单自由度系统的受迫振动理论

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

本讲主要内容

1、单自由度系统的无阻尼受迫振动

2、单自由度系统的有阻尼受迫振动

1、单自由度系统的
无阻尼受迫振动

受迫振动

在外加激振力作用下的振动称为受迫振动。

简谐激振力是一种典型的周期变化的激振力。

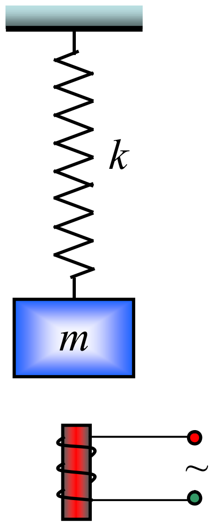
简谐激振力随时间的变化关系可写成:

$$F = H\sin(\omega t + \varphi)$$

其中：H 称为激振力的力幅，即激振力的最大值;

ω 是激振力的角频率;

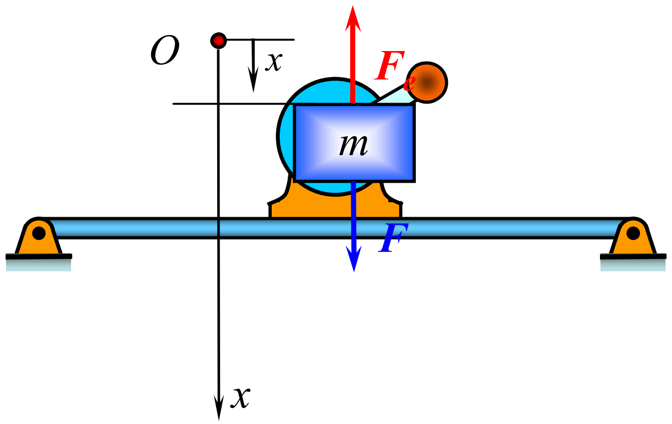
φ 是激振力的初相角。



（1）振动微分方程

物块的受力为恢复力F_e和激振力F。

取物块的平衡位置为坐标原点，x轴向下为正。



则恢复力可表示为: $F_e = -kx$

激振力表示为: $F = H\sin(\omega t + \varphi)$

质点的运动微分方程为: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + H\sin(\omega t + \varphi)$$

方程两边同除以m，并令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ ， $h = \dfrac{H}{m}$ 得到:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = h\sin(\omega t + \varphi)$$ ——无阻尼受迫振动微分方程的标准形式

解可以写成: $x = x_1 + x_2$ x_1对应齐次方程的通解; x_2对应的是特解。

齐次方程的通解可写为: $x_1 = A\sin(\omega_0 t + \theta)$

特解可写为: $x_2 = b\sin(\omega t + \varphi)$

将x_2代入微分方程，得到:

$$-b\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + b\omega_0^2 \sin(\omega t + \varphi) = h\sin(\omega t + \varphi)$$

解得: $b = \dfrac{h}{\omega_0^2 - \omega^2}$

微分方程的全解为: $x = A\sin(\omega_0 t + \theta) + \dfrac{h}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \varphi)$

结果表明: 无阻尼受迫振动是由两个谐振动合成的。第一部分是频率为固有频率的自由振动 $A\sin(\omega_0 t + \theta)$; 第二部分是频率为激振力频率的振动 $\dfrac{h}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \phi)$ ，称为受迫振动。第一部分会逐渐衰减，而第二部分则是稳定的。

（2）受迫振动的振幅

$$x_2 = \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \varphi)$$

系统的受迫振动为**简谐振动**，振动频率也等于激振力的频率，振幅大小与运动的初始条件无关，而与振动系统的固有频率 ω_0、激振力的频率 ω、激振力的力幅 H 相关。

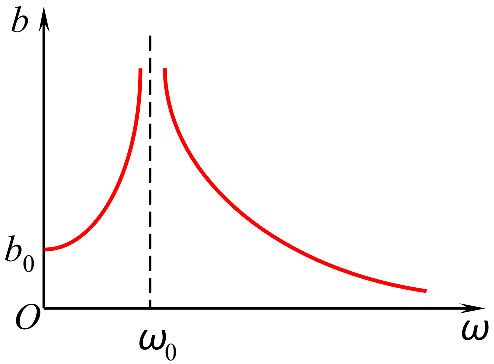
① 若 $\omega \to 0$，意味着激振力的周期($T=2\pi/\omega$)趋于无穷大，即**激振力为恒力**。

此时系统不振动，所谓的**振幅**为静力 H 作用下的**静变形**，即

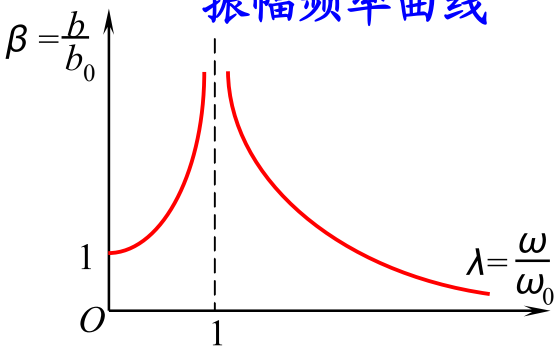
$$b = \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow b_0 = \frac{h}{\omega_0^2} = \frac{H}{k}$$

