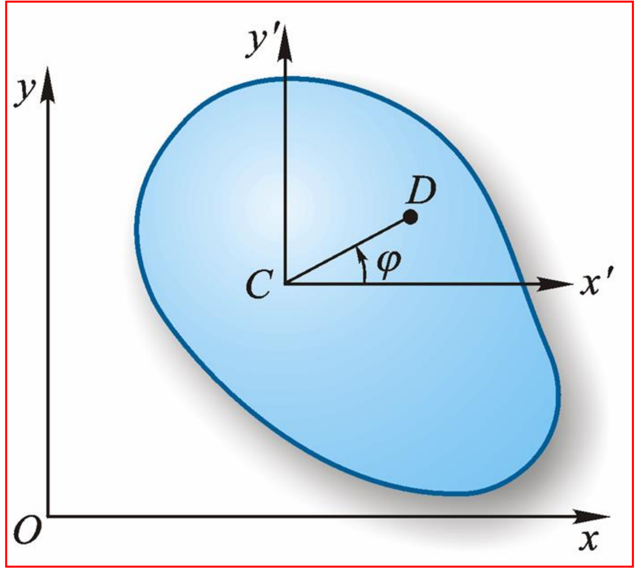
3、平面运动刚体的运动微分方程

平面运动刚体的运动微分方程

$Cx'y'$：过质心平移参考系

平面运动 $\begin{cases} \text{随质心平移} \\ \text{绕质心转动} \end{cases}$ ➡



$$\left. \begin{aligned} m\vec{a}_C &= \Sigma \vec{F}^{(\mathrm{e})} \\ J_C\alpha &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma \vec{F}^{(\mathrm{e})} \\ J_C\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned} \right\}$$

投影式：

$$\left. \begin{aligned} ma_{Cx} &= \Sigma F_x^{(\mathrm{e})} \\ ma_{Cy} &= \Sigma F_y^{(\mathrm{e})} \\ J_C\alpha &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned} \right\}$$

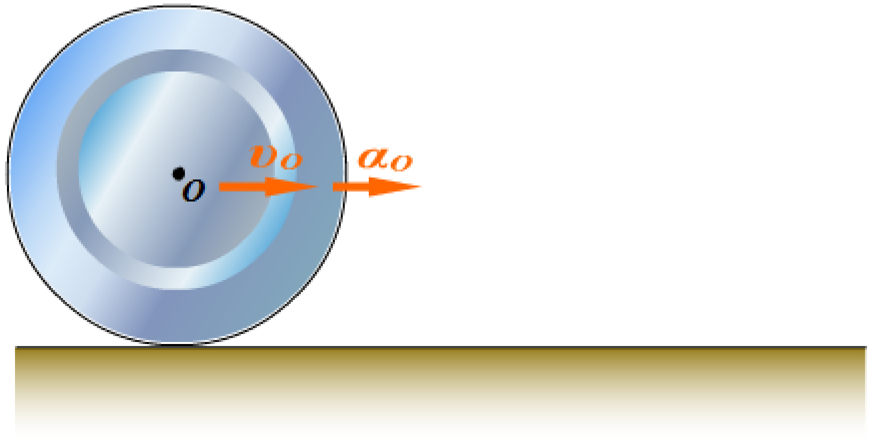
$$\left. \begin{aligned} ma_C^{\mathrm{t}} &= \Sigma F_t^{(\mathrm{e})} \\ ma_C^{\mathrm{n}} &= \Sigma F_n^{(\mathrm{e})} \\ J_C\alpha &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned} \right\}$$

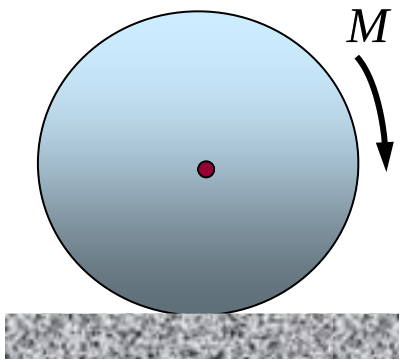
以上各组均称为刚体平面运动微分方程

$a_C = \alpha = 0$ ➡ 平面任意力系平衡方程

例1

已知：半径为r，质量为m 的均质圆轮沿水平直线滚动，如图所示. 设轮的惯性半径为 ρ_C，作用于轮的力偶矩为M . 求轮心的加速度. 如果圆轮对地面的滑动摩擦因数为f，问力偶M 必须符合什么条件不致使圆轮滑动?

