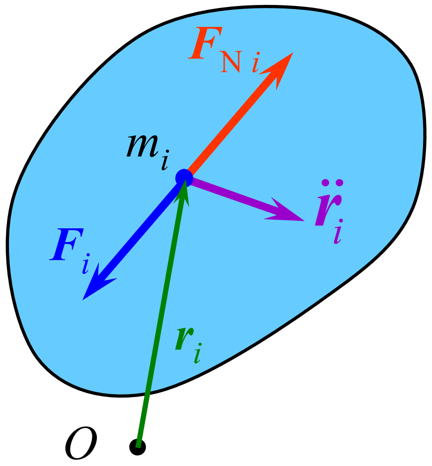
4、动力学普遍方程

含n个质点组成的系统，第i个质点：

质量为m_i, 矢径为$\boldsymbol{r}_i$，主动力为$\boldsymbol{F}_i$，约束力为$\boldsymbol{F}_{Ni}$，质点加速度为 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ ，

质点的惯性力为： $\boldsymbol{F}_{Ii} = -m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$



理想约束作用下，由达朗贝尔原理和虚功原理得到：

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} + \boldsymbol{F}_{Ii})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

在理想约束的条件下，质点系在任一瞬时所受的主动力系和虚加的惯性力系在任意虚位移上所作的虚功之和等于零。

写成解析表达式

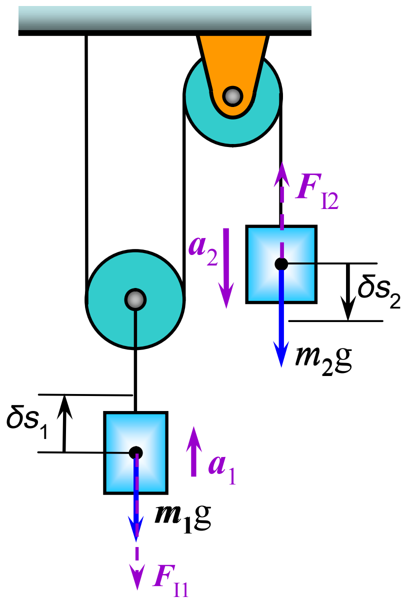
$$\sum_{i=1}^{n}((F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i) = 0$$

——动力学普遍方程

特别适合于求解非自由质点系的动力学问题。

例8 已知：滑轮系统中，动滑轮上悬挂着质量为m_1的重物，绳子绕过定滑轮后悬挂着质量为m_2的重物。设滑轮和绳子的重量以及轮轴摩擦都忽略不计。

求：质量为m_2的物体下降的加速度。



解：取整个滑轮系统为研究对象，分析主动力，

分析运动，虚加惯性力：

$$F_{I1}=m_1a_1\ ,\quad F_{I2}=m_2a_2$$

施加虚位移。

由动力学普遍方程，所有主动力和惯性力在任意虚位移上所作的虚功之和等于零，得到：

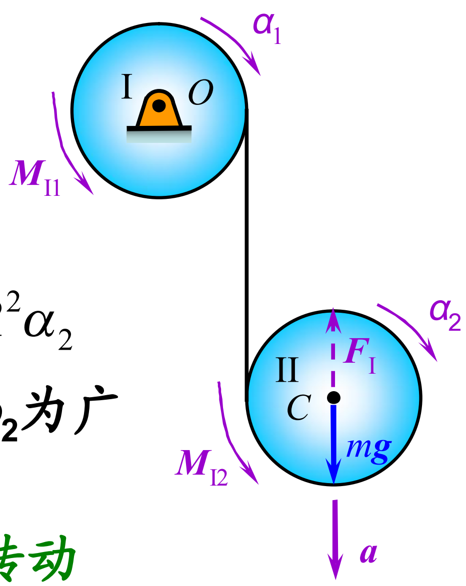
$$-(m_1g+F_{I1})\delta s_1+(m_2g-F_{I2})\delta s_2=0$$

代入F_{I1}、F_{I2}表达式，和δs_1和δs_2之间的关系$\delta s_1=\delta s_2/2$，得到：

$$\boxed{a_2=\frac{4m_2-2m_1}{4m_2+m_1}g}$$

例9 已知：两相同均质圆轮半径皆为R，质量皆为m。

求：当细绳直线部分为铅垂时，轮II中心C的加速度。



解：研究整个系统。分析主动力，分析运动，

虚加惯性力：$F_I = ma$ ，$M_{I1} = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_1$ ，$M_{I2} = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_2$

此系统具有两个自由度,分别取轮I和轮II的转角φ_1和φ_2为广义坐标，

（1）令$\delta\varphi_1 = 0$，$\delta\varphi_2 \neq 0$ 亦即是轮I不转动，仅轮II转动

则点C下降的高度为：$\delta h = R\delta\varphi_2$ 由动力学普遍方程，得到：

$$mg\delta h - F_I\delta h - M_{I2}\delta\varphi_2 = 0 \Longrightarrow g - a - \frac{1}{2}R\alpha_2 = 0 \qquad (1)$$

（2）令$\delta\varphi_2 = 0$，$\delta\varphi_1 \neq 0$ 亦即是轮II不转动，仅轮I转动

则点C下降的高度为：$\delta h = R\delta\varphi_1$ 由动力学普遍方程，得到：

$$mg\delta h - F_I\delta h - M_{I1}\delta\varphi_1 = 0 \Longrightarrow g - a - \frac{1}{2}R\alpha_1 = 0 \qquad (2)$$

（3）运动学关系 $a = R\alpha_1 + R\alpha_2 \qquad (3)$

联立三式解得：$\boxed{a = \frac{4}{5}g}$

- 约束方程（主动力+惯性力）代入虚功方程；
- 利用虚位移的任意性求解。