单自由度系统的自由振动理论

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

本讲主要内容

1、单自由度系统的自由振动

2、计算固有频率的能量法

3、单自由度系统的有阻尼自由振动

1、单自由度系统的自由振动

（1）自由振动微分方程

工程中许多振动问题可以简化为一个简单的弹簧质量系统。

假设弹簧的原长为l_0，刚度系数为k。

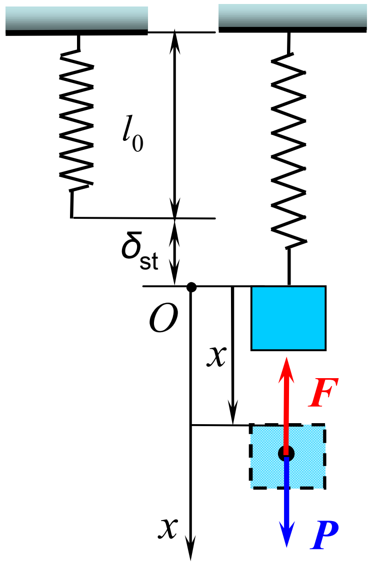
在质量块的重力$P=mg$的作用下，弹簧的变形为 δ_{st}, 称为静变形，这一位置为平衡位置。

平衡时重力P与弹性力F大小相等，即$P=k\delta_{st}$，由此得到：

$$\delta_{st} = P/k$$

取重物的平衡位置O为坐标原点，取x 轴的正向铅垂向下。

分析重物在任意位置x处的受力情况，有：



$$F = k\delta = k(\delta_{st} + x)$$

其运动微分方程为：$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P - F = P - k(\delta_{st} + x)$$

代入$\delta_{st}=P/k$，得到：$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

物体偏离平衡位置于坐标x处将受到与偏离距离成正比而与偏离方向相反的合力，称之为恢复力。

只在恢复力作用下维持的振动称为无阻尼自由振动。

如果将运动微分方程两端除以质量m，并假设 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ ，则会得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0$$

——无阻尼自由振动微分方程的标准形式

解的形式为：$x=e^{rt}$　　其中r为待定常数。

代入微分方程中，并消去公因子e^{rt}，得到本征方程：$r^2+\omega_0^2=0$

本征方程的两个根分别为：$r_1=+\mathrm{i}\omega_0$　$r_2=-\mathrm{i}\omega_0$

显然，它们互为两个共轭虚根。

由此得到微分方程的解为：$x=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t$

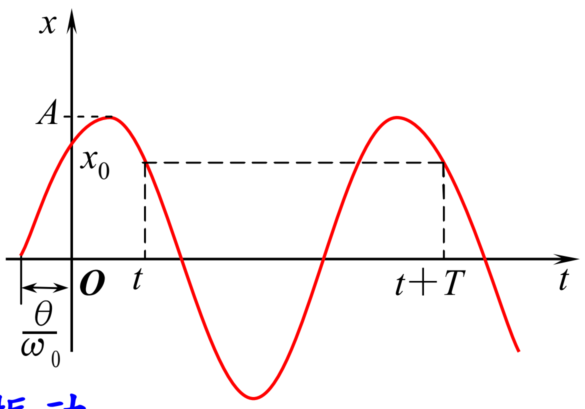
其中C_1和C_2是积分常数，由运动的初始条件确定。

令　$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$　　$\tan\theta=\dfrac{C_1}{C_2}$

则解可以写成：

$$x=A\sin(\omega_0t+\theta)$$

无阻尼自由振动是简谐振动。



（2）无阻尼自由振动的特点

① 固有频率

若运动规律$x(t)$可写为 $x(t)=x(t+T)$ —周期振动

T为常数，称为周期，单位为s。表示运动经过时间T后又重复原来的运动。

由无阻尼自由振动的解 $x=A\sin(\omega_0 t+\theta)$ 可知其角度周期为2π，所以

$$[\omega_0(t+T)+\theta]-(\omega_0 t+\theta)=2\pi$$

由此得到自由振动周期为：$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\Rightarrow$ $\omega_0=2\pi\dfrac{1}{T}=2\pi f$

