



图的基本操作实现

图的操作所需要花费的时间通常既和顶点的个数 n 有关，又和边的条数 m 有关，因此时间复杂度会包含 n 和 m 两个变量。

- 邻接矩阵表示的图

假设已知条件为：

图中实际顶点个数 n_verts 、图中实际边的条数 m_edges 、

图中顶点可能的最大数量 $kMaxVertex$ 、保存顶点数据的一维数组 ver_list 、

保存邻接矩阵内容的二维数组 $edge_matrix$ 、

无边时权重的赋值 no_edge_value (一般图为0，网为无穷大 $kMaxNum$)、

有向或无向图标志 $directed$ (有向图为真，无向图为假)。



图用邻接矩阵表示时部分基本操作算法描述

算法7-1: 获取图的顶点个数 $\text{NumberOfVex}(\text{graph})$

输入: 图 graph

输出: 图的顶点个数

1. **return** $\text{graph}.n_verts$

时间复杂度 $O(1)$

算法7-2: 判断边是否存在 $\text{ExistEdge}(\text{graph}, u, v)$

输入: 图 graph 、两个顶点 u 和 v

输出: u 到 v 有边返回 true , 否则返回 false

1. **if** $u < \text{graph}.n_verts$ 且 $v < \text{graph}.n_verts$ **then**

2. | **if** $u \neq v$ 且 $\text{graph}.edge_matrix[u][v] \neq \text{graph}.no_edge_value$ **then**

3. | | **return true**

4. | **end**

5. **end**

6. **return false**

时间复杂度 $O(1)$



图用邻接矩阵表示时部分基本操作算法描述

算法7-4: 向图中插入边 $\text{InsertEdge}(\text{graph}, u, v, \text{weight})$

输入: 图 graph , 边的两个端点 u 和 v , 边的权重 weight

输出: 插入了边 (u, v) 或 $\langle u, v \rangle$ 的图

1. **if** $u \neq v$ 且 $\text{ExistEdge}(\text{graph}, u, v) = \text{false}$ **then**
2. | $\text{graph.edge_matrix}[u][v] \leftarrow \text{weight}$
3. | $\text{graph.m_edges} \leftarrow \text{m_edges} + 1$ //边数加1
4. | **if** $\text{graph.directed} = \text{false}$ **then** //如果是无向图, 对主对角线对称的元素赋值
5. | | $\text{graph.edge_matrix}[v][u] \leftarrow \text{weight}$
6. | **end**
7. **end**

时间复杂度 $O(1)$



图用邻接矩阵表示时部分基本操作算法描述

算法7-6: 从图中删除顶点及所有邻接于该顶点的边 $\text{RemoveVex}(\text{graph}, v)$

输入: 图 graph 、顶点 v

输出: 删除了顶点 v 及所有邻接于顶点 v 的边的图 graph

1. if $v < 0$ 或 $v \geq \text{graph.n_verts}$ then
2. | 待删除的顶点不存在, 退出
3. end
4. $\text{graph.ver_list}[v] \leftarrow \text{graph.ver_list}[\text{graph.n_verts}-1]$
//用最后一个顶点信息覆盖 v

1-5: 时间复杂度 $O(1)$



图用邻接矩阵表示时部分基本操作算法描述

```
5.  count ← 0           // count计数由顶点 $v$ 射出的边的条数
6.  for  $u = 0$  to  $graph.n\_verts-1$  do //遍历所有顶点
7.  |   if ExistEdge( $graph, v, u$ ) = true then //存在边 $\langle v, u \rangle$ 
8.  |   |   count ← count + 1
9.  |   end
10. end
11. if  $graph.directed = \mathbf{true}$  then //有向图还要计数射入顶点 $v$ 的边的条数?
12. |   for  $u = 0$  to  $graph.n\_verts-1$  do
13. |   |   if ExistEdge( $graph, u, v$ ) = true then
14. |   |   |   count ← count + 1
15. |   |   end
16. |   end
17. end
```

5-10: 时间复杂度 $O(n)$

11-17: 时间复杂度 $O(n)$



图用邻接矩阵表示时部分基本操作算法描述

```
18. for  $u = 0$  to  $graph.n\_verts - 1$  do //将矩阵最后一行移入第 $v$ 行
19. |    $graph.edge\_matrix[v][u] \leftarrow graph.edge\_matrix[graph.n\_verts - 1][u]$ 
20. end
21. for  $u = 0$  to  $graph.n\_verts - 1$  do //将矩阵最后一列移入第 $v$ 列
22. |    $graph.edge\_matrix[u][v] \leftarrow graph.edge\_matrix[u][graph.n\_verts - 1]$ 
23. end
24.  $graph.m\_edges \leftarrow graph.m\_edges - count$  //更新边的条数
25.  $graph.n\_verts \leftarrow graph.n\_verts - 1$  //更新顶点个数
```

