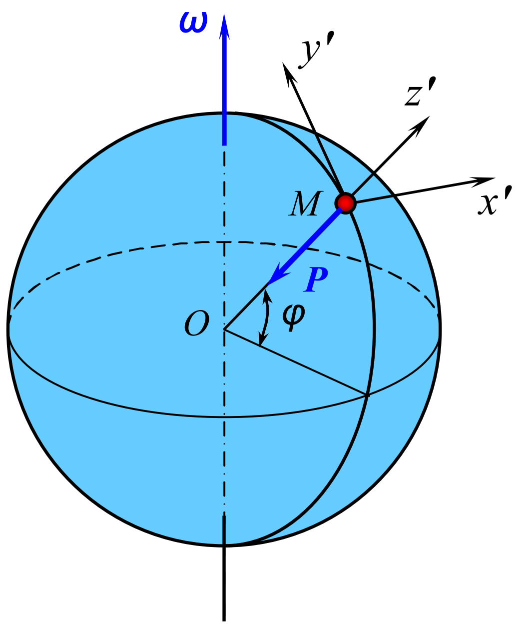
3、质点相对地球表面的运动微分方程

考虑在北半球地球表面北纬φ角处，一个质点相对地球表面的自由运动。假设质点M的质量为m，当地的重力加速度大小为g，计算质点的运动微分方程。

建立固定于地球表面的$Ox'y'z'$（东北天）坐标系为非惯性参考系. 其中x'轴水平向东，y'轴水平向北，z'轴铅垂向上。

不计空气阻力，质点受到地球引力$\boldsymbol{F}$。由于地球自转的影响，质点还受到牵连惯性力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}$和科式惯性力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$。其中引力$\boldsymbol{F}$和牵连惯性力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}$的合力即为质点的重力$\boldsymbol{P}$。



科式惯性力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$为：$\boldsymbol{F}_{IC}=-m\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

其中
$$\boldsymbol{\omega}=0+\omega\cos\varphi\,\boldsymbol{j}'+\omega\sin\varphi\,\boldsymbol{k}'$$
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}'$$

于是，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$可展开为：
$$\boldsymbol{F}_{IC}=-2m\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\\ 0 & \omega\cos\varphi & \omega\sin\varphi\\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}'\end{vmatrix}$$
$$=2m\omega[(\dot{y}'\sin\varphi-\dot{z}'\cos\varphi)\boldsymbol{i}'-\dot{x}'\sin\varphi\,\boldsymbol{j}'+\dot{x}'\cos\varphi\,\boldsymbol{k}']$$

质点相对于地球表面的运动微分方程为：$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{Ie}+\boldsymbol{F}_{IC}=m\boldsymbol{g}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

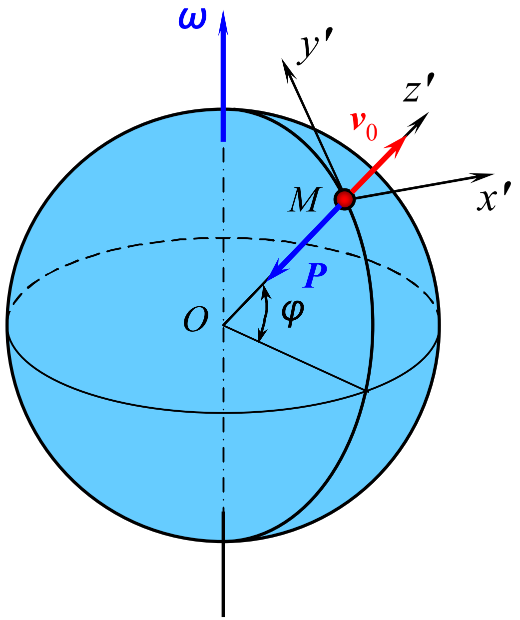
$$\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}'=2\omega\dot{y}'\sin\varphi-2\omega\dot{z}'\cos\varphi\\ \ddot{y}'=-2\omega\dot{x}'\sin\varphi\\ \ddot{z}'=-g+2\omega\dot{x}'\cos\varphi\end{cases}$$

——质点相对地球表面的运动微分方程

落体偏差现象

例3 在北半球地球表面北纬φ角处，以初速度v_0铅锤上抛一质量为m的质点M，计算质点M落回地面的落点与上抛点的偏离量。

解：建立固定于地球表面的东北天坐标系$Ox'y'z'$为非惯性参考系。其中x'轴水平向东，y'轴水平向北，z'轴铅垂向上。



质点的初速为v_0，重力为P。其相对于非惯性坐标系的运动微分方程为：

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 2\omega\dot{y}'\sin\varphi - 2\omega\dot{z}'\cos\varphi \\ \ddot{y}' = -2\omega\dot{x}'\sin\varphi \\ \ddot{z}' = -g + 2\omega\dot{x}'\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

