.6897	-3e-8
11				1.0	0.5000	-3e-7	0.50	0.6667	-3e-8
12							0.55	0.6452	-3e-8
13							0.60	0.6520	-3e-8
14							0.65	0.6061	-2e-8
15							0.70	0.5882	-2e-8
16							0.75	0.5714	-2e-8
17							0.80	0.5556	-2e-8
18							0.85	0.5405	-2e-8
19							0.90	0.5263	-2e-8
20							0.95	0.5128	-2e-8
21							1.00	0.5000	-2e-8

问题 2

(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} y + x^2 e^x, 1 \leq x \leq 3, N = 5, 10, 20$$

$$y(1) = 0 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = x^2(e^x - e)$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	1	1	0	1	1	0	1	1	0.0
2	1.4	0	0.006	1.2	0	0.0003	1.1	0.34591	9.589e-006
3	1.8	2.61394	0.02	1.4	0.866379	0.0006	1.2	0.866622	2.084e-005
4	2.2	10.7763	0.03	1.6	2.61974	0.001	1.3	1.60718	3.373e-005
5	2.6	30.4917	0.05	1.8	5.7199	0.002	1.4	2.62031	4.825e-005
6	3	72.5856	0.08	2	10.792	0.002	1.5	3.9676	6.44e-005
7				2.2	18.6809	0.003	1.6	5.72088	8.22e-005
8				2.4	30.5216	0.004	1.7	7.96377	0.0001017
9				2.6	47.8324	0.005	1.8	10.7935	0.0001229
10				2.8	72.6345	0.006	1.9	14.3229	0.0001458
11				3	107.609	0.007	2	18.6829	0.0001705
12							2.1	24.025	0.000197
13							2.2	30.5244	0.0002254
14							2.3	38.3835	0.0002557
15							2.4	47.8359	0.0002878
16							2.5	59.151	0.000322
17							2.6	72.6389	0.0003582
18							2.7	88.6566	0.0003964
19							2.8	107.614	0.0004368
20							2.9	129.983	0.0004793
21							3	156.305	0.000524

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(y^2 + y), 1 \leq x \leq 3, N = 5, 10, 20$$

$$y(1) = -2 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = \frac{2x}{1-2x}$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	1	-2	0	1	-2	0	1	-2	0
2	1.4	-1.554	-0.002	1.2	-1.714	-4e-5	1.1	-1.833	-5e-7
3	1.8	-1.384	-0.001	1.4	-1.556	-3e-5	1.2	-1.714	-5e-7
4	2.2	-1.293	-0.0007	1.6	-1.455	-3e-5	1.3	-1.625	-5e-7
5	2.6	-1.238	-0.0006	1.8	-1.385	-2e-5	1.4	-1.556	-4e-7
6	3	-1.2	-0.0005	2	-1.333	-2e-5	1.5	-1.5	-4e-7
7				2.2	-1.294	-1e-5	1.6	-1.455	-4e-7
8				2.4	-1.263	-1e-5	1.7	-1.417	-3e-7
9				2.6	-1.238	-1e-5	1.8	-1.385	-3e-7
10				2.8	-1.217	-1e-5	1.9	-1.357	-3e-7
11				3	-1.2	-9e-6	2	-1.333	-2e-7
12							2.1	-1.312	-2e-7
13							2.2	-1.294	-2e-7
14							2.3	-1.278	-2e-7
15							2.4	-1.263	-2e-7
16							2.5	-1.25	-2e-7
17							2.6	-1.238	-2e-7
18							2.7	-1.227	-2e-7
19							2.8	-1.217	-1e-7
20							2.9	-1.208	-1e-7
21							3	-1.2	-1e-7

问题 3

(1)

$$\frac{dy}{dx} = -20(y - x^2) + 2x, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = \frac{1}{3} \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = x^2 + \frac{1}{3}e^{-20x}$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	0	0	0.3	0	0	0.3	0	0	0.3
2	0.2	0.09333	-0.05	0.1	0.01167	0.04	0.05	0.002552	0.1
3	0.4	0.48	-0.3	0.2	0.04222	0.004	0.10	0.01007	0.05
4	0.6	2.013	-2	0.3	0.09241	-0.002	0.15	0.02258	0.02
5	0.8	8.96	-8	0.4	0.1625	-0.002	0.20	0.04008	0.006

