思考： 能否应用对定点和定轴的动量矩定理分析？

质点系相对质心的动量矩定理

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组

主要内容

1、质点系相对质心的动量矩

2、相对于质心的动量矩定理

3、平面运动刚体的运动微分方程

1、质点系相对质心的动量矩

质点系相对质心的动量矩

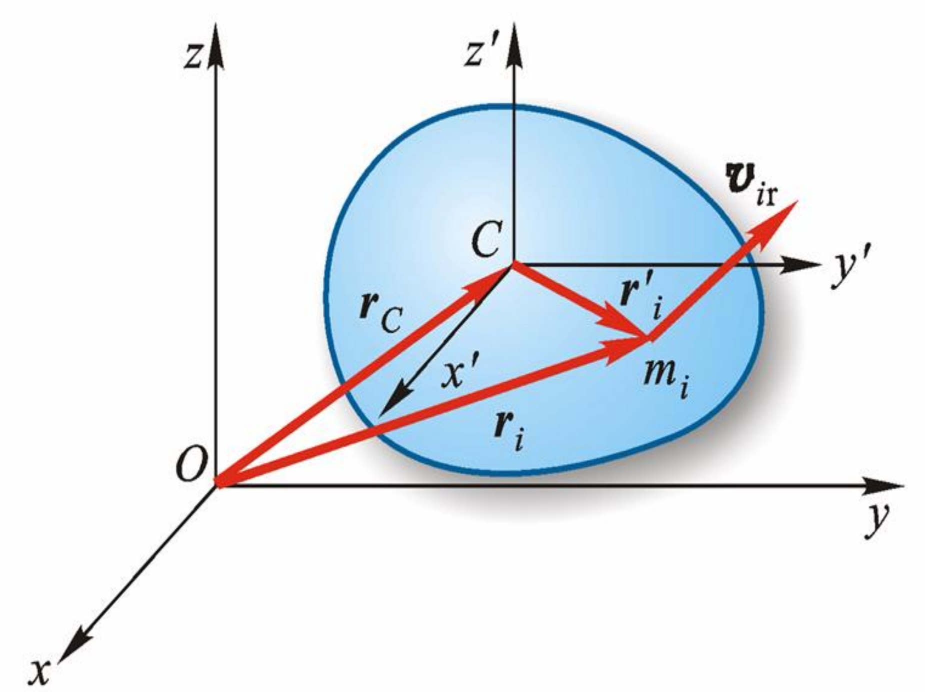
对质心的动量矩

以质心为原点，平移参考系

$Cx'y'z'$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ir}$$

$$\vec{L}_C = \sum \vec{M}_C(m_i\vec{v}_i) = \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i$$



$$\vec{L}_C = \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_C + \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_{ir}$$

$$\sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_C = \boxed{(\sum 0\, \vec{r}\,'_i)} \times \vec{v}_C = 0$$

$$\vec{L}_C = \sum \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_{ir}$$

质点系相对于质心的动量矩，可以用质点绝对速度计算，也可用相对速度计算。

以上结论只对质心成立。

对质心和任意点动量矩的关系

$$\vec{L}_O=\sum(\vec{r}_C+\vec{r}\,')\times m_i\vec{v}_i$$

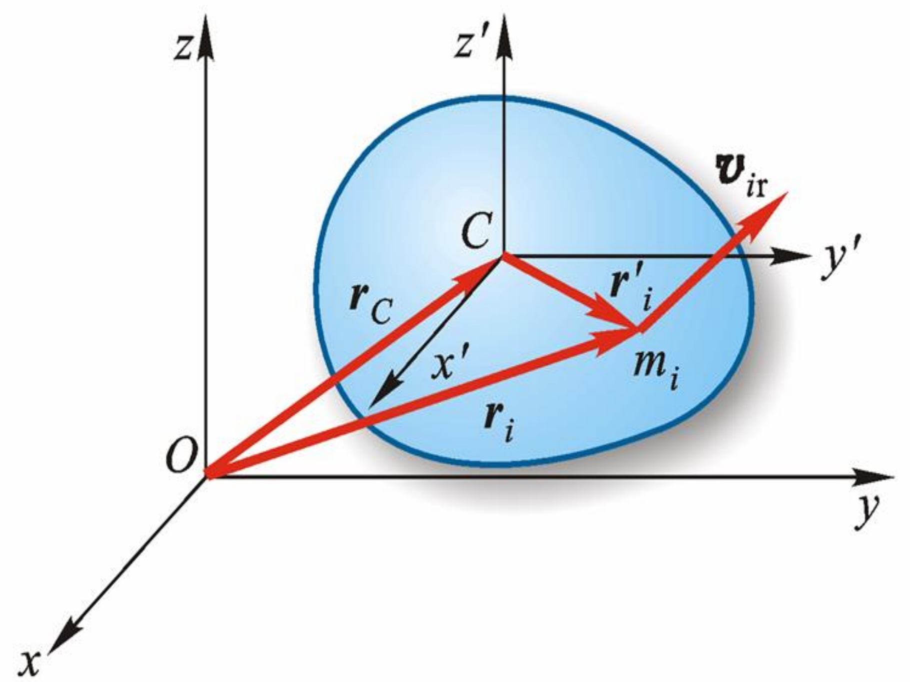
$\vec{r}\,'$：r_i'

