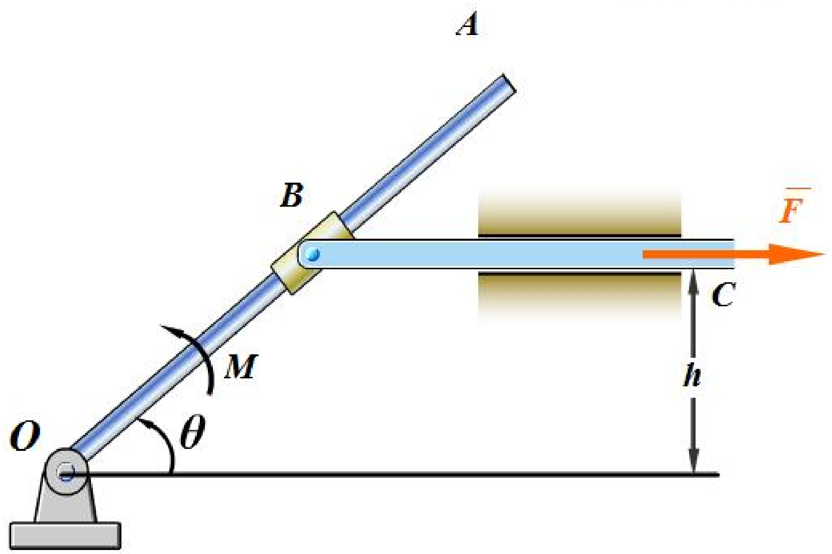
虚位移（虚功）原理练习

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

练习1 已知：如图所示机构，不计各构件自重与各处摩擦.

求：机构在图示位置平衡时，主动力偶M与主动力F之间的关系.



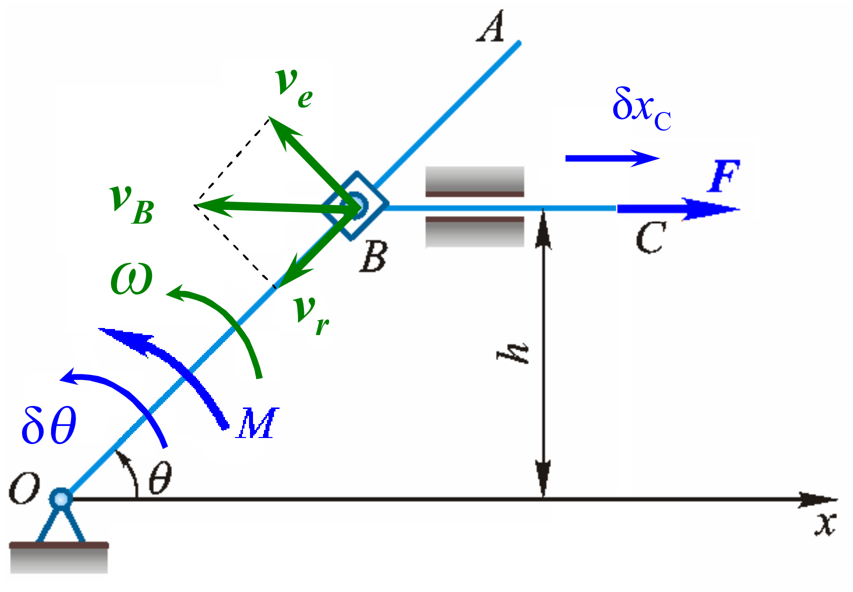
解：1、以整体为研究对象，理想约束系统，画出主动力。

2、依主动力性质给出对应的虚位移

3、列虚功方程

$$\sum \delta W_F = M\delta\theta + F\delta x_C = 0$$

4、消去不独立的虚位移分量



直接找虚位移之间的几何关系不容易！

利用虚速度：$\boldsymbol{v} = \dfrac{\delta \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

虚角速度：$\omega = \dfrac{\delta\theta}{\mathrm{d}t}$

利用速度合成定理 $v_B = \dfrac{v_e}{\sin\theta} = \dfrac{h\omega}{\sin^2\theta}$ $\Rightarrow$ $\delta x_C = -v_B \mathrm{d}t = -\dfrac{h\omega}{\sin^2\theta}\mathrm{d}t$

代入 $\omega = \dfrac{\delta\theta}{\mathrm{d}t}$ $\Rightarrow$ $\delta x_C = -\dfrac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$

