

4、质点动力学的两类问题

质点动力学的两类基本问题

质点运动微分方程

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i$$

→ { 第一类问题：已知运动求力.
第二类问题：已知力求运动.

→ 混合问题：第一类与第二类问题的混合

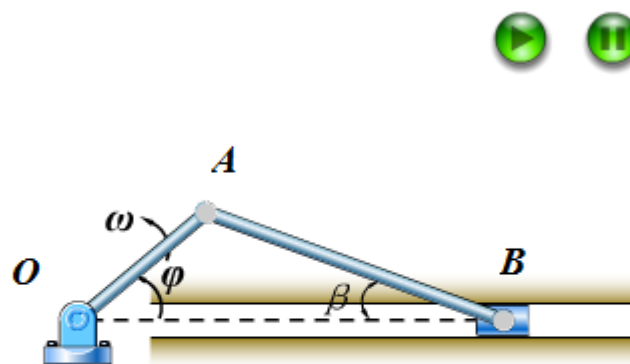
例1

已知：曲柄连杆机构如图所示. 曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动, $OA=r$, $AB=l$, 当 $\lambda = r/l$ 比较小时, 以 O 为坐标原点, 滑块 B 的运动方程可近似写为

$$x = l \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} \right) + r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right)$$

如滑块的质量为 m , 忽略摩擦及连杆 AB 的质量。

试求当 $\varphi = \omega t = 0$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 时, 连杆 AB 所受的力。



解: 研究滑块 $ma_x = -F \cos \beta$

其中

$$a_x = \ddot{x} = -r\omega^2(\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t)$$

当 $\varphi = 0$ 时, $a_x = -r\omega^2(1 + \lambda)$, 且 $\beta = 0$

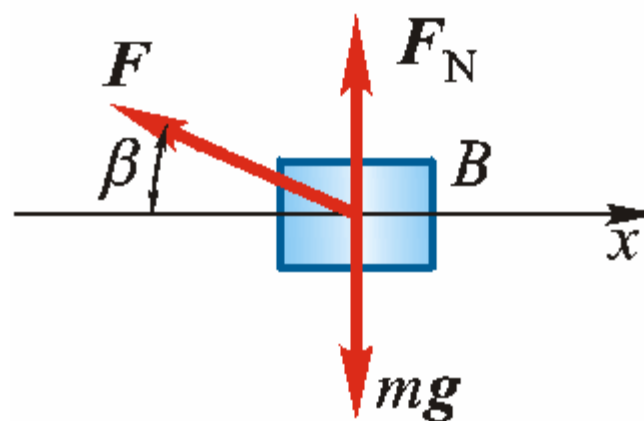
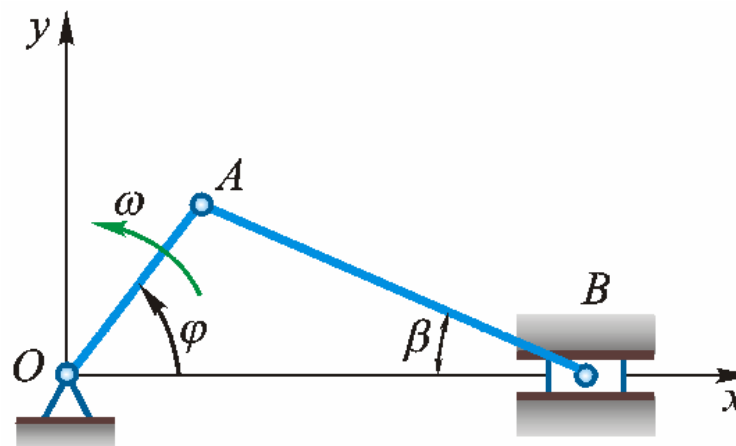
$$\rightarrow F = mr\omega^2(1 + \lambda)$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $a_x = r\omega^2\lambda$ 且 $\cos \beta = \sqrt{l^2 - r^2}/l$

