

2、空间任意力系的平衡方程及常见的空间约束

(1) 空间任意力系的平衡方程

空间任意力系平衡的充要条件：

该力系的主矢、主矩分别为零。

空间任意力系的平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

(基本式)

空间任意力系平衡的充要条件：力系中各力在任一坐标轴上的投影的代数和等于零，以及各力对每一个坐标轴的力矩的代数和也等于零。

空间任意力系的
平衡方程(基本式)

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

平衡方程除了基本式之外，还有四矩式、五矩式、六矩式。

有几个力矩平衡方程，称之为几矩式。

基本式以外的方程形式，通常不再给限定条件，一般的情况下只要列出的方程能求解出未知量即是未违反限制条件。

各种形式应该根据实际情况灵活运用。

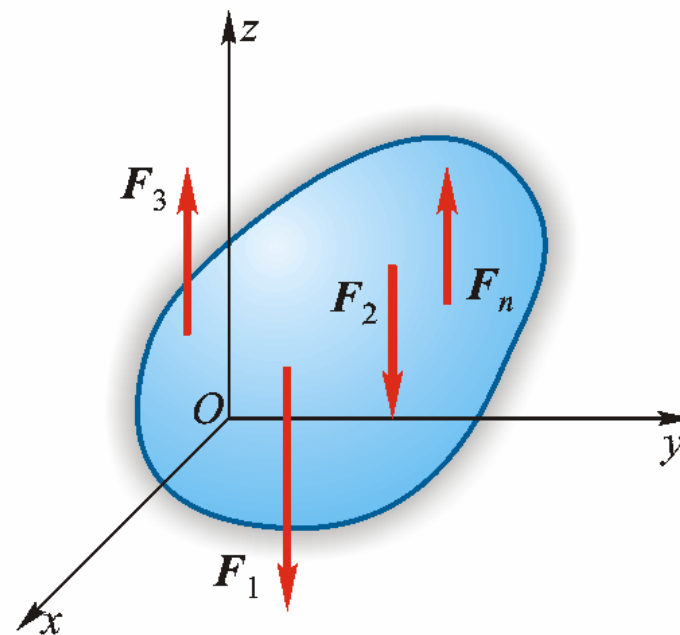
空间平行力系的平衡方程

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

三个方程，能求解三个独立的未知量。

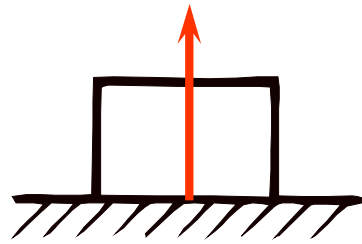


各种力系的独立平衡方程个数

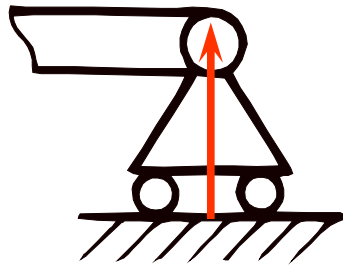
空间任意力系	6个	最一般情形：空间、任意
空间汇交力系	3个	一级特殊情形（包含一种特殊情况）：空间问题+特殊力系，或者任意力系+平面情形
空间平行力系	3个	
空间力偶系	3个	
平面任意力系	3个	
平面汇交力系	2个	二级特殊情形（包含两种特殊情况）：平面问题+特殊力系。
平面平行力系	2个	
平面力偶系	2(1)个	

