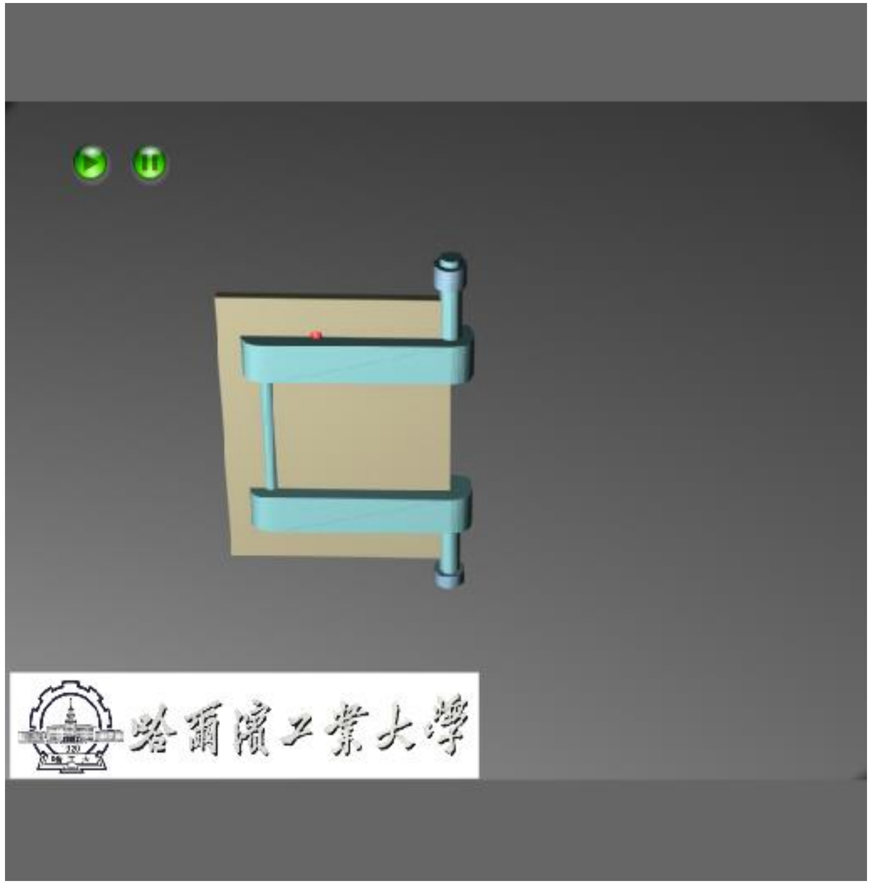
4、自然法



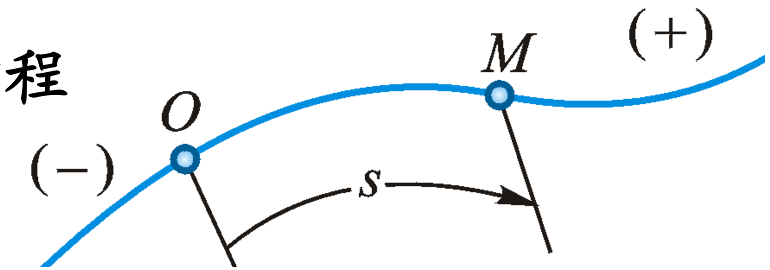
运动轨迹已知

描述门板上一点的运动

自然法

自然法： 利用点的运动轨迹建立弧坐标和自然轴系，利用它们描述和分析点的运动的方法。

弧坐标　　$s = f(t)$　　运动方程

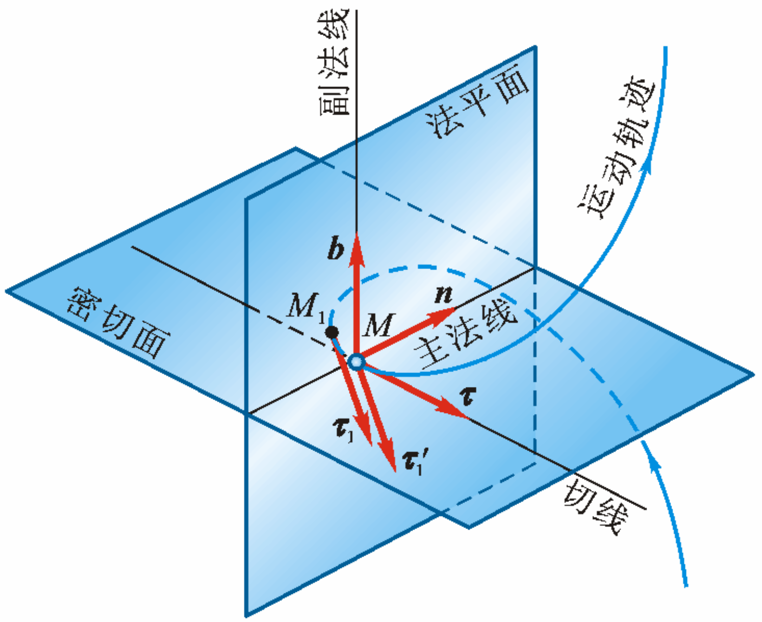


自然轴系

切向单位矢量　$\vec{\tau}$

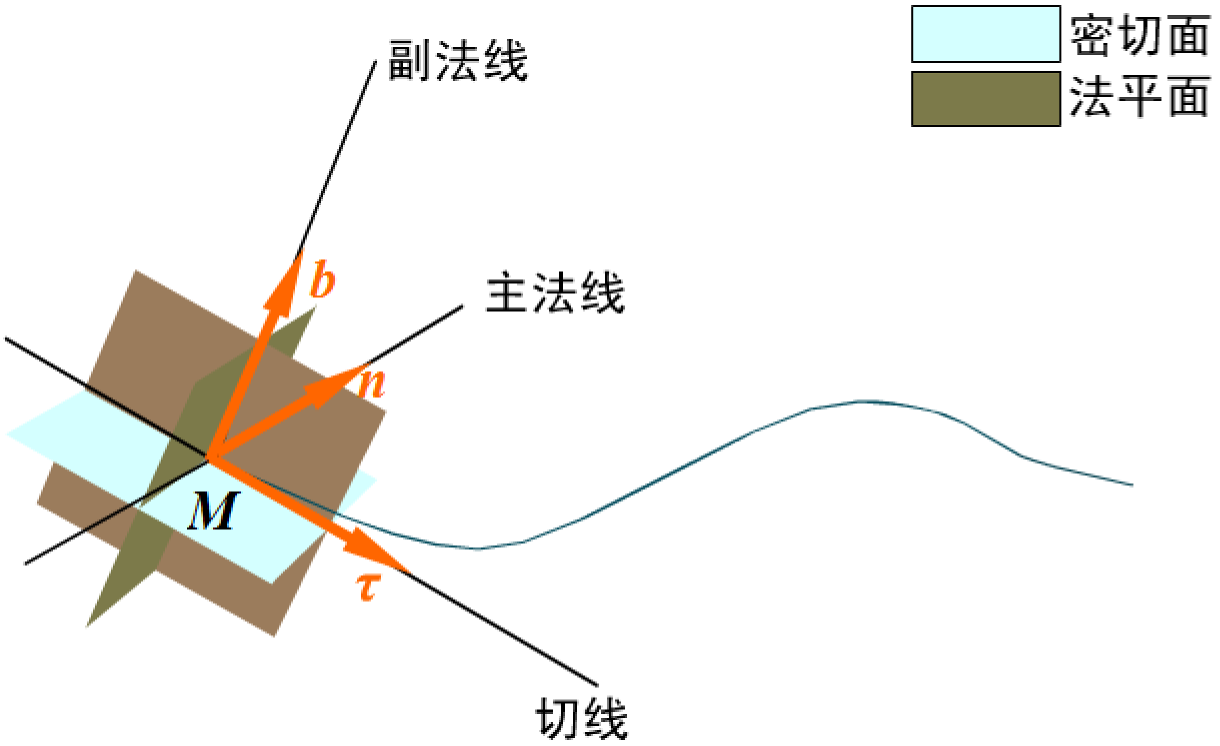
主法线单位矢量　$\vec{n}$

副法线单位矢量　$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$