$$mr\omega^2\lambda = -F \sqrt{l^2 - r^2}/l$$

$$\rightarrow F = -mr^2\omega^2/\sqrt{l^2 - r^2}$$

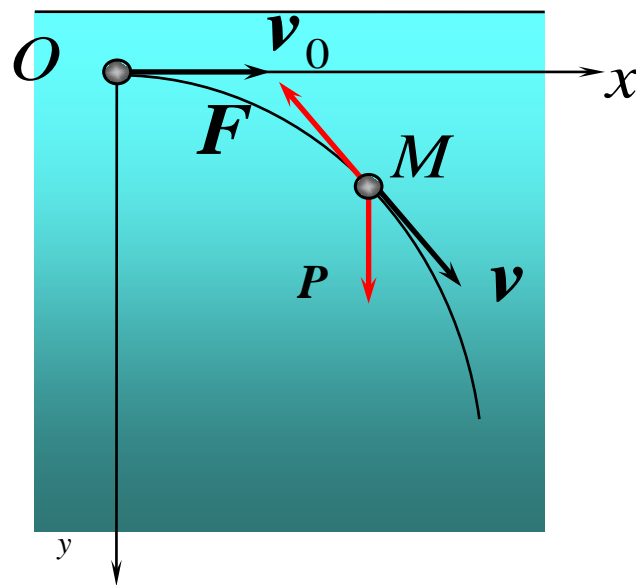
属于动力学第一类问题。



例2

已知：小球质量为 m ，在静止的水中缓慢下沉，初速度沿水平方向，大小为 v_0 。水的阻力为 $F = -\mu v$ ， μ 为粘滞系数，如图所示。水的浮力忽略不计。

求：小球的运动速度和运动规律。



解:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = mg - \mu v_y$$

由 $t=0$ 时 $v_x = v_0$ $v_y = 0$

积分 $\int_{v_0}^{v_x} \frac{1}{v_x} dv_x = -\int_0^t \frac{\mu}{m} dt$

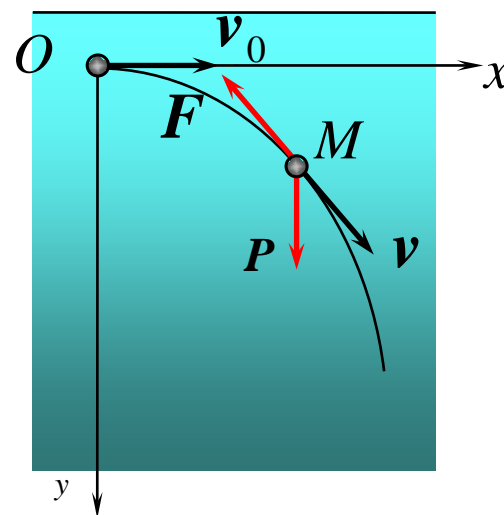
$$\int_0^{v_y} \frac{1}{\frac{mg}{\mu} - v_y} dv_y = \int_0^t \frac{\mu}{m} dt$$

→ $v_x = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}$ $v_y = \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})$

由 $t=0$ 时, $x=y=0$ 积分

→ $x = v_0 \frac{m}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})$

$$y = \frac{mg}{\mu} t - \frac{m^2 g}{\mu^2} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})$$



$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} dt$$

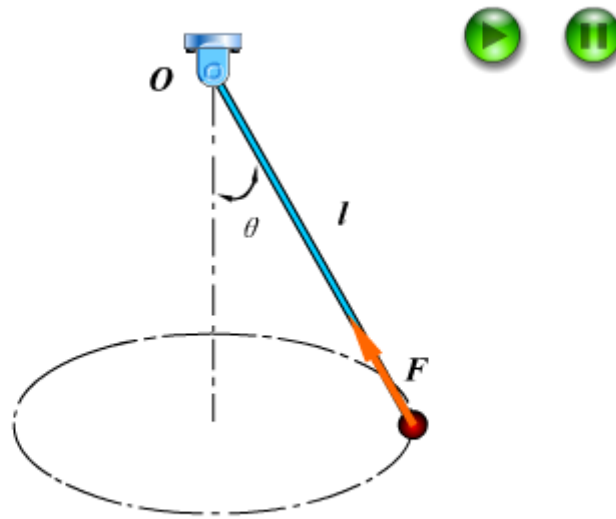
$$\int_0^y dy = -\int_0^t \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}) dt$$

属于动力学第二类问题。

例3

已知：一圆锥摆,如图所示。质量 $m=0.1\text{kg}$ 的小球系于长 $l=0.3\text{ m}$ 的绳上,绳的另一端系在固定点 O ,并与铅直线成 $\theta=60^\circ$ 角。