(2) 空间常见约束类型

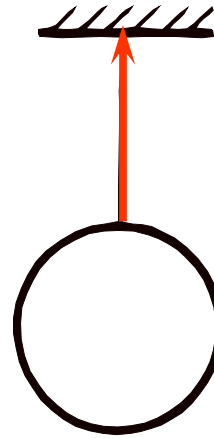
a. 1个未知约束量



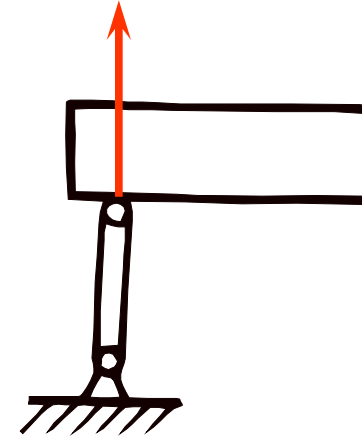
光滑表面



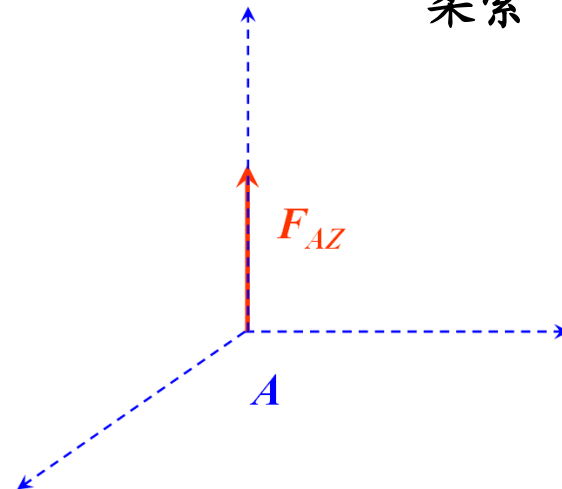
滚动支座



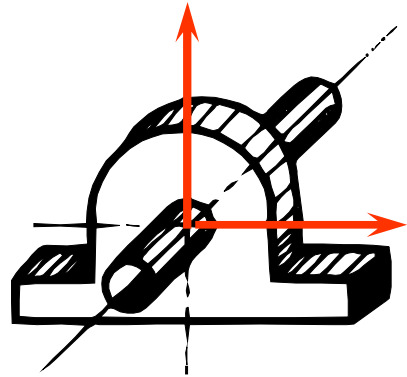
柔索



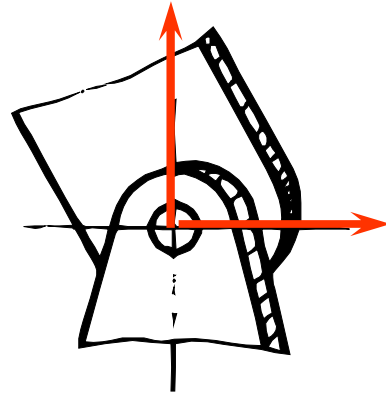
二力杆



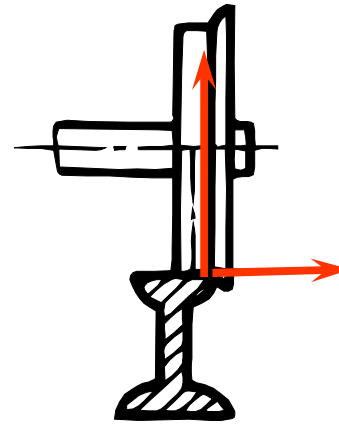
b. 2个未知约束量



