Онлайн–школа «Фоксфорд»

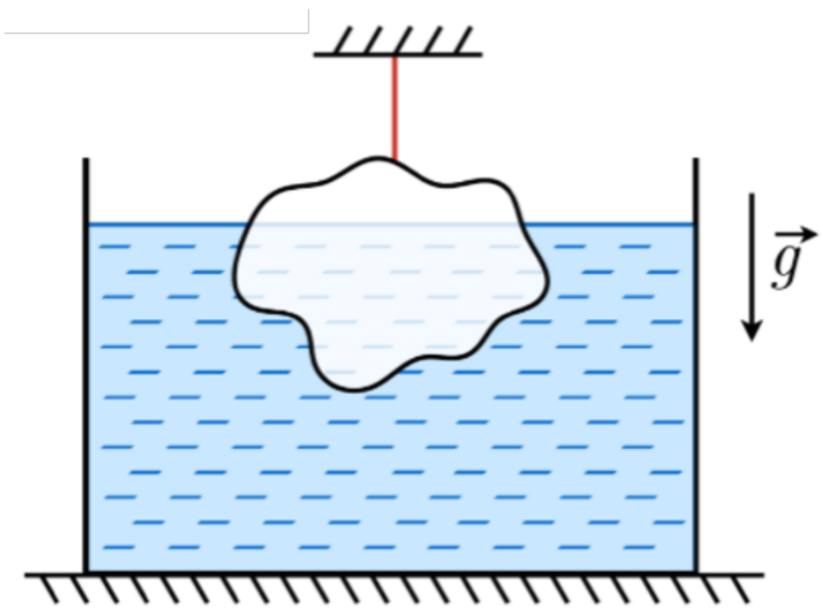
М.А.ПЕНКИН

Урок 10

Условия равновесия, элементы гидростатики, центр масс

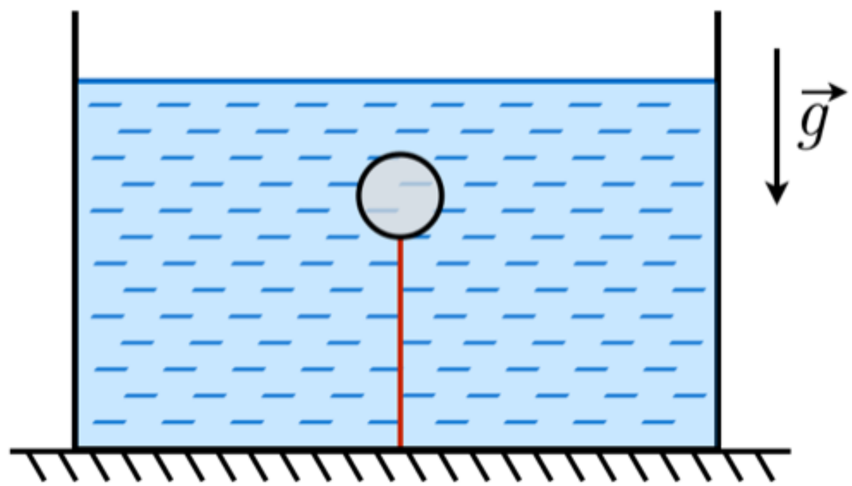
Курс подготовки к вузовским олимпиадам 11 класса

№1. На горизонтальном столе стоит цилиндрический сосуд с водой. В нём плавает кусок льда, привязанный нитью к штативу. Над поверхностью воды находится некоторый объём льда. Нить натянута с силой $T = 1{,}2$ Н.



На сколько изменится уровень воды в сосуде, когда весь лёд растает? Площадь дна сосуда составляет $S = 400$ см^2, плотность воды – $\rho = 1$ г/см^3, ускорение свободного падения – $g = 10$ Н/кг.

№2. Деревянный шарик удерживается внутри цилиндрического стакана с водой нитью, прикреплённой к его дну. Шарик погружён в воду целиком и не касается ни стенок, ни дна стакана.

