3、动能定理

动能定理

质点的动能定理

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \quad \vec{v}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{r} \Rightarrow m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2),\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\delta W$$

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=\delta W$$

——质点动能定理的微分形式

质点动能的增量等于作用在质点上力的元功。

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=W_{12}$$

——质点动能定理的积分形式

在质点运动的某个过程中,质点动能的改变量等于作用于质点的力作的功.

质点系的动能定理

由 $$\mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)=\delta W_i \qquad \sum \mathrm{d}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)=\sum \delta W_i$$

得 $$\mathrm{d}T=\sum \delta W_i$$ ——质点系动能定理的微分形式

质点系动能的增量，等于作用于质点系全部力所作的元功的和.

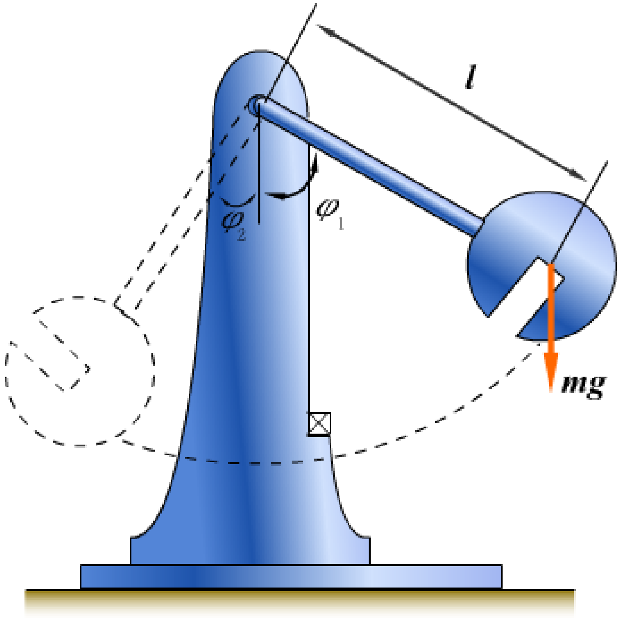
$$T_2-T_1=\sum W_i$$ ——质点系动能定理的积分形式

质点系在某一段运动过程中,起点和终点的动能改变量,等于作用于质点系的全部力在这段过程中所作功的和.

