非线性系统反步法

马志伟

2024 年 3 月 17 日

目录

1 内容大纲

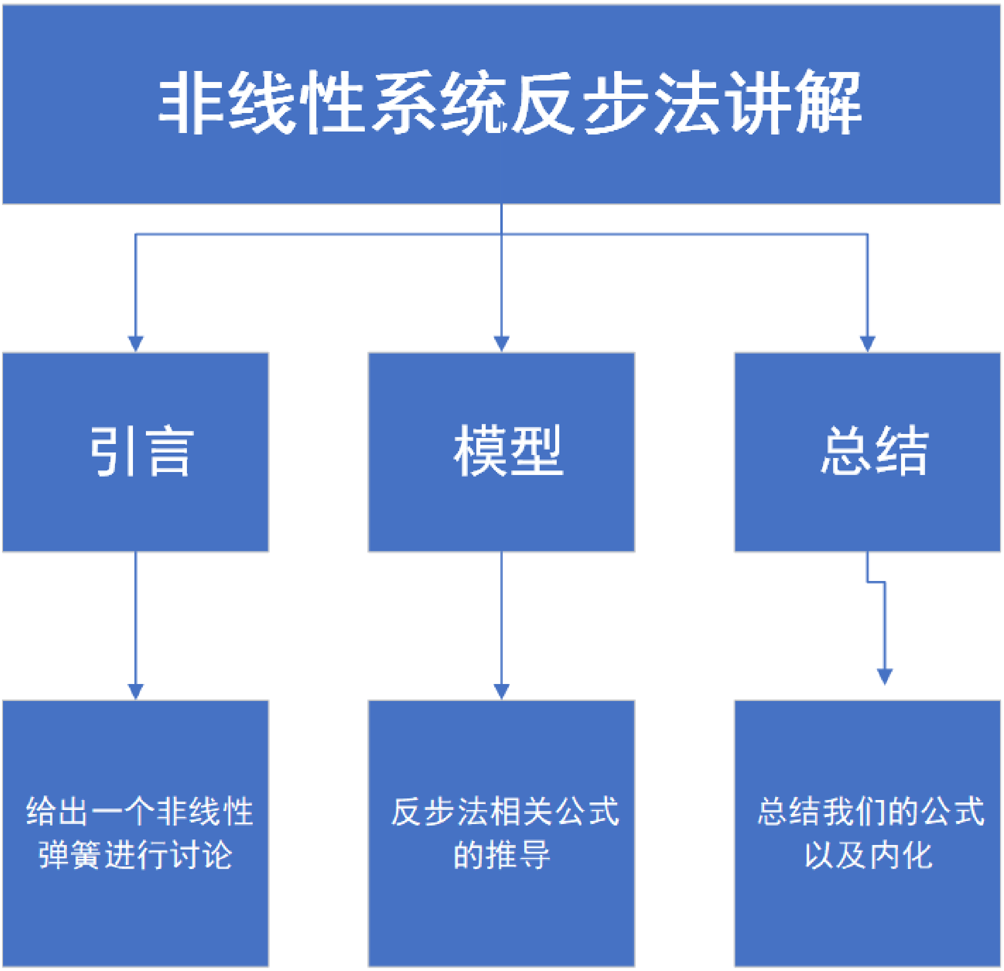

图 1:

由图 1 展示的内容我们将会按相应下的格式进行探讨

反步设计法是一种递归设计方法。它是由 Kanellakopoulos 和 Kokotovic 等于 1991 年最先提出的针对参数不确定系统的系统化设计方法。它的主要思想是通过递归地构造闭环系统的 Lyapunov 函数获得反馈控制器，选取控制律使得 Lyapunov 函数沿闭环系统轨迹的导数具有某种性能，保证闭环系统轨迹的有界性和收敛到平衡点，所选取的控制律就是系统镇定问题、跟踪问题、干扰抑制问题或者几种问题综合的解。