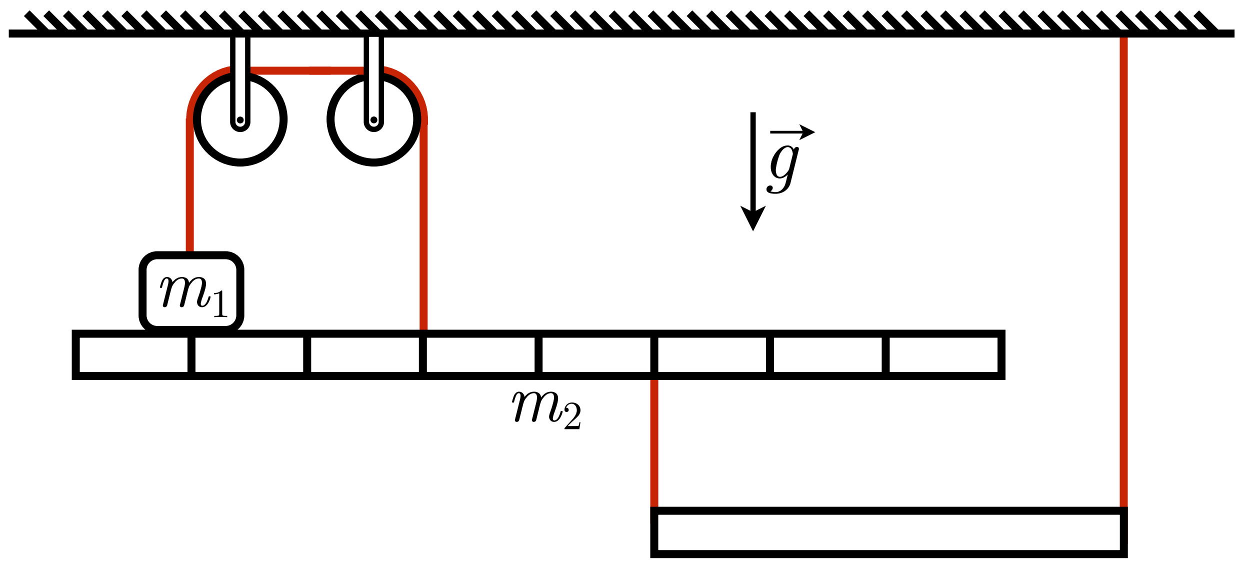


Из стакана с помощью шприца откачивается порция воды объёмом $V = 100$ мл, в результате чего уровень воды в стакане понижается на $\Delta H = 28$ мм, сила натяжения нити падает втрое и шарик оказывается погружён в воду лишь частично. Определите силу натяжения нити до откачки воды из стакана. Площадь дна стакана $S = 50$ см^2, плотность воды – $\rho = 1$ г/см^3, ускорение свободного падения – $g = 10$ Н/кг.

№3. В цилиндрическом стакане с водой на нити висит груз, вмороженный в кусок льда. Лёд с грузом целиком погружён в воду и не касается ни стенок, ни дна стакана. После того как лёд растаял, груз остался висеть на нити, целиком погружённый в воду. За время таяния льда уровень воды в стакане уменьшился на Δh ($\Delta h > 0$), а сила натяжения нити увеличилась в полтора раза. Плотность воды составляет ρ_0, груза — $3\rho_0$. Площадь внутреннего сечения стакана составляет S.

1. Определите силу натяжения нити после того, как растаял лёд.
2. Найдите объём груза.

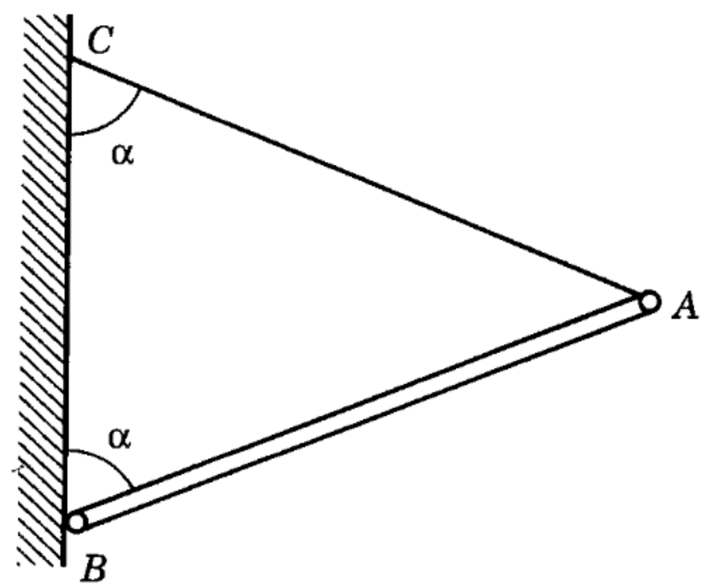
№4. Механическая система, состоящая из двух однородных стержней, груза, блоков и нитей, находится в равновесии.