上述方程求解比较困难，但考虑到地球自转的角速度ω很小（~7.27×10^{-5}rad/s），可用**摄动法**进行求解。

将解写成ω的级数形式：

$$\begin{cases} x' = x_0' + x_1'\omega + x_2'\omega^2 + \cdots \\ y' = y_0' + y_1'\omega + y_2'\omega^2 + \cdots \\ z' = z_0' + z_1'\omega + z_2'\omega^2 + \cdots \end{cases}$$

代入微分方程(1)式并比较ω的各项系数，分别求出x'_0, y'_0, z'_0; x'_1, y'_1, z'_1; ……作为x', y', z'的各级近似解。

为了简单，仅取到 ω 的一次项，假设微分方程（1）的解为：
$$\begin{cases} x' = x_0' + x_1'\omega \\ y' = y_0' + y_1'\omega \\ z' = z_0' + z_1'\omega \end{cases}$$

代入方程（1）得到：
$$\begin{cases} \ddot{x}' = 2\omega(\dot{y}_0' + \dot{y}_1'\omega)\sin\varphi - 2\omega(\dot{z}_0' + \dot{z}_1'\omega)\cos\varphi \\ \ddot{y}' = -2\omega(\dot{x}_0' + \dot{x}_1'\omega)\sin\varphi \\ \ddot{z}' = -g + 2\omega(\dot{x}_0' + \dot{x}_1'\omega)\cos\varphi \end{cases}$$

化简并整理成 ω 的级数形式：
$$\begin{cases} \ddot{x}' = 2(\dot{y}_0'\sin\varphi - \dot{z}_0'\cos\varphi)\cdot\omega + 2(\dot{y}_1'\sin\varphi - \dot{z}_1'\cos\varphi)\cdot\omega^2 \\ \ddot{y}' = -2\dot{x}_0'\sin\varphi\cdot\omega - 2\dot{x}_1'\sin\varphi\cdot\omega^2 \\ \ddot{z}' = -g + 2\dot{x}_0'\cos\varphi\cdot\omega + 2\dot{x}_1'\cos\varphi\cdot\omega^2 \end{cases}$$

对假设的 ω 的级数解形式求二阶导数得到：
$$\begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x}_0' + \ddot{x}_1'\omega \\ \ddot{y}' = \ddot{y}_0' + \ddot{y}_1'\omega \\ \ddot{z}' = \ddot{z}_0' + \ddot{z}_1'\omega \end{cases}$$

上述两组方程应该一致，所以 ω 的各级级数系数应该一致。首先比较 ω^0 的系数，得到：$\ddot{x}_0' = 0;\quad \ddot{y}_0' = 0;\quad \ddot{z}_0' = -g$

积分一次得到速度，为：$\dot{x}_0' = C_1;\quad \dot{y}_0' = C_2;\quad \dot{z}_0' = -gt + C_3$

由速度初始条件（t=0时, v'_z=v_0）得到：$\dot{x}_0' = 0;\quad \dot{y}_0' = 0;\quad \dot{z}_0' = -gt + v_0$

再积分一次得到位置，为：$x_0' = C_1'; \quad y_0' = C_2'; \quad z_0' = -gt^2/2 + v_0 t + C_3'$

由位移初始条件（t=0时, r =0）得到：$x_0' = 0; \quad y_0' = 0; \quad z_0' = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$

此为 ω 的0级近似解，亦即不考虑地球自转影响时的解。与经典牛顿力学在惯性参考系下得到的结果相同。

接下来比较前述两组方程中 ω^1的系数，得到：

$$\begin{cases} \ddot{x}_1' = 2(\dot{y}_0' \sin\varphi - \dot{z}_0' \cos\varphi) \\ \ddot{y}_1' = -2\dot{x}_0' \sin\varphi \\ \ddot{z}_1' = 2\dot{x}_0' \cos\varphi \end{cases}$$

代入上一步中求得的 $\dot{x}_0' = 0; \quad \dot{y}_0' = 0; \quad \dot{z}_0' = v_0 - gt$ ，得到：

$$\ddot{x}_1' = 2(gt - v_0)\cos\varphi; \quad \ddot{y}_1' = 0; \quad \ddot{z}_1' = 0$$

积分一次得到：$\dot{x}_1' = (gt^2 - 2v_0 t)\cos\varphi + C_1; \quad \dot{y}_1' = C_2; \quad \dot{z}_1' = C_3$

由速度初始条件（t=0时,v'_z=v_0）及 ω的0级近似解已满足的初始条件联合得到：

$$\dot{x}_1' = (gt^2 - 2v_0 t)\cos\varphi; \quad \dot{y}_1' = 0; \quad \dot{z}_1' = 0$$

再积分一次得到：$x_1' = (\dfrac{1}{3}gt^3 - v_0 t^2)\cos\varphi + C_1'; \quad y_1' = C_2'; \quad z_1' = C_3'$

