

物体系的平衡·静定和超静定问题

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组



本讲主要内容

- 1、物体系的平衡，静定和超静定的概念
- 2、物体系的平衡问题练习
- 3、平面简单桁架的内力计算

1、物体系的平衡，静定和超静定的概念

(1) 问题的引出

各种平面力系的平衡方程。 投影式、取矩式。

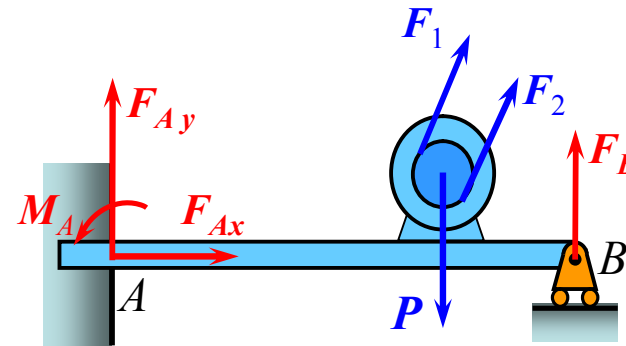
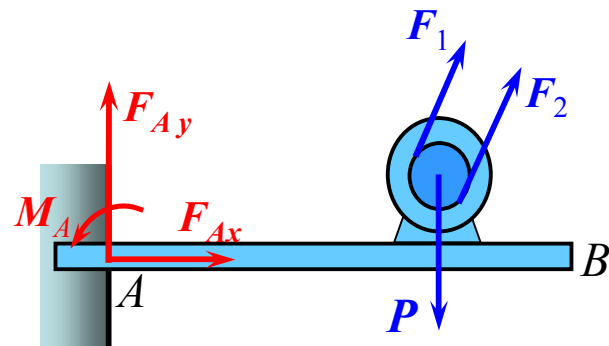
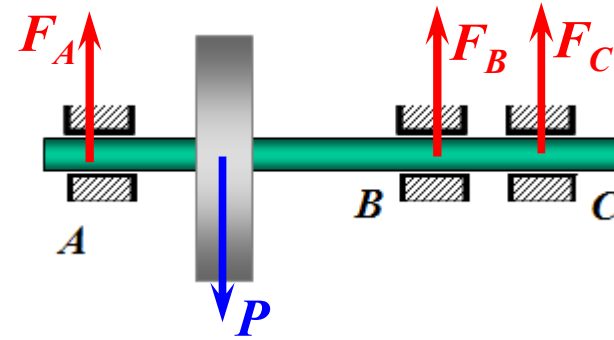
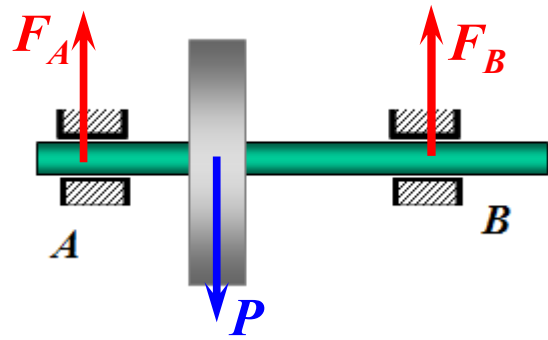
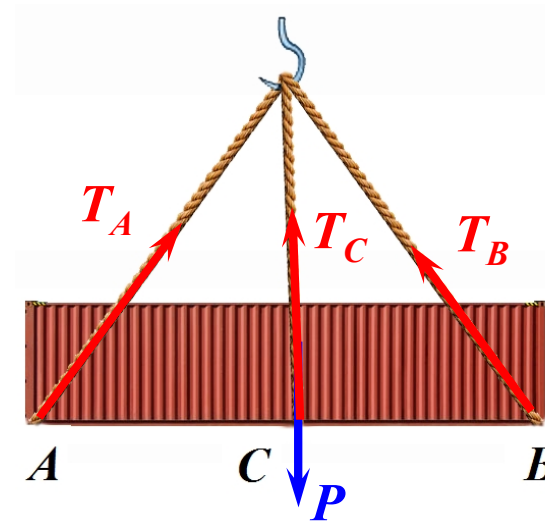
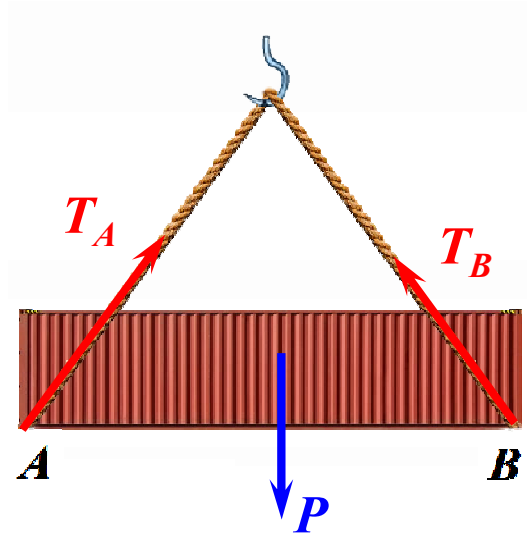
平衡力系对任意一点的力的投影之和等于零，力矩之和等于零。