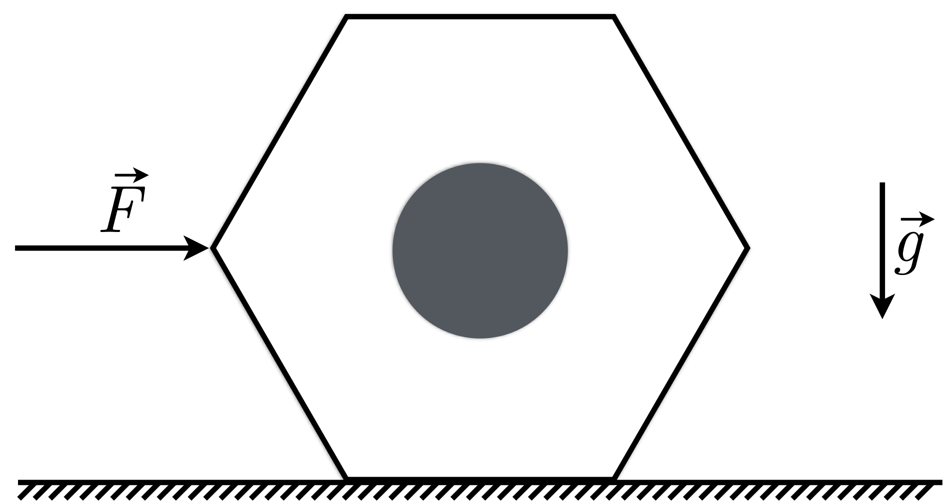
Стержни принимают горизонтальное положение. Части нитей, не касающиеся блоков, располагаются либо горизонтально, либо вертикально. Определить массу нижнего стержня, если груз и верхний стержень имеют массы $m_1 = 13$ кг и $m_2 = 2$ кг соответственно. Массой блоков и нитей, а также трением в оси блоков пренебречь.

№5. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплённа за верхний конец. Нижняя её часть погружена в воду. Палочка находится в равновесии, когда она расположена наклонно и погружена в воду на половину своей длины. Чему равна плотность материала палочки?

№6. Нижний конец B стержня AB укреплён шарнирно. К верхнему концу A привязана нить AC, удерживающая стержень в равновесии. С какой силой натянута нить, если масса стержня M, $\angle ABC = \angle BCA = \alpha$, точки B и C расположены на одной вертикали.



№7. Шестигранный карандаш толкают вдоль горизонтальной плоскости так, как показано на рисунке, при этом прикладывают минимально необходимую по величине силу для того, чтобы карандаш начал вращаться. При каких значениях коэффициента трения скольжения между карандашом и плоскостью это возможно?



Центр масс:

Пусть две точечные массы m_1 и m_2 расположены на оси X и имеют координаты x_1 и x_2 соответственно. *Центром масс* данной пары точек называется точка оси X с координатой

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Нам важно распространить понятие центра масс на объекты, состоящие из большого числа частиц (например, твёрдое тело, гибкий канат или столбик жидкости). Такой объект мы будем называть *системой* материальных точек.

