3、变质量质点的动力学普遍定理

(1) 变质量质点的动量定理

设变质量质点在任一瞬时的动量$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$，其中$m=m(t)$是时间的函数，将动量对时间求导，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}+m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

而 $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_\phi=\boldsymbol{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r$，代入上式得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r$

记并入或放出质量的绝对速度为$\boldsymbol{v}_1$, 则：$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r$

则动量对时间的导数等于：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_1$　　记 $\boldsymbol{F}_{\phi a}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_1$

称$\boldsymbol{F}_{\phi a}$为由于并入或放出质量的**绝对速度**引起的**反推力**，它具有力的量纲且能改变质点的动量。于是有：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\phi a}$$

—变质量质点动量定理的微分形式

> 变质量质点的动量对时间的导数，等于作用其上的外力与由于并入或放出质量的**绝对速度而引起的反推力**的矢量和。

设t=0时质点质量为m_0、速度为$\boldsymbol{v}_0$，积分上式得：

$$m\boldsymbol{v}-m_0\boldsymbol{v}_0=\int_0^t\boldsymbol{F}\mathrm{d}t+\int_0^t\boldsymbol{F}_{\phi a}\mathrm{d}t=\int_0^t\boldsymbol{F}\mathrm{d}t+\int_{m_0}^{m}\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}m$$

—变质量质点动量定理的积分形式

如果并入或放出质量的绝对速度$\boldsymbol{v}_1=0$，则积分形式变为：

$$m\boldsymbol{v}-m_0\boldsymbol{v}_0=\int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

即使$\boldsymbol{F}=0$，$\boldsymbol{v}$也不是常量，$\boldsymbol{v}=m_0\boldsymbol{v}_0/m$.

(2) 变质量质点的动量矩定理

变质量质点对任一定点O的动量矩为： $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$

对时间t求导，得到：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$

代入变质量质点动量定理的微分形式 $\dfrac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\phi a}$ 得到:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_{\phi a}$$

—变质量质点的动量矩定理

变质量质点对某定点的动量矩对时间的导数，等于作用于质点上外力的合力对该点之矩与由于并入或放出质量的绝对速度引起的反推力对该点力矩的矢量和。

(3) 变质量质点的动能定理

变质量质点动量定理的微分形式：$\dfrac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}+m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_1$

各项同时点乘d$\boldsymbol{r}$得：$\mathrm{d}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}m\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}$

由于 $\mathrm{d}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=v^2\mathrm{d}m$，$m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)-\dfrac{v^2}{2}\mathrm{d}m$，上式可写成：

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{1}{2}v^2\mathrm{d}m=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}m$$

——变质量质点的动能定理

或

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{1}{2}v^2\mathrm{d}m=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}_{\phi a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

变质量质点动能的微分与放出或并入的元质量由于其牵连速度而具有的动能之和等于作用于质点上外力合力的元功与由于并入或放出质量的绝对速度引起的反推力所作的元功之和。

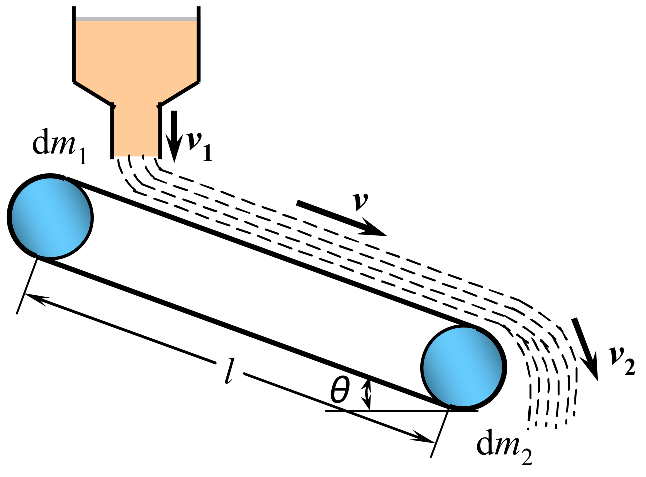
由于$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_r$，即$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{v}$，因此上述动能定理又可以写成：