由位移初始条件（t=0时, r=0）及 ω的0级近似解已满足的初始条件联合得到：

$$x_1' = (\frac{1}{3}gt^3 - v_0 t^2)\cos\varphi; \quad y_1' = 0; \quad z_1' = 0$$

于是，得到质点的运动方程为：

$$\begin{cases} x' = (\frac{1}{3}gt^3 - v_0t^2)\cos\varphi\cdot\omega \\ y' = 0 \\ z' = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

当质点落回地面时，$z'=0$，由此得到$t=2v_0/g$. 代入x'的表达式得到：

$$x' = (\frac{1}{3}g\frac{8v_0^3}{g^3} - v_0\frac{4v_0^2}{g^2})\cos\varphi\cdot\omega = -\frac{4}{3}\frac{v_0^3}{g^2}\cos\varphi\cdot\omega$$

可见$x'<0$, 表明落点偏西。亦即在北半球竖直上抛的物体落地时落点会往西偏。

假设纬度为45度，上抛速度为800m/s(子弹射出速度), g约取9.8m/s^2，则偏差量约为37.4米。但这是不计空气阻力的情况下得到的结果，考虑空气阻力的话，偏差量会小得多。

讨论1、如果将初始条件改为将质点从H高度竖直无初速释放的话，求解方法完全相同，只是速度初始条件变为$v|_{t=0}=0$, 位移初始条件改为$z'|_{t=0}=H$, 得到质点的运动方程为：

$$x' = \frac{1}{3}gt^3\cos\varphi\cdot\omega,\quad y' = 0;\quad z' = H - gt^2/2$$

可见$x'>0$, 表明落点偏东。亦即在北半球上空无初速释放的物体落地时落点会往东偏，称之为落体偏东现象。

假设纬度为45度，往一个490米深的矿井中扔下一个石块，则偏差量约为16.8cm，偏差量很可观。

讨论2、如果将初始条件从竖直上抛改为斜抛，例如向正东方向以 α 角度斜向上以初速度 v_0 抛出的话，求解方法也是完全相同，只是速度初始条件变为 $v'_x|_{t=0}=v_0\cos\alpha$, $v'_z|_{t=0}=v_0\sin\alpha$, 同样可得到质点的运动方程为：

$$\begin{cases} x' = v_0\cos\alpha\cdot t - v_0\sin\alpha\cos\varphi\cdot t^2\cdot\omega + \dfrac{1}{3}g\cos\varphi\cdot t^3\cdot\omega \\ y' = -v_0\cos\alpha\sin\varphi\cdot t^2\cdot\omega \\ z' = v_0\sin\alpha\cdot t - \dfrac{1}{2}g\cdot t^2 + v_0\cos\alpha\cos\varphi\cdot t^2\cdot\omega \end{cases}$$

当质点落回地面时，$z'=0$，忽略掉 ω^2 等高阶小量，得到：$t \approx \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} + \dfrac{2v_0^2\omega\cos\varphi\sin 2\alpha}{g^2}$

代入上述解中，可得到各轴方向的偏差量为：

$$\begin{cases} \Delta x' = \dfrac{v_0^3\omega\sin\alpha\cos\varphi}{g^2}\left(4\cos^2\alpha - \dfrac{4}{3}\sin^2\alpha\right) \\ \Delta y' = -\dfrac{2v_0^3\omega\sin\alpha\sin 2\alpha\sin\varphi}{g^2} \end{cases}$$

结果表明在北半球向东发射，$\Delta y'$ 恒小于零，即落地点偏南。当发射角大于60度时，$\Delta x'<0$，即落地点偏西；当发射角小于60度时，$\Delta x'>0$，即落地点偏东。

假设纬度为45度，向正东方向，以45度仰角发射一枚初速度为900m/s的炮弹，g 约取9.8m/s^2，不计空气阻力的话，其偏差量约为：$\Delta y'$=-553m, $\Delta x'$=184m。这是相当惊人的偏差量，在计算炮弹落点时必须加以校正。向其他方向发射时会有不同的偏差量，计算方法完全相同！

讨论3、以上计算只计算到 ω 的一次项，继续计算的话还可以得到 ω^2项，此时在自由释放条件下可得到$y'<0$的分量，即南偏。但是这个量非常小，大约与太阳、月亮的引力带来的摄动效果量级相同，单独研究已无太大意义。

讨论4、此处研究的都是针对于地球北半球表面的质点的运动。关于南半球，由于质点所受的科式惯性力的方向与北半球相反，因此，绝大多数性质基本都是相反的，但计算方法是完全一样的。

讨论5、由于地球自转角速度是一个很小的量，在绝大多数时程较短、距离较短的问题中，表现得极不明显，因此用惯性坐标系下得到的结果即具有相当的精度。但是对于某些精度要求比较高（炮弹落点等）、时间比较长（河岸冲刷等）、空间距离大（气旋形成等）的问题，影响非常明显，不可忽略，必须加以考虑。