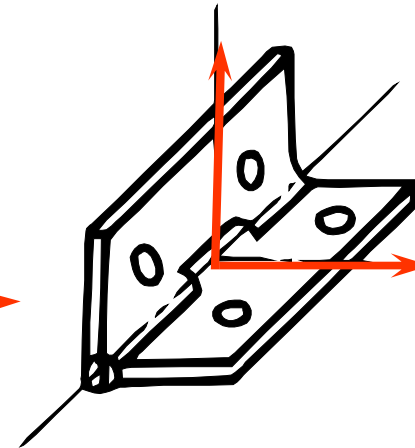
径向轴承



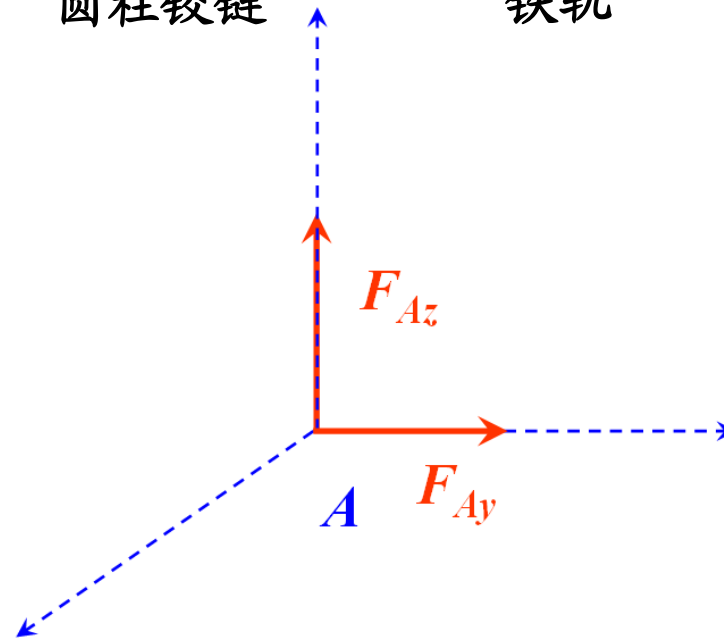
圆柱铰链



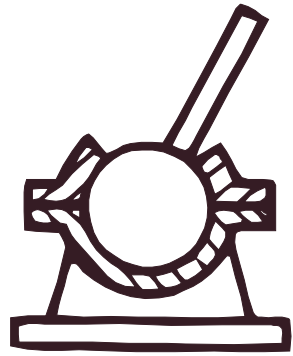
铁轨



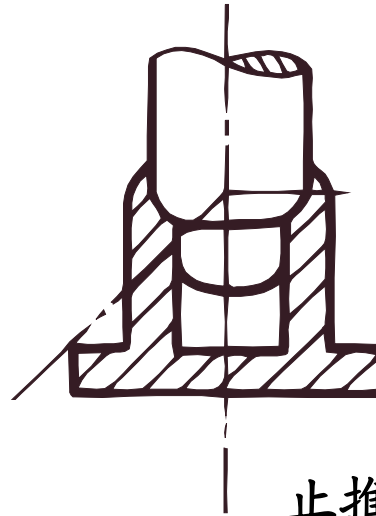
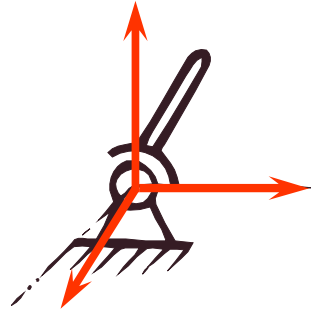
蝶铰链



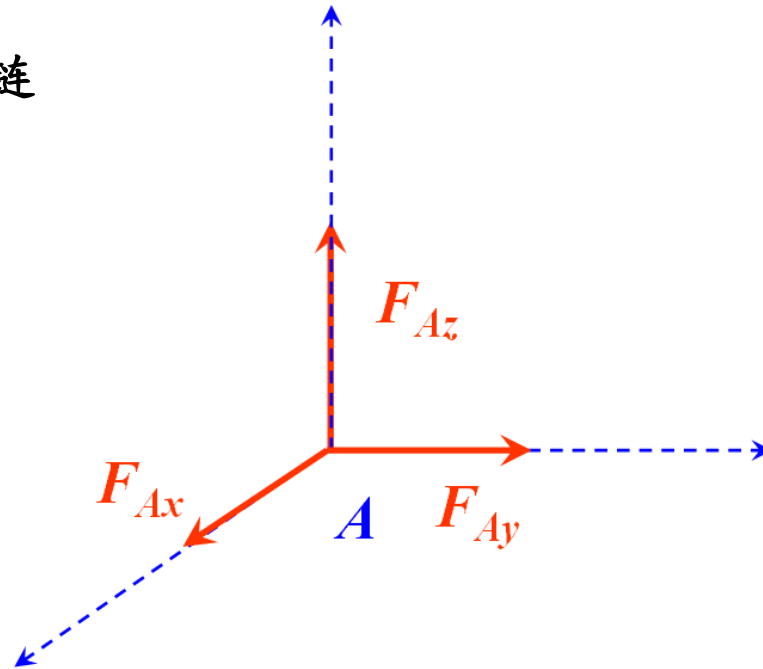
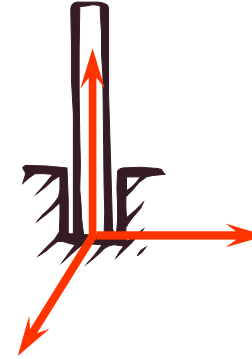
c. 3个未知约束量