Итак, пусть имеется система точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N$, причём i-я точка имеет координаты (x_i, y_i, z_i). Тогда центр масс данной системы есть точка с координатами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}, \tag{1}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}, \tag{2}$$

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \tag{3}$$

Более коротко это определение выглядит в векторной записи: если $\vec{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки (то есть вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец расположен в данной точке), то центр масс нашей системы есть точка с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}.$$

Теорема о движении центра масс:

$$\boxed{\vec{R}_{\text{ВНЕШ}} = m \cdot \vec{a}_C}$$

Это — **теорема о движении центра масс**, которая гласит: *произведение массы системы на ускорение центра масс есть равнодействующая внешних сил, приложенных к системе.* Иными словами, центр масс системы движется так же, как двигалась бы точка с массой, равной массе системы, под действием суммы всех внешних сил, действующих на систему (внутренние силы системы не оказывают влияния на движение центра масс). Например, если бросить палку под углом к горизонту, то её центр масс будет двигаться по параболе, а сложное движение палки можно рассматривать как комбинацию двух движений: перемещения центра масс по параболической траектории и вращения палки вокруг центра масс. Мы видим, что понятие центра масс позволяет упростить описание движения системы точек (в частности, твёрдого тела).

Приведём некоторые важные свойства, которыми обладает центр масс. Они следуют из определения или из теоремы о движении центра масс.

- Если тело имеет центр симметрии O, то центр масс тела расположен в точке O. Если тело имеет ось симметрии, то центр масс тела расположен на этой оси.

- Выделим в данной системе точек некоторую подсистему и заменим её одной точкой, которая расположена в центре масс подсистемы и имеет массу, равную массе подсистемы. От такой замены положение центра масс всей системы не изменится.

  Иными словами, систему точек можно разбить на подсистемы, найти центр масс каждой подсистемы, поместить в найденные центры масс точечные массы, равные массам подсистем, а потом искать центр масс всей системы как «центр масс центров масс».

Теорема о движении центра масс:

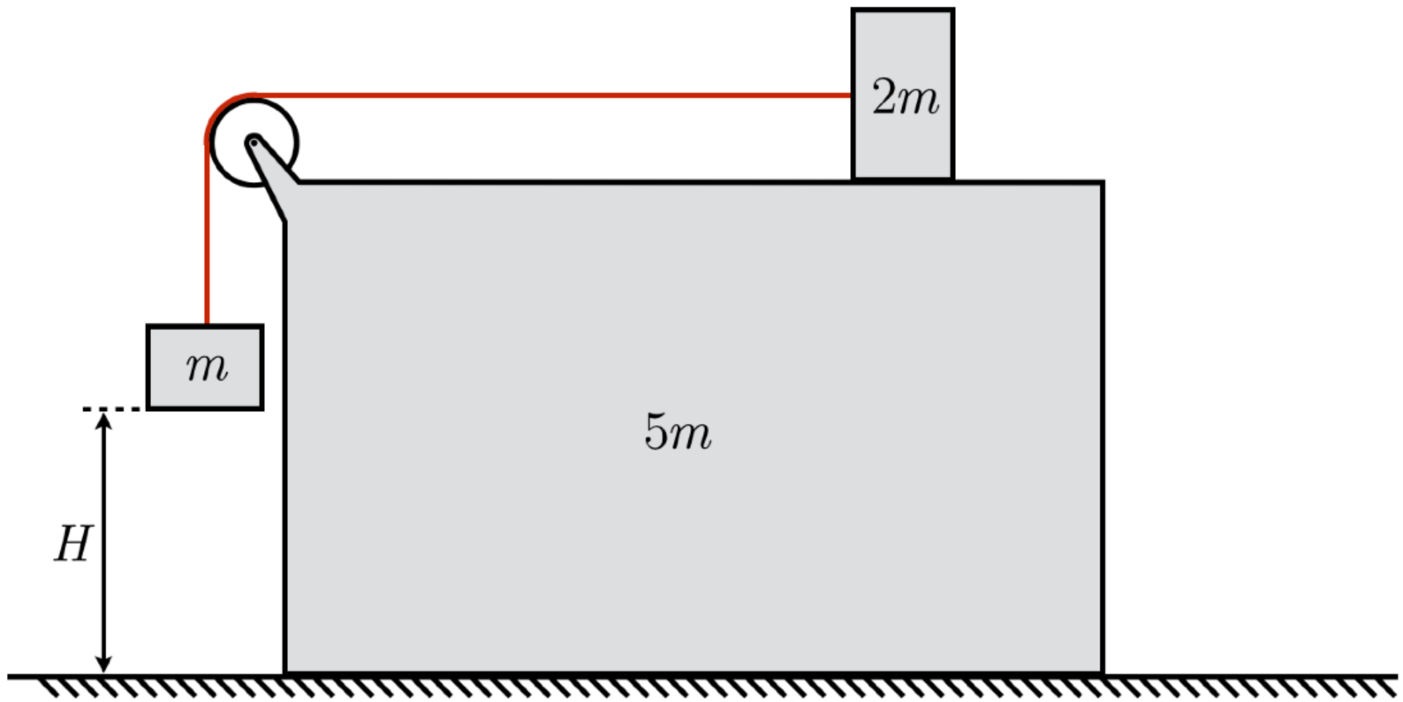
$$\boxed{\vec{R}_{\text{внеш}} = m\cdot\vec{a}_C}$$