2 前言

我们先通过给予一个非线性弹簧的案例来引出关于反步法的设计。

由图 2 我们可以给出图 1 相关的公式

2.1 公式

我们可以对图 2 进行受力分析，由牛顿第二定律得到

$$F - F_T = ma$$

$$F_T = \alpha x^3$$

$$a = \ddot{x}$$

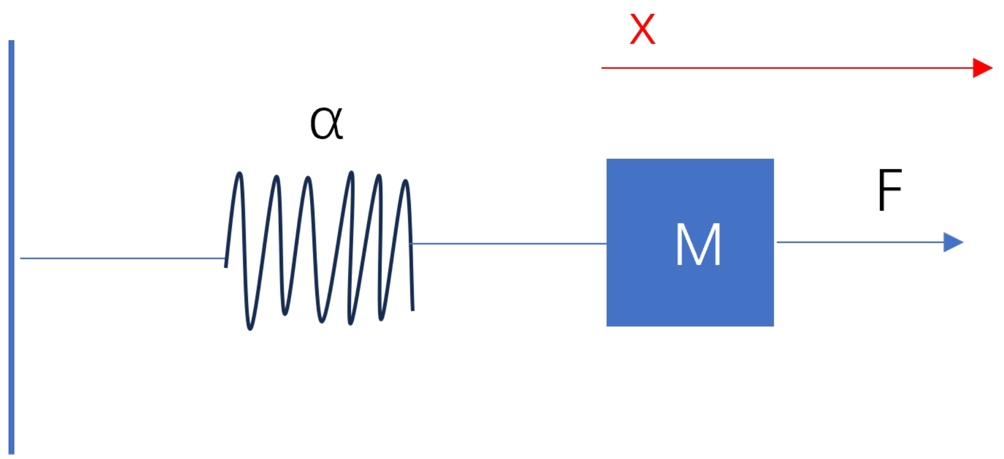

图 2:

综上可得

$$F - \alpha x^3 = m\ddot{x}$$

我们构建状态空间表达式 $x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$，$F = u$ 我们得到

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{\alpha x_1^3}{m} + \frac{u}{m}$$

我们可以利用 u 来影响 $\dot{x_2}$ 从而影响 $\dot{x_1}$ 和 x_1，表达式为

$$u \to \dot{x_2} \to x_2 \to \dot{x_1} \to x_1$$

由于 x_1 就是我们需要的 x 因此我们可以利用 u 来改变 x 从而让 x 改变，在该非线性弹簧系统中可以让滑块按照我们的目标进行。

2.2 案例

接下来，我们将给出一个非线性系统试着去用反步法来设计控制器首先我们给出一个非线性系统

$$\dot{x_1} = x_1^2 + x_2$$

$$\dot{x_2} = x_1 + u$$

我们的目标为

$$x_1 \to x_{1d}$$

在该系统中我们希望通过改变 u 来让系统中的 x_1 趋近我们给定的 $x_1 d$, 即按照目标轨迹进行运动，因此我们可以书写以下的相关式

$$u \to \dot{x_2} \to x_2 \to \dot{x_1} \to x_1 \to x_{1d}$$

接下来我们会利用两个步骤来实现 u 的构建

2.2.1 步骤 1

步骤 1：设置 x_{2d} 这一中间量 $x_2 = x_{2d}$ 时 $x_1 = x_{1d}$

接下来是实现步骤 1 的思路

1. 我们引入 $e = x_{1d} - x_1$, 所以 $x_1 \to x_{1d}$ 转化为 $e \to 0$

$$e = x_{1d} - x_1$$

2. 根据李雅普诺夫第二方法 (简称李二法)，对于系统构造的李雅普诺夫函数 (以下简称为李函数)$V(x)$，如果 $V(x)$ 为正定,$\dot{V}(x)$ 为负定, 那么可以得到在原点出渐近稳定也就是得到 $e = 0$。
3. 在 2 的基础上，我们构造李函数 $V(e) = \frac{e^2}{2}$

$$V(e) = \frac{e^2}{2}$$

那么我们就可以得到 $\dot{V}(e)$ 的公式

$$\dot{V}(e) = e\dot{e} = e(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1)$$

