

Онлайн-школа «Фоксфорд»



**М.А.ПЕНКИН**

## Урок 2

Криволинейное движение с постоянным и переменным ускорением

Курс подготовки к вузовским олимпиадам 11 класса

№1. Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности земли под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту со скоростью  $V_0 = 10$  м/с, упал на эту поверхность, имея вертикальную составляющую скорости по абсолютной величине на 30% меньшую, чем при бросании. Найдите время полёта мяча.

Считать, что сила сопротивления  $\vec{F}_c$  движению мяча пропорциональна его скорости  $\vec{V}$ , то есть  $\vec{F}_c = -k \cdot \vec{V}$ , где  $k$  – постоянный коэффициент.

Основные формулы для равноускоренного движения ( $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \text{const}$ ):

1

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot t$$

2

$$\vec{S} = \vec{V}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 = \vec{V} \cdot t - \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

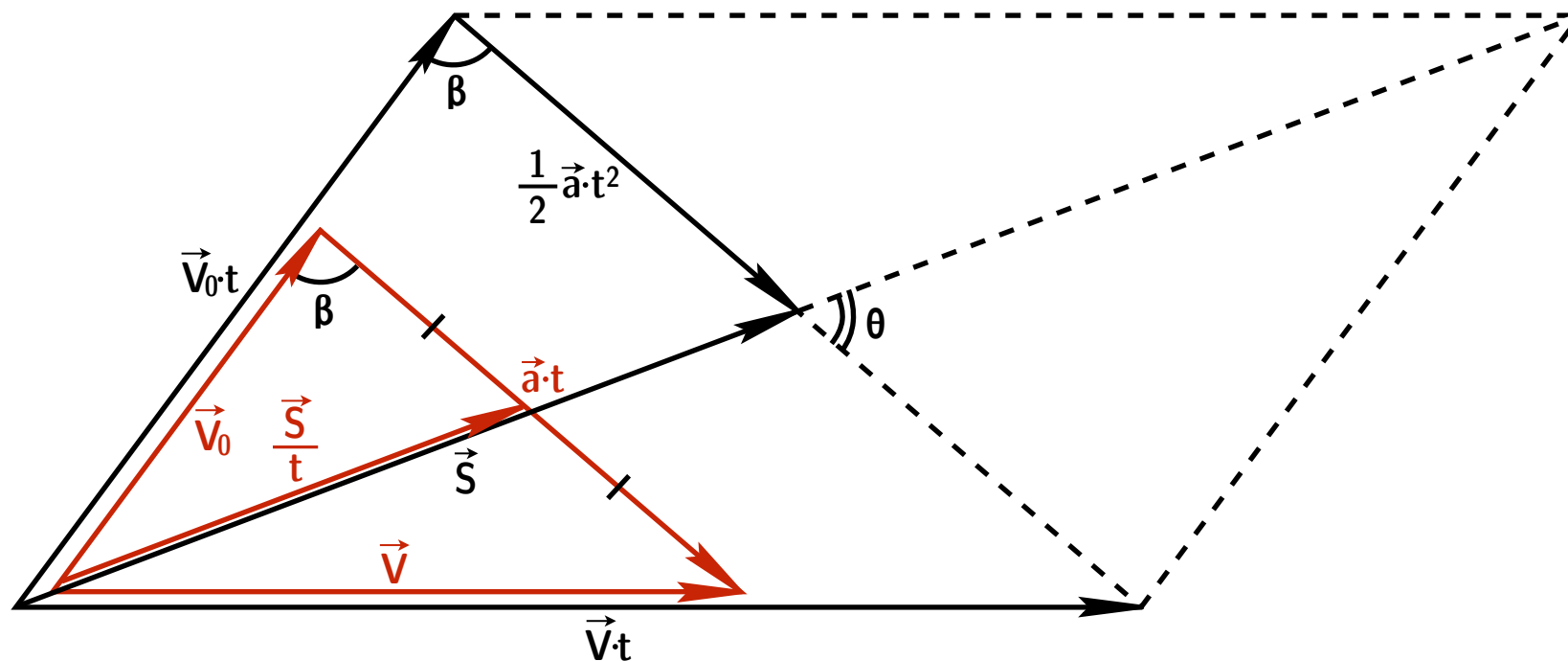
3

$2 \cdot (\vec{a}; \vec{S}) = |\vec{V}|^2 - |\vec{V}_0|^2$ , где  $(\vec{a}; \vec{S}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \theta$  – скалярное произведение вектора ускорения  $\vec{a}$  на вектор перемещения  $\vec{S}$  ( $\theta$  – угол между этими векторами)

