

运动学综合应用举例

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组



运动学综合应用举例

1. 运动学综合应用：机构运动学分析。

2. 已知运动机构

联接点

未知运动机构

能够找到位置与时间的
函数关系

建立运动方程

速度和加速度

解析法：求得运动全过程
的速度和加速度

难以建立运动方程
只关心某一瞬时运动

点的合成运动

刚体的平面运动

接触滑动

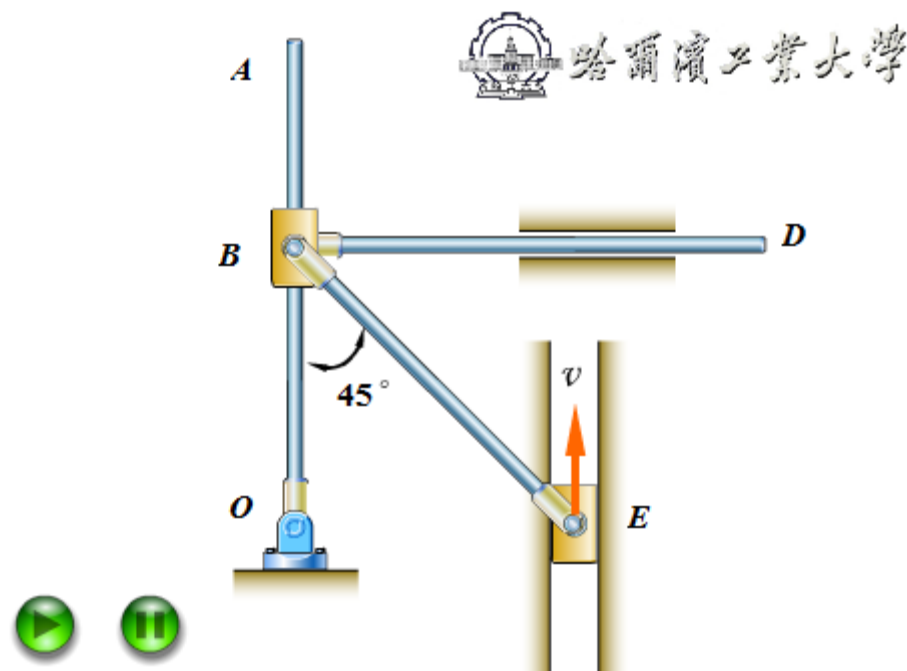
铰链联接

求得某一瞬时的速度
和加速度

例1

已知：图示平面机构，滑块 B 可沿杆 OA 滑动。杆 BE 与 BD 分别与滑块 B 铰接， BD 杆可沿水平轨道运动。滑块 E 以匀速 v 沿铅直导轨向上运动，杆 BE 长为 $\sqrt{2}l$ 。图示瞬时杆 OA 铅直，且与杆 BE 夹角为 45° 。