- Напомним, что система называется *замкнутой*, если внешние силы на систему не действуют или уравновешивают друг друга (то есть равнодействующая внешних сил обращается в нуль). Из теоремы о движении центра масс для замкнутой системы получим $\vec{a}_c = \vec{0}$, так что центр масс замкнутой системы покоится или движется равномерно и прямолинейно.

  Следовательно, если связать систему отсчёта с центром масс замкнутой системы точек, то такая система отсчёта будет инерциальной.

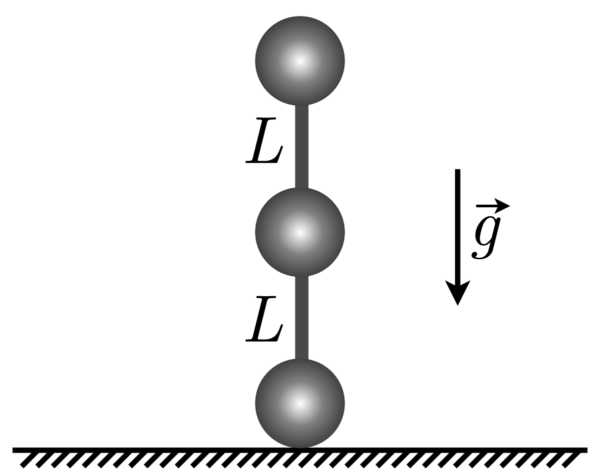
- Если сумма проекций внешних сил (приложенных к системе) на некоторую ось X равна нулю, то из теоремы о движении центра масс следует, что $a_x = 0$; центр масс системы вдоль оси X либо не движется, либо движется равномерно и прямолинейно.

№1. На гладком столе находится система, схема которой приведена на рисунке.



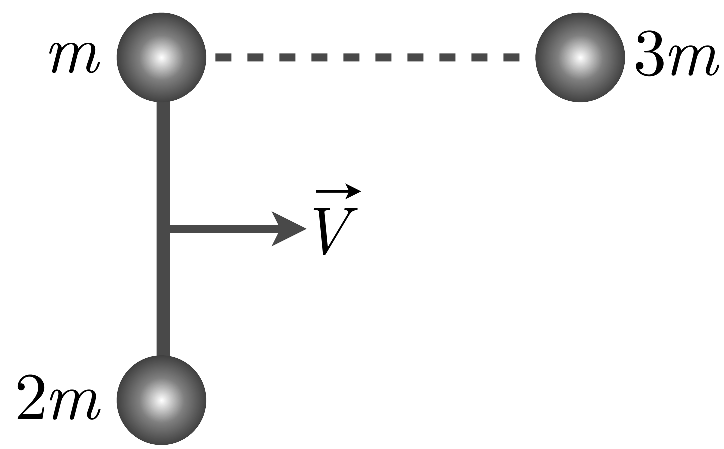
Вначале систему удерживают неподвижно, а затем предоставляют самой себе.
На какое расстояние сместится брусок массой 5m к моменту, когда шайба массой m коснётся стола, если известно, что H = 64 см?

№2. Три одинаковых шарика жестко скреплены двумя невесомыми стержнями длиной L так, что все три шарика лежат на одной прямой. Вся конструкция образует подобие гантели. Её размещают на гладкую горизонтальную поверхность Земли, поддерживая в вертикальной положении, а затем отпускают.