4

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{V}_0 + \vec{V}) \cdot t$$

Геометрическая иллюстрация основных формул:

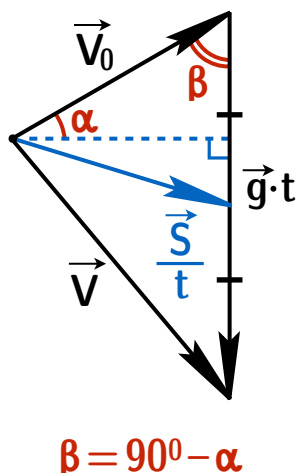


## Свободное падение ( $\vec{a} = \vec{g} = \text{const}$ ):

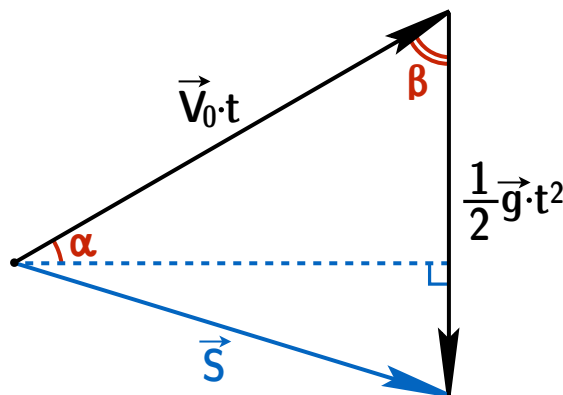
$$\boxed{1} \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g} \cdot t \quad \boxed{2} \quad \vec{S} = \vec{V}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 = \vec{V} \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \quad \boxed{3} \quad \pm 2g \cdot h = |\vec{V}|^2 - |\vec{V}_0|^2 \quad \boxed{4} \quad \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{V}_0 + \vec{V}) \cdot t$$

## Векторные треугольники и их особенности:

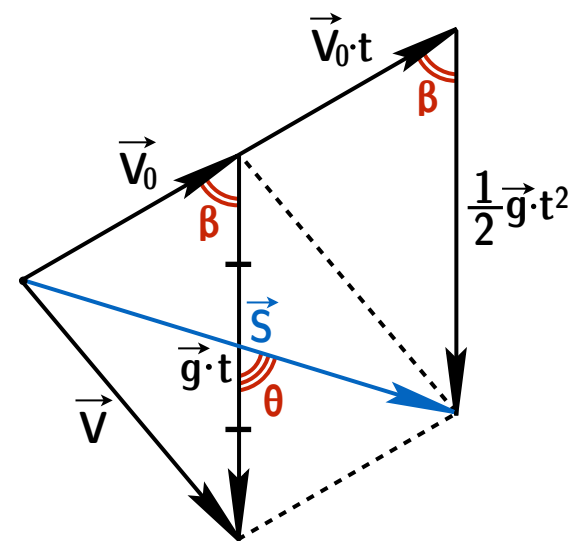
Векторный треугольник скоростей:



Векторный треугольник перемещений:



Объединение треугольников скоростей и перемещений:



- 1) Векторы  $\vec{g} \cdot t$  и  $\frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2$  всегда параллельны и направлены вертикально вниз. Векторы  $\vec{V}_0$  и  $\vec{V}_0 \cdot t$  параллельны.
- 2) «Верхний» угол в треугольниках скоростей и перемещений всегда равен  $\beta = 90^\circ - \alpha$  («90 без альфа»).
- 3) Вектор  $\frac{\vec{S}}{t}$  – медиана в треугольнике скоростей. Он напр. горизонтально в ед. случае, если  $|\vec{V}| = |\vec{V}_0|$ .
- 4) Если  $\vec{V}_0 \perp \vec{V}$ , то основание медианы  $\frac{\vec{S}}{t}$  явл. центром опис. окружности около треуг. скоростей:  $|\frac{1}{2} \vec{g} \cdot t| = |\vec{S}/t|$
- 5) Если  $\vec{V}_0 \perp \vec{V}$ , то вектор  $\vec{V}_0$  направлен вдоль биссектрисы угла между вертикалью и вектором перемещения  $\vec{S}$ .
- 6) Важно, что  $V = V_{\min}$ , если  $\vec{V} \perp \vec{g} \cdot t$ , что свойственно для наивысшей точки траектории.