其中 $f=\dfrac{1}{T}$ 称为振动的频率，表示每秒钟的振动次数，单位一般为Hz。

由假设 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ 知：$\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

ω_0只与表征系统本身特性的质量m和刚度k有关，而与运动的初始条件无关,它是振动系统的固有特性。

所以称ω_0为固有角(圆)频率，一般也称为固有频率。

将$m=P/g$, $k=P/\delta_{st}$代入ω_0的表达式得到：$\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{\delta_{st}}}}$

对于弹簧质量系统，只要知道重力作用下的静变形，就可求得系统的固有频率。

② 振幅与初相角

谐振表达式 $x = A\sin(\omega_0 t + \theta)$ 中，A表示相对于振动中心点O的最大位移，称为振幅。$(\omega_0 t + \theta)$称为相位(或相位角)，决定了质点在某瞬时t的位置。

θ称为初相角，它取决于质点的初始运动位置。

自由振动中的振幅A和初相角θ是两个待定常数，它们由运动的初始条件确定。

设$t=0$时， $x = x_0 \quad v = v_0$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \theta) \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

代入初始条件得到： $x_0 = A\sin\theta \qquad v_0 = A\omega_0 \cos\theta$

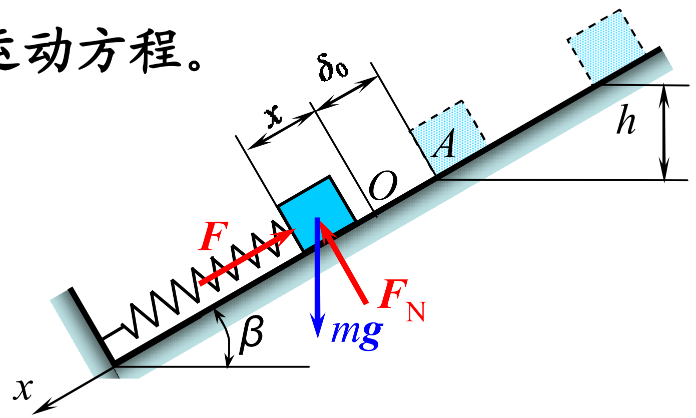
于是得到振幅A和初相角θ的表达式为：

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \qquad \tan\theta = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$$

可发现，自由振动中的振幅和初相角都与运动的初始条件有关。

例1 已知质量为$m=0.5$kg 的物体沿光滑斜面无初速度滑下。当物块下落高度h=0.1m时，撞于无质量的弹簧上，并与弹簧不再分离，弹簧刚度系数k=0.8kN/m, 倾角β=30°。

求：此系统振动的固有频率和振幅，并给出物块的运动方程。



解：物块自位置A处碰上弹簧，当物块平衡时，由于斜面的影响，弹簧的变形量为：

$$\delta_0 = \frac{mg\sin\beta}{k}$$

以平衡位置O为原点，分析物块在任意位置x处的受力。

沿x轴的运动微分方程为： $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg\sin\beta - k(\delta_0 + x)$$

代入δ_0得到： $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

通解为： $$x = A\sin(\omega_0 t + \theta)$$

固有频率 $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.8\text{N/m}\times1000}{0.5\text{kg}}} = 40\text{rad/s}$$ 可见固有频率与斜面倾角无关。

当物块刚碰上弹簧时，取时间t=0作为振动的起点，此时物体的坐标即为初位移

$$x_0 = -\delta_0 = -\frac{0.5\text{kg}\times 9.8\text{m/s}^2 \times \sin 30^\circ}{0.8\text{N/m}\times 1000} = -3.06\times 10^{-3}\text{ m}$$

当物块刚碰上弹簧时，初始速度为：

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9.8\text{m/s}^2 \times 0.1\text{m}} = 1.4\text{m/s}$$

