2、力对点的矩和力对轴的矩

（1）空间力对点的矩（力矩矢）

力F对O点的矩取决于三要素：

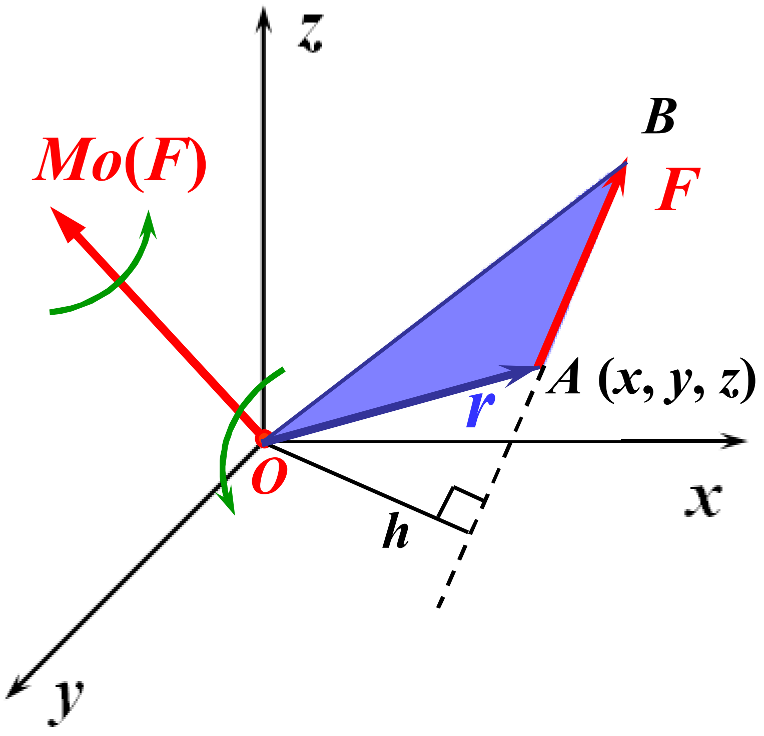
a 大小：

力矩作用面内，力F与力臂的乘积.

b 转向：

力矩作用面内，力F使物体绕O点的转动方向.

c 力矩作用面.



三要素可由 $r\times F$ 表示

空间力对点的矩以矢量表示 —— 力矩矢

$$M_O(F)=r\times F$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

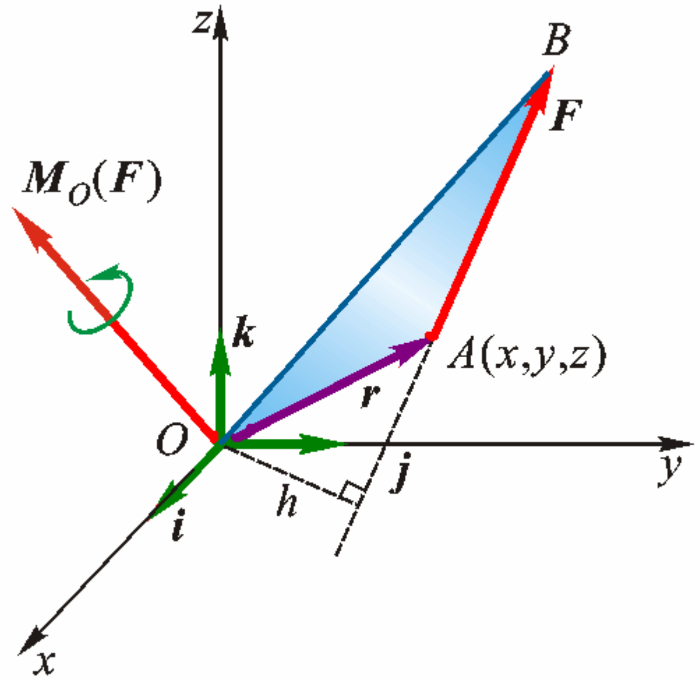
$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

