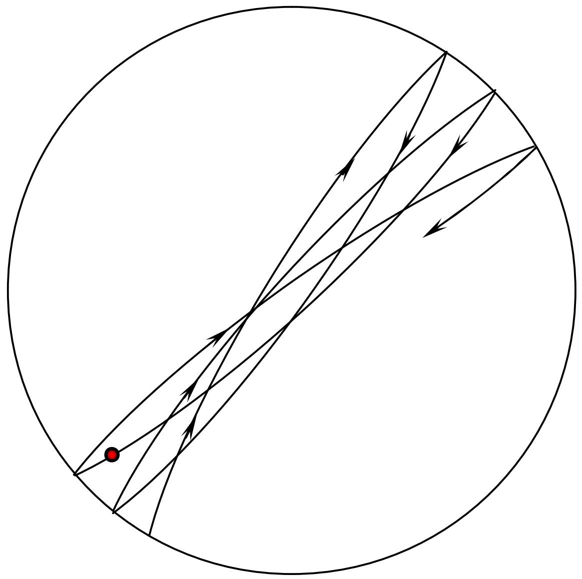
2、非惯性系中质点动力学的应用

地球总是在自转，固连在地面的参考系实质上是与我们关系最紧密，影响范围最广的非惯性参考系。我们平常所描述相对于地面的运动其实本质上都是相对运动。由于地球转动角速度较小，对一般工程问题影响较小，所以可以将其视作惯性参考系，但是对于很多问题，却有明显的影响。

（1）傅科摆

在北半球，球铰链悬挂一支摆，摆锤摆动时，与地球表面有相对速度，由于地球自转的影响，会产生向左的科氏加速度，对应的科式惯性力向右，因此它不会像单摆一样在一个固定平面内运动，而会向右偏斜，轨迹如右图所示。这种现象是傅科1851年发现的，称之为傅科摆。它证明了地球的自转。摆绳摆动的平面在缓慢地顺时针旋转，旋转一周的周期为：

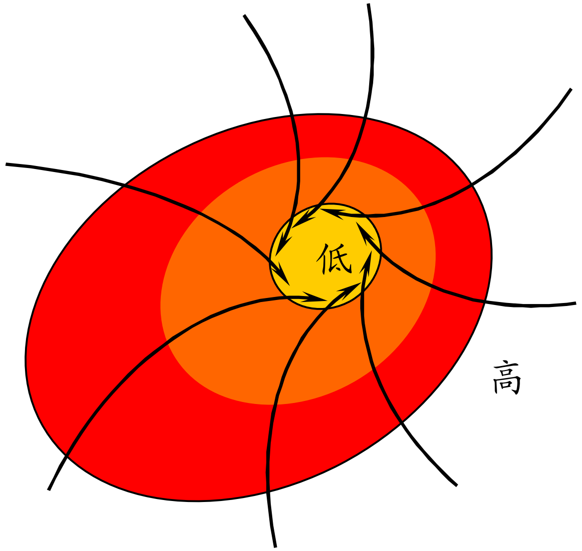


$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin\varphi}$$

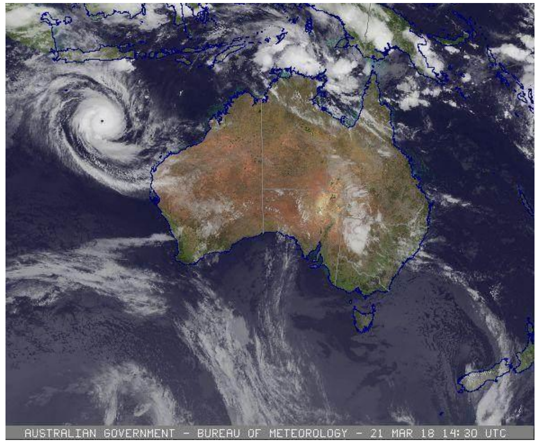
而在南半球，由于科式惯性力指向左侧，因此摆绳摆动的平面将逆时针缓慢转动。

（2）气旋的形成

在北半球，如果由于温度的变化，某地形成低压区的话，外部高压气体会向中心低压处流动。由于地球自转的影响，流动的气体将会受到向右侧的科式惯性力的作用，因此气体将不会直线运动，而是向右偏斜。所有的气体都是这样运动，这就导致在低压处形成逆时针方向的气旋。台风、热带风暴等即是由气旋产生的，中心处风速极高，破坏力极大。



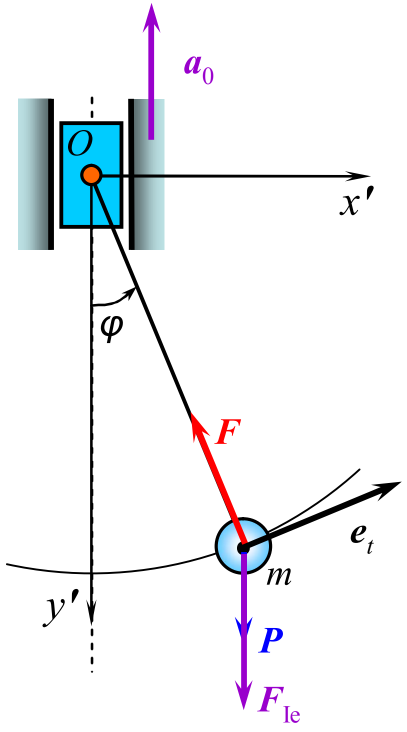
而在南半球，由于科式惯性力指向左侧，所有气体的运动而都是向左偏斜，因此会形成顺时针方向的气旋。