由于 $V(e)$ 为正定，为了使得 $\dot{V}(e)$ 负定，我们希望 $(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1)$ 等于 $-k_1 e$, 此处 $k_1 > 0$, 这样我们就可以得到 $\dot{V}(e) = e\dot{e} = e(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) = -k_1 e^2$, 也就是满足负定的条件。也就是

$$\dot{x}_{1d} - (x_1^2 + x_2) = -k_1 e$$

所以此时的负定条件下的 x_2 设置为 x_{2d}, 也就是我们期望得到的 x_2 的数值，此时可以得到 $\dot{V}(e)$ 负定时,x_{2d} 满足

$$x_{2d} = x_2 = k_1 e + \dot{x}_{1d} - x_1^2$$

以上的步骤 1，让我们从 $x_1 \to x_{1d}$ 的问题，转化为 $x_2 \to x_{2d}$ 的问题。4. 步骤 1 的实现结果为

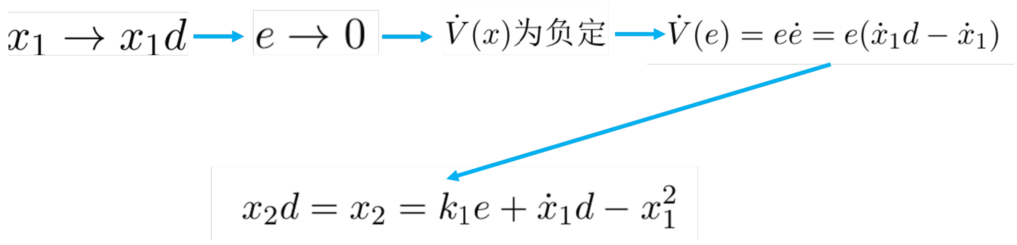

图 3: 关系图

2.2.2 步骤 2

步骤 2：利用 $x_2 \to x_{2d} = k_1 e + \dot{x}_{1d} - x_1^2$, 求得 u

在步骤 1 中，我们利用李二法，实现了问题的转化，因此我们可以同样设计来求得 u。

1. 我们 $\sigma = x_{2d} - x_2$, 那么我们的目标是 $x_{2d} \to x_2$ 转化为 $\sigma \to 0$

$$\sigma = x_{2d} - x_2$$

2. 利用李二法，我们可以构建 $V(e, \sigma)$，当 $V(e, \sigma)$ 正定，而当 $\dot{V}(e, \sigma)$ 负定时，我们可以得到 $e \to 0$ 以及 $\sigma \to 0$。因此此时我们构造李函数为 $V(e, \sigma) = \frac{e^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}$

$$V(e, \sigma) = \frac{e^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}$$

利用正定的性质：正定矩阵和正定矩阵的和仍旧为正定矩阵，因此 $V(e, \sigma)$ 为正定，同理我们可以得到

$$\dot{V}(e, \sigma) = e\dot{e} + \sigma\dot{\sigma}$$

表 1: 关系表

序号	名称	公式
1	$\dot{x_1}$	$\dot{x_1} = x_1^2 + x_2$
2	$\dot{x_2}$	$\dot{x_2} = x_1 + u$
3	e	$e = x_{1d} - x_1$
4	$\dot{e}$	$\dot{e} = \dot{x}_{1d} - x_1^2 - x_2$
5	x_{2d}	$k_1 e + \dot{x}_{1d} - x_1^2$
6	$\dot{x}_{2d}$	$k_1\dot{e} + \ddot{x}_{1d} - 2x_1\dot{x}_1$
7	σ	$x_{2d} - x_2$
8	$\dot{\sigma}$	$\dot{x}_{2d} - x_1 - u$