⇒ 力对点 O 的矩在三个坐标轴上的投影为

$$[M_O(\boldsymbol{F})]_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y$$

$$[M_O(\boldsymbol{F})]_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z$$

$$[M_O(\boldsymbol{F})]_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$



空间力对点的矩的性质：

a、力沿其作用线移动，不改变它对点的矩

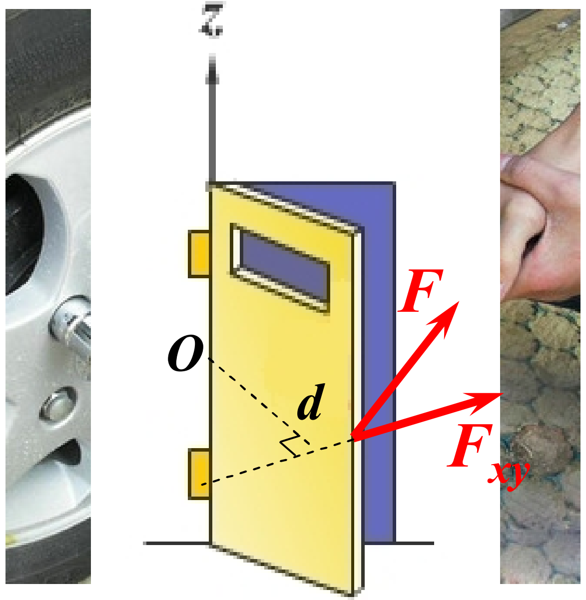
b、力的作用线过矩心时，力矩为零

c、力对点的矩和矩心的位置有关(定位矢量)