18-20: 时间复杂度 $O(n)$

21-23: 时间复杂度 $O(n)$

24-25: 时间复杂度 $O(1)$

加法原理, 总时间复杂度 $O(n)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

算法7-7: 返回图中顶点的第一个邻接顶点 $\text{FirstAdjVex}(\text{graph}, v)$

输入: 图 graph 、顶点 v

输出: 图 graph 中顶点 v 的第一个邻接顶点, 若 v 无邻接顶点返回NIL。

1. **if** $v < \text{graph}.n_verts$ **then**
2. | **return** $\text{graph}.ver_list[v].adj$
3. **end**

时间复杂度 $O(1)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

算法7-8: 判断边是否存在 ExistEdge(graph, u, v)

输入: 图graph、两个顶点u和v

输出: u到v有边返回 true, 否则返回 false

1. $p \leftarrow \text{FirstAdjVex}(\text{graph}, u)$ //p指向u的第一个邻接结点
2. **while** $p \neq \text{NIL}$ 且 $p.\text{dest} \neq v$ **do**
3. | $p \leftarrow p.\text{next}$
4. **end**
5. **if** $p \neq \text{NIL}$ **then**
6. | **return true**
7. **else**
8. | **return false**
9. **end**

时间复杂度 $O(m)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

算法7-9: 向图中插入边 $\text{InsertEdge}(\text{graph}, u, v, \text{weight})$

输入: 图 graph , 边的两个端点 u 和 v , 边的权重 weight

输出: 插入了边 (u,v) 或 $\langle u,v \rangle$ 的图

1. **if** $\text{ExistEdge}(\text{graph}, u, v) = \text{false}$ **then**
2. | $p \leftarrow \text{new EdgeNode}$ //新结点链表
3. | $p.\text{dest} \leftarrow v$ //从 u 指向 v
4. | $p.\text{weight} \leftarrow \text{weight}$
5. | $p.\text{next} \leftarrow \text{graph.ver_list}[u].\text{adj}$
6. | $\text{graph.ver_list}[u].\text{adj} \leftarrow p$ //新结点成为 u 的第一个邻接结点
7. | $\text{graph.m_edges} \leftarrow \text{graph.m_edges} + 1$ //边数加1

时间复杂度 $O(m)$

时间复杂度 $O(1)$

思考: 如果新结点每次都添加在单链表的末尾, 能否实现 $O(1)$ 的时间?



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

```
8. | if graph.directed = false then //如果是无向图，还要将u插入v的边表中
9. | | p ← new EdgeNode
10. | | p.dest ← u
11. | | p.weight ← weight
12. | | p.next ← graph.ver_list[v].adj
13. | | graph.ver_list[v].adj ← p
14. | end
15. end
```

时间复杂度 $O(1)$

总的时间复杂度 $O(m)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

算法7-10: 从图中删除顶点及所有邻接于该顶点的边 $\text{RemoveVex}(\text{graph}, v)$

输入: 图 graph 、顶点 v

输出: 删除了顶点 v 及所有邻接于顶点 v 的边的图 graph

1. **if** $v < 0$ 或 $v \geq \text{graph}.n_verts-1$ **then**
2. | 待删除的顶点不存在, 退出
3. **end**
4. $\text{count} \leftarrow 0$ //count计数与顶点 v 邻接的边的条数
5. $p \leftarrow \text{graph.ver_list}[v].\text{adj}$ //删除由顶点 v 射出的边
6. **while** $p \neq \text{NIL}$ **do**
7. | $\text{next_p} \leftarrow p.\text{next}$
8. | **delete** p
9. | $\text{count} \leftarrow \text{count} + 1$
10. | $p \leftarrow \text{next_p}$
11. **end**

1-11: 时间复杂度 $O(m)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

算法7-10: 从图中删除顶点及所有邻接于该顶点的边 $\text{RemoveVex}(\text{graph}, v)$

```
12. for  $u \leftarrow 0$  to  $\text{graph.n\_verts}-1$  do //删除射入顶点v的边
13. |    $p \leftarrow \text{graph.ver\_list}[u].\text{adj}$ 
14. |   if  $p \neq \text{NIL}$  then //非空链表
15. | |   if  $p.\text{dest} = v$  then //首结点为射入顶点v的边
16. | | |    $\text{graph.ver\_list}[u].\text{adj} \leftarrow p.\text{next}$ 
17. | | |   delete  $p$ 
18. | | |    $\text{count} \leftarrow \text{count}+1$ 
19. | |   else //非首结点
20. | | |   while  $p.\text{next} \neq \text{NIL}$  且  $p.\text{next}.\text{dest} \neq v$  do //找到射入顶点v的边
21. | | | |    $p \leftarrow p.\text{next}$ 
22. | | |   end
```



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

```
23. | | | if p.next  $\neq$  NIL then //找到<u,v>这条边, 删除
24. | | | | next_p  $\leftarrow$  p.next
25. | | | | p.next  $\leftarrow$  next_p.next
26. | | | | delete next_p
27. | | | | count  $\leftarrow$  count+1
28. | | | end
29. | | end
30. | end
31. end
32. last_v  $\leftarrow$  graph.n_verts - 1 //最后一个顶点的编号
```

12-32: 内外循环相关, 换个角度分析, 算法针对每个顶点, 检测了其邻接的每一条边。故时间复杂度 $O(n+m)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

```
33. for u ← 0 to last_v-1 do //将原来射入最后一个顶点的边都更新编号为v
34. | p ← graph.ver_list[u].adj
35. | if p ≠ NIL then //非空链表
36. | | while p ≠ NIL 且 p.dest ≠ last_v do //找到射入顶点v的边
37. | | | p ← p.next
38. | | end
39. | | if p ≠ NIL then //将原来射入最后一个顶点的边都更新编号为v
40. | | | p.dest ← v
41. | | end
42. | end
43. end
```

保持结点的编号连续!

