两个自由度系统的振动理论

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

本讲主要内容

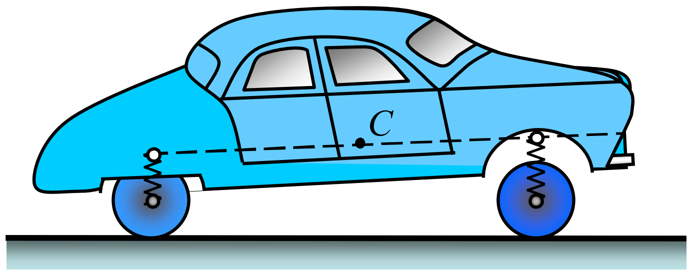
1、两个自由度系统的自由振动

2、两个自由度系统的受迫振动

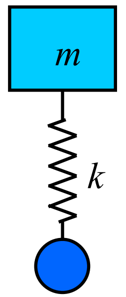
1、两个自由度系统的自由振动

（1）模型的简化

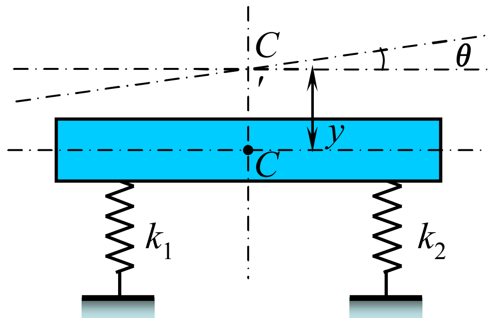
同一物体的振动可以简化为不同的振动模型。



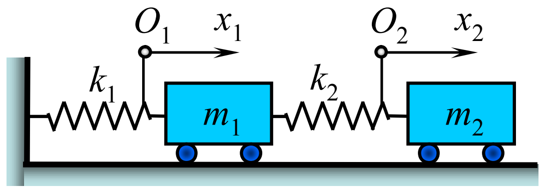
研究上下平移振动



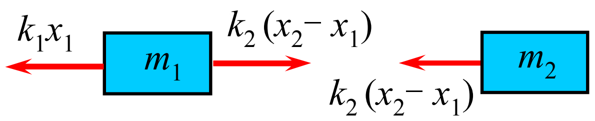
研究前后颠簸振动



两个自由度系统的自由振动模型



（2）自由振动微分方程



$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)$$

移项得到：

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{aligned}\right\}$$

令 $b=\dfrac{k_1+k_2}{m_1}$， $c=\dfrac{k_2}{m_1}$， $d=\dfrac{k_2}{m_2}$

方程变为：$\ddot{x}_1+bx_1-cx_2=0$， $\ddot{x}_2-dx_1+dx_2=0$

① 固有频率

根据微分方程理论，可设上列方程组的解为：

$x_1=A\sin(\omega t+\theta)$， $x_2=B\sin(\omega t+\theta)$

其中：A、B是振幅； ω为角频率， θ是初始相位角。

将上式代入微分方程组，得到：

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\theta)+bA\sin(\omega t+\theta)-cB\sin(\omega t+\theta)=0$$

$$-B\omega^2\sin(\omega t+\theta)+dA\sin(\omega t+\theta)+dB\sin(\omega t+\theta)=0$$

整理后得到：$(b-\omega^2)A-cB=0$， $-dA+(d+\omega^2)B=0$

系统振动时，方程组具有非零解，则方程组的系数行列式必须等于零，即：

$$\begin{vmatrix} b-\omega^2 & -c \\ -d & d-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$ —频率行列式

行列式展开后得到：$\omega^4-(b+d)\omega^2+d(b-c)=0$

—系统的本征方程，又称为频率方程

$$\Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2=\frac{b+d}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{b+d}{2}\right)^2-d(b-c)}=\frac{b+d}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{b-d}{2}\right)^2+cd}$$

i ω^2的两个根都是实数，而且都是正数。

ii ω^2的第一个根较小，称为第一固有频率。

iii ω^2的第二个根较大，称为第二固有频率。

结论:

两个自由度系统具有两个固有频率，这两个固有频率只与系统的质量和刚度等参数有关，而与振动的初始条件无关。

② 振幅

将解出的两个固有频率 ω_1和 ω_2 分别代入上页关于振幅的二元一次方程组 $(b-\omega^2)A-cB=0$， $-dA+(d+\omega^2)B=0$中，可解出对应于 ω_1的振幅A_1，B_1 和对应于 ω_2的振幅A_2、B_2.

