假设：

- 考察地区的总人数不变，不考虑生死和迁移
- 时间以天为计量单位

一、SI模型

人群分为健康人和病人：

符号	含义
$s(t)$	时刻t健康人在总人数所占比例
$i(t)$	时刻t病人在总人数所占比例
λ	日接触率，每个病人每天有效接触的平均人数
N	总人数

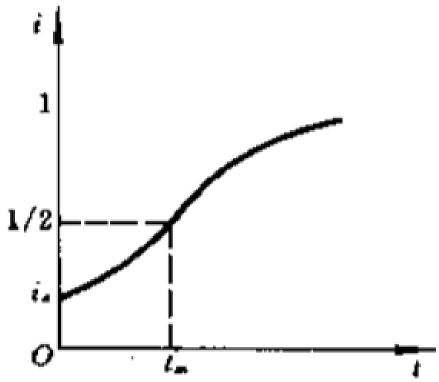
由$N\frac{di}{dt} = Ni\lambda s$及$s(t) + i(i) = 1$有：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

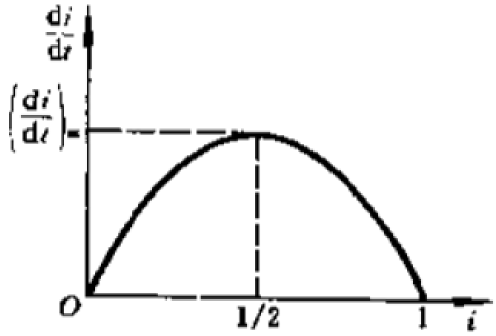
解得：

$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

模型解读：



1 . $i \sim t$ 曲线



2 . $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线

- 当$i(t)=\frac{1}{2}$时，即$t_m=\lambda^{-1}ln(\frac{1}{l_0}-1)$时，病人增长最快
- 由上式可知：t_m与λ成反比，所以日接触率λ也可解读为当地的卫生水平等因素
- 当$t\to\infty$时，$i(i)\to 1$，不合实际（病人可以治愈），所以有了下面的SIS、SIR模型

二、SIS模型

人群分为仍健康人和病人，但病人可被治愈变成健康人，恢复的健康人可再次被感染

符号	含义
μ	日治愈例，即病人中每天被治愈的比例
$\frac{1}{\mu}$	该传染病的平均传染期
$\sigma=\frac{\lambda}{\mu}$	每个病人在其传染期内有效接触的平均人数

则上述模型修正为：

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

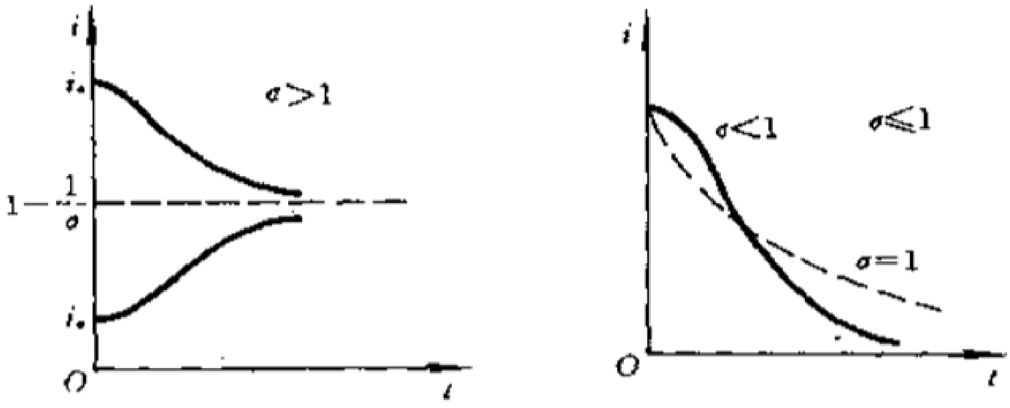
解得：

$$i(t)=\begin{cases} \left[\frac{\lambda}{\lambda-\mu}+\left(\frac{1}{i_0}-\frac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}\right]^{-1}, & \lambda\neq\mu \\ \left(\lambda t+\frac{1}{i_0}\right)^{-1}, & \lambda=\mu \end{cases}$$

当$t\to\infty$时，有：

$$
i(\infty)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1 \\ 0, & \sigma\leqslant 1 \end{cases}
$$

模型解读：



1．$\sigma>1$时的$i\sim t$曲线　　2．$\sigma\leqslant 1$时$i\sim t$曲线

可知：$\sigma=1$是阈值

- $\sigma>1$时，$i(t)$增减性取决于i_0，但最终均收敛于一定值
- $\sigma<1$时，$i(t)$递减，最终收敛于0

三、SIR模型

人群分为健康人，病人，移出者（被治愈的病人，带有抗体不会再被感染）：

符号	含义
$r(t)$	时刻t移出者在总人数所占比例

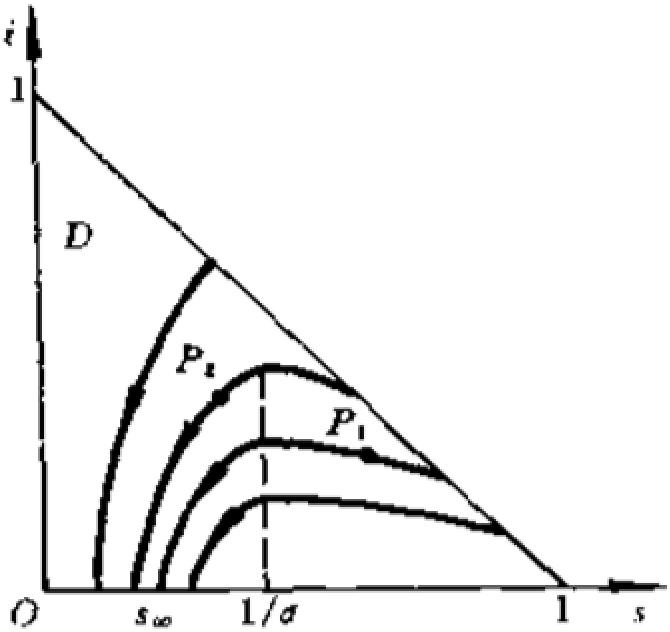
则上述模型修正为：

$$
\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases}
$$

由于含有俩未知数，所以该模型没有解析解：

$$i=(s_0+i_0)-s-\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

模型解读（箭头表示随着时间变化，$s(t)$，$i(t)$的变化趋势）：



可知：$\frac{1}{\sigma}$是阈值，且无论初始条件如何，$i(t)$终将收敛于0，$s(t)$终将收敛于s_∞

- $s_0>\frac{1}{\sigma}$时，$i(t)$先增加至最大（传染病蔓延），后减小至0
- $s_0\le\frac{1}{\sigma}$，$i(t)$单调减小至0
- σ的计算如下：

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

- 上述可知，要防止传染病蔓延，一是增大阈值$\frac{1}{\sigma}$，即改善卫生和医疗水平；二是减小$s(0)$，意味着增加$r(0)$，即接种疫苗