求：该瞬时杆 OA 的角速度与角加速度。



解: 1. 杆 BE 作平面运动, 瞬心在 O 点。

$$\omega_E = \frac{v}{OE} = \frac{v}{l} \quad v_B = \omega_E \cdot OB = v$$

取 E 为基点

$$\vec{a}_B = \vec{a}_E + \vec{a}_{BE}^t + \vec{a}_{BE}^n$$

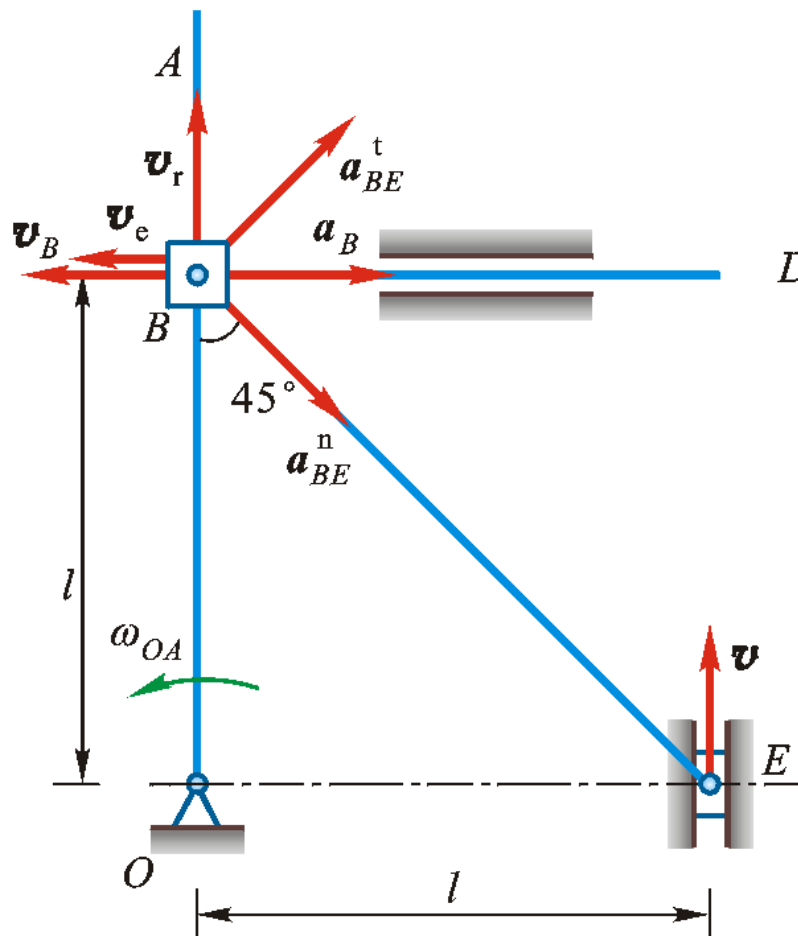
大小 ? 0 ? $\omega_E^2 \cdot BE$

方向 \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark

沿 BE 方向投影

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BE}^n = \frac{\sqrt{2}v^2}{l}$$

$$a_B = \frac{a_{BE}^n}{\cos 45^\circ} = \frac{2v^2}{l}$$



2.动点：滑块B 动系：OA杆

绝对运动：直线运动(BD)

相对运动：直线运动(OA)

牵连运动：定轴转动(轴O)

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

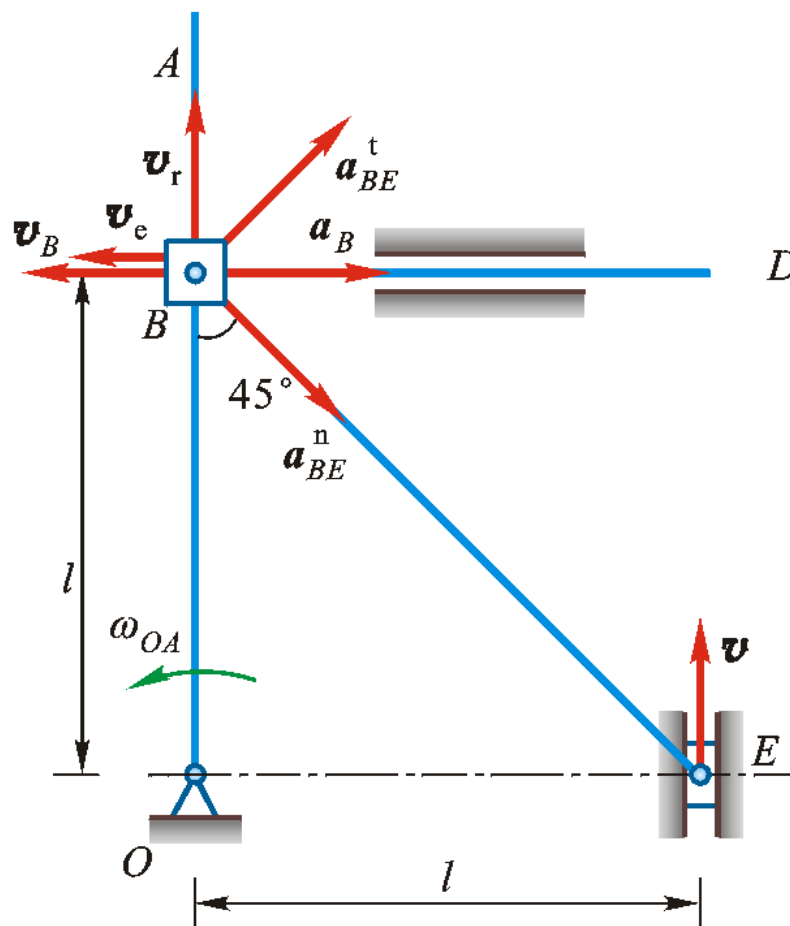
大小 v ? ?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark

沿BD方向投影

$$v_e = v_a = v$$

$$v_r = 0 \quad \omega_{OA} = \frac{v_e}{OB} = \frac{v}{l}$$



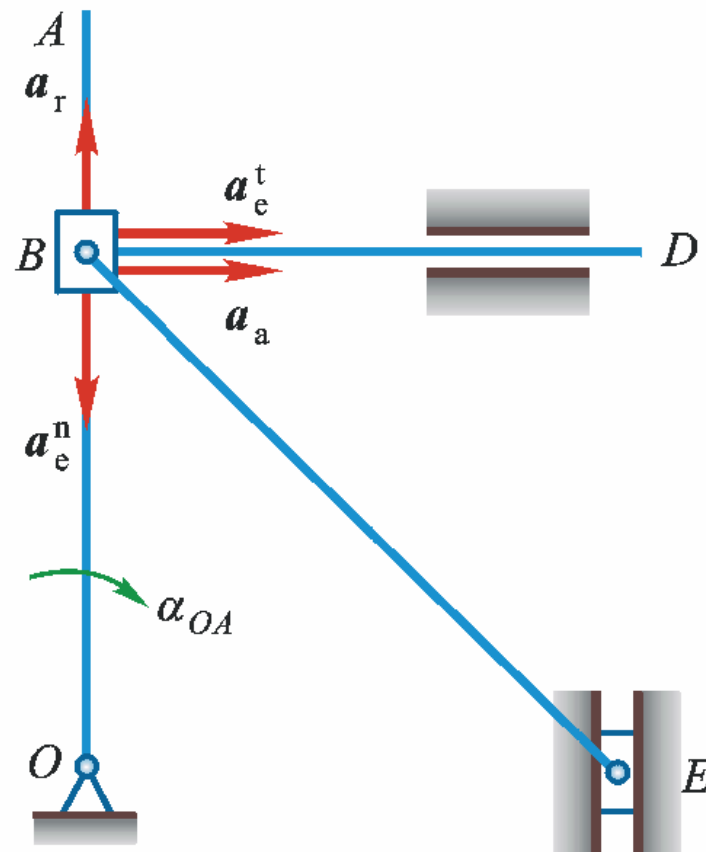
$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

大小	$\frac{2v^2}{l}$?	$\omega_{OA}^2 l$?	0
方向	√	√	√	√	√

沿BD方向投影

$$a_e^t = a_a = \frac{2v^2}{l}$$

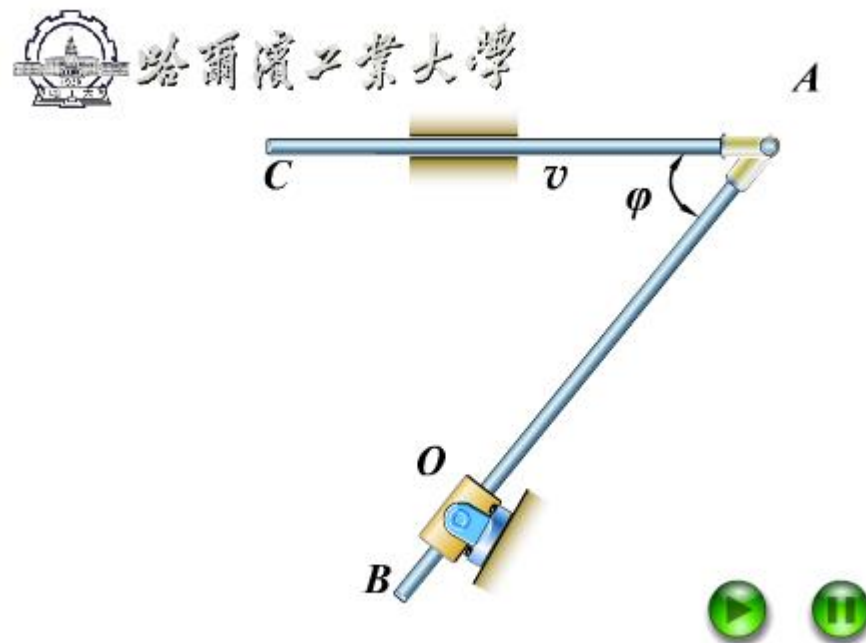
$$\alpha_{OA} = \frac{a_e^t}{OB} = \frac{2v^2}{l^2}$$