－－虚速度法

虚功方程变为 $M\delta\theta - \dfrac{Fh}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{M = \dfrac{Fh}{\sin^2\theta}}$

如果构件之间的约束很容易用方程表示出来，则表明虚位移之间有明确的数学联系，可以用解析的方法求出虚位移之间的关系。

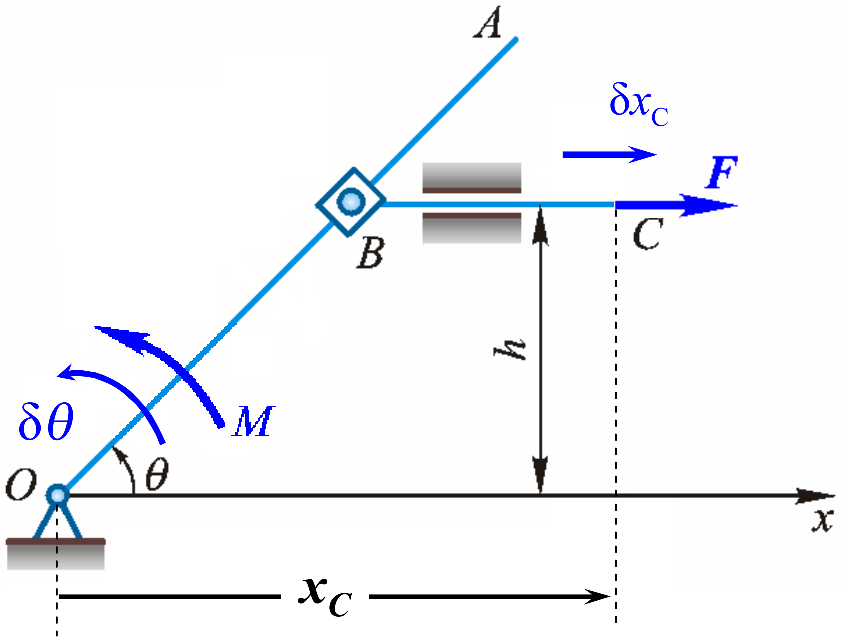
$$x_C = h\cot\theta + \overline{BC}$$

求变分

$$\delta x_C = -\frac{h\delta\theta}{\sin^2\theta}$$

代入虚功方程

$$\sum \delta W_F = M\delta\theta + F\delta x_C = 0$$



虚功方程变为：

$$M\delta\theta - \frac{Fh}{\sin^2\theta}\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{Fh}{\sin^2\theta}}$$

－－解析计算法

虚位移(虚功)原理解题步骤及注意事项

步骤:

1、画出所有主动力;

2、依主动力性质给出每一个主动力对应的虚位移;

3、列虚功方程$\Sigma \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$;

4、消去不独立的虚位移分量。

注意:

1、注意对应的约束为理想约束;

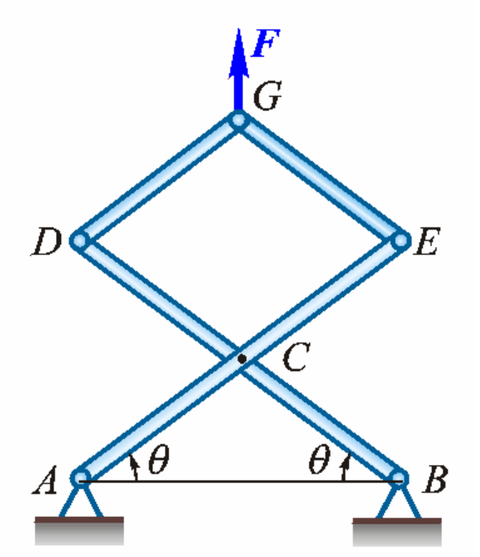
2、求解约束力时，需将产生该约束力的约束去掉，变约束力为主动力求解;

3、约束中存在非理想约束，需要将非理想约束系统用主动力代替;

4、消去不独立的虚位移分量时，几何法和虚速度法要注意虚位移之间的方向问题；解析法则不必考虑这个问题，变分过程中已然包含了方向的因素，但主动力一定要遵循坐标轴的方向，同向为正，反向为负。

练习2 已知：图中所示结构，各杆自重不计，在G点作用一铅直向上的力F，$AC=CE=CD=CB=DG=GE=l$.

求：支座B的水平约束力.



解：虚功原理原则上只能求解理想约束系统的主动力，为了求约束力，需要将约束力变成主动力。

因此，首先解除B端水平约束，以主动力代替.