我们带入上述关于 e 和 $\dot{e}$ 以及 x_2d 的公式，可以得到

$$\dot{V}(e,\sigma) = e\dot{e} + \sigma\dot{\sigma}$$

$$= e(\dot{x}_{1d} - x_1^2 - k_1 e - \dot{x}_{1d} + x_1^2 + \sigma) + \sigma\dot{\sigma}$$

$$= -k_1 e^2 + \sigma(e + \dot{\sigma})$$

由于 $-k_1 e^2$ 是负定的，那么只要 $\sigma(e+\dot{\sigma})$ 也负定则满足 $\dot{V}(e,\sigma)$ 负定

3. 我们希望 $\sigma(e+\dot{\sigma}) = -k_2\sigma^2$, 也就是 $e + \dot{\sigma} = -k_2\sigma$

$$e + \dot{\sigma} = -k_2\sigma$$

4. 现在我们得到了一系列的公式可以用来推导 u，我们大致回顾制作三线表：

5. 利用三线表里面的公式我们可以得到

$$e + \dot{\sigma} = -k_2\sigma$$

带入序号 6 和序号 8 的公式，左右可以变换一下

$$e + k_1\dot{e} + \ddot{x}_{1d} - 2x_1\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -k_2\sigma$$

再带入序号 4 和序号 2 的公式可以得到

$$e + k_1(\dot{x}_{1d} - (x_1^2 + x_2)) + \ddot{x}_{1d} - 2x_1(x_1^2 + x_2) - (x_1 + u) = -k_2\sigma$$

根据这个公式我们可以得到

$$u = e + k_1(\dot{x}_{1d} - (x_1^2 + x_2)) + \ddot{x}_{1d} - 2x_1(x_1^2 + x_2) - x_1 + k_2\sigma$$

再次带入序号 3 和序号 7 的公式我们最终可以得到

$$u = x_{1d} - x_1 + k_1(\dot{x}_{1d} - (x_1^2 + x_2)) + \ddot{x}_{1d} - 2x_1(x_1^2 + x_2) - x_1 + k_2(k_1(x_{1d} - x_1) + \dot{x}_{1d} - x_1^2 - x_2)$$

由于 u 的公式我们可以得到，该公式 u 为 $u = f(x_1, x_2, x_{1d}, \dot{x}_{1d}, \ddot{x}_{1d})$

6. 由此我们可以得到步骤 2 的思路, 图 4

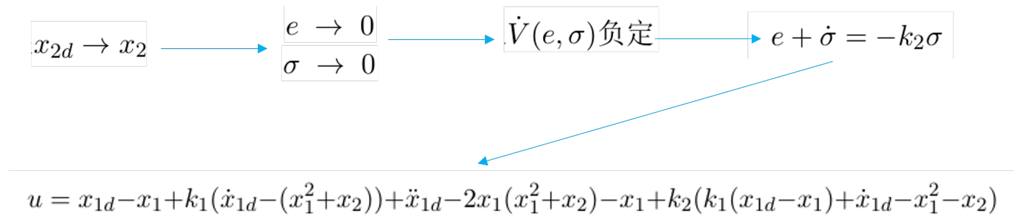

图 4:

3 检验和总结

由于我们在上述文章中详细探讨了如果一步一步推导最后得到 u 的过程，我们也发现 u 的设计满足 $u=f(x_1,x_2,x_{1d},\dot{x}_{1d},\ddot{x}_{1d})$ 时，可以使得系统 $x_1 \to \dot{x}_{1d}$ 接下来我们进行总结以及和检验，并且对最初我们探讨的非线性弹簧的问题，利用反步法进行设计。

3.1 检验

我们根据表 1 可以得到如下的两个式子

$$\dot{e}=-k_1e+\sigma$$

$$\dot{\sigma}=-e-k_2\sigma$$

化成状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\sigma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1 & 1\\ -1 & -k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \sigma\end{bmatrix}$$