例2

已知：在图所示平面机构中，杆AC在导轨中以匀速 v 平移，通过铰链A带动杆AB沿导套O运动，导套O与杆AC距离为 l 。图示瞬时杆AB与杆AC夹角为 $\varphi = 60^\circ$ 。

求：此瞬时杆AB的角速度及角加速度。



解: 1. 动点 : 铰链A 动系 : 套筒O

$$2. \quad \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad v_e = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

大小 v ? ?

$$\text{方向 } \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad v_r = v_a \cos 60^\circ = \frac{v}{2}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

大小 0 ? $\omega_{AB}^2 \cdot AO$? $2\omega_e v_r$

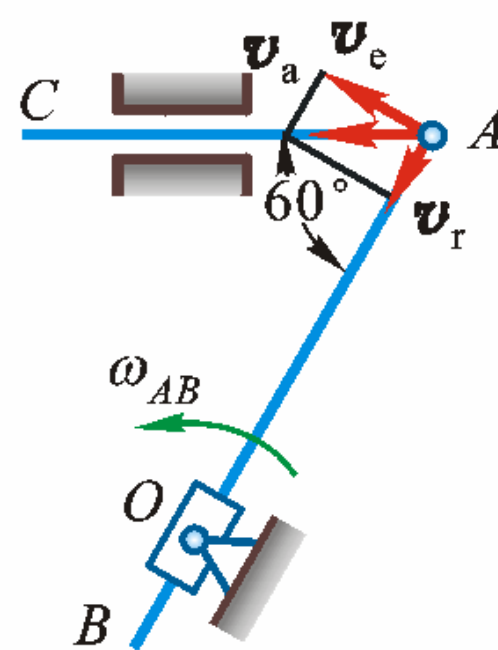
方向 $\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$

沿 \vec{a}_e^t 方向投影

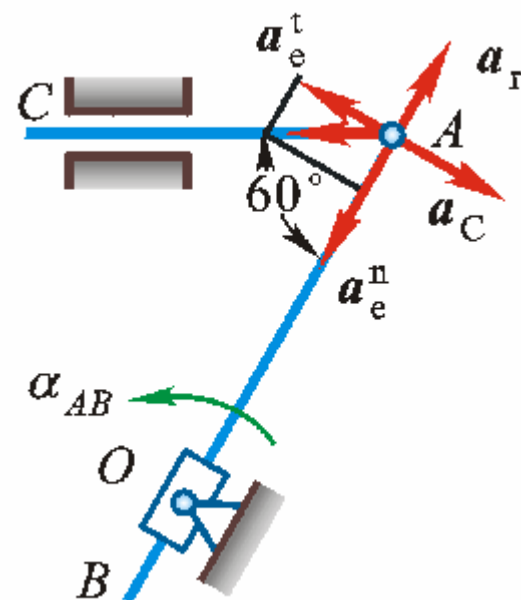
$$0 = a_e^t - a_c$$

$$a_e^t = a_c = \frac{3v^2}{4l}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_e^t}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$