例1

已知:冲击试验机m=18kg, l=840mm, 杆重不计，在$\varphi_1 = 70°$时静止释放，冲断试件后摆至 $\varphi_2 = 29°$

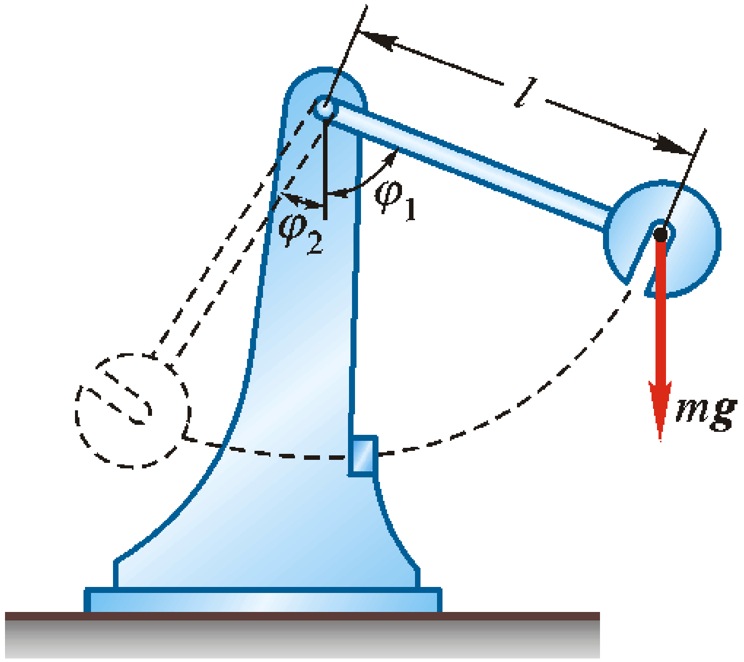
求: 冲断试件需用的能量。



解： 分析整体，受力如图所示。

$$T_1 = 0, T_2 = 0$$

$$0 - 0 = mgl(1 - \cos\varphi_1) - mgl(1 - \cos\varphi_2) - W_k$$



得冲断试件需要的能量为 $W_k = 78.92\text{J}$

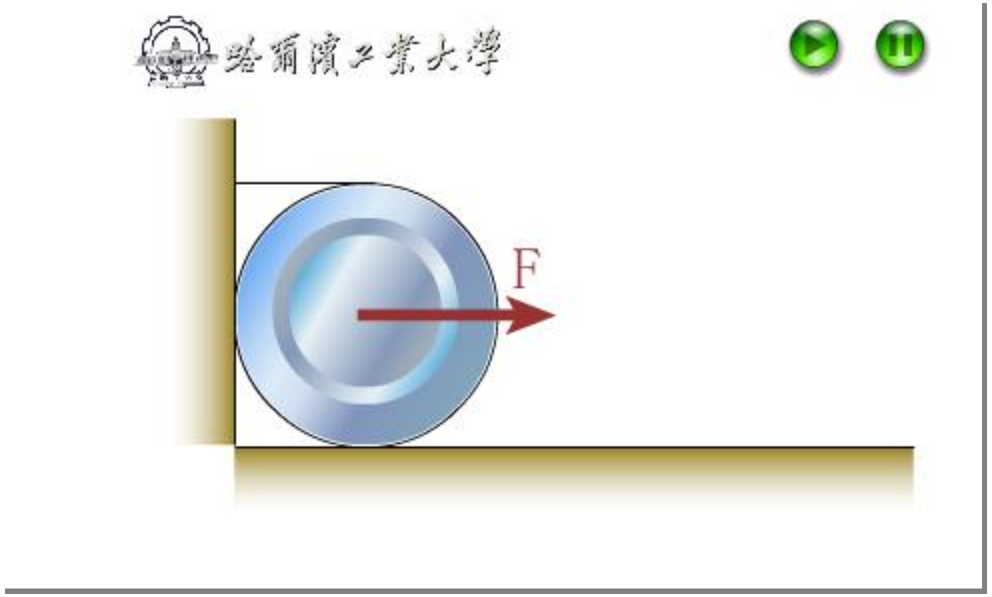
$$\alpha_k = \frac{W_k}{A}$$

冲击韧度：衡量材料抵抗冲击能力的指标。

例2

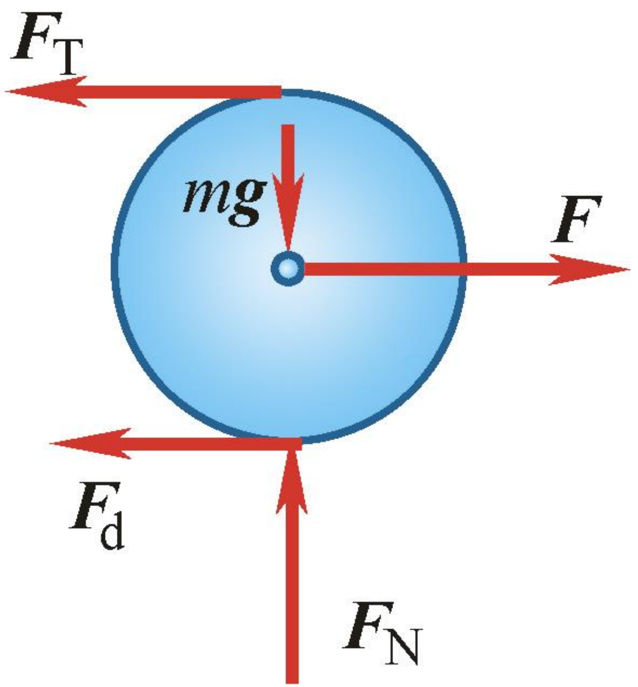
已知:均质圆盘R ,m ,F=常量,且很大,使O 向右运动, 动滑动摩擦因数为f ,初始静止。

求:O 走过S 路程时ω，α 。



解： 分析圆盘，受力如图所示，

圆盘速度瞬心为C



$$T_1 = 0 \qquad v_o = \omega R$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\omega^2 = \frac{3}{4} m v_o^2$$

$$\sum W = Fs - 2mgfs \qquad \sum W = T_2 - T_1$$

$$F\,s - 2mgfs = \frac{3}{4} m v_o^2 \qquad (a) \qquad v_o = 2\sqrt{\frac{s}{3m}(F - 2mgf)}$$