提问：自然轴系的原点是什么？

自然坐标轴的几何性质



哈爾濱工業大學

速度

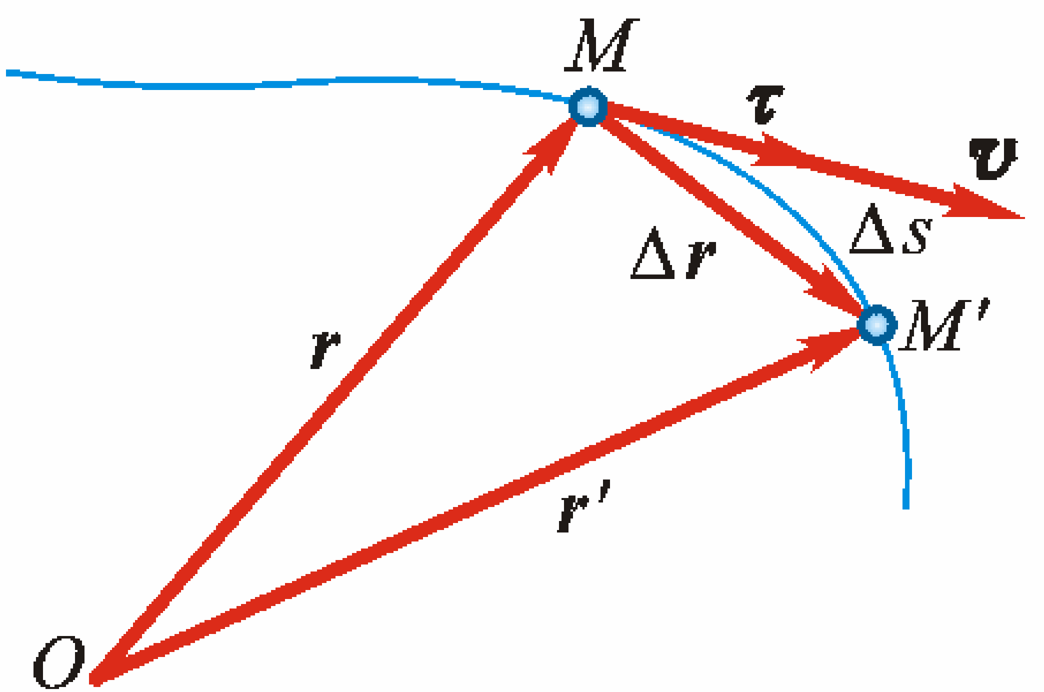
$$|\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}\cdot\Delta s}{\Delta t\cdot\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right|\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

方向沿切线方向

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ 沿轨迹正向

