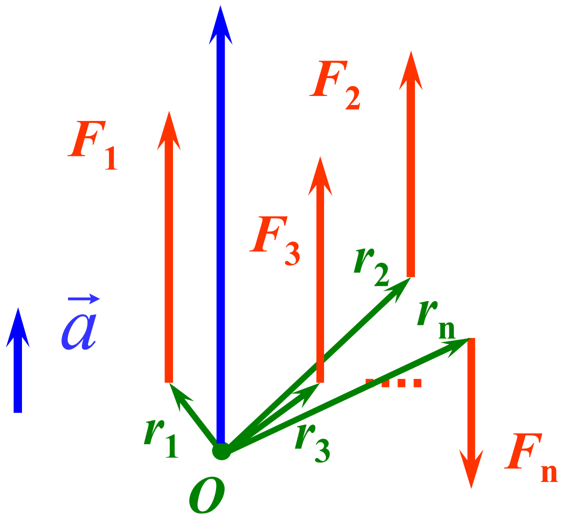
3、重心的计算

(1) 平行力系的中心

结论1：当主矢不为零时，平行力系总可以向某一点简化为一个合力。



$\boldsymbol{F}_1=F_1\vec{a}$ $\boldsymbol{F}_2=F_2\vec{a}$ …… $\boldsymbol{F}_n=F_n\vec{a}$

向某点O点进行简化

主矢：$\boldsymbol{F}_R' = \sum F_i\vec{a}$

主矩：$\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times F_i\vec{a} = (\sum F_i\boldsymbol{r}_i)\times\vec{a}$

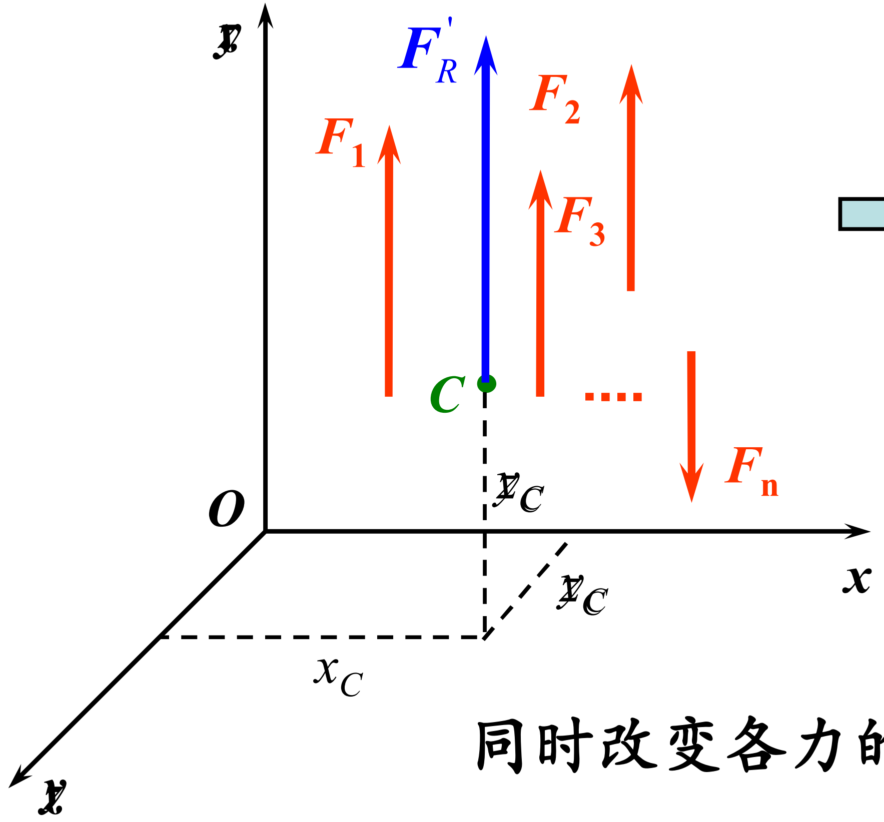
显然主矩$\boldsymbol{M}_O$垂直于单位矢量$\boldsymbol{a}$,