6	1.0	42.65	-4e+001	0.5	0.2525	-0.002	0.25	0.06258	0.002
7				0.6	0.3625	-0.002	0.30	0.09008	0.0007
8				0.7	0.4925	-0.002	0.35	0.1226	0.0002
9				0.8	0.6425	-0.002	0.40	0.1601	3e-005
10				0.9	0.8125	-0.002	0.45	0.2026	-4e-005
11				1.0	1.002	-0.002	0.50	0.2501	-7e-005
12							0.55	0.3026	-8e-005
13							0.60	0.3601	-8e-005
14							0.65	0.4226	-8e-005
15							0.70	0.4901	-8e-005
16							0.75	0.5626	-8e-005
17							0.80	0.6401	-8e-005
18							0.85	0.7226	-8e-005
19							0.90	0.8101	-8e-005
20							0.95	0.9026	-8e-005
21							1.00	0	-8e-005

(2)

$$\frac{dy}{dx} = -20y + 20\sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 1, N = 5, 10, 20$$

$$y(0) = 1 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = e^{-20x} + \sin x$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	0.2	5.197	-5	0.1	0.4331	-0.2	0.05	0.425	-0.007
3	0.4	25.38	-2e+1	0.2	0.3097	-0.09	0.10	0.2405	-0.005
4	0.6	125.5	-1e+2	0.3	0.3323	-0.03	0.15	0.2022	-0.003
5	0.8	625.3	-6e+2	0.4	0.4014	-0.01	0.20	0.2184	-0.001
6	1.0	3124	-3e+3	0.5	0.4831	-0.004	0.25	0.2548	-0.0007
7				0.6	0.5654	-0.0008	0.30	0.2983	-0.0003
8				0.7	0.644	0.0002	0.35	0.3439	-0.0001
9				0.8	0.7167	0.0006	0.40	0.3898	-4e-5
10				0.9	0.7825	0.0008	0.45	0.4351	-7e-6
11				1.0	-2.00	0.0009	0.50	0.4795	8e-6
12							0.55	0.5227	2e-5
13							0.60	0.5646	2e-5
14							0.65	0.6052	2e-5
15							0.70	0.6442	2e-5

16							0.75	0.6816	3e-5
17							0.80	0.7173	3e-5
18							0.85	0.7513	3e-5
19							0.90	0.7833	3e-5
20							0.95	0.8134	3e-5
21							1.00	0.8414	3e-5

(3)

$$\frac{dy}{dx} = -20(y - e^x \sin x) + e^x(\sin x + \cos x), 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0 \quad N = 5, 10, 20 \quad h = \frac{b-a}{N}$$

准确解

$$y = e^x \sin x$$

	N=5			N=10			N=20		
	x	y	error	x	y	error	x	y	error
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
2	0.2	0.2986	-0.056	0.1	0.1120	-0.002	0.05	0.0526	-0.4
3	0.4	0.927	-0.346	0.2	0.2451	-0.002	0.10	0.1104	-0.1
4	0.6	2.835	-1.81	0.3	0.4017	-0.003	0.15	0.1737	-0.05
5	0.8	10.71	-9.11	0.4	0.5840	-0.003	0.20	0.2427	-0.02
6	1.0	47.94	-45.6	0.5	0.7938	-0.003	0.25	0.3177	-0.008
7				0.6	1.032	-0.004	0.30	0.3990	-0.003
8				0.7	1.301	-0.004	0.35	0.4867	-0.001
9				0.8	1.600	-0.004	0.40	0.5811	-0.0005
10				0.9	1.930	-0.004	0.45	0.6823	-0.0003
11				1.0	2.291	-0.004	0.50	0.7906	-0.0002
12							0.55	0.9061	-0.0001
13							0.60	1.029	-0.0001
14							0.65	1.159	-0.0001
15							0.70	1.297	-0.0001
16							0.75	1.443	-0.0001
17							0.80	1.597	-0.0001
18							0.85	1.758	-0.0001
19							0.90	1.926	-0.0001
20							0.95	2.103	-0.0001
21							1.00	2.287	-0.0001

思考题:

1. 对实验 1，数值解和解析解相同吗？为什么？试加以说明。
2. 对实验 2， N 越大越精确吗？试加以说明。
3. 对实验 3， N 较小会出现什么现象？试加以说明

1. 对于实验 1，解析解与数值解相同，原因是龙格库塔方法是以线性的方法来近似获得微分方程的数值解的，而实验 1 的解析解就是一阶的，因此对于实验 1 来说，解析解和数值解是相同的。
2. 对于实验 2， N 越大越精确，由于实验二的解析解都不是一阶的，因此显然数值解和解析解之间存在一定的差异，而 N 越大表示分点较密，在每一段上使用线性的方法对数值解进行估计，分点越密则在每一段上的估计就越精确，则 N 越大时越精确
3. 对于实验 3， N 较小可能出现误差较大，原因是实验 3 的解不再是多项式解，而是指数函数与三角函数的组合，如果在一段较大的区间上用线性函数来估计数值解必然导致误差较大，而 N 较大则表示分点较稀疏，每一段区间就会较大，从而导致上述问题。