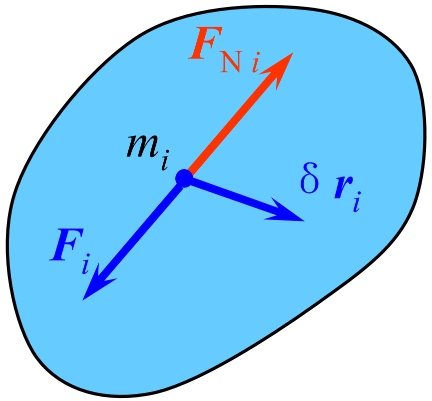
2、广义坐标表示的质点系的平衡条件

1. 广义坐标表示的质点系的平衡条件



理想约束下，含n个质点的质点系处于平衡，根据虚位移原理有：

$$\sum \delta W_{Fi} = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

设作用在第i个质点上的主动力的合力$\boldsymbol{F}_i$在三个坐标轴上的投影分别为（F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}），

将虚位移的表达式 $\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$ 代入虚功方程，得到：

$$\sum \delta W_{Fi} = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + F_{iy} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k + F_{iz} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k = 0$$

如令

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (k = 1, 2, \cdots, \ N)$$

$$Q_k=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\quad (k=1,2,\cdots,\ N)$$

Q_k称为与广义坐标q_k相对应的广义力。

广义力的量纲由与之相对应的广义坐标而定。当q_k为线位移时，Q_k是力的量纲；当q_k为角位移时，Q_k是力矩的量纲。

引入广义力后，质点系的虚位移原理可表示为：

$$\delta W_F=\sum_{k=1}^{N}Q_k\delta q_k=0$$

由于广义坐标的独立性 $\Longrightarrow$ δq_k可以任意取值。

$$\Longrightarrow\quad Q_1=Q_2=\cdots=Q_N=0$$

对于具有理想约束的质点系，其平衡的充分必要条件是：作用于质点系的所有广义力均等于零.（此即为用广义坐标表示的质点系的平衡条件）

求解的核心问题：计算系统的广义力。

2. 广义力的计算方法

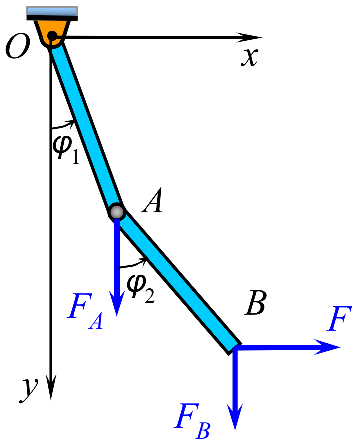
2.1 直接根据定义计算广义力

$$Q_k=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k})\quad(k=1,2,\cdots,\ N)$$

需要知道：作用在每个质点上的**主动力**；系统的**广义坐标**；每个质点的**坐标关于广义坐标的函数**。

例5 已知：杆OA和AB以铰链相连，O端悬挂于圆柱铰链上，杆长$OA=a$，$AB=b$，杆重和铰链的摩擦都忽略不计，今在A点和B点分别作用向下的铅锤力F_A 和F_B，又在B点作用一水平力F。

试求：平衡时φ_1,φ_2与F_A，F_B，F之间的关系。



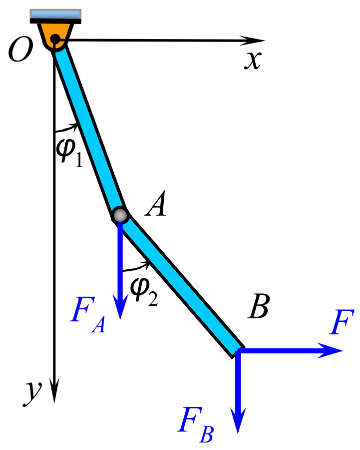
解：因为属于平面问题，系统有A、B两个质点，其位置可由4个坐标x_A,y_A,x_B,y_B完全确定。

由于OA杆和AB杆的长度不变，可以列出两个约束方程：

$$x_A^{\ 2}+y_A^{\ 2}=a^2\qquad (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=b^2$$

所以系统的**自由度为2**，可由**2个广义坐标**描述。

φ_1和 φ_2 之间是相互独立的，选择φ_1和 φ_2 为系统的两个广义坐标，计算其对应的广义力Q_1和Q_2.



根据广义力的定义：

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}) \quad (k = 1,2,\cdots, \quad N)$$

得到：

$$Q_1 = F_A\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} + F_B\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} + F\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1}$$

$$Q_2 = F_A\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} + F_B\frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} + F\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2}$$

由于 $y_A = a\cos\varphi_1$

$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2 \ , \quad x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$

所以

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} = -a\sin\varphi_1 \, , \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} = -a\sin\varphi_1 \, , \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} = a\cos\varphi_1$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} = 0 \, , \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} = -b\sin\varphi_2 \, , \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} = -b\cos\varphi_2$$

代入广义力Q_1和Q_2的表达式，得到:

$$Q_1=-(F_A+F_B)a\sin\varphi_1+Fa\cos\varphi_1=0$$
$$Q_2=-F_Bb\sin\varphi_2+Fb\cos\varphi_2=0$$

利用广义坐标表示的质点系的平衡条件，系统平衡时，所有广义力等于0.