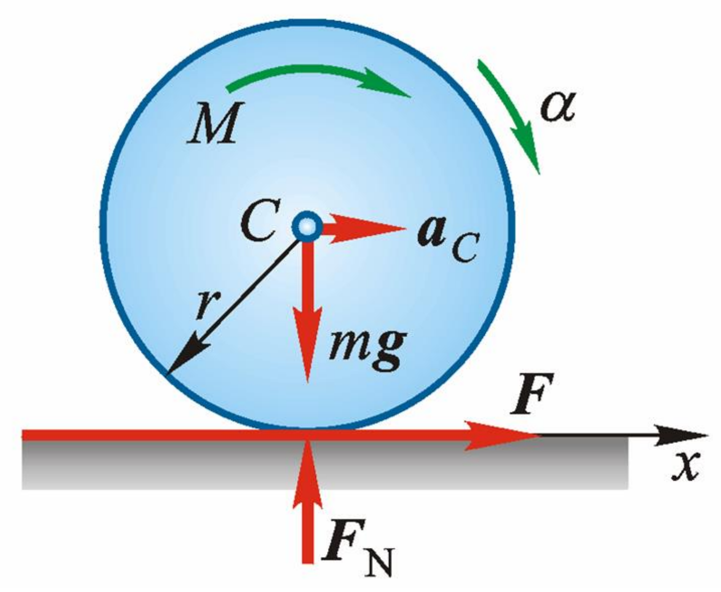




解： 分析圆轮，受力和运动情况如图所示。

由平面运动刚体运动微分方程：

$$\left.\begin{aligned} m\boxed{a_C} &= F \\ m\boxed{0} &= F_N - mg \\ m\rho_C^2\alpha &= M - Fr \end{aligned}\right\}$$



$$a_C = r\alpha$$

$$a_C = \frac{Mr}{m\left(\rho_C^2 + r^2\right)},\quad M = \frac{F\left(r^2 + \rho_C^2\right)}{r},$$

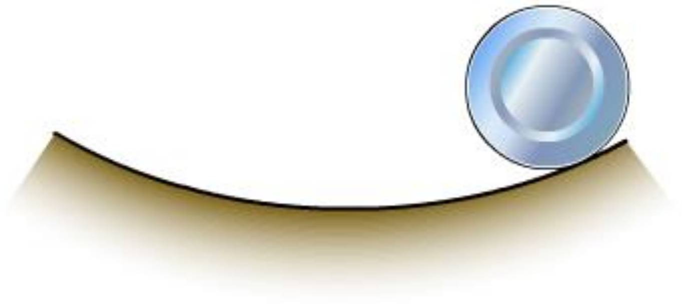
$$F = ma_C,\quad F_N = mg$$

纯滚动的条件： $F \le f_s F_N$ 即 $M \le f_s mg\dfrac{r^2 + \rho_C^2}{r}$

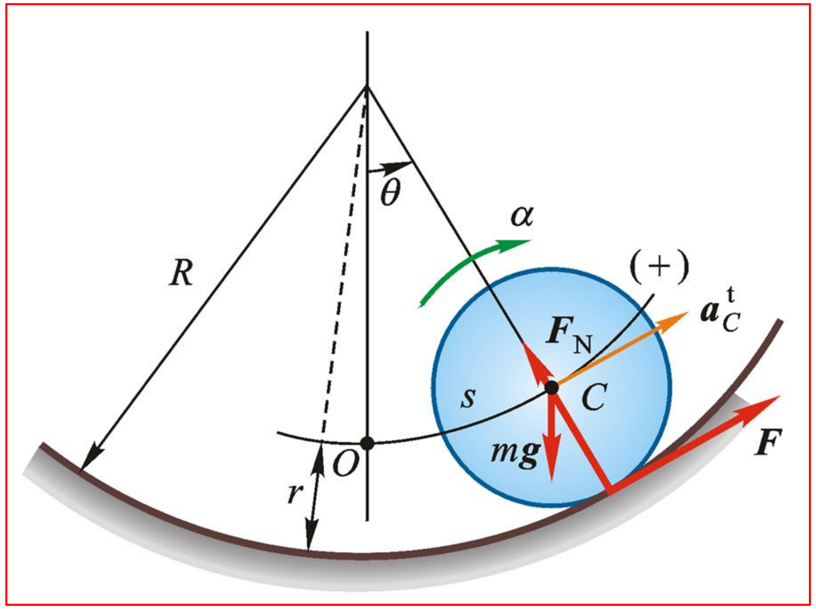
例2

已知：均质圆轮半径为r 质量为m ，受到轻微扰动后，在半径为R 的圆弧上往复滚动，如图所示. 设表面足够粗糙，使圆轮在滚动时无滑动.

求: 质心C 的运动规律.



解: 分析圆轮，受力和运动情况如图所示。



$$ma_C^t = F - mg\sin\theta$$

$$m\frac{v_C^2}{R-r} = F_N - mg\cos\theta$$

$$J_C\alpha = -Fr$$

$$a_C^t = \alpha r \qquad s = (R-r)\theta$$

$$a_C^t = \ddot{s},\ J_C = \frac{1}{2}mr^2,\ \sin\theta \approx \theta\ (\theta很小)$$