因此主矩垂直于主矢。

简化为一个合力

合力作用线距O点距离为 $d = \left|\boldsymbol{M}_O\right| / F_R'$

结论2: 合力作用点的位置只与各平行力的作用点的位置及各力的大小有关，而与力的方向无关。该点称为此平行力系的中心。



由合力矩定理:

$$M_x(\boldsymbol{F}_R') = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i)$$

$$\Rightarrow -F_R' \cdot y_C = -\sum F_i \cdot y_i$$

故: $$y_C = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{F_R'}$$

类似地: $$x_C = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{F_R'}$$

同时改变各力的方向: $M_x(\boldsymbol{F}_R') = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i)$

$$\Rightarrow -F_R' \cdot z_C = -\sum F_i \cdot z_i$$

故: $$z_C = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{F_R'}$$

(2) 重心

物体各微小部分的重力近似组成一个空间平行力系，此力系的合力大小称为物体的重量（重力），此力系的中心称为物体的重心，亦即物体重力合力的作用点称为物体的重心。

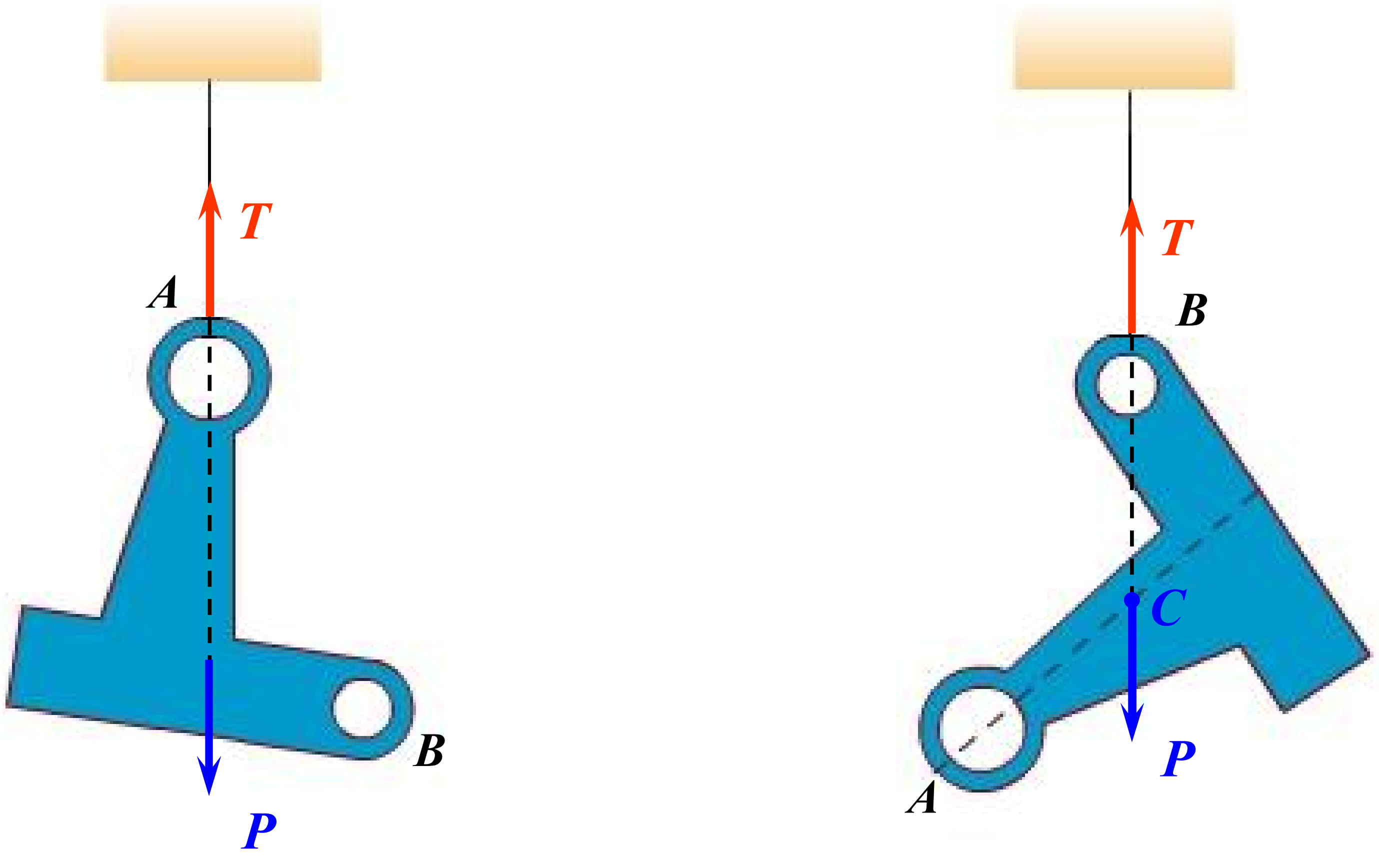
地球表面附近的刚体，其重心相对物体本身来说是一个确定的几何点，不因物体的位置方位而变。