对应于第一固有频率 $$\frac{A_1}{B_1}=\frac{c}{b-\omega_1^2}=\frac{d-\omega_1^2}{d}=\frac{1}{\gamma_1}$$

对应于第二固有频率 $$\frac{A_2}{B_2}=\frac{c}{b-\omega_2^2}=\frac{d-\omega_2^2}{d}=\frac{1}{\gamma_2}$$

这两个比例常数只与系统的质量、刚度等参数有关。对于一个确定的两个自由度的系统，每组振幅中，两个振幅的比值是定值。

对应于第一固有频率ω_1 的振动称为第一主振动，运动规律为：

$$x_1^{(1)}=A_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)\,,\quad x_2^{(1)}=\gamma_1 A_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)$$

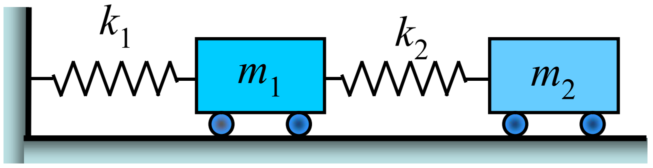
对应于第二固有频率ω_2 的振动称为第二主振动，运动规律为：

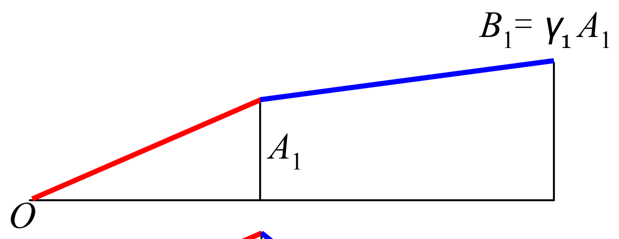
$$x_1^{(2)}=A_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)\,,\quad x_2^{(2)}=\gamma_2 A_2\sin(\omega_2 t+\theta_2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{1,2}^2=\frac{b+d}{2}\mp\sqrt{(\frac{b-d}{2})^2+cd}\\
&\frac{A_1}{B_1}=\frac{c}{b-\omega_1^2}=\frac{d-\omega_1^2}{d}=\frac{1}{\gamma_1}\\
&\frac{A_2}{B_2}=\frac{c}{b-\omega_2^2}=\frac{d-\omega_2^2}{d}=\frac{1}{\gamma_2}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\begin{aligned}
&\gamma_1=\frac{1}{c}\left[\frac{b-d}{2}+\sqrt{(\frac{b-d}{2})^2+cd}\right]>0\\
&\gamma_2=\frac{1}{c}\left[\frac{b-d}{2}-\sqrt{(\frac{b-d}{2})^2+cd}\right]<0
\end{aligned}$$

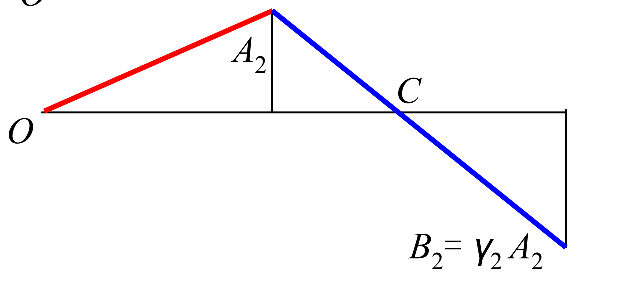
i 当系统作第一主振动时，两个质点总是同相位，即作同向振动。

ii 当系统作第二主振动时，两个质点总是反相位，即作反向振动。





第一主振型



第二主振型

振型中位移始终为零的点称为节点。

多自由度系统的高阶主振型中一定存在节点，而第一阶主振型 中不存在节点。

阶次越高的主振动，节点数就越多，所以相应的振幅就越难增大;

阶次越低的主振动，节点数就越少，振动越容易被激起。

多自由度系统中，低频主振动比高频主振动危险。

主振型和固有频率一样都只与系统本身的参数有关，而与振动的初始条件无关,因此主振型也叫固有振型。

自由振动微分方程的全解为第一主振动与第二主振动的叠加:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t+\theta_1)+A_2 \sin(\omega_2 t+\theta_2)$$