②若 $0 < \omega < \omega_0$ 意味着 ω 越大，振幅 b 越大，即**振幅随着激振力频率单调上升**。当激振力频率接近系统固有频率时，振幅趋于无穷大。

③若 $\omega > \omega_0$ b 为负值，意味着受迫振动与激振力反向，此时**振幅随着激振力频率的上升而减小**。当激振力频率无穷大时，振幅趋于零。



振幅频率曲线



（3）共振现象

当 $\omega=\omega_0$ 时，即激振力频率等于系统的固有频率时，振幅b在理论上趋向无穷大，这种现象称为共振。

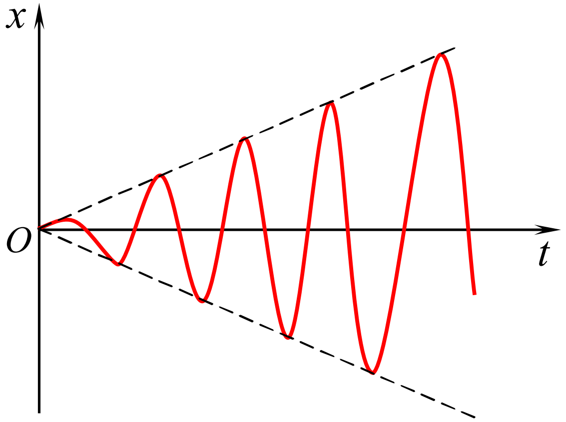
当 $\omega=\omega_0$ 时， $b=\dfrac{h}{\omega_0^2-\omega^2}$ 没有意义。

此时特解的形式应该为： $x_2=Bt\cos(\omega_0 t+\varphi)$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=h\sin(\omega t+\varphi)$ $\Longrightarrow$ $B=-h/2\omega_0$

共振时受迫振动的运动规律为 $x_2=-\dfrac{h}{2\omega_0}t\cos(\omega_0 t+\varphi)$

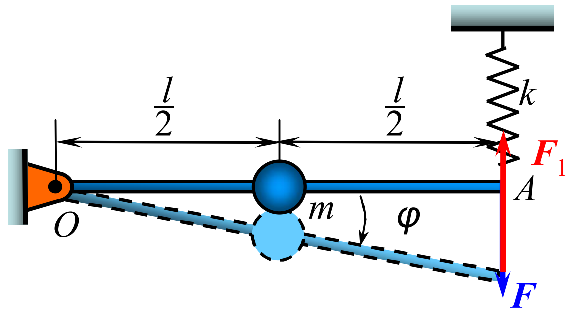
它的幅值为 $b=\dfrac{h}{2\omega_0}t$ 即：系统共振时，受迫振动的振幅随时间无限增大。



实际上，由于系统中阻尼的客观存在，共振时振幅不可能达到无限大。但一般来说，发生共振时，振幅都是相当大的，有时会带来破坏甚至是灾难性的后果，工程中确定系统的固有频率，如何避免发生共振是非常重要的课题。

例1 已知：如图长为l无重刚杆OA，其一端O铰支，另一端A水平悬挂在刚度系数为k的弹簧上，杆的中点装有一质量为m的小球，若在点A加一激振力$F=F_0\sin\omega t$ 其中激振力的频率 $\omega=\omega_0/2$ ，ω_0为系统的固有频率。忽略阻尼。

求：此系统的受迫振动规律。



解：设在任一瞬时刚杆摆动的角度为φ，则杆摆动的角加速度为 $\ddot{\varphi}$ ，分析刚杆受力。

系统的运动微分方程为 $J_O\alpha=(F-F_1)l$

即为：$m\left(\frac{l}{2}\right)^2\ddot{\varphi}=-kl^2\varphi+F_0 l\sin\omega t$

令 $\omega_0^2=\dfrac{kl^2}{m\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\dfrac{4k}{m}$ $\qquad h=\dfrac{F_0 l}{m\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\dfrac{4F_0}{ml}$

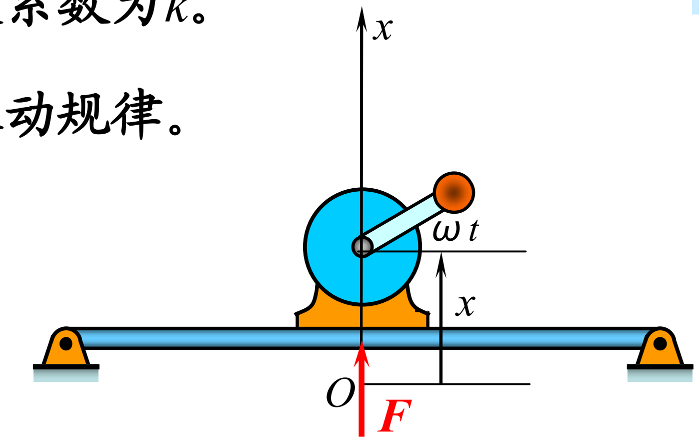
微分方程变为 $\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=h\sin\omega t$