绝对运动: 沿AC直线运动
相对运动: 沿AB直线运动
牵连运动: 以O为轴的定轴转动



解析法: 1. 取坐标系 Oxy

2. A点的运动方程

$$x_A = l \cot \varphi$$

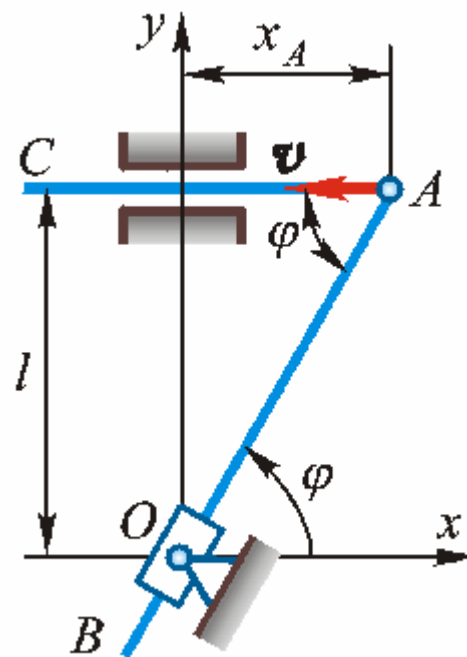
3. 速度、加速度

$$\dot{x}_A = -l\dot{\varphi} / \sin^2 \varphi = -v$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l} \sin^2 \varphi$$

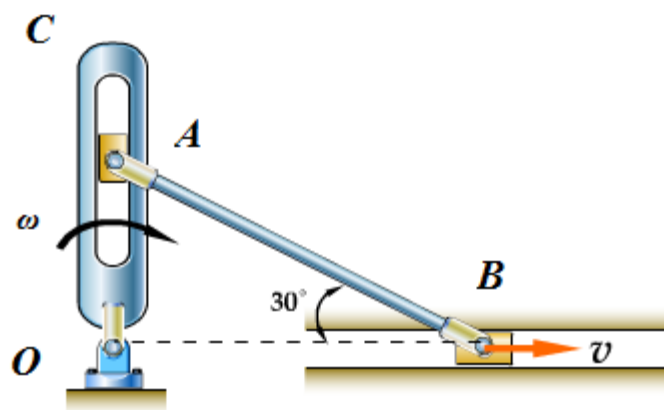
$$\ddot{\varphi} = \frac{v}{l} \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{v^2}{l^2} \sin^2 \varphi \cdot \sin 2\varphi$$

$$\text{当 } \varphi = 60^\circ \text{ 时有 } \omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{3v}{4l} \quad \alpha_{AB} = \ddot{\varphi} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$



例3

已知：如图所示平面机构， AB 长为 l ，滑块 A 可沿摇杆 OC 的长槽滑动。摇杆 OC 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，滑块 B 以匀速 $v = l\omega$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时 OC 铅直， AB 与水平线 OB 夹角为 30° 。



求：此瞬时 AB 杆的角速度及角加速度。

解: 速度分析

1. 杆AB作平面运动, 基点为B。

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$$

2. 动点: 滑块 A, 动系: OC 杆

$$\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$$

大小	$\omega \cdot OA$?	$l\omega$?
----	-------------------	---	-----------	---

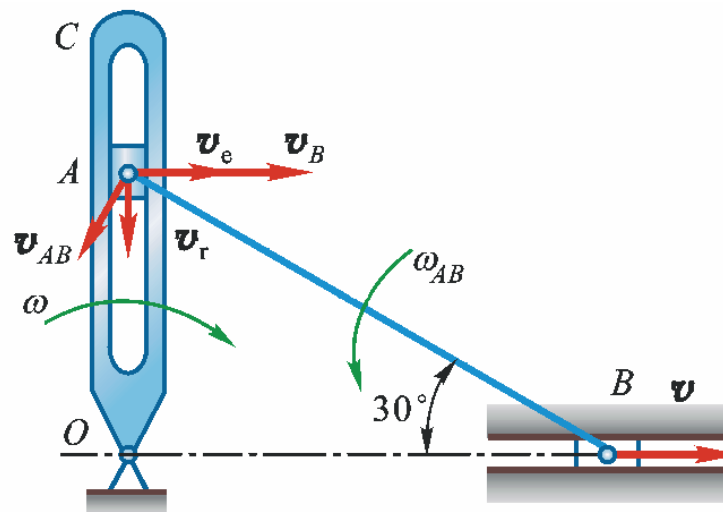
方向	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
----	--------------	--------------	--------------	--------------

