2、碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用

（1）定轴转动刚体受碰撞时角速度的变化

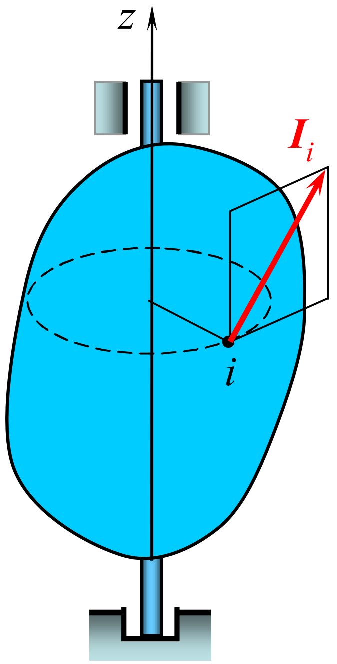
假设绕定轴转动的刚体受外碰撞冲量的作用，质点i受到冲量$\boldsymbol{I}_i$作用。

根据冲量矩定理在z轴上的投影形式，有：

$$L_{z2} - L_{z1} = \sum_{i=1}^{n} M_z(\boldsymbol{I}_i^{(e)})$$

假设碰撞前后刚体绕z轴转动的角速度分别为ω_1和ω_2，有：

$$J_z\omega_2 - J_z\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} M_z(\boldsymbol{I}_i^{(e)})$$



角速度的变化为：

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\sum M_z(\boldsymbol{I}_i^{(e)})}{J_z}$$

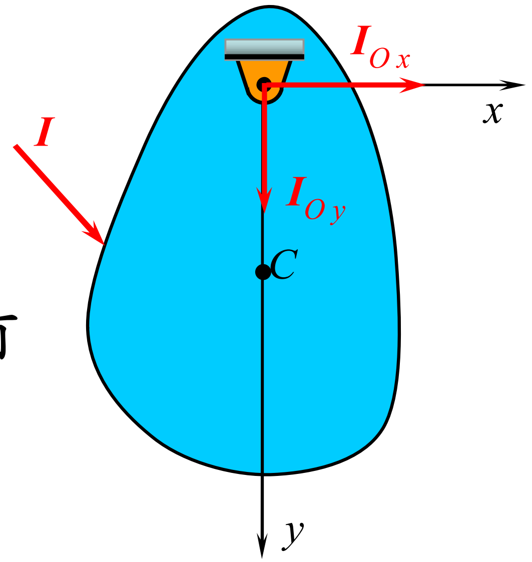
（2）支座的反碰撞冲量·撞击中心

假设刚体有质量对称平面，且绕垂直于此对称面的轴转动，刚体的质心C必然位于质量对称平面内。

外碰撞冲量$\boldsymbol{I}$作用于对称平面内，轴承的反碰撞冲量分量为I_{Ox}和I_{Oy}。

取Oy轴过质心，应用冲量定理有：

$$\begin{cases} mv'_{Cx} - mv_{Cx} = I_x + I_{Ox} \\ mv'_{Cy} - mv_{Cy} = I_y + I_{Oy} \end{cases}$$



如果图中位置是发生碰撞的位置，且轴承没有破坏，则有$v'_{Cy}=v_{Cy}=0$，则上式变成：

$$I_{Ox} = m(v'_{Cx} - v_{Cx}) - I_x\,,\quad I_{Oy} = -I_y$$

可见，在一般情况下，外碰撞冲量将在轴承处引起碰撞冲量。

但是，如果 $I_y=0$, 并且 $I_x=m(v'_{Cx}-v_{Cx})$，则显然有：$I_{Ox}=0\,,\quad I_{Oy}=0$

这意味着，如果外碰撞冲量作用在刚体质量对称平面内，并且满足以上两个条件时，轴承的反碰撞冲量等于零，即轴承处不发生碰撞！

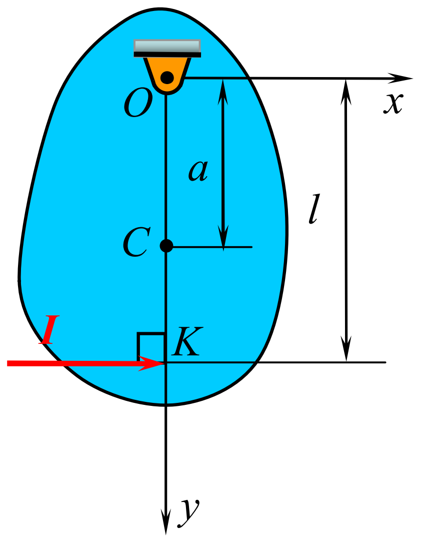
2、碰撞对绕定轴转动刚体的作用

• 由 $I_y=0$，即要求外碰撞冲量与y轴垂直，也就是说：碰撞冲量I必须垂直于支点与质心的连线。

• 由 $I_x=m(v'_{Cx}-v_{Cx})$，如果假设质心到轴O的距离为a，则：

$$I_x = ma(\omega_2 - \omega_1)$$

假设碰撞点K到轴O的距离为l.



