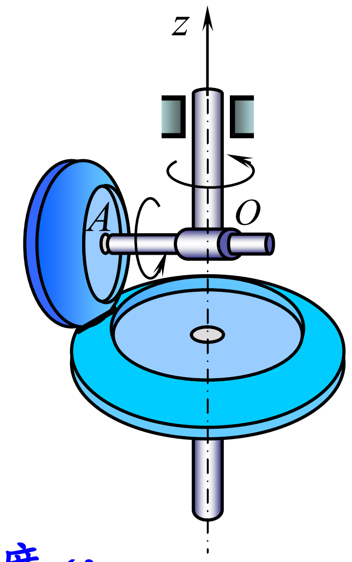
3、绕相交轴转动的合成

(1) 绕两个相交轴转动的合成



绕相交轴转动的合成运动是定点运动，两轴的交点为定点。

刚体绕Oz'的转动为相对运动，相对角速度 $\omega_r=\omega_2$;

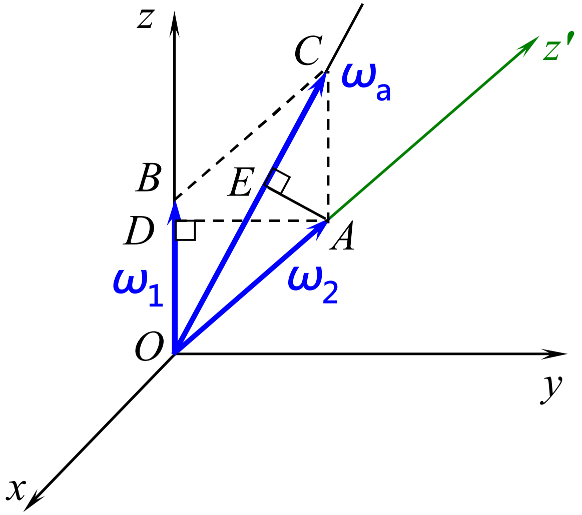
动坐标系绕Oz的转动为牵连运动，牵连角速度 $\omega_e=\omega_1$;

刚体绕O点的定点运动为绝对运动。

i 以 ω_1和 ω_2为邻边，做平行四边形$OACB$，连接OC，OC即为刚体绕O做定点运动的瞬轴。（证明略）

ii 平行四边形$OACB$的对角线即为刚体绕瞬轴转动的绝对角速度 ω_a

动轴Oz'上点A的速度为： $v_A=\omega_1\cdot AD=\omega_a\cdot AE$



⇨ $\omega_a=\dfrac{AD}{AE}\omega_1$ 由：$S_{\square OACB}=\omega_1\cdot AD=OC\cdot AE$

⇨ $\omega_a=OC$ 指向由点A的速度方向确定。

三个角速度的关系可写成： $\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$

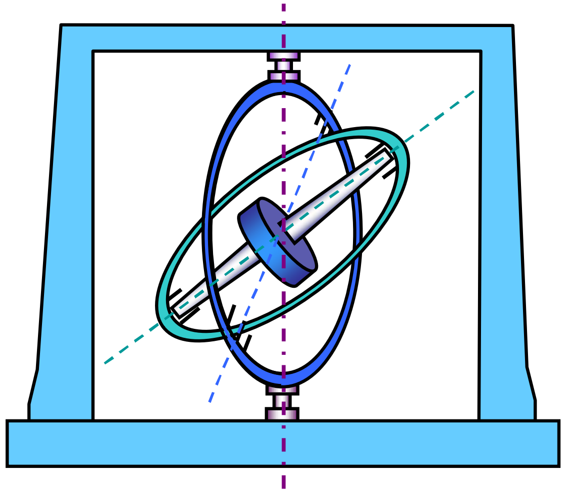
当刚体同时绕两相交轴转动时，合成运动为绕瞬轴的转动，绕瞬轴转动的角速度等于绕两轴转动的角速度的矢量和。