沿 \vec{v}_B 方向投影 $v_B - v_{AB} \sin 30^\circ = v_e = \frac{l\omega}{2}$

$$v_{AB} = 2(v_B - v_e) = l\omega \quad \omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \omega$$

沿 \vec{v}_r 方向投影

$$v_r = v_{AB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega$$



绝对运动: 未知
 相对运动: 沿OC直线运动
 牵连运动: 以O为轴的定轴转动

加速度分析

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^t + \vec{a}_{AB}^n$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^t + \vec{a}_{AB}^n$$

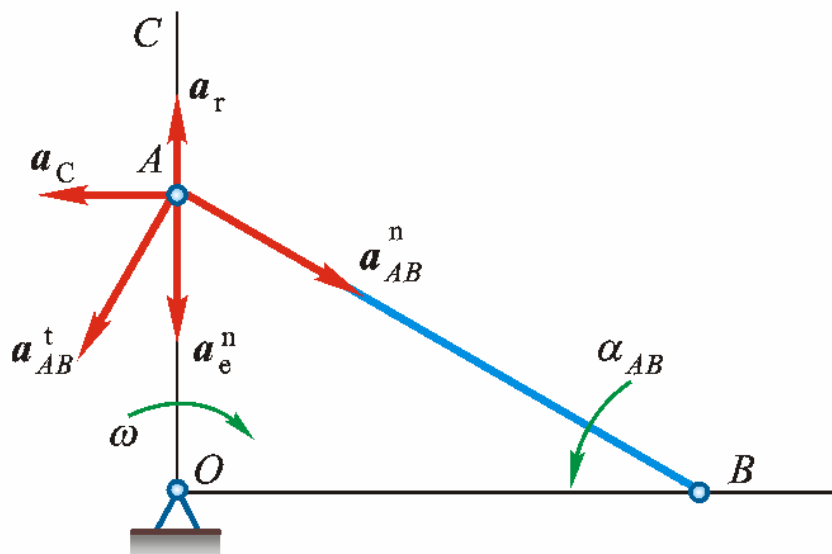
大小	0	$\frac{l\omega^2}{2}$?	$2\omega v_r$	0	?	$\omega_{AB}^2 l$
方向	√	√	√	√	√	√	√

沿 \vec{a}_C 方向投影

$$a_C = a_{AB}^t \sin 30^\circ - a_{AB}^n \cos 30^\circ$$

$$a_{AB}^t = 3\sqrt{3}l\omega^2$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^t}{AB} = 3\sqrt{3}\omega^2$$