确定物体的重心在工程上有重要意义。

(3) 确定重心的方法：a. 对称确定法

对称且均质的物体，重心在其对称面、对称轴或对称中心上。

(3) 确定重心的方法：b. 悬挂法



(3) 确定重心的方法：c. 称重实验法

$$\sum M_A(F)=0$$

$$P\cdot x_C=F_1\cdot l \quad 则 \quad x_C=\frac{F_1}{P}l$$

$$\sum M_B(F)=0$$

$$P\cdot x'_C=F_2\cdot l' \Rightarrow x'_C=\frac{F_2}{P}l'$$

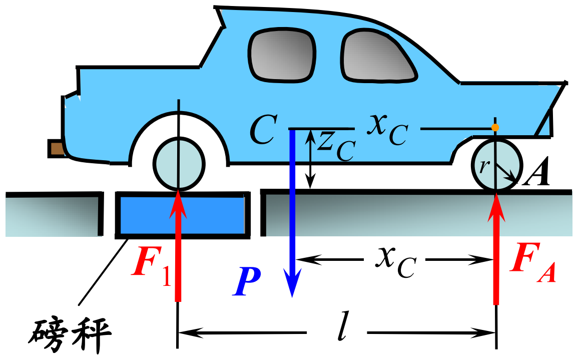
$$l'=l\cos\theta$$

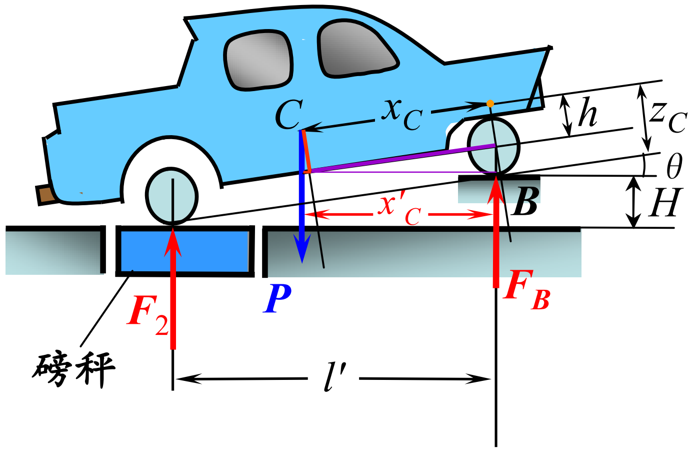
$$x_C'=$$

$$\sin\theta=\frac{H}{l} \qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{l^2-H^2}}{l}$$