求：如小球在水平面内作匀速圆周运动，小球的速度与绳的张力。



解： 研究小球

$$m \frac{v^2}{b} = F \sin \theta$$

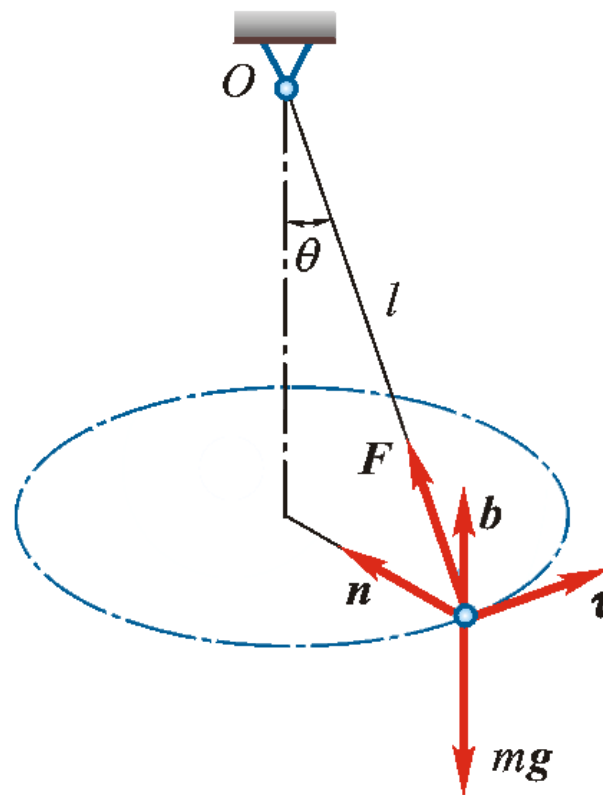
$$F \cos \theta - mg = 0$$

其中 $b = l \sin \theta$

$$F = \frac{mg}{\cos \theta} = 1.96 \text{ N}$$

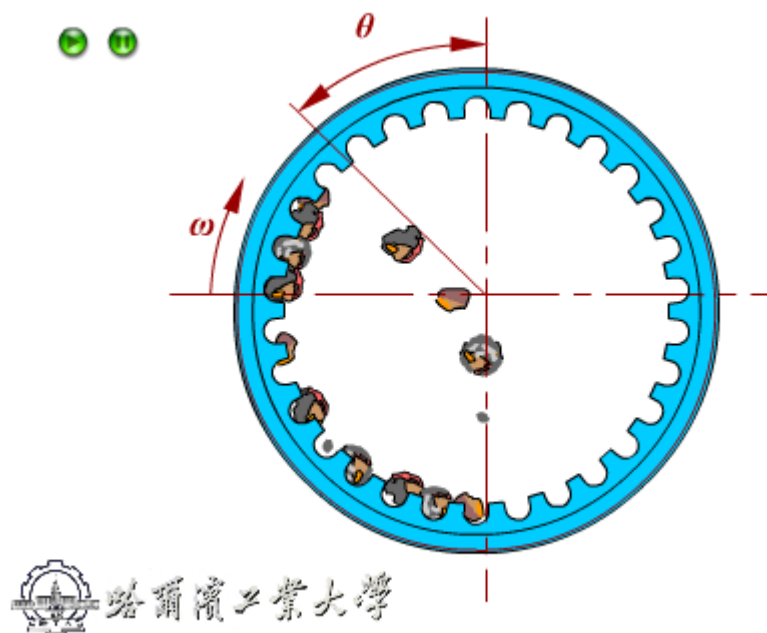
$$v = \sqrt{\frac{Fl \sin^2 \theta}{m}} = 2.1 \text{ m/s}$$

属于混合问题。



例4

已知：粉碎机滚筒半径为 R ，绕通过中心的水平轴匀速转动，筒内铁球由筒壁上的凸棱带着上升。为了使小球获得粉碎矿石的能量，铁球应在 $\theta = \theta_0$ 时才掉下来。求：滚筒每分钟的转数 n 。



解： 研究铁球

$$m \frac{v^2}{R} = F_N + mg \cos \theta$$

其中 $v = \frac{\pi n}{30} R$

当 $\theta = \theta_0, F_N = 0$ 时, 解得

$$n = 9.549 \sqrt{\frac{g}{R} \cos \theta_0}$$

当 $n \geq 9.549 \sqrt{\frac{g}{R}}$ 时, 球不脱离筒壁。