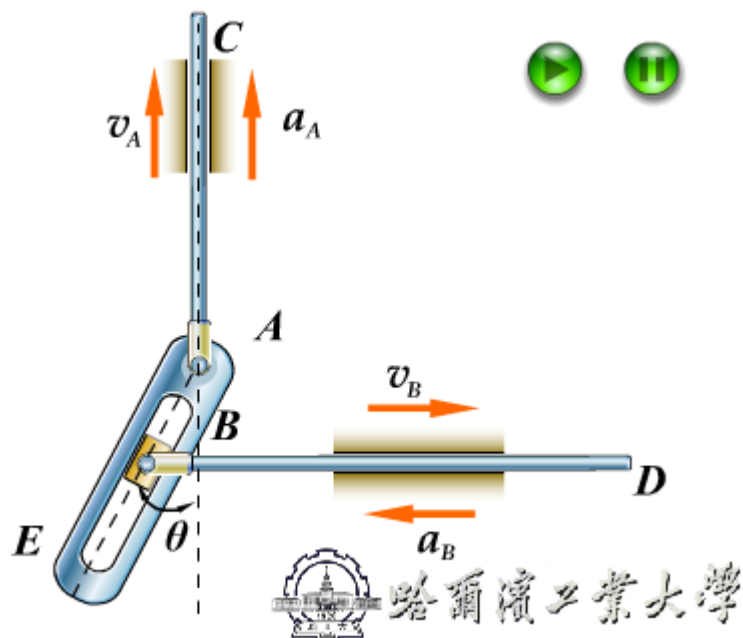


例4

如图所示平面机构中，杆 AC 铅直运动，杆 BD 水平运动， A 为铰链，滑块 B 可沿槽杆 AE 中的直槽滑动。图示瞬时

$$AB = 60\text{mm}, \theta = 30^\circ, v_A = 10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A = 10\sqrt{3}\text{mm/s}^2,$$

$$v_B = 50\text{mm/s}, a_B = 10\text{mm/s}^2。$$



求：该瞬时槽杆 AE 的角速度、角加速度及滑块 B 相对 AE 的加速度。

解:

速度分析

动点: 滑块B 动系: 杆AE

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

基点: A

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{B'} = \vec{v}_A + \vec{v}_{B'A}$$

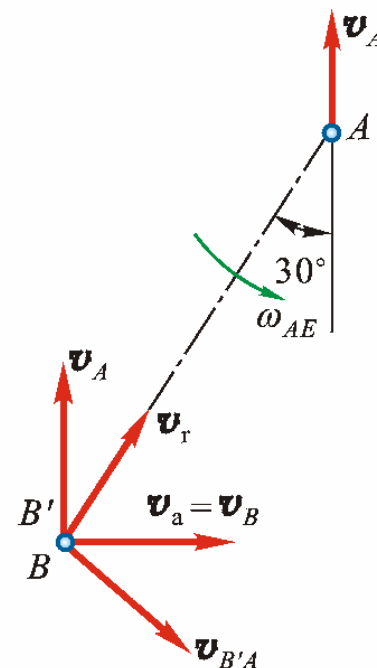
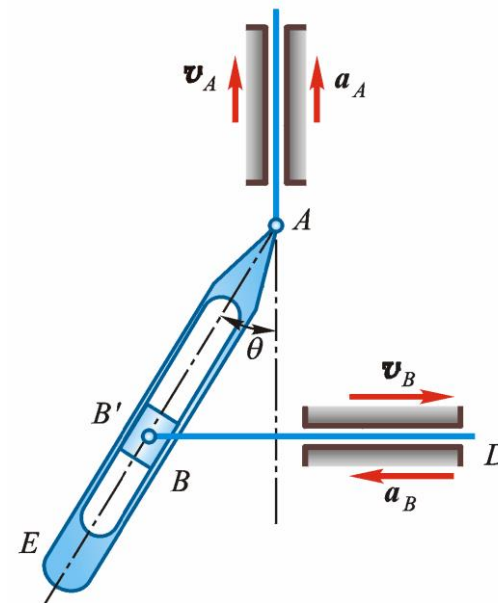
$$\rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B'A} + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_{B'A}: v_B \cos 30^\circ = -v_A \cos 60^\circ + v_{B'A}$$

$$\vec{v}_r: v_B \sin 30^\circ = v_A \sin 60^\circ + v_r$$

$$v_r = 10 \text{ mm/s}$$

$$\rightarrow \omega_{AE} = \frac{v_{B'A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}$$



绝对运动: 沿BD直线运动
 相对运动: 沿AE直线运动
 牵连运动: AE的平面运动

加速度分析

 \vec{a}_e

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B'A}^t + \vec{a}_{B'A}^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$\text{大小 } a_B \quad a_A \quad ? \quad \omega_{AE}^2 \cdot AB \quad ? \quad 2\omega_{AE}v_r$$

$$\text{方向 } \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$$

沿 $\vec{a}_{B'A}^t$ 方向投影

$$-a_B \cos 30^\circ = -a_A \sin 30^\circ + a_{B'A}^t - a_C$$

沿 \vec{a}_r 方向投影

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A \cos 30^\circ + a_{B'A}^n + a_r$$

$$a_r = -65 \text{ mm/s}^2$$

$$\alpha_{AE} = \frac{a_{B'A}^t}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ rad/s}^2$$