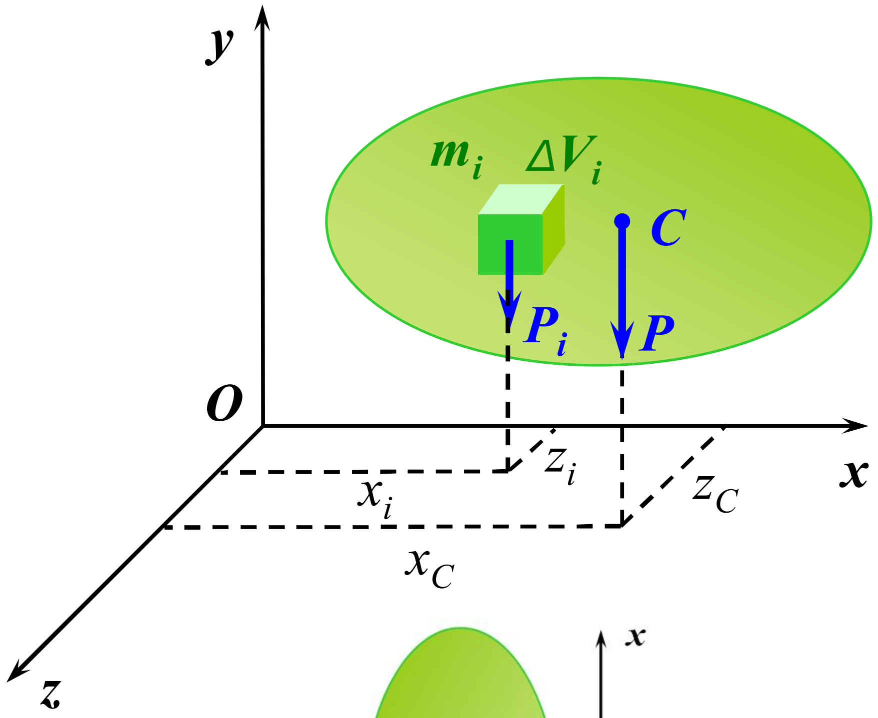
$$\Rightarrow h=\frac{F_2-F_1}{P}\cdot\frac{l}{H}\cdot\sqrt{l^2-H^2}$$

$$z_C=r+h=r+\frac{F_2-F_1}{P}\cdot\frac{l}{H}\cdot\sqrt{l^2-H^2}$$



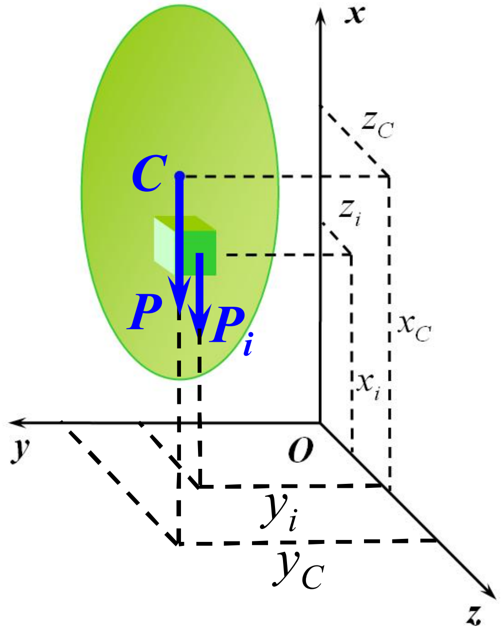


(3) 确定重心的方法：d. 有限分割法



$$-P\cdot x_C=-P_1\cdot x_1-P_2\cdot x_2-\ldots-P_n\cdot x_n$$
$$=-\sum P_i\cdot x_i$$
$$\Rightarrow\quad x_C=\frac{\sum P_i x_i}{P}$$

$$P\cdot z_C=P_1\cdot z_1+P_2\cdot z_2+\ldots+P_n\cdot z_n$$
$$=\sum P_i\cdot z_i$$
$$\Rightarrow\quad z_C=\frac{\sum P_i z_i}{P}$$



$$-P\cdot y_C=-P_1\cdot y_1-P_2\cdot y_2-\ldots-P_n\cdot y_n$$
$$=-\sum P_i\cdot y_i$$
$$\Rightarrow\quad y_C=\frac{\sum P_i y_i}{P}$$