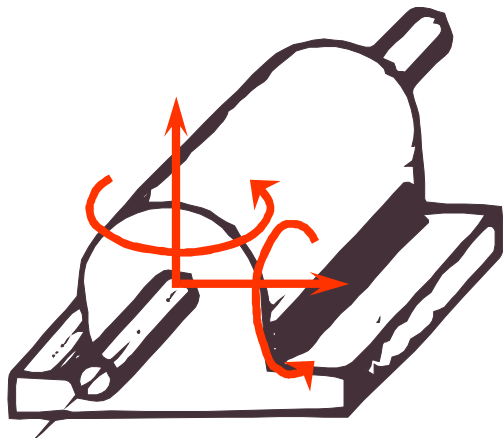
球铰链



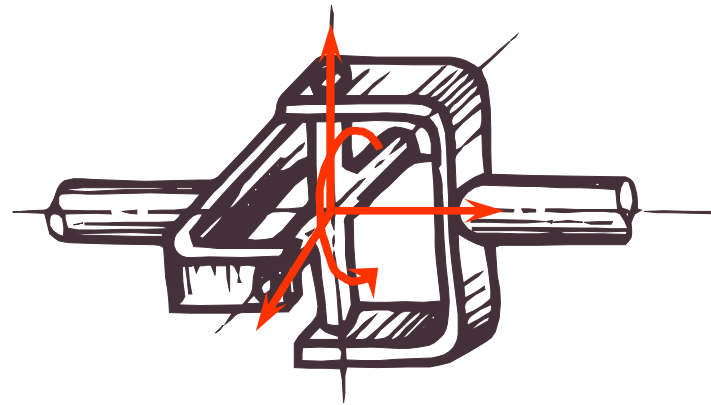
止推轴承



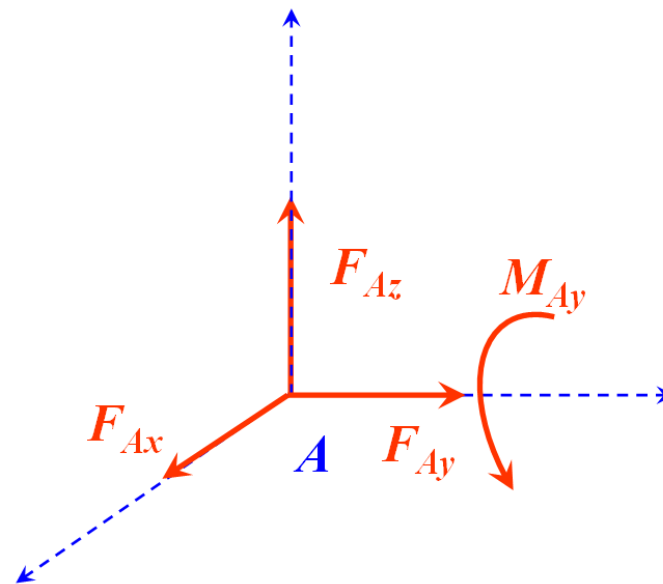
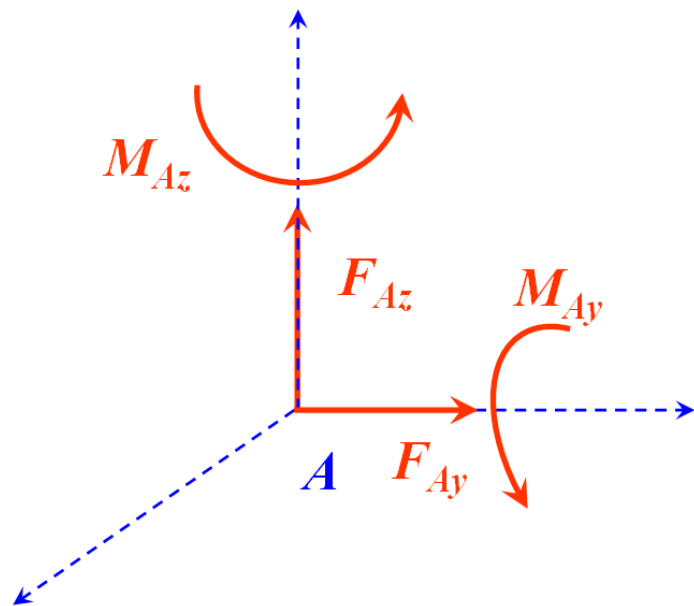
d. 4个未知约束量