受迫振动特解为 $\varphi=\dfrac{h}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$

将 $\omega=\dfrac{1}{2}\omega_0$ 代入上式得：$\boxed{\varphi=\dfrac{h}{\frac{3}{4}\omega_0^2}\sin\omega t=\dfrac{4F_0}{3kl}\sin\omega t}$

例2 如图表示带有偏心块的电动机，固定在一根弹性梁上，设电机的质量为m_1，偏心块的质量为m_2，偏心矩为e，弹性梁的刚度系数为k。

求：当电机以匀速角速度ω旋转时，系统的受迫振动规律。



解：将电机与偏心块视作一个质点系。假设电机的平衡位置为O，任意时刻t相对平衡位置的坐标为x，则偏心块的坐标为$x+e\sin\omega t$

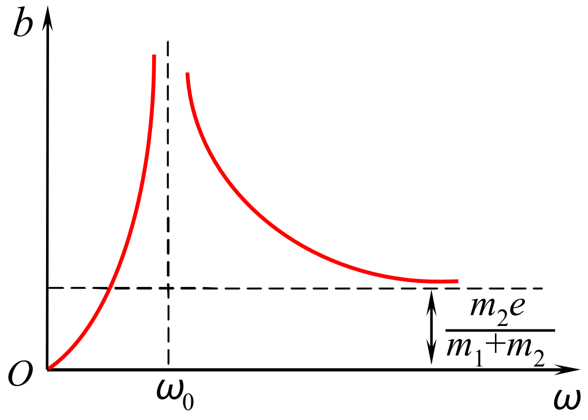
系统此时所受的恢复力为$\boldsymbol{F}=-kx$

列出质点系动量定理的微分形式：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum m_i v_{ix})=-kx$

即：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+m_2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+e\sin\omega t)]=-kx$

⇨ 微分方程 $(m_1+m_2)\ddot{x}+kx=m_2e\omega^2\sin\omega t$

令 $H=m_2e\omega^2$ ⇨ $h=\dfrac{m_2e\omega^2}{m_1+m_2}$



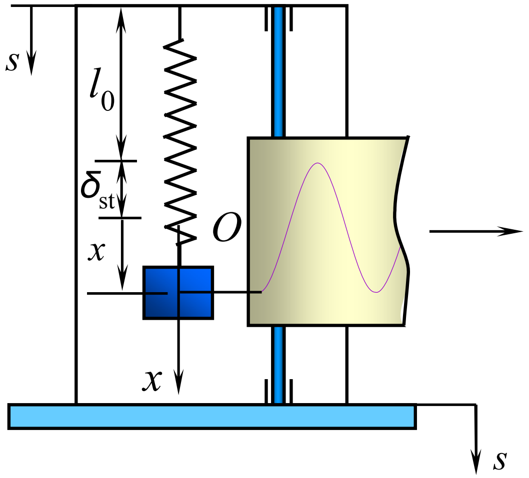
则受迫振动振幅为：

$$b=\frac{h}{\omega_0^2-\omega^2}=\frac{m_2e\omega^2}{k-(m_1+m_2)\omega^2}$$

⇨ $$x_2=\frac{h}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t=\frac{m_2e\omega^2}{k-(m_1+m_2)\omega^2}\sin\omega t$$

例3 如图为一测振仪的简图，其中物块质量为m，弹簧刚度系数 k，测振仪放在振动物体表面，将随物体而运动。设被测物体的振动规律为$s=e\sin\omega t$

求：测振仪中物块的运动微分方程及受迫振动规律。



解：测振仪随被测物体一起振动，所以弹簧悬挂点的运动规律也为 $s=e\sin\omega t$. 取$t=0$时物块的平衡位置为坐标原点O, x轴竖直向下。

如果弹簧的原长为l_0，净伸长为 δ_{st}。任意时刻t物块的坐标为x, 则弹簧的变形量为：

$$\delta=\delta_{st}+x-s$$

由此，得到物块的绝对运动的微分方程： $m\ddot{x}=mg-k(\delta_{st}+x-s)$

考虑到$mg=k\delta_{st}$, $s=e\sin\omega t$，代入上式得到：$m\ddot{x}+kx=ke\sin\omega t$

为无阻尼受迫振动的微分方程，激振力的力幅$H=ke$, 解为： $x=b\sin\omega t$

受迫振动振幅为：$b=\dfrac{h}{\omega_0^2-\omega^2}=\dfrac{ke}{m(\omega_0^2-\omega^2)}=\dfrac{e}{1-(\omega/\omega_0)^2}$

b为物块绝对运动的振幅。记录纸随着测振仪一起振动，其振幅为e. 记录纸上画出的振幅为物块相对于测振仪的相对振幅$a=|b-e|$。当 $\omega<<\omega_0$时，$b\approx 0$，有$a\approx e$。一般测振仪的物块质量较大，弹簧刚度系数k很小，使ω_0很小，测量振动时，物块几乎不动，记录纸上画出的振幅就接近于被测物体的振幅