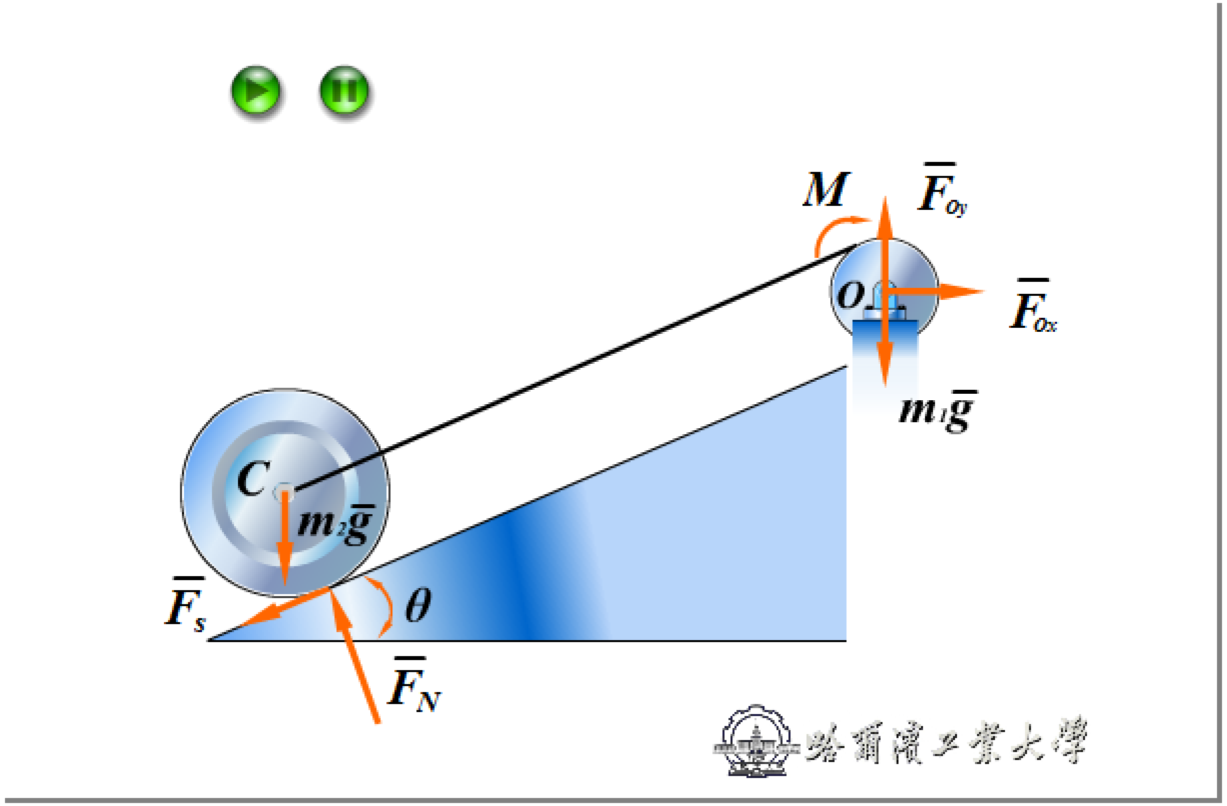
将式(a)两端对t求导

$$\text{得} \quad a_o = \frac{2}{3m}(F - 2mgf)$$

例3

已知：轮O：R_1，m_1，质量分布在轮缘上；均质轮C：R_2，m_2，纯滚动，初始静止；θ，M 为常力偶。

求：轮心C 走过路程s 时的速度和加速度



解: 分析轮C与轮O整体，受力如图所示。

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_1 R_1^2)\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_c^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2 R_2^2)\omega_2^2 \qquad \omega_1 = \frac{v_C}{R_1}, \omega_2 = \frac{v_C}{R_2}$$

$$W_{12} = M\varphi - m_2 g s \sin\theta \qquad W_{12} = T_2 - T_1$$

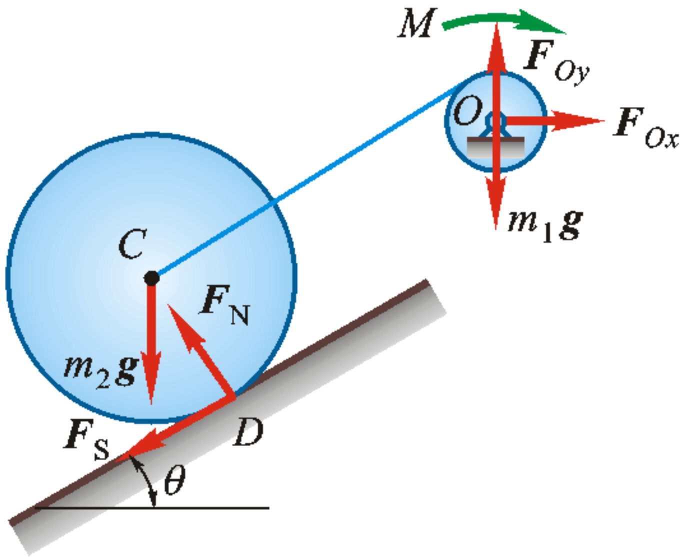
$$M\varphi - m_2 g s \sin\theta = \frac{v_C^2}{4}(2m_1 + 3m_2) \qquad (a)$$

$$\varphi = \frac{s}{R_1} \qquad v_C = 2\sqrt{\frac{(M - m_2 g R_1 \sin\theta)s}{R_1(2m_1 + 3m_2)}}$$