33-43: 和12-32同理, 时间复杂度 $O(n+m)$



图用邻接表表示时部分基本操作算法描述

```
44. graph.ver_list[v] ← graph.ver_list[last_v] //顶点表中最后一个顶点移到位置v
45. if graph.directed = false then //无向图实际删除的边数要减半
46. | count ← count / 2
47. end
48. graph.m_edges ← graph.m_edges - count //更新边数
49. graph.n_verts ← graph.n_verts-1 //更新顶点个数
```

44-49: 时间复杂度 $O(1)$

加法原理: 总时间复杂度 $O(n+m)$



图的遍历

按照某种方式逐个访问图中的所有顶点，且每个顶点**只被访问一次**。

1. 最简单的方式是沿着顶点表循环访问一遍，由此达到了遍历的目标。

这种方式，完全没有借用边的信息。

2. 两种**借助边信息（沿边）**实现遍历的算法：**深度优先遍历**和**广度优先遍历**。

基于这两种遍历可以解决图中更多的涉及到边的问题，如图的连通性问题。



遍历图和遍历二叉树的不同

- 图中的顶点地位相同，没有特殊的顶点；二叉树结构中有一个特殊的根结点。
- 图中一个顶点可以和多个其它顶点邻接，可看作有多个直接前驱结点和多个后继结点，并可能存在回路。二叉树中每个结点的直接前驱结点只有一个，直接后继结点最多有两个，且不存在回路。
- 无向图中，邻接于一条边的两个顶点，甚至可以视作互为后继。

为避免通过不同前驱多次到达同一顶点，造成重复访问已经访问过的顶点，在图的遍历过程中，通常对已经访问过的顶点加特殊标记（即已访问标志）。



深度优先遍历

DFS (Depth First Search)

访问方式如下：

- (1) 从选中的某一个未访问过的顶点出发，访问并对该顶点加已访问标志。
- (2) 依次从该顶点的未被访问过的第1个、第2个、第3个……邻接顶点出发，依次进行深度优先遍历，即转向(1)。
- (3) 如果还有顶点未被访问过，选中其中一个顶点作为起始顶点，再次转向(1)。如果所有的顶点都被访问到，遍历结束。

思考：什么条件下会从(3)再转向(1)？



深度优先遍历算法

算法7-11: 按深度优先遍历图中结点 $\text{DFS}(\text{graph})$

输入: 图 graph

输出: 图 graph 的深度优先遍历序列

关键数据结构: 顺序表 visited

```
1. for  $v \leftarrow 0$  to  $\text{graph}.n\_verts-1$  do //初始化各顶点的已访问标志为未访问
2. |  $\text{visited}[v] \leftarrow \text{false}$ 
3. end
4. for  $v \leftarrow 0$  to  $\text{graph}.n\_verts-1$  do
5. | if  $\text{visited}[v] = \text{false}$  then
6. | |  $\text{DFS}(\text{graph}, v, \text{visited})$ 
7. | end
8. end
```

1-3: 时间复杂度 $O(n)$

4-8: for循环 $O(n)$, 循环体依赖于第6行DFS时间复杂度



深度优先遍历

算法7-12: 从指定顶点开始深度优先遍历 $\text{DFS}(\text{graph}, v, \text{visited})$

输入: 图 graph (邻接表存储), 出发顶点 v , 已访问标志数组 visited

输出: 图 graph 中从顶点 v 出发的深度优先访问序列

1. $\text{visited}[v] \leftarrow \text{true}$ //标记结点
2. $\text{Visit}(\text{graph}, v)$ //访问结点 (抽象函数)
3. $p \leftarrow \text{graph.ver_list}[v].\text{adj}$
4. **while** $p \neq \text{NIL}$ **do**
5. | **if** $\text{visited}[p.\text{dest}] = \text{false}$ **then** //邻接结点未访问
6. | | $\text{DFS}(\text{graph}, p.\text{dest}, \text{visited})$ //递归访问邻接结点
7. | **end**
8. | $p \leftarrow p.\text{next}$ //继续遍历下一个邻接结点
9. **end**