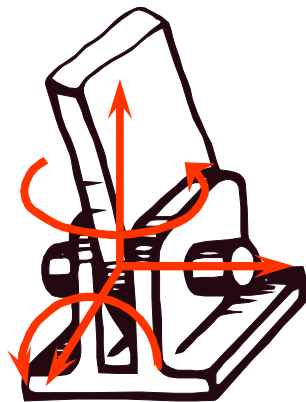
导向轴承



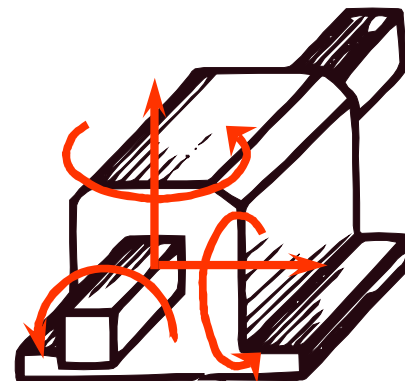
万向接头



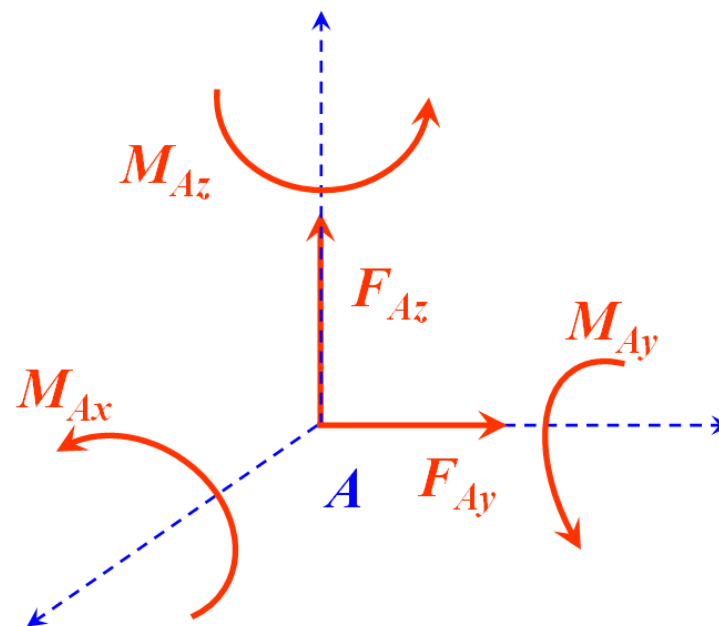
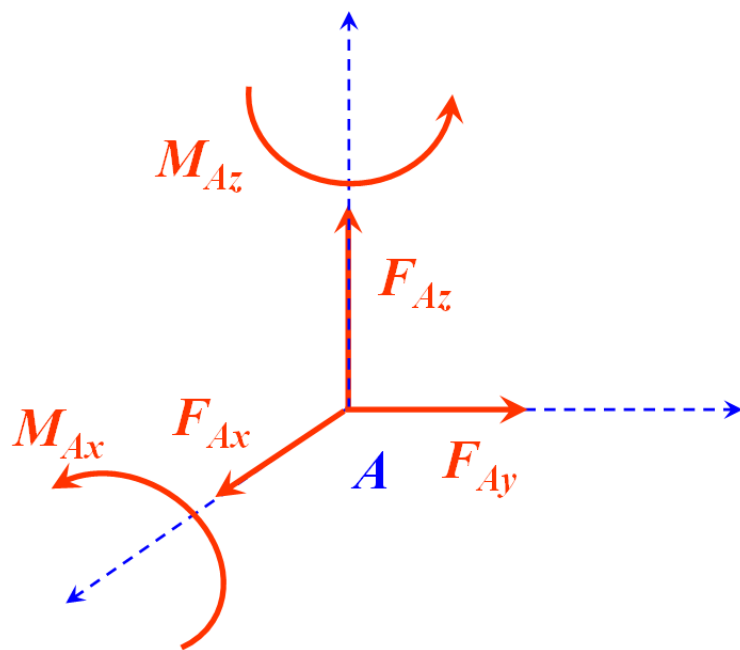
e. 5个未知约束量