$$=\vec{r}_C\times\sum m_i\vec{v}_i+\sum\vec{r}\,'\times m_i\vec{v}_i$$

$\sum m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_C$，$\sum\vec{r}\,'\times m_i\vec{v}_i = \vec{L}_C$

$$\vec{L}_O=\vec{r}_C\times m\vec{v}_C+\vec{L}_C$$

$\vec{r}_C\times m\vec{v}_C$：随质心平移　　$\vec{L}_C$：相对质心

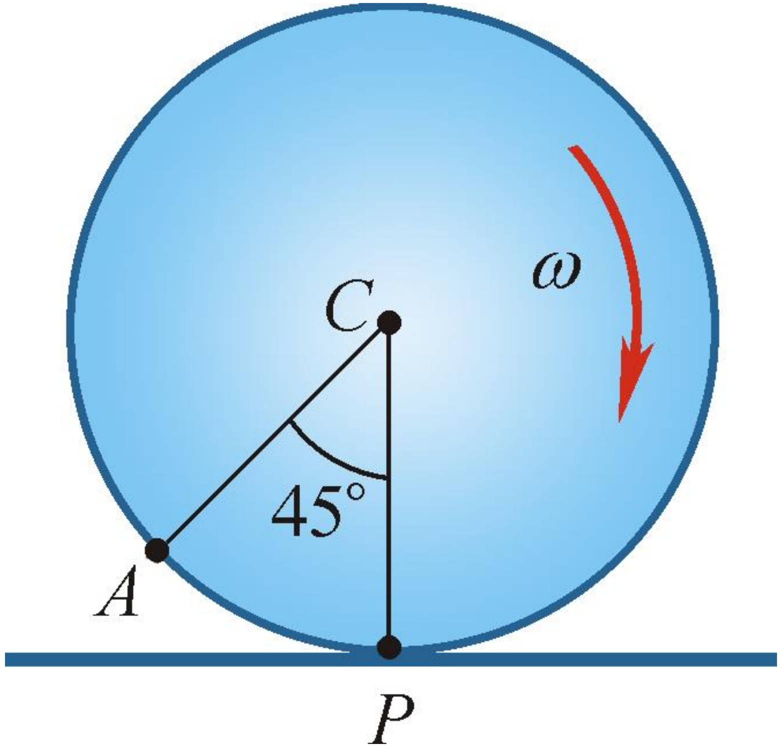


质点系对任意点的动量矩，等于质点系随质心平移时对点的动量矩，再加上相对于质心的动量矩。

例1

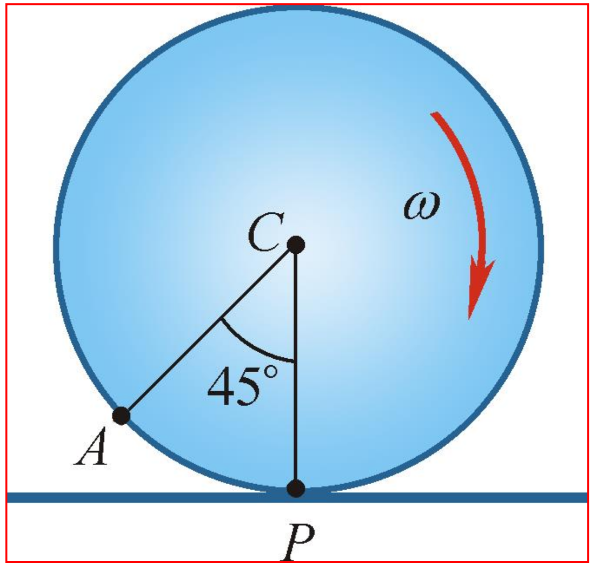
已知：均质圆盘质量为m，半径为R，沿地面纯滚动，角速度为 ω 。

求：圆盘对A、C、P三点的动量矩。



解: 点C为质心 $L_C = J_C\omega = \dfrac{mR^2}{2}\omega$

点P为瞬心 $L_P = J_P\omega = \dfrac{3mR^2}{2}\omega$



或

$$L_P = mv_C R + L_C = mR^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{3mR^2}{2}\omega$$

$$L_A = mv_C\frac{\sqrt{2}}{2}R + L_C = \frac{\sqrt{2}}{2}mR^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{(\sqrt{2}+1)mR^2}{2}\omega$$

是否可以如下计算:

$$L_A = J_A\omega = (J_C + mR^2) = \frac{3mR^2}{2}\omega$$