在非惯性系中，牵连惯性力和科氏惯性力是真实存在的，因此在非惯性系中质点的动力学基本方程中必须包含F_{Ie}和F_{IC}。但是，如果换个角度从惯性系中去观察质点的运动的话，会认为质点并没有受到惯性力的作用。

例 1 如图所示单摆，摆长为l，小球质量为m。其悬挂点O以加速度a_0向上运动。

求：此时单摆作微振动的周期。



解：在悬挂点固结一个平移坐标系$Ox'y'$。

小球相对于此动参考系的运动相当于悬挂点固定的单摆振动。

分析小球受力， 其中 $F_{Ie}=ma_0$

因动参考系作平移运动，所以科氏惯性力 $F_{IC}=0$

小球的相对运动动力学方程为：$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_{Ie}$

将上式投影到轨迹的切向轴e_t上，得：

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-(P+F_{Ie})\sin\varphi=-m(g+a_0)\sin\varphi$$

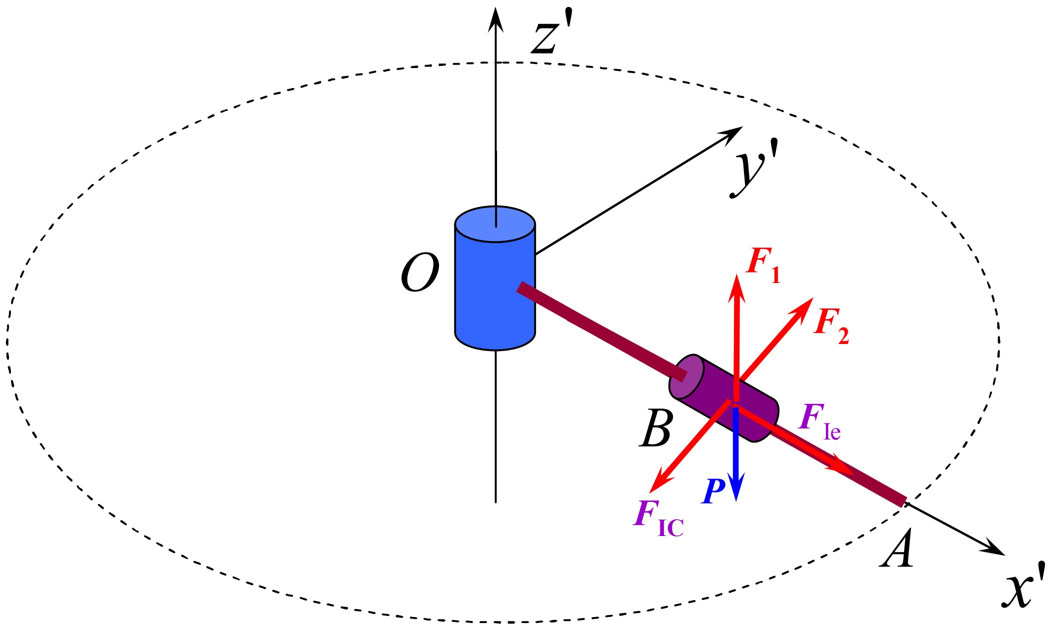
当摆作微振动时，φ 角很小，有 $\sin\varphi\approx\varphi$ 且 $s=l\varphi$

上式成为 $ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-m(g+a_0)\varphi$ 令 $\omega_0^2=\frac{g+a_0}{l}$ $\Rightarrow$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_0}}$$

例 2 已知：一直杆OA，长l=0.5m，可绕过端点O的z'轴在水平面内作匀速转动，其转动角速度ω= 2 π rad/s，在杆OA上有一质量为m=0.1kg的套筒B。设开始运动时，套筒在杆的中点处于相对静止，忽略摩擦。

求：套筒运动到端点A所需的时间及此时对杆的水平压力。



解：研究套筒B相对于OA的运动.

选取和杆OA一起转动的坐标系$O\,x'y'z'$为动参考系.

分析套筒受力，其中

$$F_{Ie} = m\omega^2 x' \qquad F_{IC} = 2m\omega\dot{x}'$$

套筒的相对运动动力学方程为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{IC}$$

将上式投影到x'轴上，得：$m\ddot{x}' = mx'\omega^2$

考虑到 $v_\mathrm{r} = \dot{x}'$ 上式变为：

$$\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{r}}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = x'\omega^2$$

考虑到$\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t=v_r$，上式分离变量并积分，即 $\int_0^{v_r} v_r \mathrm{d}v_r = \int_{\frac{l}{2}}^{x'} \omega^2 x' \mathrm{d}x'$

得：$\frac{1}{2}v_r^2 = \frac{1}{2}\omega^2(x'^2 - \frac{l^2}{4})$ 或 $v_r = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \omega\sqrt{x'^2 - \frac{l^2}{4}}$

上式再分离变量并积分 $\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{x'^2 - \frac{l^2}{4}}} = \int_0^t \omega \mathrm{d}t$

得：$t = \frac{1}{\omega}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-\frac{l^2}{4}}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\omega}\ln(2+\sqrt{3}) = 0.209\mathrm{s}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{Ie} + \boldsymbol{F}_{IC}$$

将相对运动动力学方程投影到y'轴上，得：$F_2 = F_{IC} = 2m\omega\dot{x}'$

套筒到达端点A，$x'=l$，代入上面v_r的表达式，得到：

$$v_r = \dot{x}' = \omega\sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega l$$

⇒ $F_2 = \sqrt{3}\omega^2 lm = \sqrt{3}(2\pi\,\mathrm{rad/s})^2 \times 0.5\mathrm{m} \times 0.1\mathrm{kg} = 3.419\mathrm{N}$