№2. С горизонтальной поверхности земли под углом  $\alpha$  к горизонту бросают камень. Через  $\tau$  секунд он падает обратно на эту поверхность. Чему равна дальность полёта камня? Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

№3. Мячик бросили со скоростью  $V_0$  под углом к горизонту. В полёте он находился время  $\tau$ . Чему равна дальность полёта мячика, если точки бросания и приземления находятся на одном горизонтальном уровне? Сопротивлением воздуха пренебречь.

№4. С поверхности земли под углом к горизонту бросают камень со скоростью  $V_0$ . Какова максимальная дальность полёта камня, если точки броска и приземления находятся на одном горизонтальном уровне? Сопротивлением воздуха пренебречь.

№5. Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча после броска  $V_0 = 8$  м/с и составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за  $\tau = 1$  с? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.

№6. Камень бросили со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Чему равно расстояние между точками броска и приземления, если камень летел до падения время  $\tau$ ? Сопр. возд. не учитывать.

№7. Камень бросили под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Через время  $t = 4$  с его скорость оказалась направленной под углом  $\beta = 30^\circ$  ниже линии горизонта. Какое время  $\tau$  он был в полёте, если точки броска и приземления камня находились на одном горизонтальном уровне? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.

№8. Над горизонтальной поверхностью земли на несколько осколков разорвался снаряд. Они разлетелись во все стороны с одинаковыми по величине начальными скоростями. Осколок, полетевший вертикально вниз, достиг земли за время  $t_1$ . Осколок, полетевший вертикально вверх, упал на землю через время  $t_2$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, ответьте на вопросы:

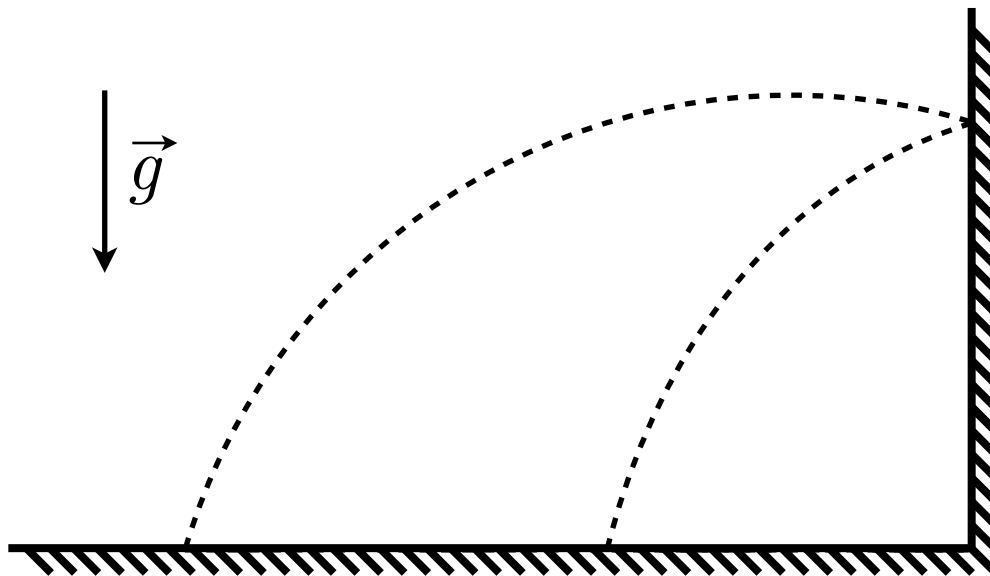
1. Чему равна величина начальной скорости осколков?
2. На какой высоте над поверхностью земли разорвался снаряд?
3. Какой максимальной высоты над поверхностью земли достиг осколок, полетевший вертикально вверх?
4. Сколько времени падали осколки, полетевшие горизонтально?
5. Какое расстояние по горизонтали они преодолели?

№9. Тело бросают с высоты  $h = 4$  м вверх под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту так, что к поверхности земли оно подлетает под углом  $\beta = 60^\circ$ . Какое расстояние по горизонтали пролетит тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

№10. С поверхности земли под углом к горизонту бросают камень. Через время  $\tau$  он падает на поверхность холма, причём со скоростью, перпендикулярной начальной. Чему равно расстояние между точками броска и приземления? Сопротивлением воздуха пренебречь.