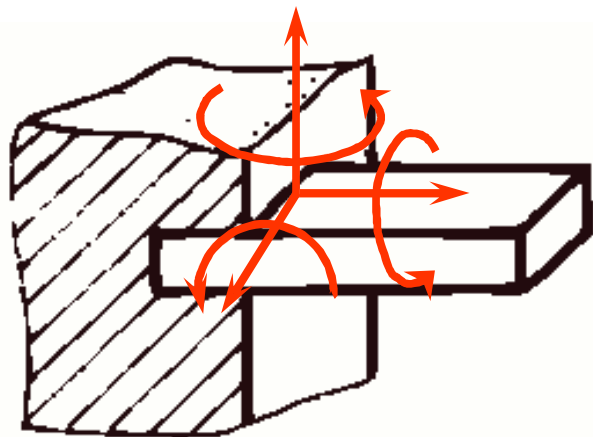
带有销子的夹板



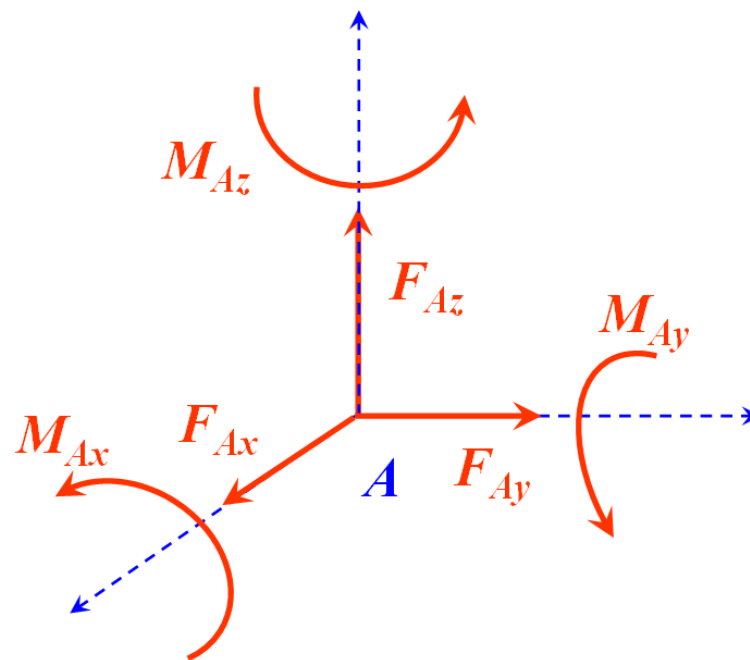
导轨



f. 6个未知约束量



空间固定端约束



分析实际的约束时，需要忽略一些次要因素，抓住主要因素，做一些合理的简化。比如导向轴承和径向轴承之间的区别；蝶铰链和止推轴承之间的区别。如果刚体只受平面力系的作用，则垂直于该平面的约束力和绕平面内两轴转动的约束力偶都应该为零，相应减少了约束量的数目。

