无线通信的基础知识

张振宇*

(西南交通大学)

摘　要

作为写作练习的工具，同时也帮助自己理解基础知识。首先介绍了 Zak 变换的基本概念，然后推导了 Zak 变换的公式，最后给出了 Zak 变换的基本性质。

关键词：练习、基础

Abstract

Attention！If you input ”different”, the computer will output ”different”, but if you input ”dif{}ferent”, the computer will output ”different”

*翻译 IEEE 论文

1 Zak 变换的介绍

Zak 变换的起源应该需要看时频域分析的内容，如 Gabor 变换，Wigner-Ville 分布等。Zak 变换是一种时频分析方法，是一种时域和频域的联合分析方法。步长为 T 的 Zak 变换有如下的形式 (Zak transform with step T，在 Hadani（OTFS 提出者）的书中，$T=\tau_p$，$\nu_p=\frac{1}{\tau_p}$)：

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}(\tau,\nu)=\sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(\tau+nT)e^{-j2\pi\nu nT} \tag{1}$$

Zak 变换可以写作：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x[n]\}(\tau,\nu) &= \sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x\Big(\tau+nT\Big)e^{-j2\pi nT\nu} \\
&= \sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}X\left(f\right)e^{j2\pi f(\tau+nT)}df\right]}_{x(\tau+nT)}e^{-j2\pi nT\nu} \\
&= \sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X\left(f\right)e^{j2\pi f(\tau+nT)}e^{-j2\pi nT\nu}df \\
&= \sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}X\left(f\right)e^{j2\pi f\tau}e^{j2\pi nT(f-\nu)}df}_{\mathrm{conv}(X(\nu)e^{j2\pi\nu\tau},e^{j2\pi nT\nu})} \\
&= \sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\nu)e^{j2\pi\nu\tau}*e^{-j2\pi nT\nu} \\
&= \sqrt{T}\cdot X(\nu)e^{j2\pi\nu\tau}*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi nT\nu} \\
&= \sqrt{T}\cdot X(\nu)e^{j2\pi\nu\tau}*\left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\nu-\frac{n}{T}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\Big(\nu-\frac{n}{T}\Big)e^{j2\pi\tau(\nu-\frac{n}{T})}
\end{aligned} \tag{2}$$

推导的过程中利用了傅里叶级数的代替，即

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}, \\
\text{where, } c_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT_0) e^{-j2m\frac{t}{T_0}} dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2m\frac{t}{T_0}} dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2m\frac{0}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Zak 变换的过程可以理解为对 $[-\infty, \infty]$ 上的时间信号进行分解，设定 Zak 变换的步长 T，也是抽样的周期，得到抽样的信号 $x(\tau + nT)$，接着对该信号进行 DTFT（离散时间傅里叶变换）的结果就是 Zak 变换的沿着 ν 轴的结果，即 $\mathcal{Z}\{x[n]\}_\tau(\nu)$。在这个过程中，我们可以看到 Zak 变换的结果是一个在 ν 轴上的周期函数（周期是否是 1/T）。然后改变不同的起始点 τ，我们可以得到 Zak 变换的二维结果。在一个周期块内的 Zak 变换也可以理解为先对信号进行串并转换，转换成二维的时延-时间域信号后沿着时间轴进行傅里叶变换的结果，多普勒域的点数就是 $x(\tau + nT)$ 中 n 的点数, 一般是 N（这里将 DTFT 简化为 DFT，所以只考虑一个多普勒周期），时延的点数一般是 M 个，即信号的最小时间单位是 1/（MN）。

Zak 变换还可以写作：

$$
\mathcal{Z}\{x[n]\}(\tau,\nu) = \langle x(t), \Phi_{\tau,\nu}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Phi^*_{\tau,\nu}(t)dt \tag{4}
$$

其中 $\Phi_{\tau,\nu}(t)$ 是 Zak 基函数，可以写作：

$$
\Phi_{\tau,\nu}(t) = \sqrt{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau-nT)e^{j2\pi nT\nu} \tag{5}
$$

其傅里叶变换为：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\Phi_{\tau,\nu}(t)\}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\Big(t-\tau-nT\Big) e^{j2\pi nT\nu} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau-nT) e^{j2\pi nT\nu} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nT\nu} e^{-j2\pi f(\tau+nT)} \\
&= \sqrt{T} e^{-j2\pi f\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nT(\nu-f)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi f\tau} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T e^{j2\pi nT(\nu-f)}}_{FourierSeries} \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi f\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu-f-n\frac{1}{T}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi f\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\nu-n\frac{1}{T}\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

即

$$
\mathcal{F}\{\sqrt{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau-nT) e^{j2\pi nT\nu}\} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi f\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\nu-n\frac{1}{T}\right) \tag{7}
$$