1-9: 每次DFS调用访问1个顶点和若干条边。合计访问到每个顶点和每条边一次, 时间复杂度 $O(n+m)$ 。



深度优先遍历

算法7-12': 从指定顶点开始深度优先遍历 $\text{DFS}(\text{graph}, v, \text{visited})$

输入: 图 graph (**邻接矩阵存储**), 出发顶点 v , 已访问标志数组 visited

输出: 图 graph 中从顶点 v 出发的深度优先访问序列

1. $\text{visited}[v] \leftarrow \text{true}$ //标记结点
2. $\text{Visit}(\text{graph}, v)$ //访问结点 (抽象函数)
3. **for** $u \leftarrow 0$ **to** $\text{graph}.n_verts - 1$ **do**
4. | **if** $\text{graph}.edge_matrix[v][u] \neq \text{no_edge_value}$ 且 $\text{visited}[u] = \text{false}$ **then**
// u 是 v 的邻接结点, 且未访问
5. | | $\text{DFS}(\text{graph}, u, \text{visited})$ //递归访问邻接结点
6. | **end**
7. **end**

时间复杂度 $O(n^2)$



深度优先遍历算法的扩展

算法7-11: 按深度优先遍历图中结点 DFS(*graph*)

输入: 图*graph*

输出: 1. 各结点 u 第一次被“发现”的时刻 $dfn[u]$
2. 各结点 u 遍历结束的时刻 $fin[u]$
3. 各结点 u 在深度优先遍历次序中的前驱结点 $prev[u]$ --- 路径、生成树等

} 可用于割点、强连通成分等

关键数据结构: 顺序表visited

全局变量: time 时间戳



深度优先遍历算法的扩展

算法：按深度优先遍历图中结点 DFS(*graph*)

输入：图*graph*

输出：各结点首次发现时间，遍历结束时间，前驱结点

关键数据结构：顺序表visited

全局变量：time 时间戳

```
1. for  $v \leftarrow 0$  to  $graph.n\_verts-1$  do //初始化各顶点的已访问标志为未访问
2. | visited[v]  $\leftarrow$  false |
3. end
4. time  $\leftarrow$  1 //时间戳的初始值
5. for  $v \leftarrow 0$  to  $graph.n\_verts-1$  do
6. | if visited[v] = false then
7. | | prev[v]  $\leftarrow$  -1 //起点无前驱!
8. | | DFS(graph, v, visited)
9. | end
10. end
```




深度优先遍历的扩展

算法: 从指定顶点开始深度优先遍历 DFS(*graph*, *v*, *visited*)

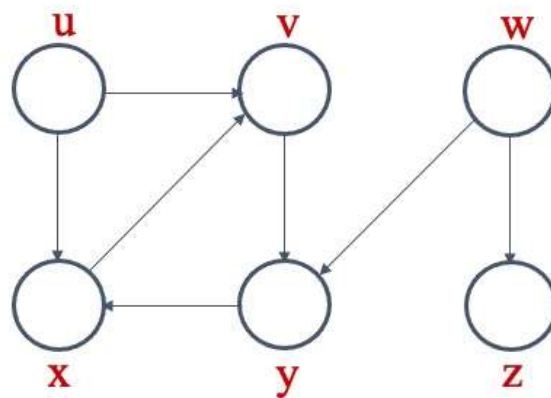
1. $visited[v] \leftarrow \mathbf{true}$ //标记结点
2. $dfn[v] \leftarrow \mathbf{time}$ //记录第一次被发现的时间
3. $\mathbf{time} \leftarrow \mathbf{time} + 1$ //更新时间戳
4. $p \leftarrow \mathbf{graph.ver_list}[v].adj$
5. **while** $p \neq \mathbf{NIL}$ **do**
6. | **if** $visited[p.dest] = \mathbf{false}$ **then** //邻接结点未访问
7. | | $prev[p.dest] \leftarrow v$ //v成为其邻接结点的前驱
8. | | DFS(*graph*, *p.dest*, *visited*) //递归访问邻接结点
9. | **end**
10. | $p \leftarrow p.next$ //继续遍历下一个邻接结点
11. **end**
12. $fin[v] \leftarrow \mathbf{time}$ //记录遍历结束的时间
13. $\mathbf{time} \leftarrow \mathbf{time} + 1$ //更新时间戳