例1 车床主轴如图所示，已知车刀对工件的切削力为：径向切削力 $F_x = 4.25\text{kN}$ ，纵向切削力 $F_y = 6.8\text{kN}$ ，主切削力(切向) $F_z = 17\text{kN}$ ，方向如图。在直齿轮C上有切向力 F_t 和径向力 F_r ，且 $F_r = 0.36F_t$ 。齿轮C的节圆半径 $R = 50\text{mm}$ ，被切削工件的半径 $r = 30\text{mm}$ ，卡盘及工件等自重不计，其余尺寸如图所示。当主轴匀速转动时。

求：(1) 齿轮啮合力 F_t 及 F_r ；(2) 径向轴承A和止推轴承B的约束力；(3) 三爪卡盘E在O处对工件的约束力。

解：(1) 取主轴及工件组成的整体为研究对象，分析受力。在 $Axyz$ 坐标系下，列平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Bx} - F_t + F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Bz} + F_r + F_{Az} + F_z = 0$$

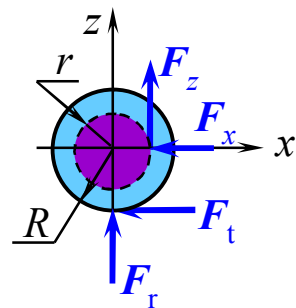
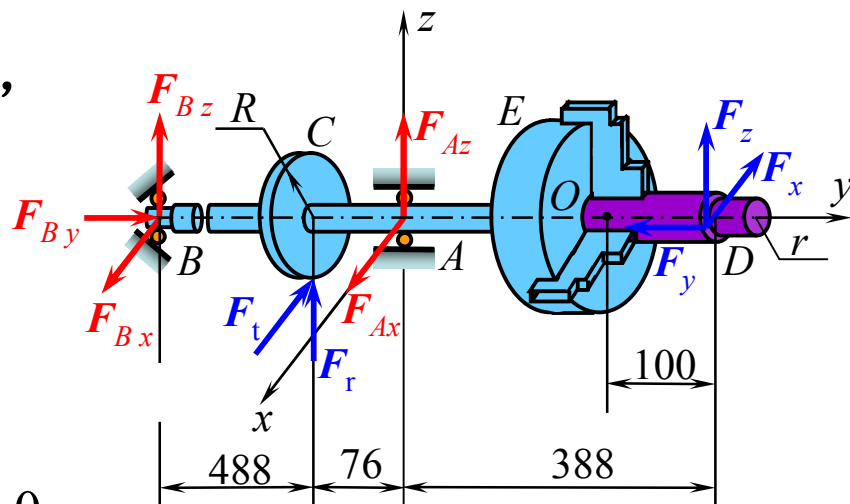
$$\sum M_x(F) = 0 \quad -(488 + 76)F_{Bz} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad F_t \cdot R - F_z \cdot r = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad (488 + 76)F_{Bx} - 76F_t + 388F_x - 30F_y = 0$$

$$\text{又: } F_r = 0.36F_t,$$

$$\begin{aligned} F_t &= 10.2\text{kN} & F_r &= 3.67\text{kN} & F_{Ax} &= 15.64\text{kN} \\ F_{Az} &= -31.87\text{kN} & F_{Bx} &= -1.19\text{kN} & F_{By} &= 6.8\text{kN} & F_{Bz} &= 11.2\text{kN} \end{aligned}$$



左视图 (从左往右看)