1、以整体为研究对象，理想约束系统，画出主动力.

2、依主动力性质给出对应的虚位移.

3、列虚功方程：

$$\sum \delta W_F = F\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B = 0$$

4、消去不独立的虚位移分量.

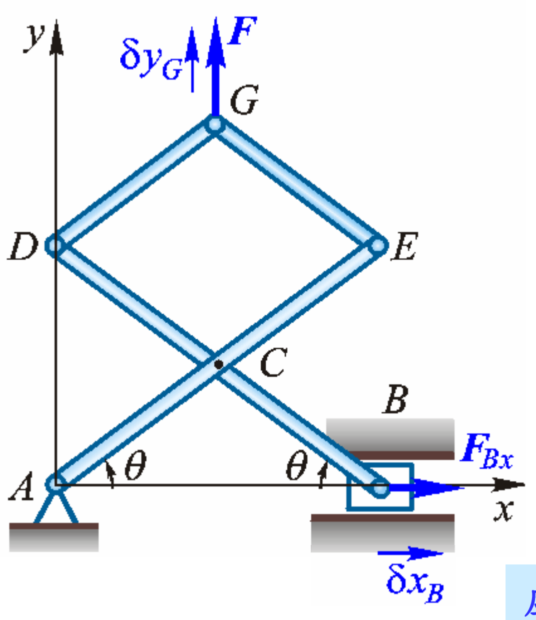
用解析法，将虚位移表示成一（几）个独立变量的函数。

$$x_B = 2l\cos\theta; \qquad y_G = 3l\sin\theta$$

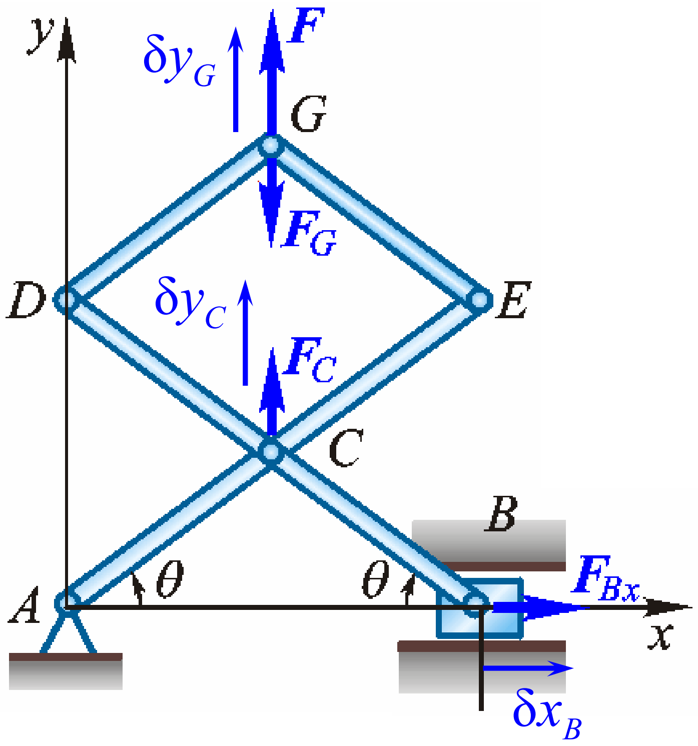
$$\delta x_B = -2l\sin\theta\,\delta\theta; \quad \delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$

代入虚功方程得到：$F_{Bx}\left(-2l\sin\theta\delta\theta\right) + F\cdot 3l\cos\theta\delta\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta}$$



新问题：如图在CG间加一弹簧，刚度k，且已有伸长量δ_0，仍求F_{Bx}.



解：虚功原理原则上只能求解理想约束系统的主动力，为了求约束力，需要将约束力变成主动力。同时需要将非理想约束系统用主动力代替。

因此，首先解除B端水平约束，以主动力代替.