代入角速度的变化量 $\omega_2 - \omega_1 = \dfrac{\sum M_z(I_i^{(e)})}{J_z}$ 得到：

$$ma\frac{Il}{J_z} = I \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{J_z}{ma}$$

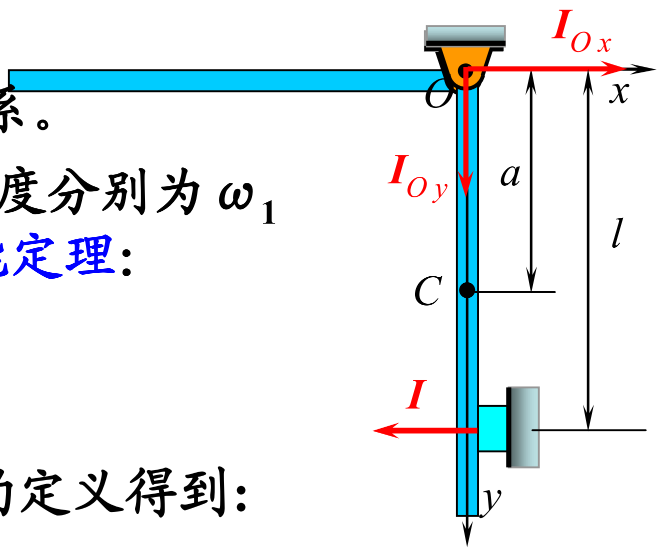
满足此条件的点K 称为撞击中心

当外碰撞冲量作用于物体质量对称平面内的撞击中心，且垂直于轴承中心与质心的连线时，在轴承处不引起碰撞冲量. 亦即轴承处不发生碰撞。

由上述结论可知，设计材料试验中用的摆锤式撞击机时，如果能将撞击点设计得正好位于摆的撞击中心，这样撞击时就不至于在轴承处引起碰撞力，能够降低基座的冲击力，延长设备使用寿命；使用各种锤子锤打东西或击打棒球时，若击打的地方正好是锤杆或棒杆的撞击中心，则手上不会感受到冲击。若击打的地方不是撞击中心的话，则手上会感受到强烈的冲击。

例4 均质杆质量为m，长为$2a$，其上端由圆柱铰链固定，杆由水平位置无初速地落下，撞上一固定的物块，设恢复因数为e.

求:（1）轴承的碰撞冲量;（2）撞击中心的位置。



解: 考虑杆与物块发生碰撞的时刻。建立图示坐标系。

杆在碰撞过程中做定轴运动，设碰撞前后杆的角速度分别为 ω_1 和 ω_2。碰撞前，杆自水平位置自由落下，应用动能定理:

$$\frac{1}{2}J_O\omega_1^2-0=mga \Rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{2mga}{J_O}}=\sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

撞击点碰撞前后的速度分别为v 和 v'，由恢复因数的定义得到:

$$e=\frac{v'}{v}=\frac{\omega_2 l}{\omega_1 l} \Rightarrow \omega_2=e\omega_1$$

由对点O的冲量矩定理:

$$J_O\omega_2+J_O\omega_1=Il$$

$$\Rightarrow I=\frac{4ma^2}{3l}(1+e)\omega_1$$

代入ω_1得:

$$I=\frac{2ma}{3l}(1+e)\sqrt{6ag}$$

杆在轴承处受到的冲量表示为I_{Ox}和I_{Oy}，由冲量定理:

$$m(-\omega_2 a-\omega_1 a)=I_{Ox}-I\ ,\quad I_{Oy}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{Ox}=(1+e)m\left(\frac{2a}{3l}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{6ag}}$$

当 $\frac{2a}{3l}-\frac{1}{2}=0$ 时，$I_{Ox}=0$

此时撞击点位于撞击中心，为: $\boxed{l=\frac{4a}{3}}$