计算重心坐标的公式

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{P} \qquad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{P} \qquad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{P}$$

对均质物体有$P=\rho Vg$，故：

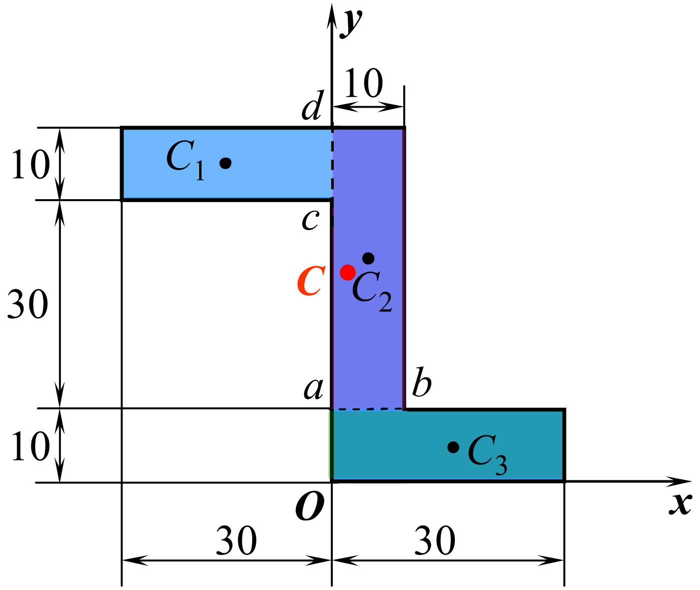
$$x_C = \frac{\sum V_i x_i}{V} \qquad y_C = \frac{\sum V_i y_i}{V} \qquad z_C = \frac{\sum V_i z_i}{V}$$

对均质板状物体有$P=\rho Ahg$，故：

重心或形心公式

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A} \qquad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A} \qquad z_C = \frac{\sum A_i z_i}{A}$$

例3 已知均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示，单位为mm。求其重心坐标。



解: 厚度方向重心坐标已确定，只求重心的x, y坐标即可.

用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与重心坐标分别为:

$x_1 = -15\text{mm}$ $y_1 = 45\text{mm}$ $A_1 = 300\text{mm}^2$

$x_2 = 5\text{mm}$ $y_2 = 30\text{mm}$ $A_2 = 400\text{mm}^2$

$x_3 = 15\text{mm}$ $y_3 = 5\text{mm}$ $A_3 = 300\text{mm}^2$

利用重心公式，有:

$$x_C = \sum \frac{A_i x_i}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 2\text{mm}$$

$$y_C = \sum \frac{A_i y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 27\text{mm}$$

(3) 确定重心的方法：e. 无限分割法

$$x_C = \frac{\int_V x\mathrm{d}P}{P} \qquad y_C = \frac{\int_V y\mathrm{d}P}{P} \qquad z_C = \frac{\int_V z\mathrm{d}P}{P}$$

类似地：

对均质物体有

$$x_C = \frac{\int_V x\mathrm{d}V}{V} \qquad y_C = \frac{\int_V y\mathrm{d}V}{V} \qquad z_C = \frac{\int_V z\mathrm{d}V}{V}$$