高等教育出版社

1-13: 每次DFS调用访问1个顶点和若干条边。合计访问到每个顶点和每条边一次, 时间复杂度 $O(n+m)$ 。



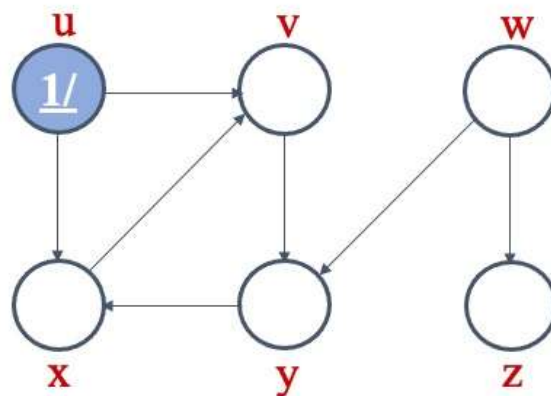
深度优先遍历的示例



visited	F	F	F	F	F	F
prev						
	u	v	x	y	w	z



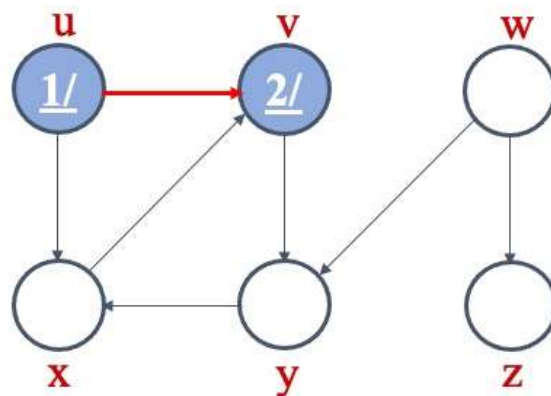
深度优先遍历的示例



visited	T	F	F	F	F	F
prev	-1					
	u	v	x	y	w	z



深度优先遍历的示例

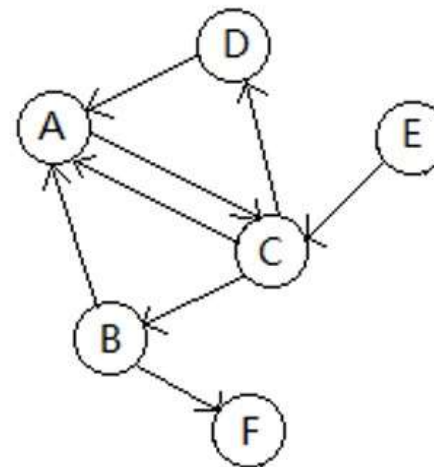


visited	T	T	F	F	F	F
prev	-1	u				
	u	v	x	y	w	z

多选题 1分

深度优先遍历右图，下面哪些遍历序列是合理的？

- ☒ A <E, C, A, D, B, F>
- ☒ B <A, C, B, F, D, E>
- ☐ C <E, C, D, B, A, F>
- ☒ D <B, A, C, D, F, E>





深度优先遍历的应用：查找路径

问题描述：给定图（有向或无向）和两个顶点 s, t ，判断图中是否存在从 s 到 t 的路径（连通性），如果 s 和 t 连通，则输出任意一条简单路径。



深度优先遍历的应用：查找路径

算法: FindPath(*graph*, *s*, *t*)

输入: 图*graph*, 起点*s*, 终点*t*

输出: 如果存在从*s*到*t*的路径, 则输出路径; 否则输出 no path

问题描述: 给定图 (有向或无向) 和两个顶点 *s*, *t*, 判断图中是否存在从*s*到*t*的路径 (连通性), 如果*s*和*t*连通, 则输出任意一条简单路径。

```

1. for  $v \leftarrow 0$  to  $graph.n\_verts-1$  do
2. |  $visited[v] \leftarrow false$ 
3. end
4.  $prev[s] \leftarrow -1$  //起点无前驱
   //从起点s出发深度优先查询
5. if DFS-Find(graph, s, t, visited) = true then //s和t有路径连通
6. |  $v \leftarrow t$  //从终点开始, 按倒序依次输出路径
7. | while  $v \geq 0$  do //prev[s] = -1
8. | | print v
9. | |  $v \leftarrow prev[v]$  //走到前驱, 继续输出
10. | end
11. else //s和t未连通
12. | print "no path"
13. end

```



深度优先遍历的应用：查找路径

算法: $\text{DFS-Find}(\text{graph}, v, \text{target}, \text{visited})$

问题描述：给定图（有向或无向）和两个顶点 s, t ，判断图中是否存在从 s 到 t 的路径（连通性），如果 s 和 t 连通，则输出任意一条简单路径。

```
1.   $\text{visited}[v] \leftarrow \text{true}$  //标记结点
2.  if  $v = \text{target}$  then
3.  |   return true //结点  $v$  就是目标结点，返回结果
4.  end
5.   $p \leftarrow \text{graph.ver\_list}[v].\text{adj}$ 
6.  while  $p \neq \text{NIL}$  do
7.  |   if  $\text{visited}[p.\text{dest}] = \text{false}$  then //邻接结点未访问
8.  | |    $\text{prev}[p.\text{dest}] \leftarrow v$  //  $v$  成为其邻接结点的前驱
9.  | |   if  $\text{DFS-Find}(\text{graph}, p.\text{dest}, \text{target}, \text{visited}) = \text{true}$  then
10. | | |   return true //从邻接结点出发找到目标结点
11. | |   end //结束遍历
12. |   end
13. |    $p \leftarrow p.\text{next}$  //否则，继续遍历下一个邻接结点
14. end
15. return false //从结点  $v$  出发未能找到到达目标结点的路径
```



深度优先遍历的应用：查找路径

问题描述：给定图（有向或无向）和两个顶点 s, t ，判断图中是否存在从 s 到 t 的路径（连通性），如果 s 和 t 连通，则输出任意一条简单路径。

• 时间复杂度： $O(n+m)$

算法：FindPath(graph, s, t)