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} < 0$ 沿轨迹负向

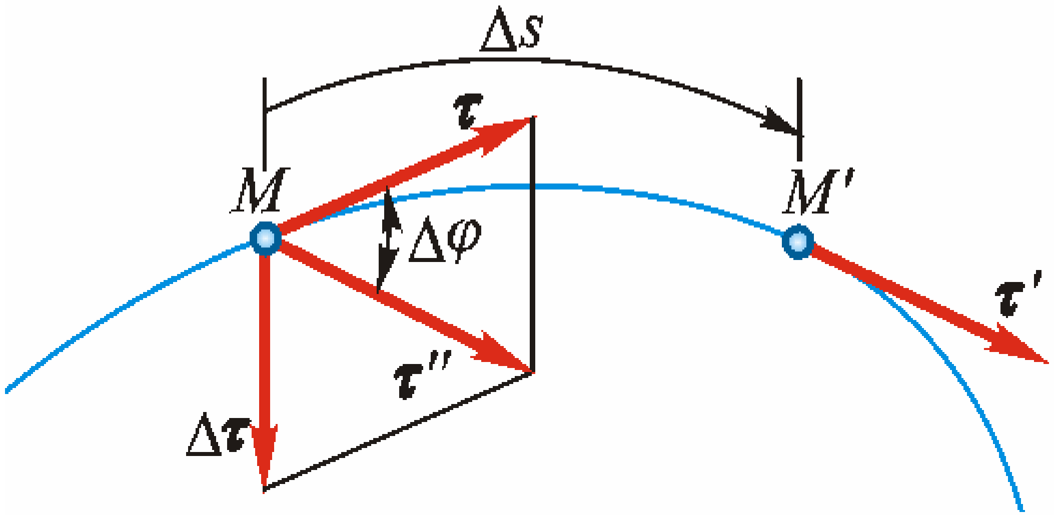


加速度

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

?

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$



表示速度大小的变化，沿轨迹切线方向--切向加速度

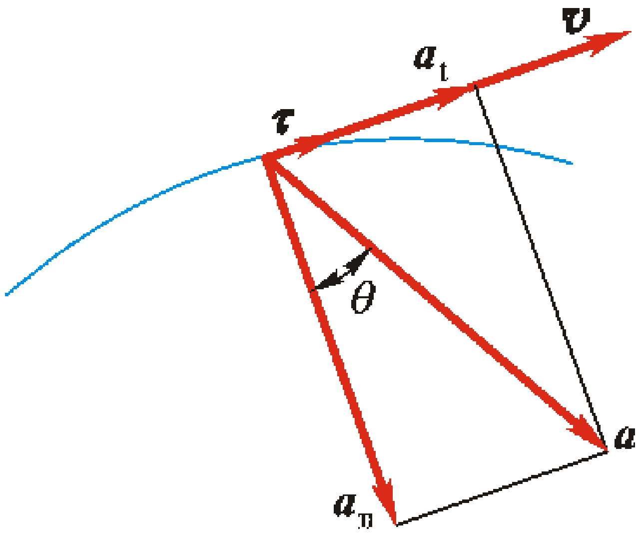
$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