## Криволинейное движение с постоянным ускорением

№11. С горизонтальной поверхности под углом к горизонту бросают мячик. Через  $t_1 = 0,8$  с после броска он упруго ударяется о вертикальную стенку и отскакивает от неё. Через  $t_2 = 1,5$  с после удара мячик падает обратно на ту поверхность, с которой был осуществлён бросок.

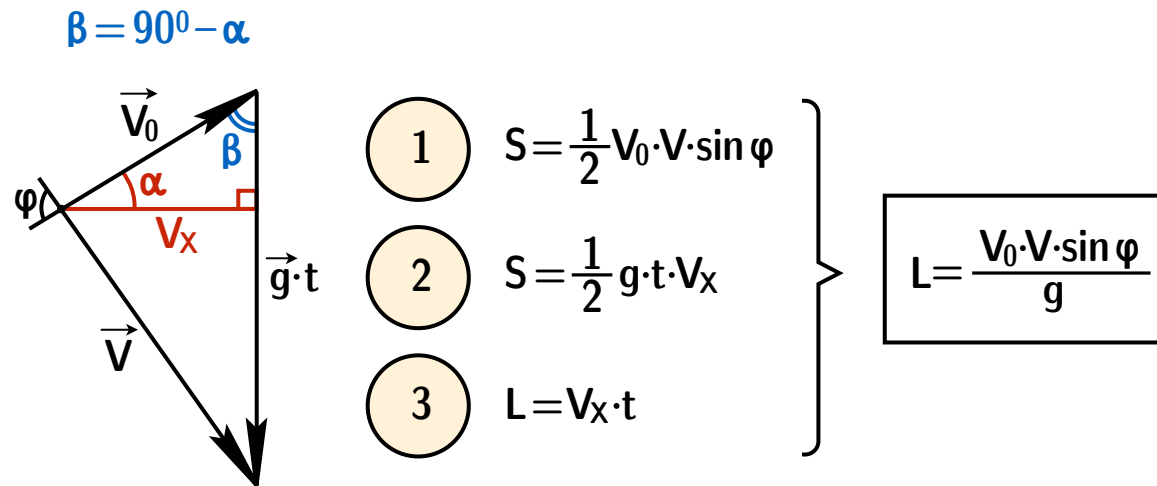


На какой высоте над этой поверхностью находится точка, о которую произошёл удар? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха пренебречь.



## Экстремальные параметры полёта:

Основная идея: площадь треугольника скоростей пропорциональна горизонтальной дальности полёта  $L$ . Это прив. к тому, что при «оптимальной» траект. векторы нач. и кон. скоростей должны быть взаимно перпенд. ( $\vec{V}_0 \perp \vec{V}$ ).

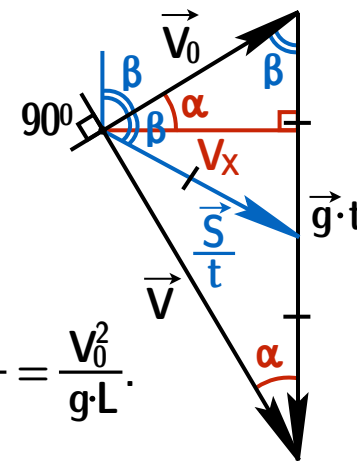


### Важные выводы:

Если задана  $V_0$ , то  $L = L_{\max}$  при  $\varphi = 90^\circ$ .

Если задана  $L$ , то  $V_0 = V_{0\min}$ , если  $\varphi = 90^\circ$ .

При  $\varphi = 90^\circ$  ( $\vec{V}_0 \perp \vec{V}$ )  $L = \frac{V_0 \cdot V}{g}$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_0}{V} = \frac{V_0^2}{g \cdot L}$ .



Если  $\vec{V}_0 \perp \vec{V}$ , то вектор нач. скорости  $\vec{V}_0$  направлен по биссектрисе угла между перемещением  $\vec{S}$  и вертикалью.

№12. С высоты  $h$  над поверхностью земли со скоростью  $V_0$  бросают камень. Под каким углом к горизонту его следует бросить, чтобы дальность полёта камня была наибольшей? Определите эту дальность. Сопротивлением воздуха пренебречь.



[mapenkin.ru](http://mapenkin.ru)

ПРЕЗЕНТАЦИЮ ПОДГОТОВИЛ  
Михаил Александрович **ПЕНКИН**

 [/penkin](#)

 [/mapenkin](#)

 [fmicky@gmail.com](mailto:fmicky@gmail.com)