然后，拿掉弹簧，代之以主动力.

$$F_C = F_G = k\delta_0$$

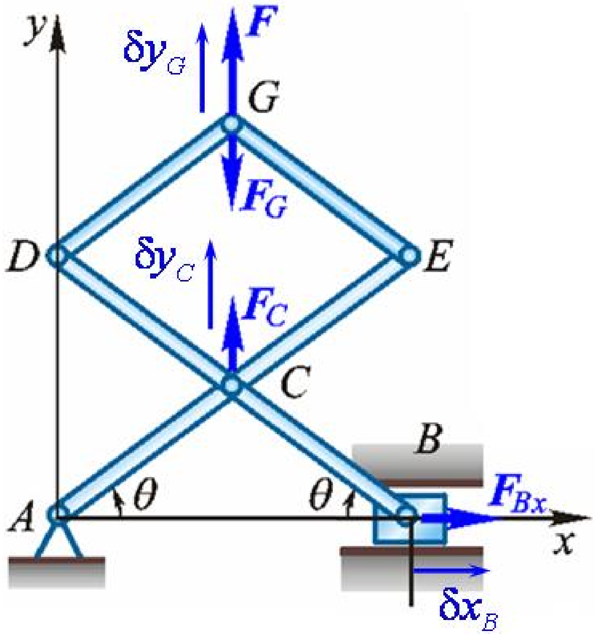
1、以整体为研究对象，理想约束系统，画出主动力。

2、依主动力性质给出对应的虚位移.

3、列虚功方程

$$\sum \delta W_F = F_{Bx}\delta x_B + F_C\delta y_C - F_G\delta y_G + F\delta y_G = 0$$

$$\sum \delta W_F = F_{Bx}\delta x_B + F_C\delta y_C - F_G\delta y_G + F\delta y_G = 0$$



4、消去不独立的虚位移分量

用解析法，将虚位移表示成一（几）个独立变量的函数。

$x_B = 2l\cos\theta, \quad y_C = l\sin\theta, \quad y_G = 3l\sin\theta$

$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta, \quad \delta y_C = l\cos\theta\delta\theta, \quad \delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$

代入虚功方程

$$\sum \delta W_F = F_{Bx}\delta x_B + F_C\delta y_C - F_G\delta y_G + F\delta y_G = 0$$

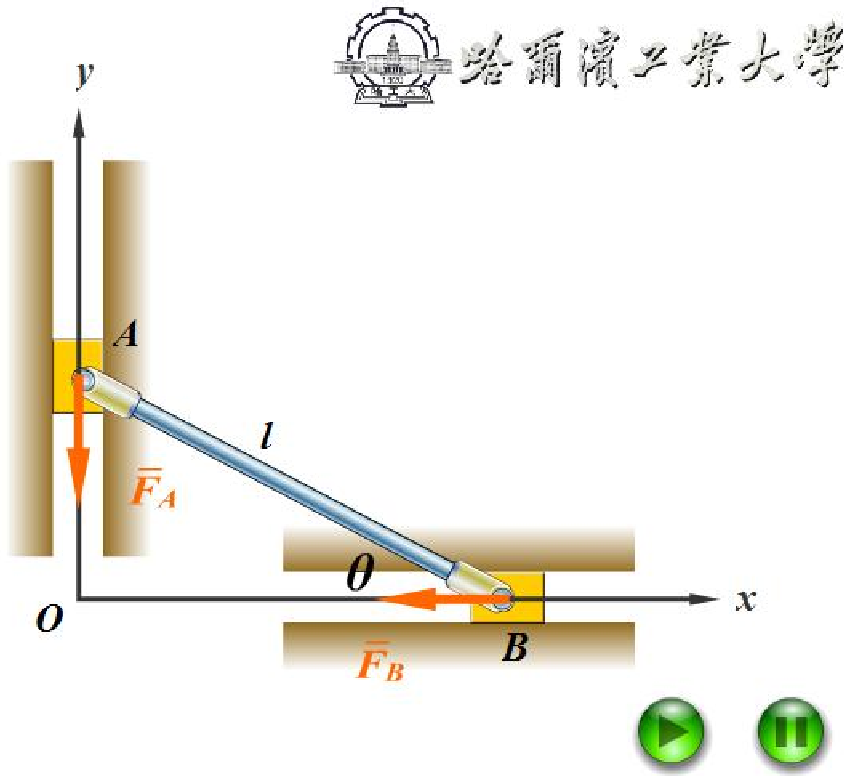
得到：

$$F_{Bx}(-2l\sin\theta\delta\theta) + k\delta_0 l\cos\theta\delta\theta - k\delta_0 3l\cos\delta\theta + F3l\cos\theta\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta}$$