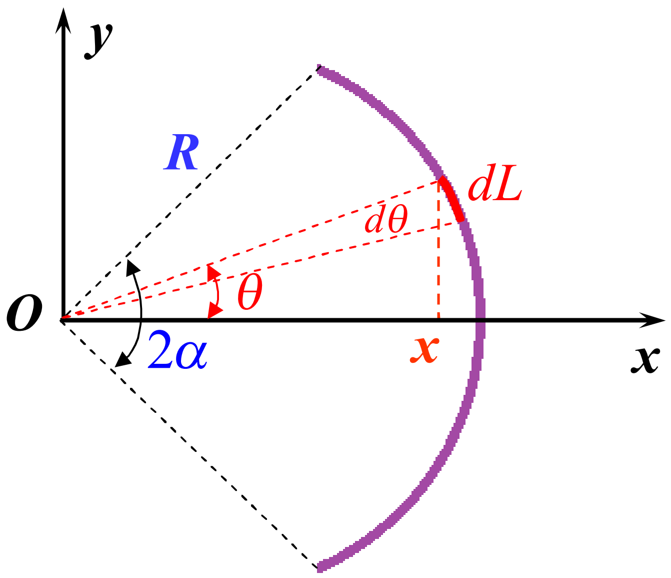
对均质板状物体有

重心或形心公式

$$x_C = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A} \qquad y_C = \frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A} \qquad z_C = \frac{\int_A z\mathrm{d}A}{A}$$

例4 求半径为R，顶角为2α的均质圆弧的重心。

解：取如图坐标系，让圆弧位于xoy平面内，并被x轴平分。



由于对称关系，该圆弧重心必在Ox轴，即y_C=0，只需求x_C。

取微段dL

$$dL=R\cdot d\theta$$

$$x=R\cos\theta$$

$$x_C=\frac{\int_V x\cdot dP}{P}=\frac{\int_L x\cdot\rho g dL}{L\rho g}=\frac{\int_L x\cdot dL}{L}$$

$$=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cdot R^2\cdot\cos\theta\cdot d\theta}{2\alpha R}$$

$$x_C=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

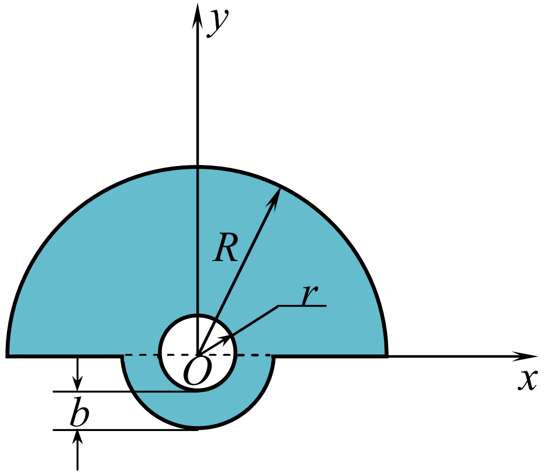
(3) 确定重心的方法：f. 负面积(体积)法

若物体被切去一部分，重心仍可应用有限分割法的公式来计算，但切去部分的面积或体积应该取负值。

分割原则：

将切掉的部分填充上形成一个完整物体，然后进行分割，按照有限分割法计算，此外填充的那部分也要计算并且在计算时面积或体积要取负值。

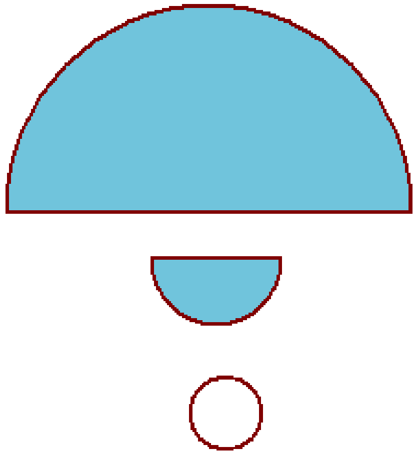
例5 已知等厚均质偏心块中R=100mm, r=17mm, b=13mm。求其重心坐标。



解：用负面积法，物体视作由三部分组成.

上部分半圆+下部分半圆+中间空心圆（负的）

由对称性知x_C=0, 故只需确定y_C



$$A_1=\frac{\pi}{2}R^2 \qquad y_1=\frac{4R}{3\pi}$$

$$A_2=\frac{\pi}{2}(r+b)^2 \qquad y_2=-\frac{4(r+b)}{3\pi}$$

$$A_3=-\pi r^2 \qquad y_3=0$$

由 $$y_C=\frac{\sum A_i y_i}{A}$$

得 $$y_C=\frac{A_1 y_1+A_2 y_2+A_3 y_3}{A_1+A_2+A_3}=40.01\text{mm}$$