$$\frac{3}{2}\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{R-r}s = 0$$

$$s = s_0\sin(\omega_0 t + \beta) \qquad \omega_0^2 = \frac{2g}{3(R-r)}$$

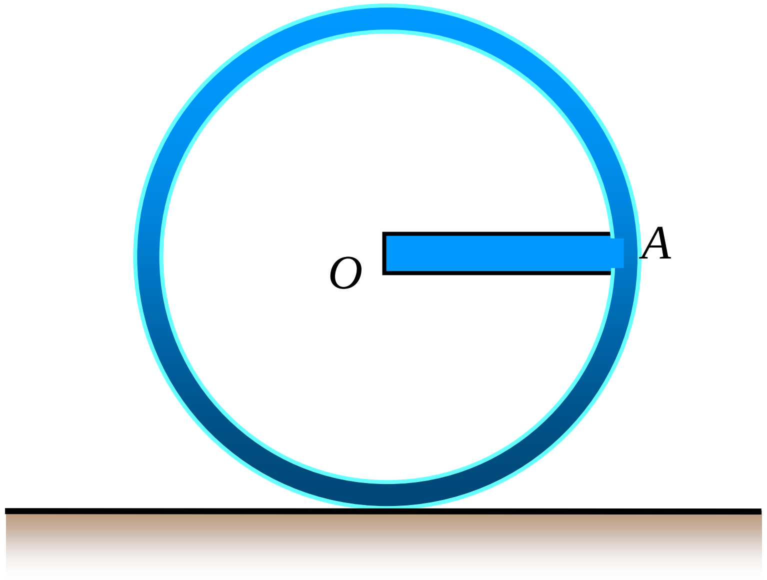
初始条件 $s = 0,\ \dot{s} = v_0$ $\Rightarrow$ $\beta = 0^\circ,\quad s_0 = v_0\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$

运动方程为 $$s = v_0\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}\cdot t\right)$$

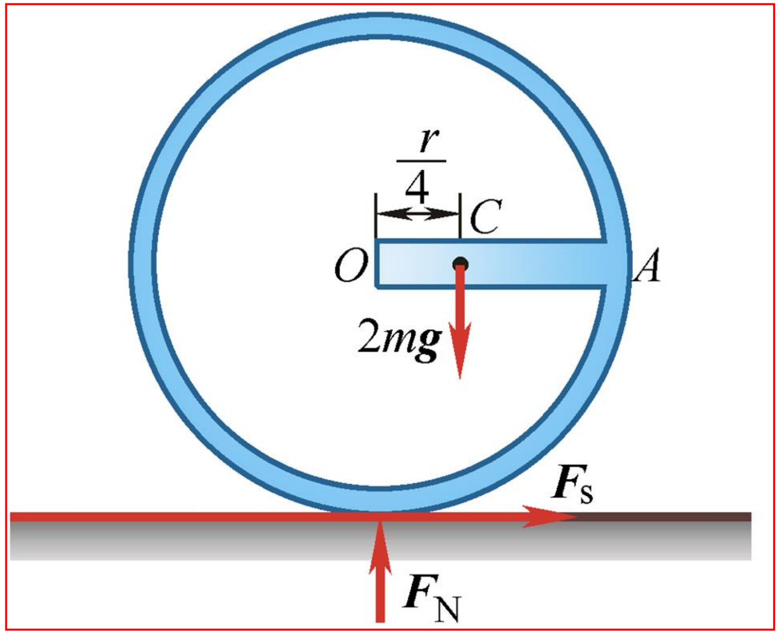
例3

已知：如图所示均质圆环半径为r，质量为m，其上焊接刚杆OA，杆长为r，质量也为m。用手扶住圆环使其在OA水平位置静止。设圆环与地面间为纯滚动。

求：放手瞬时，圆环的角加速度，地面的摩擦力及法向约束力。



解: 整体质心为C，其受力如图所示。



平面运动微分方程

$$2ma_{Cx} = F_s$$

$$2ma_{Cy} = 2mg - F_N$$

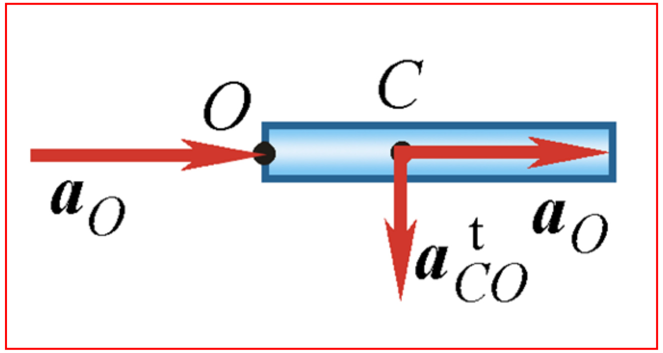
$$J_C\alpha = F_N\cdot\frac{r}{4} - Fr$$

F_S

其中： $$J_C = \frac{mr^2}{12} + m\left(\frac{r}{4}\right)^2 + mr^2 + m\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{29}{24}mr^2$$

由基点法有 $$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{co}^n + \vec{a}_{co}^t$$

$$a_{Cx} = a_O = r\alpha \qquad a_{Cy} = a_{CO}^t = \frac{1}{4}r\alpha$$



$$\alpha = \frac{3}{20}\frac{g}{r} \qquad F_s = \frac{3}{10}mg \qquad F_N = \frac{77}{40}mg$$