代入振幅A和初相角θ的表达式 $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}$ $\tan\theta = \dfrac{\omega_0 x_0}{v_0}$

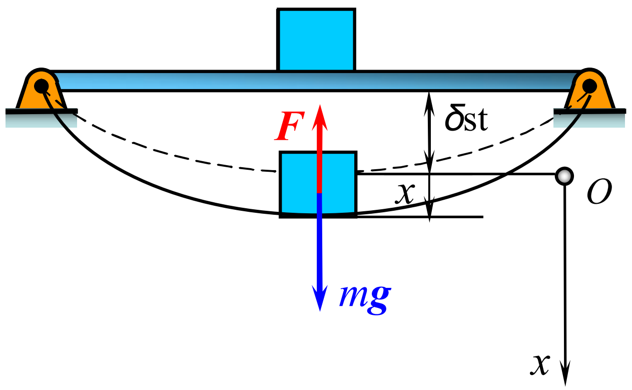
得到： $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 35.1\textbf{mm}$ $\theta = \arctan\dfrac{\omega_0 x_0}{v_0} = -0.087\text{rad}$

代入通解，得到物块的运动方程为：

$$x = 35.1\sin(40t - 0.087)$$ $(t\sim\text{s},\ x\sim\text{mm})$

例2 已知如图所示无重弹性梁，当中部放置质量m的物块时其静挠度为2mm，若将此物块在梁未变形位置无初速释放。

求：此系统的振动规律。



解：无重弹性梁相当于一弹簧，其静挠度相当于弹簧的静伸长，则梁的刚度系数为：

$$k=\frac{mg}{\delta_{\mathrm{st}}}$$

取其平衡位置为坐标原点，x轴方向铅直向下。

分析物块在任意位置x处的受力。

$$F=k(\delta_{st}+x)$$

物块的运动微分方程为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mg-F=mg-k(\delta_{st}+x)=-kx$$

设 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0$

通解为： $x=A\sin(\omega_0 t+\theta)$

固有频率 $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = 70\text{rad/s}$$

在初瞬时**t=0**，物块位于未变形的梁上，其初位移 $x_0 = -\delta_{st} = -2\text{mm}$

初速度v_0=0.

代入振幅A和初相角θ的表达式 $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$ $\tan\theta = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$

得到:

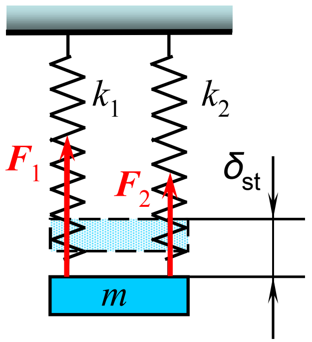
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = 2\textbf{mm}$$

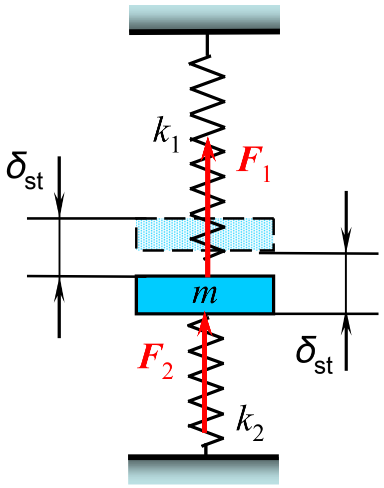
$$\theta = \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_0} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

代入通解，得到物块的自由振动规律为:

$$x = 2\sin(70t - \frac{\pi}{2}) = -2\cos(70t)$$ (t~s, x~mm)

（3）弹簧的并联与串联





① 弹簧并联

两种并联模式下皆有：$F_1 = k_1\delta_{st}, F_2 = k_2\delta_{st}$

在平衡时有： $mg = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)\delta_{st}$

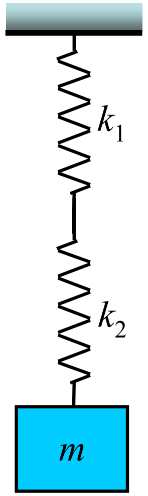
令 $k_{eq} = k_1 + k_2$ $\quad k_{eq}$—等效弹簧刚度系数

