3、保守系统的平衡条件
平衡的稳定性

1. 保守系统的平衡条件

如果作用在质点系上的主动力都是有势力，则质点系称为保守系统。

系统的势能可以写成各质点坐标的函数:

$$V = V(x_1,\ y_1,\ z_1, \cdots,\ x_n,\ y_n,\ z_n)$$

理想约束下，含n个质点的质点系处于平衡，根据虚位移原理有：

$$\delta W_F = \sum \delta W_{Fi} = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0$$

势力场中，各力的投影可以用系统的势能表示为:

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

代入上述虚功方程，得到:

$$\delta W_F = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) = -\delta V$$

于是，虚位移原理的表达式变为： $\delta V = 0$

势力场中，具有理想约束的质点系的平衡条件为：质点系的势能在平衡位置处的一阶变分等于零。

如果用广义坐标表示质点的位置，则系统的势能可以写成广义坐标的函数:

$$V = V(q_1,\ q_2, \cdots,\ q_N)$$

根据广义力的表达式，在势力场中可将广义力Q_k写成势能表示的形式:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k})$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k})$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

这提供了计算广义力的一种方法，即在保守系统中，广义力等于系统势能对于相应广义坐标的偏导数。我们称之为计算广义力的第三种方法，某些情况运用特别方便!

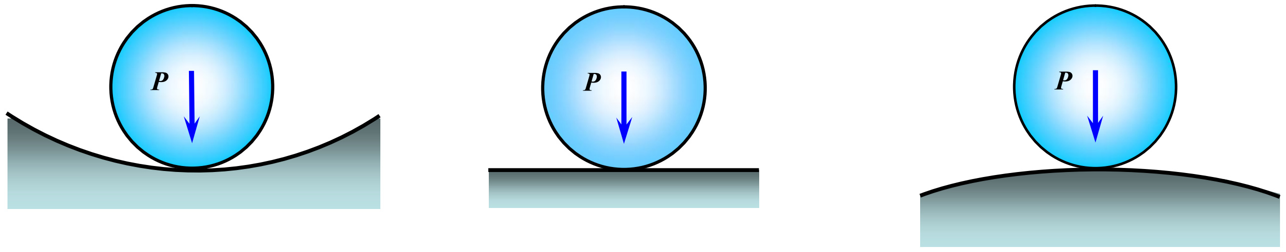
这样，由广义坐标表示的平衡条件可以写成:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., N)$$

势力场中,具有理想约束的质点系的平衡条件为：质点系的势能对于每一个广义坐标的偏导数分别等于零。

2. 保守系统平衡的稳定性

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial q_k}=\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$$



(a) $V=-mg(R-r)\sin\varphi\ (\varphi=90°)$ 稳定平衡

(b) $V=mgr$ 随遇平衡

(c) $V=mg(R+r)\sin\varphi\ (\varphi=90°)$ 不稳定平衡

稳定平衡：在平衡位置处系统势能具有极小值。

不稳定平衡：在平衡位置上系统势能具有极大值。

随遇平衡：系统在某位置附近其势能是不变的。

对于一个自由度的系统，系统只有一个广义坐标q，因此系统势能可以表示为q的一元函数$V=V(q)$。当系统平衡时，在平衡位置处有：$\mathrm{d}V/\mathrm{d}q=0$.

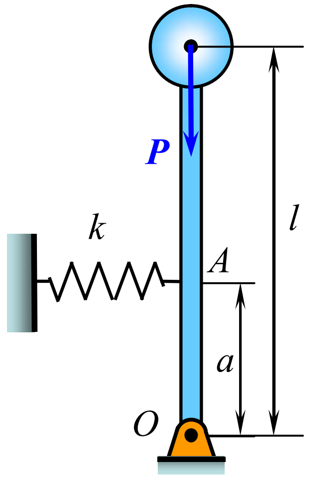
如果系统处于稳定平衡状态，则在平衡位置处系统势能具有极小值。

即系统势能对广义坐标的二阶导数大于零

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}>0$$ ——单自由度系统平衡的稳定性判据

例7、如图所示一倒置的摆，摆锤重量为P，摆杆长度为l，在摆杆上的点A连有一刚度为k的水平弹簧，摆在铅直位置时弹簧未变形。设$OA=a$，摆杆重量不计。

试求：摆杆的平衡位置及稳定平衡时所应满足的条件。



解：该系统是一个自由度系统，选择摆角φ为广义坐标。

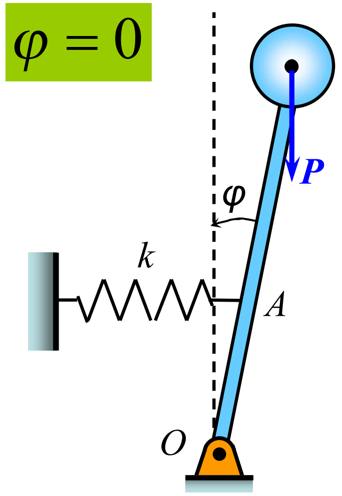
摆的铅直位置为摆锤重力势能和弹簧弹性势能的零点。

系统的总势能为

$$V=-Pl(1-\cos\varphi)+\frac{1}{2}ka^2\varphi^2=-2Pl(\sin\frac{\varphi}{2})^2+\frac{1}{2}ka^2\varphi^2$$

由于摆角很小，所以 $\sin\frac{\varphi}{2}\approx\frac{\varphi}{2}$ 得到：$V=\frac{1}{2}(ka^2-Pl)\varphi^2$

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}=(ka^2-Pl)\varphi$ 由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}=0$ 得到系统的平衡位置为 $\varphi=0$



$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}=ka^2-Pl$ 对于稳定平衡，要求 $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\varphi^2}>0$

即 $ka^2-Pl>0$ 得到：$a>\sqrt{\frac{Pl}{k}}$