我们由状态空间表达式，可以利用以下两条法则

$$\Sigma\lambda_i=tr(A)$$

$$\Pi\lambda_i=det(A)$$

表 2: 各个量含义

序号	名称	含义
1	λ	特征值
2	A	系统矩阵
3	Σ	累加
4	Π	累乘
5	tr(A)	求矩阵 A 的迹
6	det(A)	求矩阵 A 的行列式

我们在上述过程中设置 $k_1>0,k_2>0$ 由此，我们可以得到如下式

$$\lambda_1+\lambda_2=-k_1-k_2<0$$

$$\lambda_1+\lambda_2=1+k_1k_2>0$$

由此，我们得到 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$, 根据李雅普诺夫第一法，我们可以得到该系统在 $e=0,\alpha=0$ 处稳定

3.2 总结

在上述过程中，我们检验了当使用 u 时，系统跟踪的可行性，接下来我们根据我们得到的结论利用 simulink 来设计系统。

4 仿真

接下来我们回到最初的非线性弹簧模型，我们在学会了反步法的基础上，我们给出给出以下的公式

4.1 公式

利用反步法，我们得到非线性弹簧相关的公式

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha x_1^3}{m} + \frac{u}{m}$$

$$e = x_{1d} - x_1$$

$$\dot{e} = \dot{x}_{1d} - x2$$

$$V_1 = \frac{e^2}{2}$$

$$\dot{V}_1 = e(\dot{x}_{1d} - x_2)$$

$$x_{2d} = \dot{x}_{1d} + k_1 e$$

$$\sigma = x_{2d} - x_2$$

$$\dot{V}_1 = -k_1 e^2 + e\sigma$$

$$\sigma = \ddot{x}_{1d} + k_1(\dot{x}_{1d} - x_2) + \frac{\alpha x_1^3}{m} - \frac{u}{m}$$

$$u = me + m\ddot{x}_{1d} + mk_1(\dot{x}_{1d} - x_2) + \alpha x^3 + mk_2\sigma$$

4.2 simulink 仿真

在搭建好我们的框架后，可以设置 k_1 k_2 来让系统拟合的更好 我们设置初始的 $x1 = 0, x2 = 0$, 设置 $x_{1d} = 3 + sin(t)$ 的正弦函数在不同的 $k1k2$ 条件下得到如下图形