可以列出无数个平衡方程。 可以求解无数个未知数？

- 平面任意力系， 3 个；
- 平面汇交力系， 2 个；
- 平面平行力系， 2 个；
- 平面力偶系， 1 个。

实际工程中，大多都是物体系的平衡。有的时候未知量的数目等于独立平衡方程的数目；但有的时候，为了使结构更加稳固，需要增加多余的约束使得未知量数目多于独立平衡方程数。

1、物体系的平衡，静定和超静定的概念

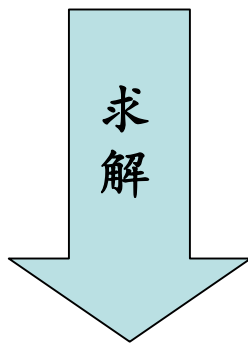


静定

未知量的数目等于独立的平衡方程数目时，全部未知量均可求出，这样的问题称为**静定问题**。

超静定 (静不定)

未知量的数目超过了独立平衡方程数目时，未知量不可全部求出，这样的问题称为**超静定（静不定）问题**。



除了平衡条件，还需加入变形条件(材料力学、结构力学)。

(2) 物体系的平衡问题及求解

有些实际工程中的物体系的平衡问题，要求解的未知量的数目多于物体系所在力系的独立平衡方程数，“**看起来**”像是超静定问题。但如果仔细分析，会发现它们仍然是静定问题，只是在求解时要用到一些技巧。

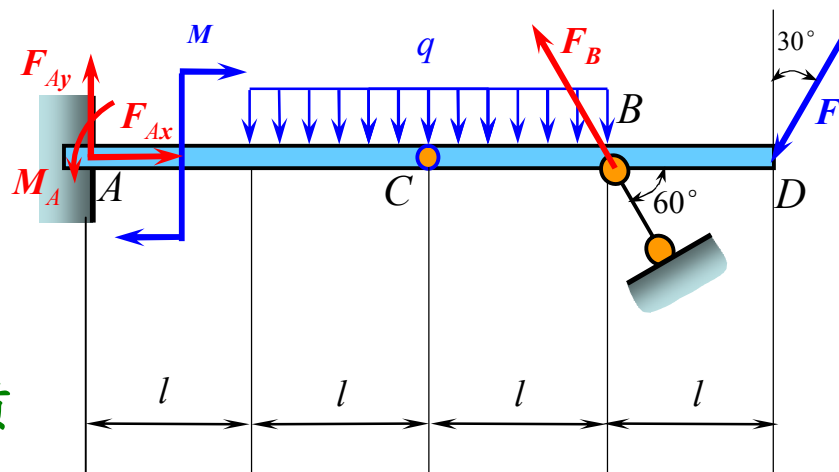
例1 无重组合梁由AC和CD在C处铰接而成。梁的A端插入墙内，B处用无重杆与基础相连。已知 $F=20\text{kN}$ ， $q=10\text{kN/m}$ ， $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$ ， $l=1\text{m}$ 。

求： A, B处的约束力。

分析：先画出系统所受的约束力。

平面任意力系，4个未知量，无法求解？

C点铰接这个因素（条件）没有考虑。把这个因素考虑进去再分析，会发现这实质上仍是一个静定问题。可以以C点为突破口来求解。



解：以 CD 为研究对象，画受力图。

$$\sum M_C = 0$$

$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F \cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow F_B = 45.77 \text{ kN}$$