式(a)是函数关系式，两端对t求导，得

$$\frac{1}{2}(2m_1 + 3m_2)v_C a_C = M\frac{v_C}{R_1} - m_2 g v_C \sin\theta$$

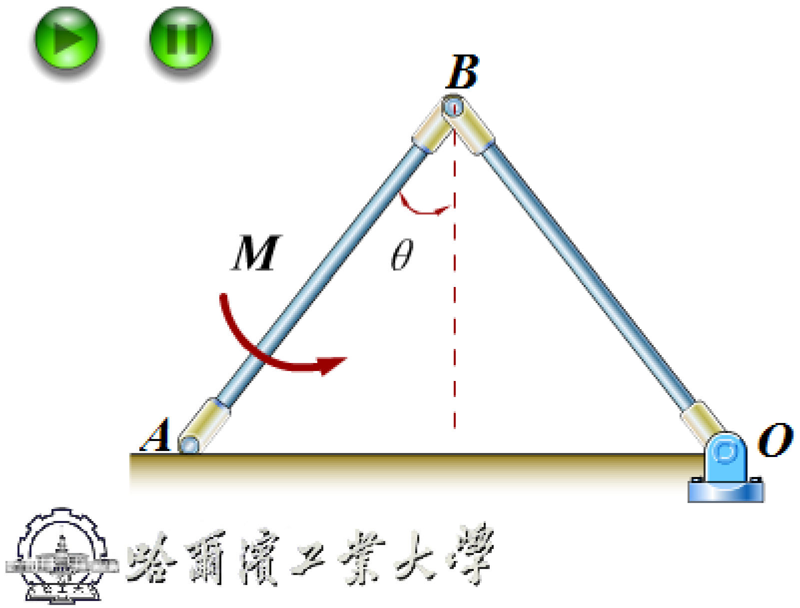
$$a_C = \frac{2\ \ (M - m_2 g R_1 \sin\theta)}{(2m_1 + 3m_2)R_1}$$



例4

已知：均质杆$OB=AB=l$，m，在铅垂面内；M=常量，初始静止，不计摩擦.

求：当A运动到O点时，$v_A=?$



解: 分析整体。 $T_1 = 0$

$$\upsilon_C = \omega_{AB} C'C = \frac{3}{2} l\omega_{AB} \quad \omega_{AB} = \frac{v_B}{l}, \omega_{OB} = \frac{v_B}{l}$$

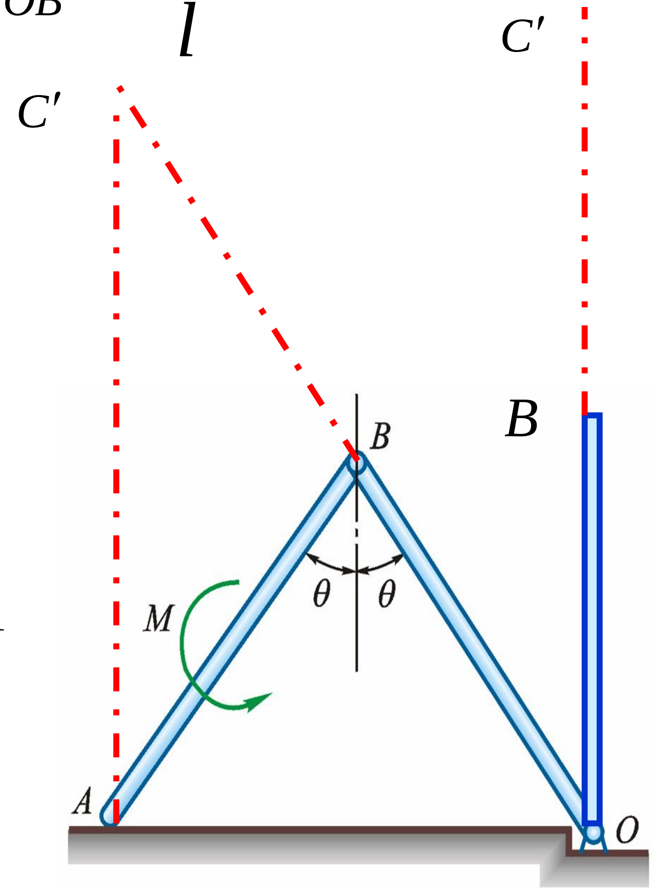
$$\omega_{AB} = \omega_{OB}$$

$$T_2 = T_{AB} + T_{OB} = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$$+ \frac{1}{2} J_C \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_{OB}^2 = \frac{4}{3} m l^2 \omega_{AB}^2$$

$$\sum W = M\theta - 2mg(1-\cos\theta)\frac{l}{2} \quad \sum W = T_2 - T_1$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3}{m}\left[M\theta - mgl(1-\cos\theta)\right]} \quad v_A = \omega_{AB}\, 2l$$



提问： 是否可以利用求导求此瞬时的角加速度？