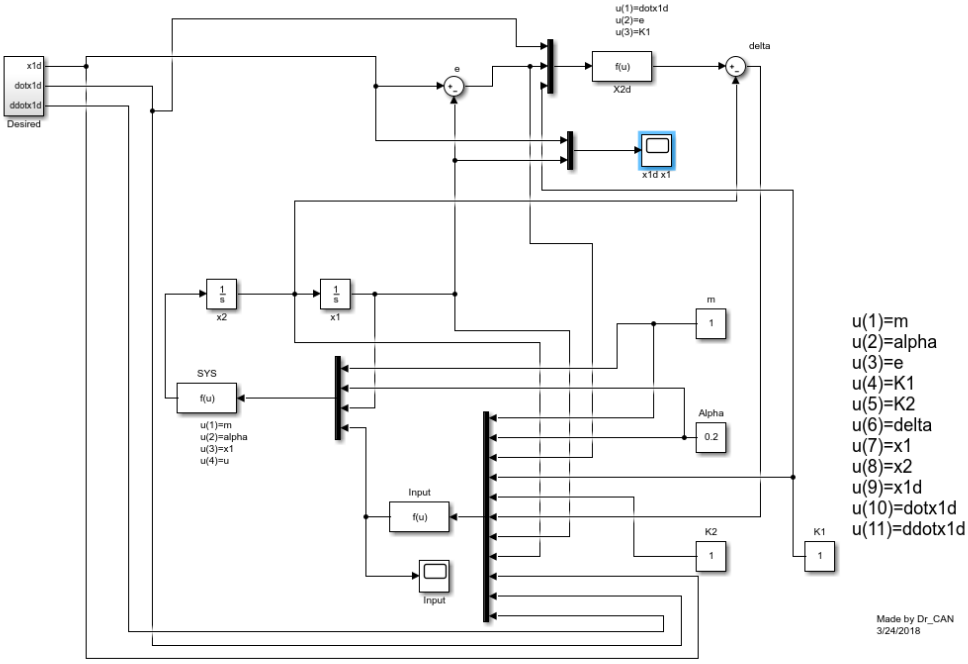

图 5: 非线性弹簧 simulink 仿真图

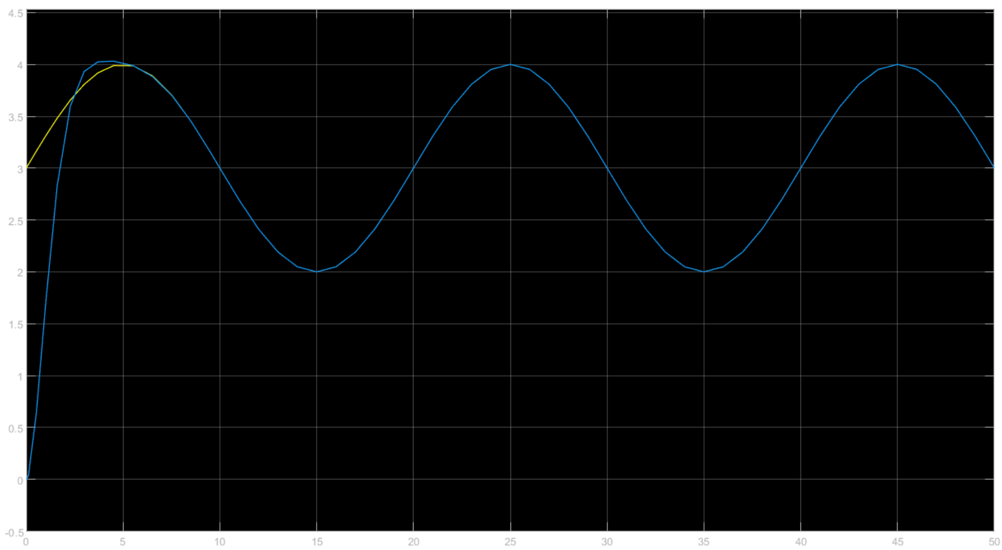

图 6: $k_1 = 1$,$k_2 = 1$

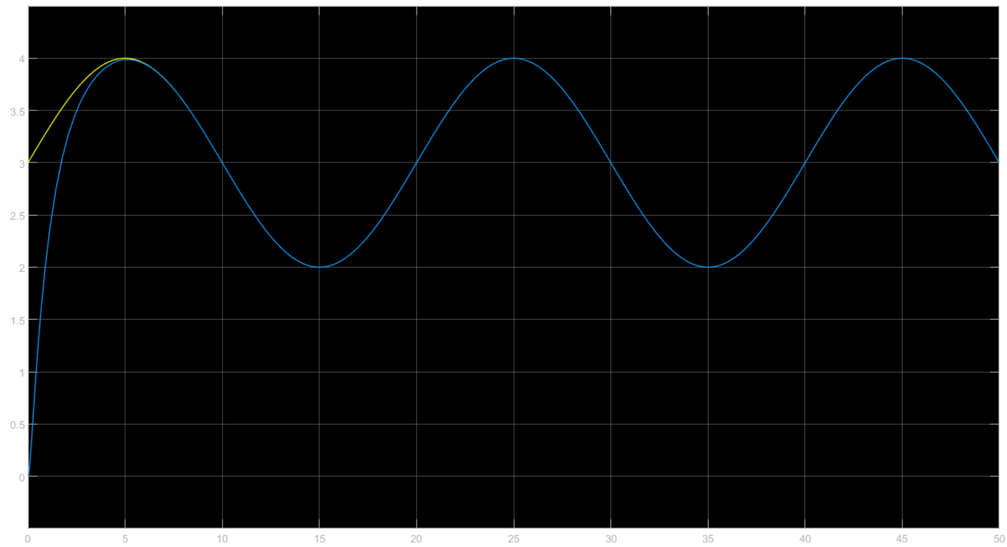