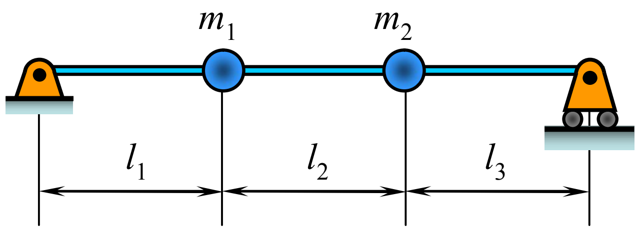
$$x_2 = \gamma_1 A_1 \sin(\omega_1 t+\theta_1)+\gamma_2 A_2 \sin(\omega_2 t+\theta_2)$$

其中包含4个待定常数 A_1, A_2, θ_1, θ_2

由运动的4个初始条件 x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$, $\dot{x}_{20}$ 确定。

例1 图示为一个具有两个集中质量m_1，m_2的简支梁，在质量m_1，m_2处梁的影响系数分别为λ_{11}，λ_{22}和$\lambda_{12}=\lambda_{21}$。梁的质量忽略不计，试计算系统的固有频率和主振型。

影响系数的定义：λ_{11}表示在集中质量m_1处作用单位力时在该处产生的静挠度；λ_{22}表示在m_2处作用单位力时在该处产生的静挠度；λ_{12}表示在m_2处作用单位力时在m_1处产生的静挠度，λ_{21}的定义与λ_{12}类似。



解：这是两个自由度的系统，假设系统做自由振动时，质点m_1，m_2的位移分别为x_1和x_2，则两个质点的惯性力分别为$-m_1\ddot{x}_1$ 和$m_2\ddot{x}_2$ 。

两个质点处，梁的挠度即为两个质点的位移x_1、x_2，根据达朗贝尔原理和变形叠加原理，两个质点处的挠度为：

$$x_1=\lambda_{11}(-m_1\ddot{x}_1)+\lambda_{12}(-m_2\ddot{x}_2)$$

$$x_2=\lambda_{21}(-m_1\ddot{x}_1)+\lambda_{22}(-m_2\ddot{x}_2)$$

整理得到系统的运动微分方程为：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{11}m_1\ddot{x}_1+\lambda_{12}m_2\ddot{x}_2+x_1=0\\ \lambda_{21}m_1\ddot{x}_1+\lambda_{22}m_2\ddot{x}_2+x_2=0\end{aligned}\right\}$$

令

$$b=\frac{\lambda_{12}m_2}{\lambda_{11}m_1},\quad c=\frac{\lambda_{21}m_1}{\lambda_{22}m_2},$$

$$d=\frac{1}{\lambda_{11}m_1},\quad e=\frac{1}{\lambda_{22}m_2}$$

则微分方程变为：

$$\ddot{x}_1+b\ddot{x}_2+dx_1=0$$

$$c\ddot{x}_1+\ddot{x}_2+ex_2=0$$

根据微分方程理论，设上列方程组的解的形式为：

$$x_1 = A\sin(\omega t+\theta)\,,\quad x_2 = B\sin(\omega t+\theta)$$

将上式代入微分方程组，消去 $\sin(\omega t+\theta)$ 得到关于振幅的方程组：

$$(d-\omega^2)A-b\omega^2 B=0,\quad -c\omega^2 A+(e-\omega^2)B=0$$

对应的频率行列式为：
$$\begin{vmatrix} d-\omega^2 & -b\omega^2 \\ -c\omega^2 & e-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

展开得到系统的本征方程为：$(1-bc)\omega^4-(d+e)\omega^2+ed=0$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\omega_{1,2}^2=\frac{(d+e)\mp\sqrt{(d-e)^2+4bcde}}{2(1-cb)}}$$

可以证明 ω^2的两个根都是正实根，ω_1和 ω_2为系统的两个固有频率。

将 ω_1和 ω_2代入关于振幅的方程组，得到振幅比为：

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{b\omega_1^2}{d-\omega_1^2}=\frac{e-\omega_1^2}{c\omega_1^2}=\frac{1}{\gamma_1}$$

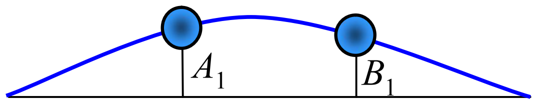
$$\frac{A_2}{B_2}=\frac{b\omega_2^2}{d-\omega_2^2}=\frac{e-\omega_2^2}{c\omega_2^2}=\frac{1}{\gamma_2}$$