输入：图graph, 起点s, 终点t

输出：如果存在从s到t的路径，则输出路径；否则输出 no path

```

1. for  $v \leftarrow 0$  to graph.n_verts-1 do
2. | visited[v]  $\leftarrow$  false
3. end
4. prev[s]  $\leftarrow$  -1
   //从起点s出发深度优先查询
5. if DFS-Find(graph, s, t, visited) = true then
6. |  $v \leftarrow t$            //从终点开始，按倒序依次输出路径
7. | while  $v \geq 0$  do      //起点s没有前驱，即prev[s] = -1
8. | | print v
9. | |  $v \leftarrow$  prev[v]  //走到前驱，继续输出
10. | end
11. else //s和t未连通
12. | print "no path"
13. end

```

高等教育出版社



深度优先遍历的应用：查找路径

算法: $\text{DFS-Find}(\text{graph}, v, \text{target}, \text{visited})$

问题描述：给定图（有向或无向）和两个顶点 s, t ，判断图中是否存在从 s 到 t 的路径（连通性），如果 s 和 t 连通，则输出任意一条简单路径。

• 时间复杂度: $O(n+m)$

思考：如何查找从 s 到 t 的所有路径或者最短路径？

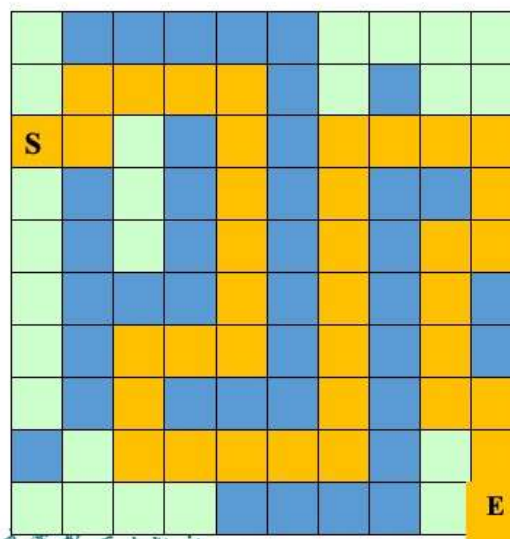
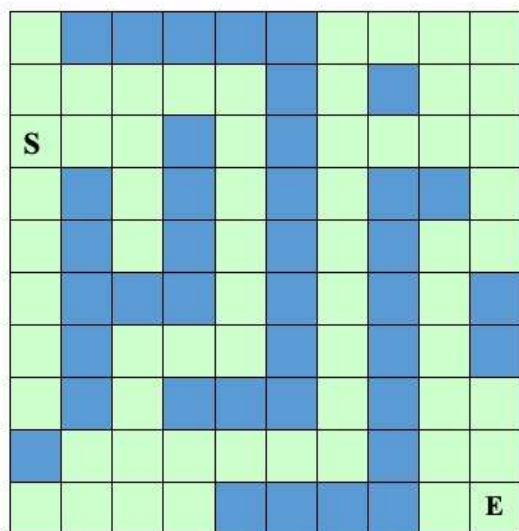
```

1.   $\text{visited}[v] \leftarrow \text{true}$  //标记结点
2.  if  $v = \text{target}$  then
3.  |   return true           //结点v就是目标结点，返回结果
4.  end
5.   $p \leftarrow \text{graph.ver\_list}[v].\text{adj}$ 
6.  while  $p \neq \text{NIL}$  do
7.  |   if  $\text{visited}[p.\text{dest}] = \text{false}$  then //邻接结点未访问
8.  | |    $\text{prev}[p.\text{dest}] \leftarrow v$  //v成为其邻接结点的前驱
9.  | |   if  $\text{DFS-Find}(\text{graph}, p.\text{dest}, \text{target}, \text{visited}) = \text{true}$  then
10. | | |   return true //从邻接结点出发找到目标结点
11. | |   end //结束遍历
12. |   end
13. |    $p \leftarrow p.\text{next}$  //否则，继续遍历下一个邻接结点
14. end
15. return false //从结点v出发未能找到到达目标结点的路径
  
```




深度优先遍历的应用：走迷宫

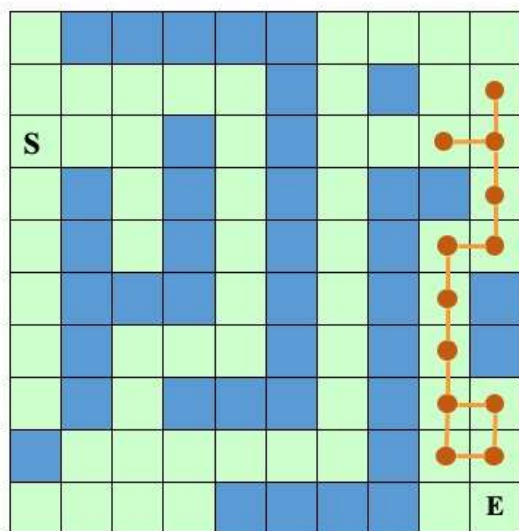
问题描述：表示迷宫的二维数组 $M[1..n, 1..m]$ ，其中 $M[i][j]=0$ 表示方格 (i, j) 可以通过，而 $M[i][j]=1$ 表示该方格设有障碍，不能通过 $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ 。从标有S的方格（起点）出发，每步可以移到当前位置上下左右相邻的、且可通过的方格，查找走到终点（标有E的方格）的路径。