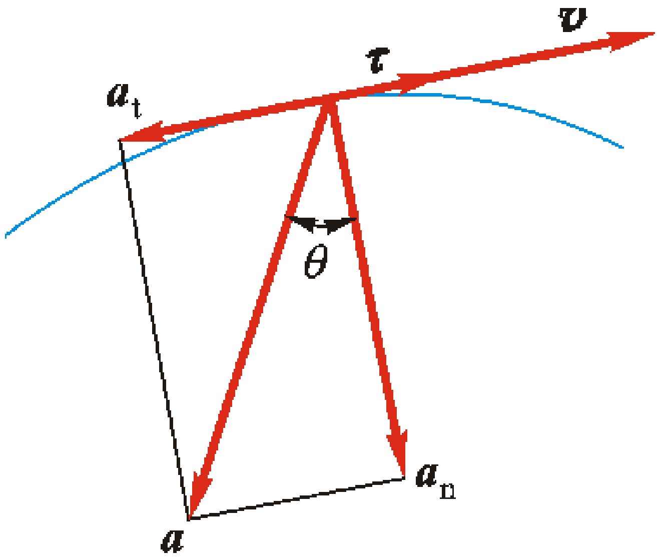
$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\cdot 1\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\frac{1}{\rho}$$

方向沿主法线方向

$$v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

表示速度方向的变化，沿主法线方向
--法向加速度





$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n \qquad a=\sqrt{a^2{}_t+a^2{}_n} \qquad \tan\theta=\frac{a_t}{a_n}$$

曲线匀速运动

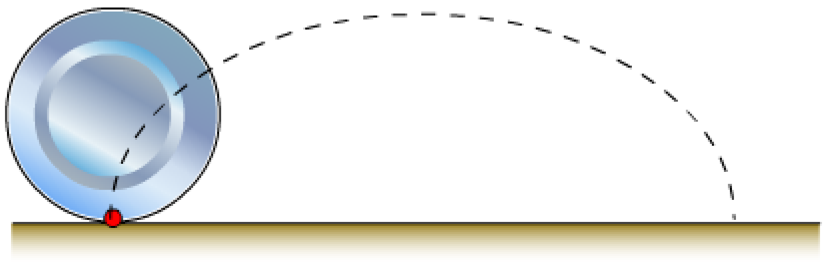
$$a_t=0, v=v_0=\text{常数}, s=s_0+v_0t$$

曲线匀变速运动

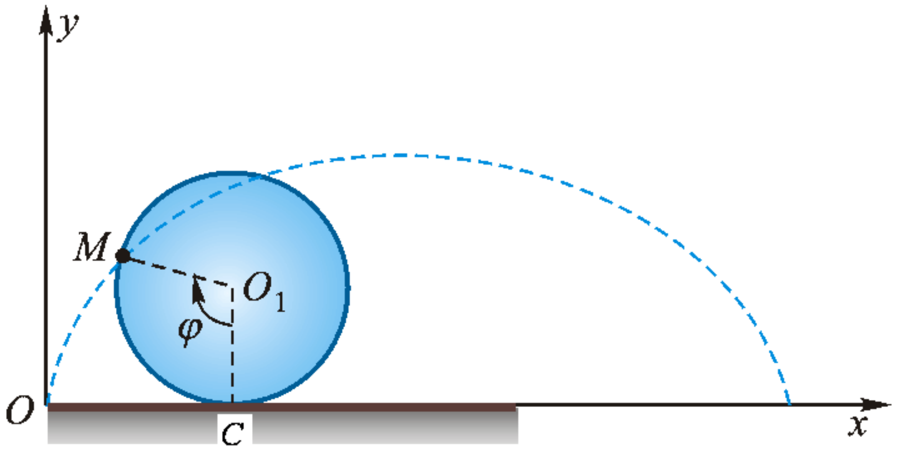
$$a_t=\text{常数}, v=v_0+a_tt, s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}a_tt^2$$

例1

已知：半径为r的轮子沿直线轨道无滑动地滚动（称为纯滚动），设轮子转角 $\varphi=\omega t$（ω 为常值），如图所示。求用直角坐标和弧坐标表示的轮缘上任一点M的运动方程，并求该点的速度、切向加速度及法向加速度。



解： M点作曲线运动，取直角坐标系如图所示。



由纯滚动条件

$$OC = \overline{MC} = r\varphi = r\omega t$$

从而
$$x = OC - O_1M\sin\varphi = r(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = O_1C - O_1M\cos\varphi = r(1 - \cos\omega t)$$

$$v_x = \dot{x} = r\omega(1-\cos\omega t),\ v_y = \dot{y} = r\omega\sin\omega t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2} \quad （0 \le \omega t \le 2\pi)$$

$$s = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}\mathrm{d}t = 4r(1-\cos\frac{\omega t}{2}) \qquad (0 \le \omega t \le 2\pi)$$

$$a_x = \ddot{x} = r\omega^2\sin\omega t,\ a_y = \ddot{y} = r\omega^2\cos\omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

又点M的切向加速度为 $$a_\mathrm{t} = \dot{v} = r\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_\mathrm{n} = \sqrt{a^2 - a_\mathrm{t}^2} = r\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}$$