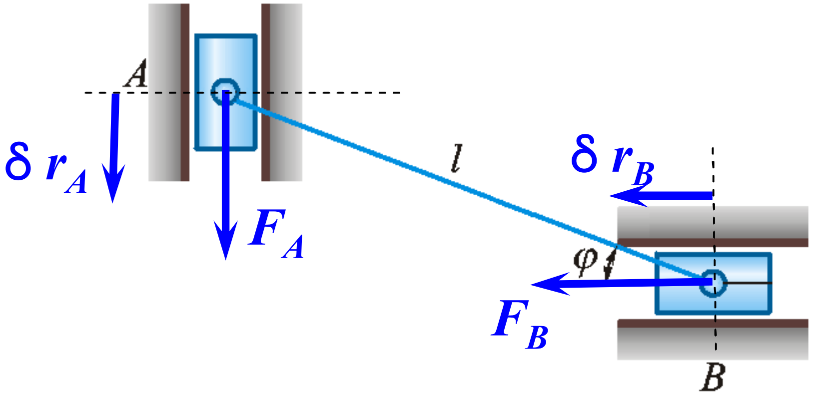
练习3 如图所示椭圆规机构中，连杆AB长为l，滑块A，B与杆重均不计，忽略各处摩擦，机构在图示位置平衡.

求：主动力F_A与F_B之间的关系。



解：

1、以整体为研究对象，理想约束系统，画出主动力。



2、依主动力性质给出对应的虚位移

3、列虚功方程

$$\sum \delta W_F = \boldsymbol{F}_A \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}_B \delta \boldsymbol{r}_B = 0$$

4、消去不独立的虚位移分量

由 $\delta \boldsymbol{r}_A$ 和 $\delta \boldsymbol{r}_B$ 在 A, B 连线上投影大小相等，故：

$$\delta r_A \sin\varphi = -\delta r_B \cos\varphi$$

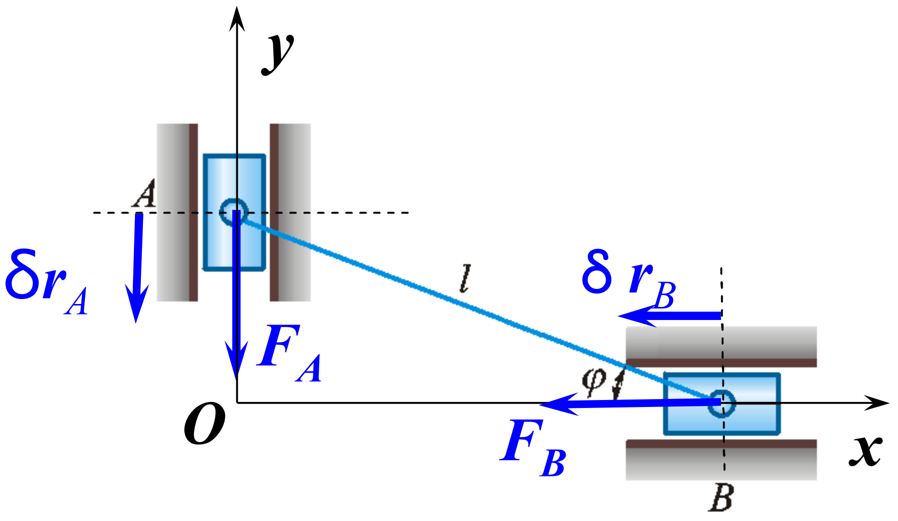
代入虚功方程得到：

$$\sum \delta W_F = F_A \delta r_A - F_B \tan\varphi \delta r_A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_A = F_B \tan\varphi}$$

－－直接法（几何法）

(2) **解析法** 建立坐标系如图.



$$x_B = l\cos\varphi,\quad y_A = l\sin\varphi$$

$$\delta x_B = -l\sin\varphi\,\delta\varphi$$

$$\delta y_A = l\cos\varphi\,\delta\varphi$$

代入虚功方程得到：

$$\sum \delta W_F = -F_A\delta y_A - F_B\delta x_B = 0 \Longrightarrow \boxed{F_A = F_B\tan\varphi}$$

(3) **虚速度法**

定义**虚速度**： $v_A = \dfrac{\delta \boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$， $v_B = \dfrac{\delta \boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}$

代入虚功方程：

$$\sum \delta W_F = \boldsymbol{F}_A\delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{F}_B\delta \boldsymbol{r}_B = 0 \Longrightarrow F_A v_A + F_B v_B = 0$$

由**速度投影定理**，有 $v_A\sin\varphi = -v_B\cos\varphi = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{F_A = F_B\tan\varphi}$$