图 7: $k_1 = 10$,$k_2 = 1$

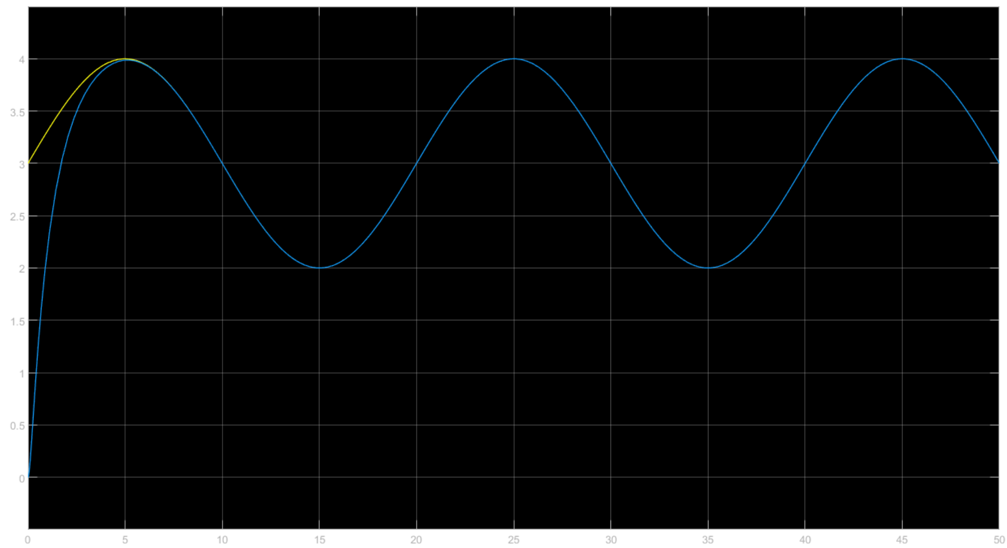

图 8: $k_1 = 1$,$k_2 = 10$

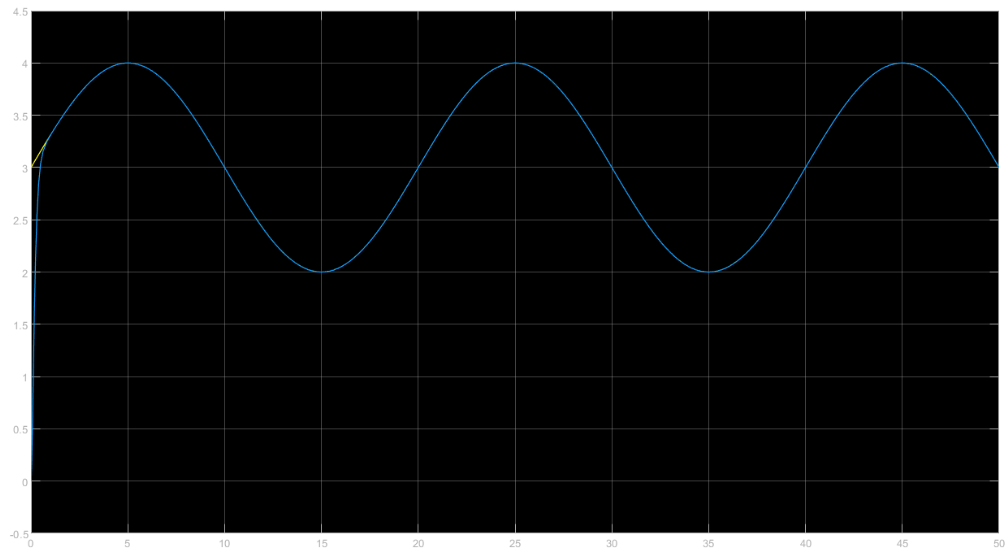

图 9: $k_1 = 10$,$k_2 = 10$