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)-\frac{1}{2}v^2\mathrm{d}m=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}m=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}_{\phi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

变质量质点动能的微分与并入或放出的元质量由于牵连运动而具有的动能之差，等于作用于质点上外力的合力与反推力所作的元功之和。

例1 图为传送砂子的装置，砂子从漏斗铅直流下，以速度v_1流到倾角为 θ 的传送带上并沿斜面下滑l长度然后流出斜面，设砂子以流量q=常数（kg/s）从大漏斗中流下，斜面上砂子是定常流动，其质量保持不变，不计摩擦。

问：若使砂子在斜面上的速度v为常数，倾角 θ 应为多少？



解：设沙子离开传送带的绝对速度为v_2。流入和流出的沙子元质量分别为dm_1、dm_2。传送带上沙子的质量变化为dm。根据变质量质点的动能定理有：

$$\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right)+\frac{v^2}{2}\mathrm{d}m=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}m_1(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v})+\mathrm{d}m_2(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v})$$

流量为常数，速度为常数， 故：

$$\frac{mv^2}{2}=\text{常数},\quad \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}=q,\quad \mathrm{d}m=\mathrm{d}m_1+\mathrm{d}m_2=0,\quad v_2=v,$$

做功的外力只有重力，设s为沙子沿传送带方向的位移，动能定理变为：

$$0=mg\sin\theta\cdot\mathrm{d}s+q\mathrm{d}t\cdot v_1v\sin\theta-q\mathrm{d}tv^2$$

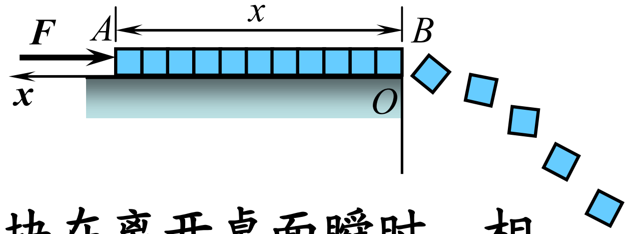
考虑到 $q=\dfrac{m}{l}v$ ，或 $m=\dfrac{l}{v}q$ ，$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

有：$gl\sin\theta+v_1v\sin\theta-v^2=0 \Longrightarrow \boxed{\theta=\arcsin[(lg+v_1v)/v^2]}$

例2 总质量为m_0，总长度为l的一排方块放在如图所示水平面上，设小方块长度极短，数量很多，相邻的小方块互相接触而不连接，初始静止，小方块最外端在桌边，如图加一水平的常力F,求在如下两种情况下，当小方块已经有一半离开桌面时留在桌面上的小方块的速度。

(1) 忽略桌面上的摩擦力.

(2) 桌面与小方块间的动滑动摩擦因数为f.



解：研究仍在桌面上的小方块，视为变质量质点。小方块在离开桌面瞬时，相对桌面上剩余方块的相对速度$v_r=0$,建立如图所示坐标，当前长度为x。

(1) 由于$v_r=0$,且不考虑摩擦，应用变质量质点的动量定理的投影形式:

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v-F$$

式中 $m=\frac{m_0}{l}x,\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0}{l}v$

因此: $\frac{m_0}{l}v^2+\frac{m_0}{l}x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0}{l}v^2-F$

化简后分离变量得: $\frac{m_0}{l}v\mathrm{d}v=-\frac{F}{x}\mathrm{d}x$

积分,并利用初始条件$x=l$时，$v=0$,
得到当$x=l/2$时:

$$v^2=\frac{2lF}{m_0}\ln 2$$

(2) 当考虑摩擦时，动量定理变为:

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v-F+fmg$$

化简后得到: $v\mathrm{d}v=\frac{(-Fl+fgm_0x)}{m_0x}\mathrm{d}x$

积分,并利用初始条件$x=l$时，$v=0$,
得到当$x=l/2$时:

$$v^2=\frac{2lF}{m_0}\ln 2-fgl$$