同样可证明：

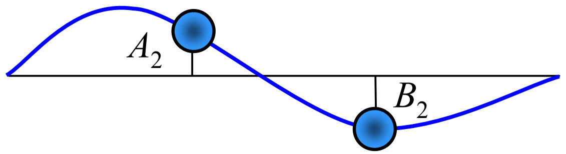
$$\gamma_1>0$$

$$\gamma_2<0$$

第一主振型



第二主振型



设 $m_1 = m_2 = m \quad l_1 = l_3 = \frac{l}{4} \quad l_2 = \frac{l}{2}$ 则根据材料力学公式可计算出：

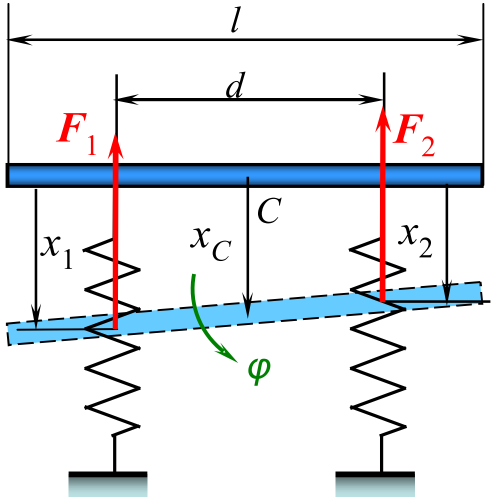
其中EI为梁截面的抗弯刚度 $\quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = \frac{9l^3}{768EI} \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = \frac{7l^3}{768EI}$

代入各自表达式代入式，得：

$$\omega_1 = 6.928\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega_2 = 19.596\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

$$\gamma_1 = \frac{B_1}{A_1} = 1, \quad \gamma_2 = \frac{B_2}{A_2} = -1$$

例2 如图所示，一均质细杆质量为m，长为l，由两个刚度系数皆为k的弹簧对称支承，两支撑点之间距离为d，试求此系统的固有频率和固有振型。



解：显然这是一个两个自由度的系统。以平衡位置为原点，取任意位置进行研究，只考虑铅垂方向的位移，分别以两根弹簧的支点的位移x_1和x_2为系统的两个坐标。以平衡位置为坐标原点可以不计重力的影响。

细杆受到的两个恢复力分别为：$F_1 = kx_1$，$F_2 = kx_2$

此时，细杆的质心坐标为：$x_C = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$

细杆绕质心的转角为：$\varphi = \dfrac{1}{d}(x_1 - x_2)$

列出细杆的平面运动微分方程：

$$m\ddot{x}_C = -F_1 - F_2 = -k(x_1 + x_2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = -F_1 \cdot \frac{d}{2} + F_2 \cdot \frac{d}{2} = -k \cdot \frac{d}{2}\varphi d$$

$$\Rightarrow$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + bx_1 + bx_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + cx_1 - cx_2 = 0$$

代入x_C和φ的表达式，并考虑$J_c = ml^2/12$，

其中 $b = \dfrac{2k}{m}$，$c = \dfrac{6kd^2}{ml^2}$

只求系统的固有频率和固有振型时，可取振动的初始角 θ=0，所以设方程的解为：

$$x_1 = A\sin\omega t\,,\quad x_2 = B\sin\omega t$$

代入微分方程，消去 $\sin\omega t$，得到关于振幅的方程组：

$$(b-\omega^2)(A+B)=0,\quad (c-\omega^2)(A-B)=0$$

若要 A、B 有非零解，必须有：

$$b-\omega^2=0 \Rightarrow \boxed{\omega_1^2=b=\frac{2k}{m}} \qquad c-\omega^2=0 \Rightarrow \boxed{\omega_2^2=c=\frac{6kd^2}{ml^2}}$$

ω_1 和 ω_2 为系统的两个固有频率。

i 当 $\omega^2=b$ 时，为使关于振幅的两个方程都成立，有 $A_1=B_1$

——对应于直杆上下平移运动的固有振型

ii 当 $\omega^2=c$ 时，为使关于振幅的两个方程都成立，有 $A_2=-B_2$

——对应于质心不动而绕质心转动的固有振型

如果直接取 x_C 和 φ 为两个独立坐标，则细杆的平面运动微分方程为：

$$m\ddot{x}_C=-2kx_C\,,\quad J_C\ddot{\varphi}=-k\frac{d}{2}\varphi\,d=-\frac{kd^2}{2}\varphi$$

系统的两个固有振型：随同质心的平移位移 x_C，绕质心转动的角位移 φ。

x_C 和 φ 称为系统的两个主坐标。