深度优先遍历的应用：走迷宫

问题描述：表示迷宫的二维数组 $M[1..n, 1..m]$ ，其中 $M[i][j]=0$ 表示方格 (i, j) 可以通过，而 $M[i][j]=1$ 表示该方格设有障碍，不能通过。从标有S的方格（起点）出发，每步可以移到当前位置上下左右相邻的、且可通过的方格，查找走到终点（标有E的方格）的路径。



- 可将迷宫（二维数组）转换为无向图
- 每个可通过的方格成为结点，与上下左右相邻且可通过的方格有边相连
- 走迷宫问题变成在无向图中查找从起点至终点的**路径查找问题**

思考：如何存储对应迷宫的无向图？需要用到邻接矩阵或邻接表吗？



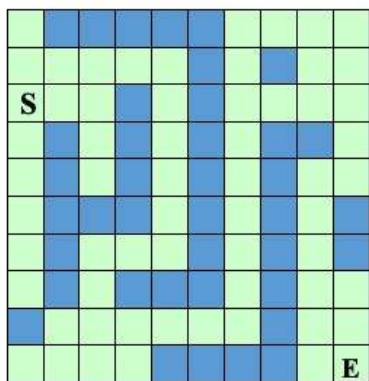
深度优先遍历的应用：走迷宫

算法: DFS-FindMaze($M, n, m, x, y, t_x, t_y, visited$)

输入: 二维数组 $M[1..n, 1..m]$, 当前位置 (x, y) , 终点 (t_x, t_y)

输出: 查找从起点至终点的路径

关键数据结构: $adj \leftarrow \{(0, -1), (0, 1), (-1, 0), (1, 0)\}$ //上下左右的(相对)位置



1. $visited[x][y] \leftarrow \mathbf{true}$ //标记当前单元格位置, 这里visited和prev都是二维表格
2. **if** $x = t_x$ 且 $y = t_y$ **then**
3. | **return true** //走到目标, 返回结果
4. **end**
5. **for** $k \leftarrow 0$ **to** 3 **do** //依次查找上下左右相邻位置
6. | $nx \leftarrow x + adj[k][0]$
7. | $ny \leftarrow y + adj[k][1]$ //相邻位置有效、非障碍且未被访问过
8. | **if** $1 \leq nx \leq n$ 且 $1 \leq ny \leq m$ 且 $M[nx][ny] \neq 1$ 且 $visited[nx][ny] = \mathbf{false}$ **then**
9. | | $prev[nx][ny] \leftarrow k$ //只需记录与前驱结点(x,y)的相对位置! ?
10. | | **if** DFS-FindMaze($M, nx, ny, t_x, t_y, visited$) = **true** **then**
11. | | | **return true**
12. | | **end**
13. | **end**
14. **end**
15. **return false**

- 时间复杂度: $O(mn)$
- 空间复杂度: $O(mn)$



广度优先遍历

BFS (Breadth First Search)

访问方式如下:

- (1) 从选中的某一个未访问过的顶点出发, 访问并对该顶点加已访问标志
- (2) 依次对该顶点的未被访问过的第1个、第2个、第3个.....第 k 个邻接点 v_1 、 v_2 、 v_3 v_k 进行访问且加已访问标志
- (3) 依次对顶点 v_1 、 v_2 、 v_3 v_k 转向操作(2)
- (4) 如果还有顶点未被访问过, 选中其中一个顶点作为起始顶点, 再次转向(1)。如果所有的顶点都被访问到, 遍历结束



广度优先遍历

BFS (Breadth First Search)

每个结点要经历的三个阶段 (状态)

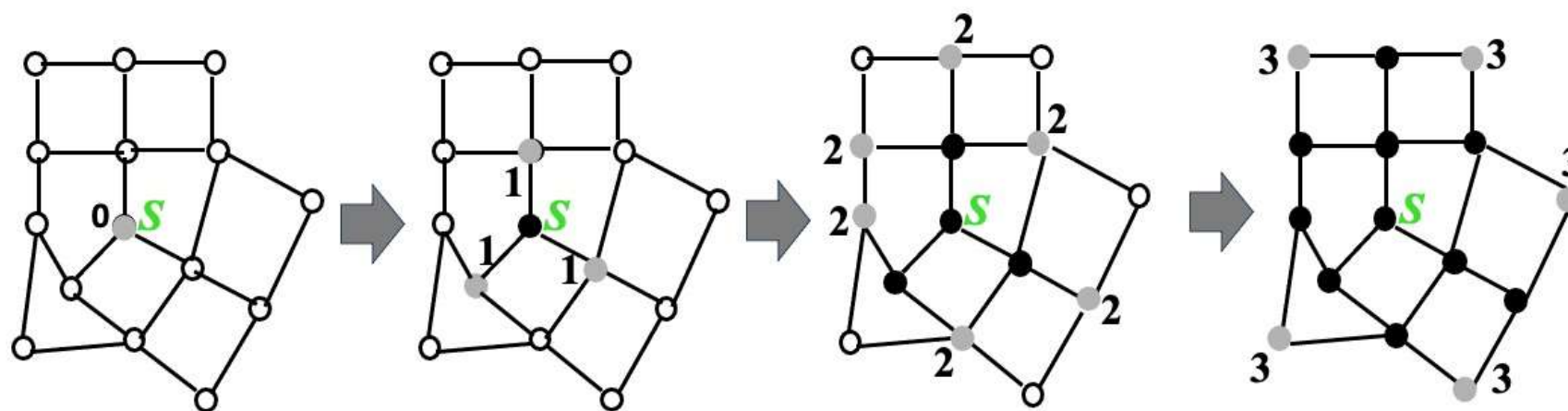
- 未被发现 (Undiscovered)
- 被发现 (Discovered)
- 遍历结束 (Finished)