上式可写成： $mg = k_{eq}\delta_{st}$ ⇨ $\delta_{st} = mg / k_{eq}$

得到固有频率：$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

当两个弹簧并联时，其等效弹簧刚度系数等于两个弹簧刚度系数的和。

② 弹簧串联



串联模式下有：$\delta_{st1} = \dfrac{mg}{k_1}$， $\delta_{st2} = \dfrac{mg}{k_2}$

总的净伸长为：$\delta_{st} = \delta_{st1} + \delta_{st2} = mg(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2})$

若设串联弹簧系统的等效弹簧刚度系数为k_{eq}，则有 $\delta_{st} = mg / k_{eq}$

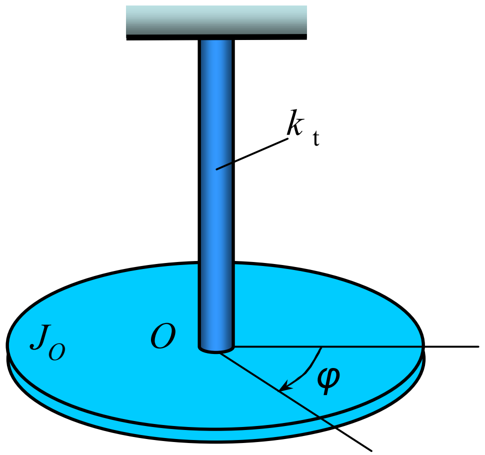
得：$\dfrac{1}{k_{eq}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ 或 $k_{eq} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ $\quad$ 固有频率：$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$

两个弹簧串联时，其等效弹簧刚度系数的倒数等于两个弹簧刚度系数倒数的和。

（4）他类型的单自由振动系统

扭振系统

扭转刚度系数为k_t，表示使圆盘产生单位扭转角所需的力矩。



圆盘转动的微分方程为:

$$J_O \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -k_t\varphi$$

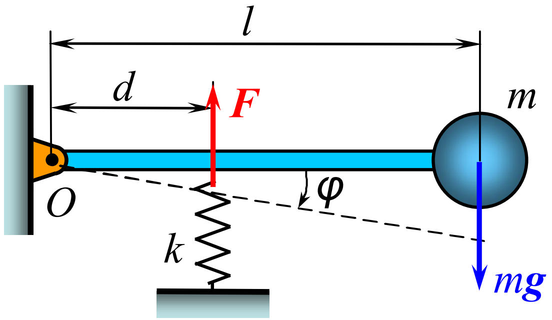
令 $\omega_0^2 = \dfrac{k_t}{J_O}$ 则上式可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\varphi = 0$$

可见与弹簧质量块组成的振动系统的运动微分方程具有相同的形式。其振动形式也是简谐振动，只不过此处位移参数不是线位移而是角位移。

例3 图为一摆振系统，杆重不计球质量为m。摆对轴O的转动惯量为J，弹簧刚度系数为k，各部分位置尺寸如图，杆于水平位置平衡。

求：此系统微小振动的运动微分方程及振动固有频率。



解：摆于水平位置平衡时，弹簧已有压缩量 δ_0

由平衡方程 $\sum M_O(F_i)=0$ 得：

$$mgl = k\delta_0 d \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = \frac{mgl}{kd}$$

以平衡位置为原点，摆过任一小角度φ，弹簧压缩量为 $\delta_0+\varphi d$, 分析系统受力

摆绕轴O的转动微分方程为：

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = mgl - k(\delta_0+\varphi d)\cdot d$$

代入 δ_0 得到：

$$\boxed{J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -kd^2\varphi}$$

该摆振系统的固有频率为

$$\boxed{\omega_0 = d\sqrt{\frac{k}{J}}}$$