Какую скорость будет иметь верхний шарик перед приземлением?

№3. К концам невесомого стержня длиной l прикреплены два маленьких шарика с массами m и $2m$. Стержень, двигаясь поступательно в направлении перпендикулярном ему самому со скоростью V, налетает на покоящийся шарик массой $3m$ так, как показано на рисунке. Происходит абсолютно неупругий удар.

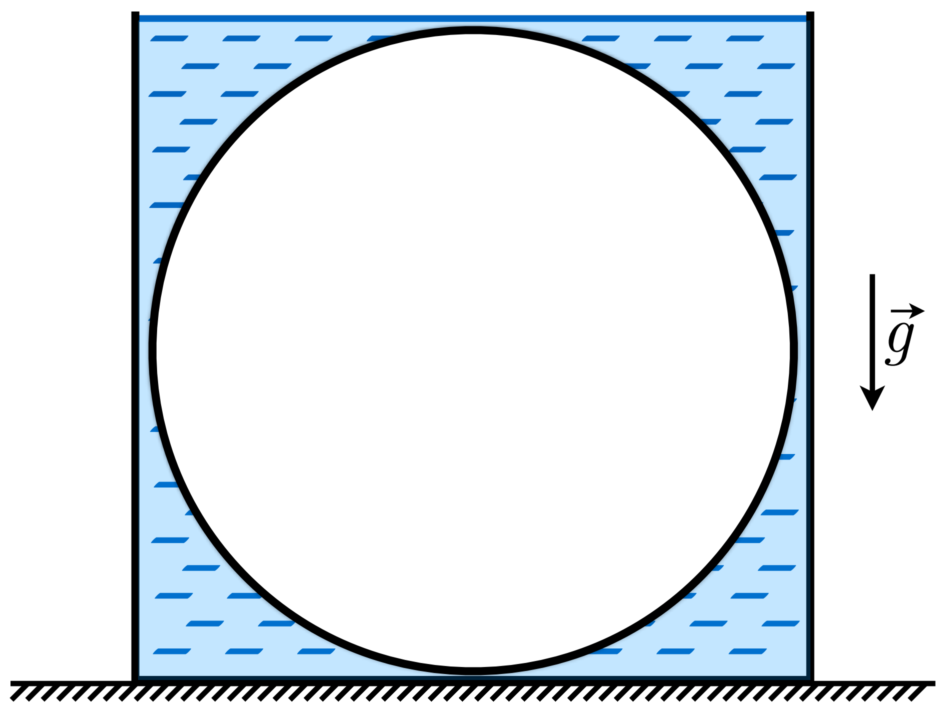


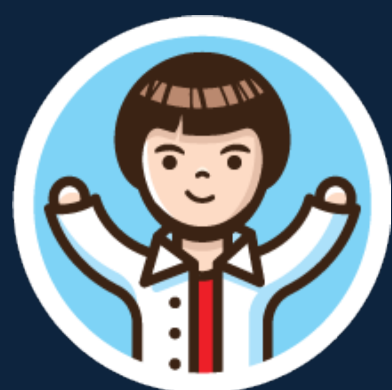
1. Найти силу натяжения стержня сразу после соударения.
2. На какой угол повернётся стержень спустя время t после удара?

Силу тяжести не учитывать.

№4. Муха сидит на дне тонкостенной стеклянной закрытой пробирки, которую удерживают над столом в вертикальном положении на высоте (отмеряемой от нижнего конца пробирки) равной длине пробирки L. Пробирку отпускают и она падает вниз. К моменту касания стола муха внутри пробирки перелетела к верхнему концу пробирки и села там. Сколько времени летела пробирка до стола?

№5. В лунке размером $10 \times 10 \times 10$ см, полностью заполненной водой, лежит шарик, плотность материала которого $\rho = 2$ г/см^3. Диаметр шарика d немного меньше 10 см. Какую минимальную по величине работу A надо совершить, чтобы вытащить шарик из воды? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.





mapenkin.ru

ПРЕЗЕНТАЦИЮ ПОДГОТОВИЛ

Михаил Александрович **ПЕНКИН**

/penkin

/mapenkin

fmicky@gmail.com