结点及其所有邻
接结点已被发现

广度优先遍历

BFS (Breadth First Search)

- Undiscovered
- Discovered
- Finished



数值表示从起点到各结点的最短路径长度! (边无权重或权重均为1)

高等教育出版社



广度优先遍历算法

算法7-13: 按广度优先遍历图中结点 $\text{BFS}(\text{graph})$

输入: 图 graph

输出: 图 graph 的广度优先遍历序列

```
1. for  $v \leftarrow 0$  to  $\text{graph}.n\_verts-1$  do //初始化各顶点的已访问标志为未访问
2. |  $visited[v] \leftarrow \text{false}$ 
3. end
4. for  $v \leftarrow 0$  to  $\text{graph}.n\_verts-1$  do
5. | if  $visited[v] = \text{false}$  then
6. | |  $visited[v] \leftarrow \text{true}$  //标记起点
7. | |  $prev[v] \leftarrow -1$  //起点无前驱
8. | |  $dist[v] \leftarrow 0$  //离起点的最小距离 (最少边数)
9. | |  $\text{BFS}(\text{graph}, v, visited)$ 
10. | end
11. end
```

1-3: 时间复杂度 $O(n)$

4-11: 依赖于第6行BFS时间复杂度



广度优先遍历算法

算法7-14: 按广度优先遍历图中结点 $BFS(graph, v, visited)$

输入: 图 $graph$, 出发顶点 v , 已访问标志数组 $visited$

输出: 图 $graph$ 中从顶点 v 出发的广度优先遍历序列

```
1. InitQueue(queue)
2. EnQueue(queue, v) //起点入队
3. while IsEmpty(queue) = false do
4.   |  $u \leftarrow DeQueue(queue)$ 
5.   | Visit(graph, u) //访问结点
6.   |  $p \leftarrow graph.ver\_list[u].adj$ 
7.   | while  $p \neq NIL$  do //遍历邻接结点
8.   |   | if  $visited[p.dest] = false$  then //邻接结点未发现!
9.   |   |   |  $visited[p.dest] \leftarrow true$ 
10.  |   |   |  $prev[p.dest] \leftarrow u$ 
11.  |   |   |  $dist[p.dest] \leftarrow dist[u] + 1$  //设置离起点的最小距离
12.  |   |   | EnQueue(queue, p.dest) //邻接结点入队
13.  |   | end
14.  | end
15. end
```

Undiscovered

Discovered

Finished

高等教育出版社



广度优先遍历算法

算法7-14: 按广度优先遍历图中结点 $\text{BFS}(\text{graph}, v, \text{visited})$

输入: 图 graph , 出发顶点 v , 已访问标志数组 visited

输出: 图 graph 中从顶点 v 出发的广度优先遍历序列

```
1. InitQueue(queue)
2. EnQueue(queue, v) //起点入队
3. while IsEmpty(queue) = false do
4.   |  $u \leftarrow \text{DeQueue}(\text{queue})$ 
5.   | Visit(graph, u) //访问结点
6.   |  $p \leftarrow \text{graph.ver\_list}[u].\text{adj}$ 
7.   | while  $p \neq \text{NIL}$  do //遍历邻接结点
8.   |   | if  $\text{visited}[p.\text{dest}] = \text{false}$  then //邻接结点未发现!
9.   |   |   |  $\text{visited}[p.\text{dest}] \leftarrow \text{true}$ 
10.  |   |   |  $\text{prev}[p.\text{dest}] \leftarrow u$ 
11.  |   |   |  $\text{dist}[p.\text{dest}] \leftarrow \text{dist}[u] + 1$  //设置离起点的最小距离
12.  |   |   | EnQueue(queue, p.dest) //邻接结点入队
13.  |   | end
14.  | end
15. end
```

- 每个结点入队一次、出队一次
- 每个结点被查询 (第8行代码) 的次数等于其入度 (?)
- 时间复杂度: $O(n+m)$
- 空间复杂度: $O(n)$?