先局部后整体的方法

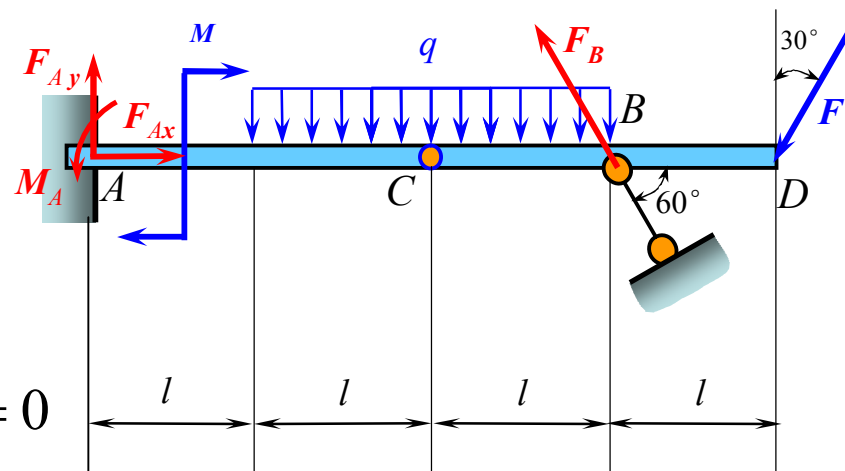
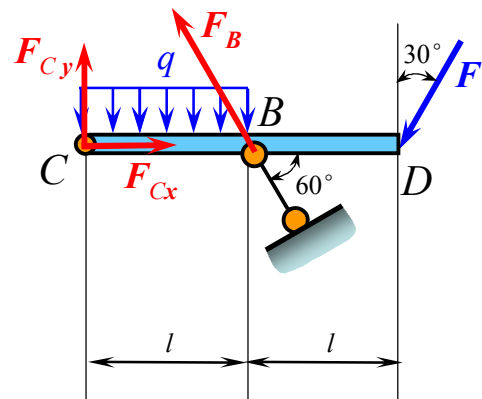
取整体为研究对象，画受力图。

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - F_B \sin 60^\circ - 2ql - F \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 10.37 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad F_{Ax} = 32.89 \text{ kN} \quad F_{Ay} = -2.32 \text{ kN}$$



例2 图示结构中，已知重物重力为 P ， $DC=CE=AC=CB=2l$ ，定滑轮半径为 R ，动滑轮半径为 r ，且 $R=2r=l$ ， $\theta=45^\circ$ 。试求 A 、 E 支座的约束力以及 BD 杆所受到的力。

解：解这类题时，应根据已知条件与待求未知量，选取适当的系统为研究对象，并列适当的平衡方程，尽量能使一个方程解出一个未知量。一般先分析整体。

(1) 取整体为研究对象，画出其受力图。

只有三个未知量，能够求解，列平衡方程：

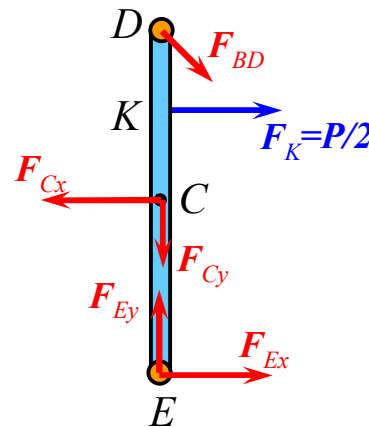
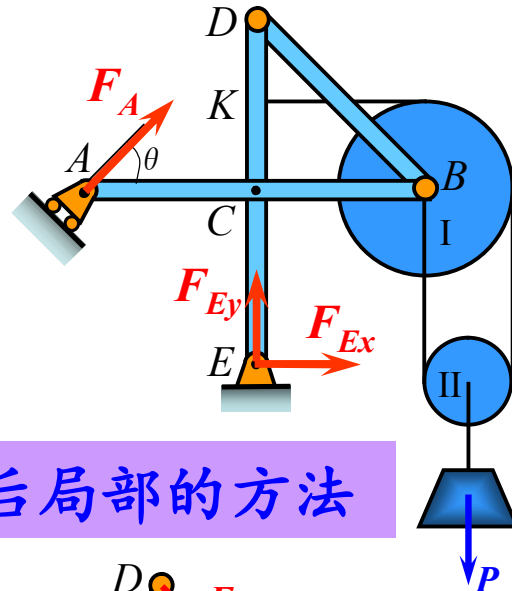
$$\sum M_E(F) = 0 \quad -2(F_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l) - P \frac{5}{2}l = 0$$

先整体后局部的方法

$$\sum F_x = 0 \quad F_A \cos 45^\circ + F_{Ex} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_A \sin 45^\circ + F_{Ey} - P = 0$$

$$\Rightarrow F_A = -\frac{5\sqrt{2}}{8}P \quad F_{Ex} = \frac{5}{8}P \quad F_{Ey} = \frac{13}{8}P$$



(2) 取 DE 杆为研究对象，画出其受力图。注意到只求 F_{BD} ，因此列平衡方程：

$$\sum M_C(F) = 0 \quad -F_{BD} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2l - F_K \cdot l + F_{Ex} \cdot 2l = 0 \Rightarrow F_{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{8}P$$