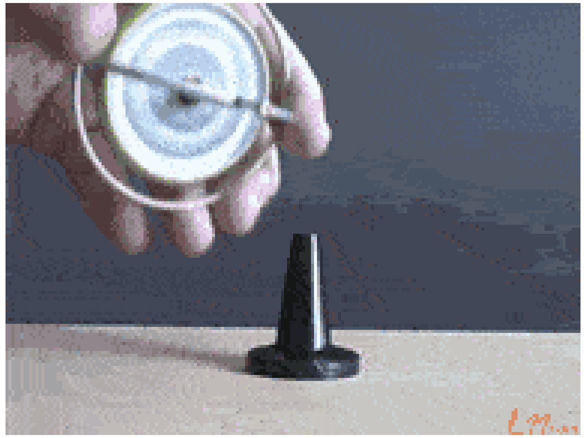
(2) 绕多个相交轴转动的合成

如果刚体绕相交于一点的3个轴或者更多轴转动时，绕瞬轴转动的角速度为：

$$\omega_a = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

当刚体同时绕相交于一点的多轴转动时，合成运动为绕瞬轴的转动。绕瞬轴转动的角速度等于绕各轴转动的角速度的矢量和，而瞬轴则沿此合矢量方向。

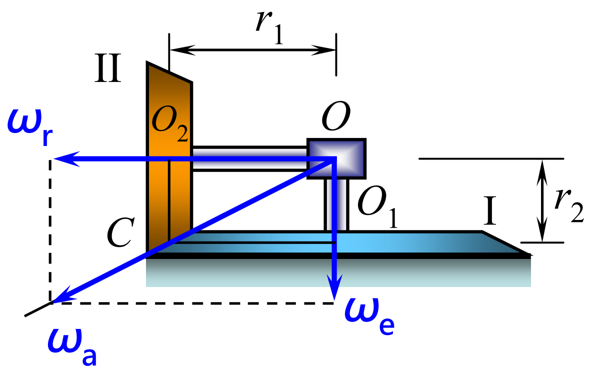




例2 行星锥齿轮II与固定齿轮I相啮合，可绕动轴OO_2转动，而动轴OO_2以角速度ω_e绕定轴OO_1转动。设在点C处，轮I的半径为r_1，轮II的半径为r_2。

求：锥齿轮II相对于动轴的角速度ω_r。

解：属于绕两个相交轴转动的合成问题。



两个齿轮的啮合点C的速度等于零，所以OC连线为瞬时轴。

已知牵连角速度ω_e的大小和方向；相对角速度ω_r的方向，大小未知；绝对角速度ω_a沿瞬轴方向。

可画出以ω_a为对角线，以ω_e和ω_r为邻边的平行四边形。

根据几何关系有：

$$\frac{\omega_r}{\omega_e}=\frac{OO_2}{OO_1}=\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \boxed{\omega_r=\frac{r_1}{r_2}\omega_e}$$

例3 已知陀螺绕定点运动时，3个欧拉角表示的运动方程为：

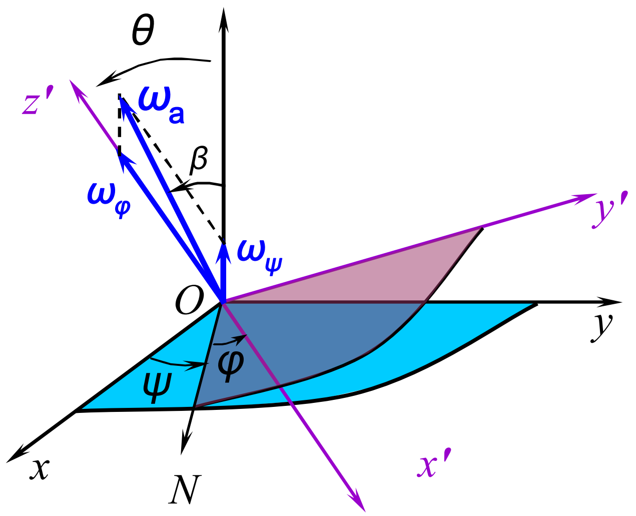
$$\psi = 2t^2 + 3t\,,\quad \theta = \frac{\pi}{6}\,,\quad \varphi = 24t$$ 式中 t 以s计，ψ，θ，φ 以rad计。

求：当t=1s 时陀螺绕瞬轴转动的角速度。

解：属于绕多个相交轴转动的合成问题。

以欧拉角表示的运动方程对时间t取一阶导数，得到的分别是绕定轴Oz，节线ON和动轴Oz'的角速度。

$$\psi = 2t^2 + 3t\,,\quad \theta = \frac{\pi}{6}\,,\quad \varphi = 24t$$



$$\Rightarrow\quad \omega_\psi = 4t + 3\,,\quad \omega_\theta = 0\,,\quad \omega_\varphi = 24$$

当t=1s时，ω_ψ=7rad/s，ω_θ=0，ω_φ=24rad/s。方向如图所示。

绕瞬轴转动的角速度等于三个角速度的矢量和：$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\varphi$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_\varphi^2 + \omega_\psi^2 + 2\omega_\varphi\omega_\psi\cos\theta} = 30.27\text{rad/s}$$

$$\Rightarrow\quad \beta = \arcsin\frac{\omega_\varphi \sin(180^\circ - \theta)}{\omega_a} = 23^\circ 21' 33''$$