解得: $\boxed{\tan\varphi_1=\dfrac{F}{F_A+F_B},\tan\varphi_2=\dfrac{F}{F_B}}$

基本步骤:

1、 确定系统的自由度并选择合适的广义坐标;
2、确定每个质点上的主动力，写出每个质点的坐标关于广义坐标的函数;
3、根据定义写出每个广义坐标对应的广义力的表达式；
4、计算与主动力对应的质点坐标关于每个广义坐标的偏导数;
5、将主动力和偏导数结果代入广义力表达式计算每个广义力;
6、根据所有广义力等于零的平衡条件计算未知量。

2.2 利用广义虚位移的任意性计算广义力

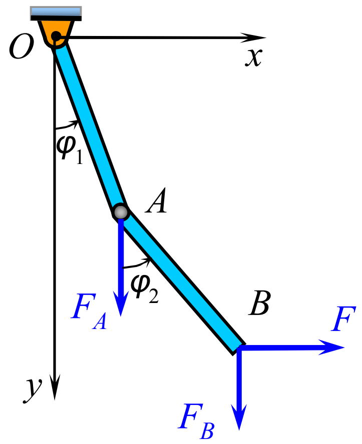
我们知道 $\delta W_F = \sum_{k=1}^{N} Q_k \delta q_k$

利用虚位移的任意性，令某一个 δq_k 不等于零，而另外N-1个广义虚位移皆等于零，代入上式，得到：

$$Q_k = \frac{\delta W_F}{\delta q_k}$$

例6 已知：杆*OA*和*AB*以铰链相连，*O*端悬挂于圆柱铰链上，杆长*OA*=*a*，*AB*=*b*，杆重和铰链的摩擦都忽略不计，今在*A*点和*B*点分别作用向下的铅锤力F_A 和F_B，又在*B*点作用一水平力*F*。

试求：平衡时φ_1, φ_2对应的广义力。



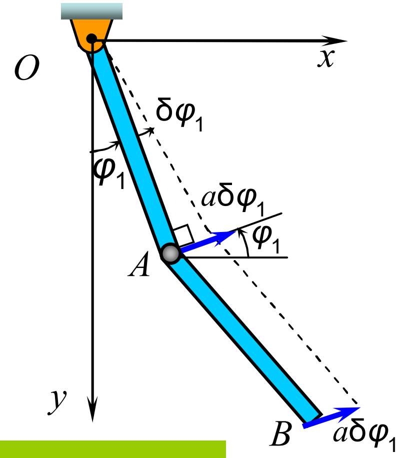
解：φ_1和 φ_2之间是相互独立的，选择φ_1和 φ_2为系统的两个广义坐标，其对应的广义力为Q_1和Q_2.

质点位置由广义坐标表示为：

$$x_A = a\sin\varphi_1, \quad y_A = a\cos\varphi_1$$

$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2, \quad y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$

1、保持φ_2不变，只有$\delta\varphi_1$时，可得一组虚位移：



$$\delta y_A = \delta y_B = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$

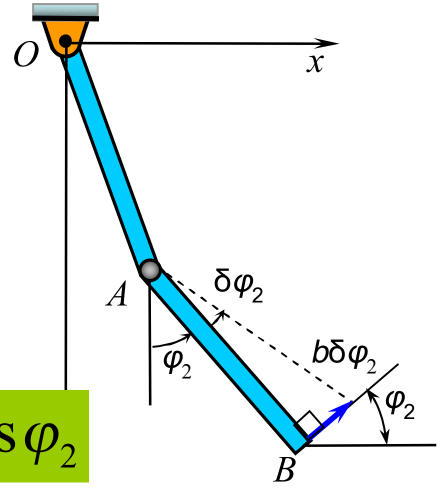
$$\delta x_A = \delta x_B = a\cos\varphi_1\delta\varphi_1$$

此虚位移也可由*A*、*B*两点的虚位移分别在*x*和*y*轴分解得到（几何法）。

对应于φ_1的广义力Q_1为：

$$Q_1 = \frac{\sum\delta W_1}{\delta\varphi_1} = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_1} = -(F_A + F_B)a\sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1$$

2、保持φ_1不变，只有$\delta\varphi_2$时，可得另一组虚位移：



$$\delta x_A = \delta y_A = 0$$

$$\delta x_B = b\cos\varphi_2\delta\varphi_2; \quad \delta y_B = -b\sin\varphi_2\delta\varphi_2$$

对应于φ_2的广义力Q_2为：

$$Q_2 = \frac{\sum\delta W_2}{\delta\varphi_2} = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_2} = -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2$$

与第一种方法计算得到的结果相同。

实际应用中，第二种方法往往比较方便。

基本步骤:

1、 确定系统的自由度并选择合适的广义坐标;

2、确定每个质点上的主动力，写出每个质点的坐标关于广义坐标的函数;

3、令某个广义坐标为变量，其他所有广义坐标为常量，用变分方法得到每个主动力相关的坐标关于当前广义坐标的变分（虚位移）；

4、将主动力和变分结果（虚位移）代入公式 $Q_k = \dfrac{\delta W_F}{\delta q_k}$ 计算当前广义力;

5、换一个广义坐标，重复上述两个步骤，计算其他的广义力;

6、根据所有广义力等于零的平衡条件计算未知量。

注意事项:

1、本质上仍为虚位移原理，不同的是: 质点的位形选取了广义坐标表示;

2、适用条件: 理想、完整约束;

3、选择合适的广义坐标能使问题变得简单;

4、求解约束力时，需将产生该约束力的约束去掉，变约束力为主动力求解;

5、约束中存在非理想约束，需要将非理想约束系统用主动力代替。