注意：平面力对一点的矩是空间力对点的矩的特殊情况，人们为了计算方便而单独给出了定义，完全可以通过空间力对点的矩来计算。

（2）空间力对轴的矩

度量某一物体绕某轴转动状态的改变

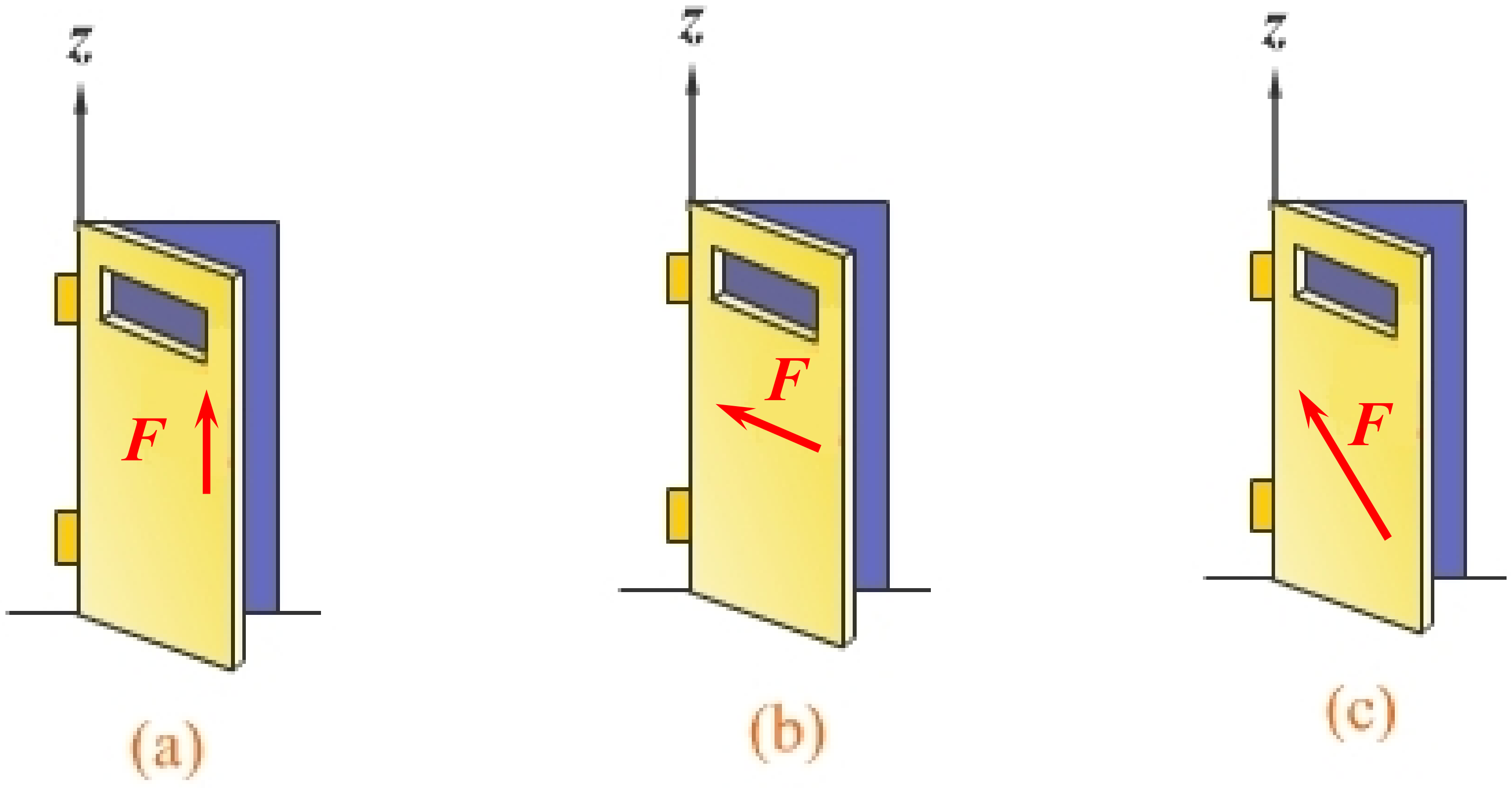


定义：力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效应的度量，是一个代数量。

大小：

正负：

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot d$$



当力与轴相交或与轴平行时，力对该轴的矩为零.

或者说当力的作用线与轴在同一平面内时，力对该轴的矩等于零.

(3) 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

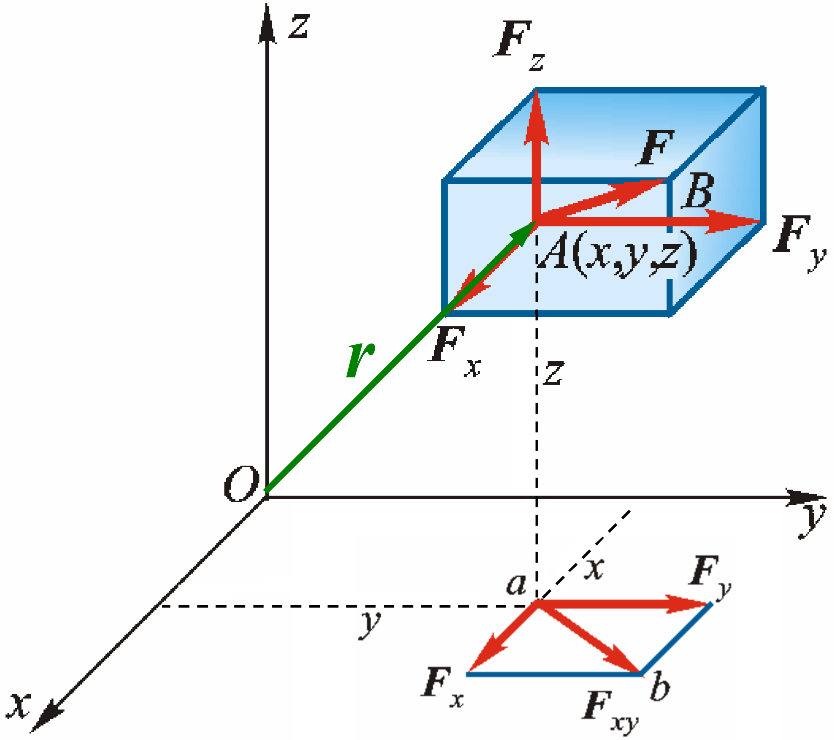
$$\boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$