(2) 取工件为研究对象，建立 $Oxyz$ 坐标系，分析受力。

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} - F_x = 0$$

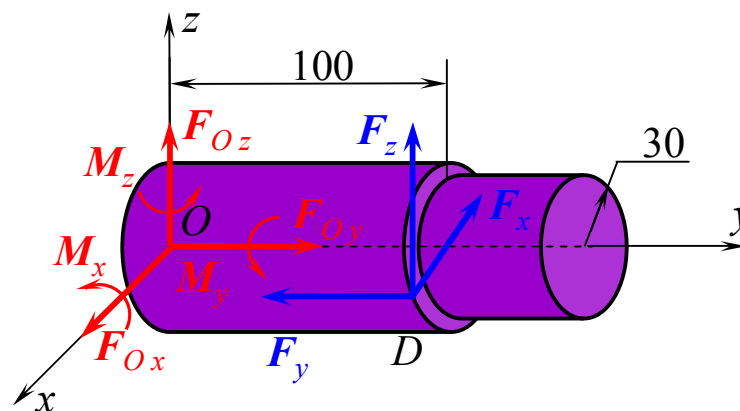
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad 100F_z + M_x = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad -30F_z + M_y = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad 100F_x - 30F_y + M_z = 0$$



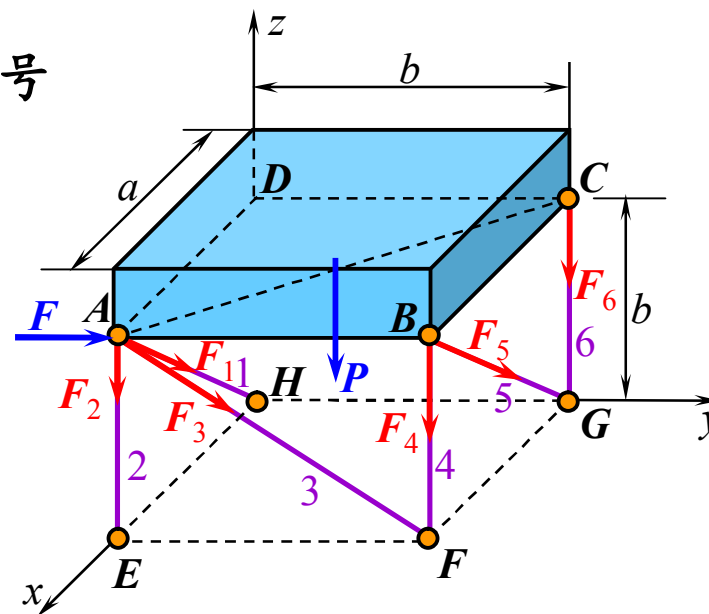
$$F_{Ox} = 4.25\text{kN}, F_{Oy} = 6.8\text{kN}, F_{Oz} = -17\text{kN}$$

$$M_x = -1.7\text{kN} \cdot \text{m}, M_y = 0.51\text{kN} \cdot \text{m}, M_z = -0.22\text{kN} \cdot \text{m}$$

空间任意力系有6个独立的平衡方程，可求解6个未知量，但其平衡方程不局限于本例的形式。为了使解题简便，每个方程中最好只包含一个未知量。为此，选投影轴时应尽量与其余未知力垂直；选取矩轴时应尽量与其余的未知力平行或相交。投影轴不必相互垂直，取矩轴也不必与投影轴重合，力矩方程的数目可取3个至6个。

例2 已知均质水平长方板重为 P ,用六根无重直杆支承,直杆两端各用球铰链与板和地面连接,板长宽分别为 b , a , 离地面高度为 b . A 点作用水平力 $F=2P$, 求各根杆的受力。

解: 取均质板为研究对象, 各杆均为二力杆, 编号如图。假设杆都受拉力, 分析板的受力。



$$\sum M_{AB}(F) = 0 \quad -F_6 \cdot a - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$F_6 = -\frac{P}{2}$$

$$\sum M_{AE}(F) = 0 \quad F_5 = 0$$

$$\sum M_{AC}(F) = 0 \quad F_4 = 0$$

$$\sum M_{BF}(F) = 0 \quad F_1 = 0$$

$$\sum M_{FG}(F) = 0 \quad Fb - P \cdot \frac{b}{2} - F_2 \cdot b = 0$$

$$F_2 = 1.5P$$

$$\sum M_{BC}(F) = 0 \quad -F_2 \cdot b - P \cdot \frac{b}{2} - F_3 \cos 45^\circ \cdot b = 0$$

$$F_3 = -2\sqrt{2}P$$