$$\boldsymbol{M}_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$

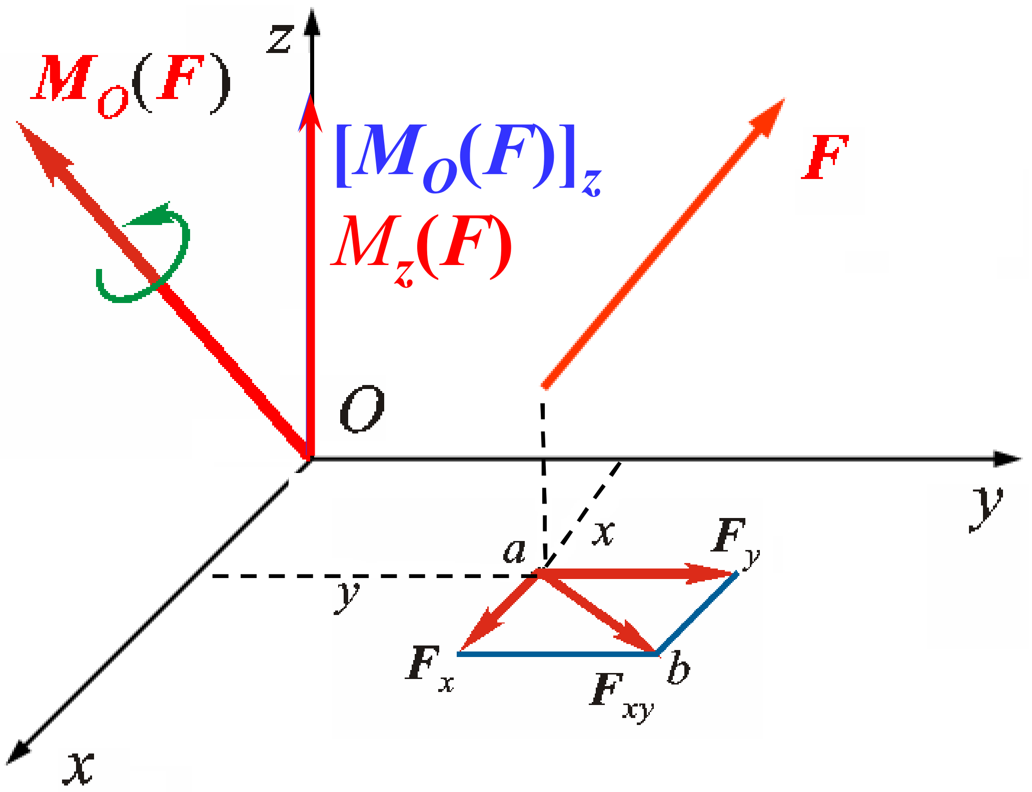
$$\left[M_O(\boldsymbol{F})\right]_x = yF_z - zF_y = M_x(\boldsymbol{F})$$

$$\left[M_O(\boldsymbol{F})\right]_y = zF_x - xF_z = M_y(\boldsymbol{F})$$

$$\left[M_O(\boldsymbol{F})\right]_z = xF_y - yF_x = M_z(\boldsymbol{F})$$



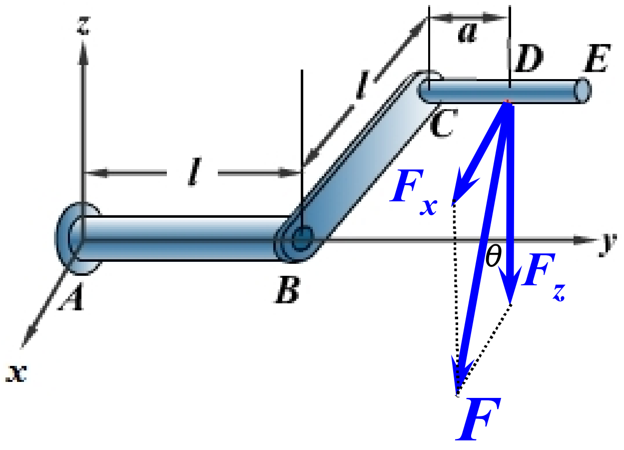
力对点的矩矢量在通过该点的某轴上投影，等于力对该轴的矩。



简单地说，力矩在某轴上的投影等于力对该轴的矩

例2 摇手*ABCD*在*Axy*平面内，*D*点在垂直于*y*轴的平面内受力*F*与竖直方向成 θ 角，摇手尺寸*l*，*a*已知。

求：*F* 对*A*点的力矩。



解：把力*F*分解如图

$$M_x(\boldsymbol{F}) = -F_z(l+a) = -F\cos\theta\cdot(l+a)$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = -F_z\cdot l = -F\cos\theta\cdot l$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = -F_x(l+a) = -F\sin\theta\cdot(l+a)$$

由力对点的矩和力对轴的矩的关系，得到：

$$\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

$$= -F\cos\theta(l+a)\boldsymbol{i} - Fl\cos\theta\,\boldsymbol{j} - F\sin\theta(l+a)\boldsymbol{k}$$