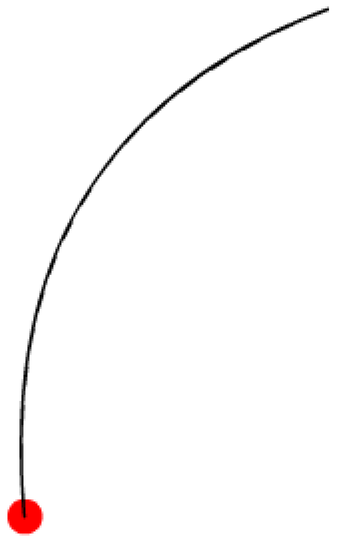
5、点的速度合成定理

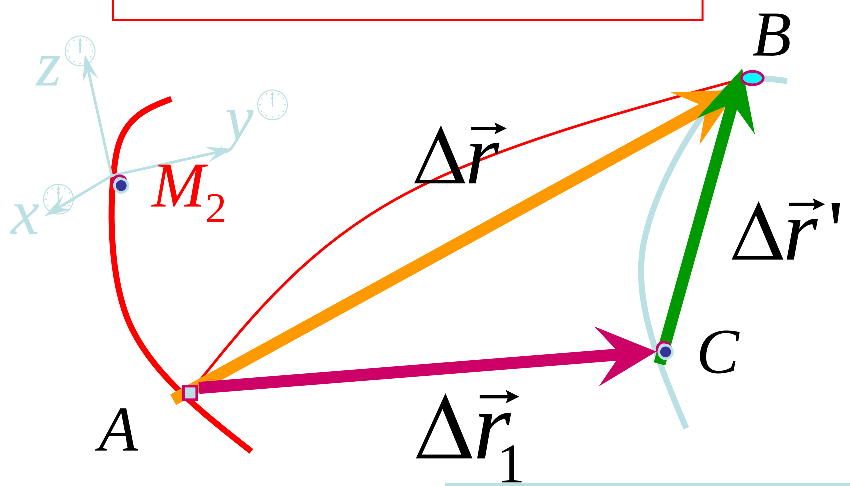
点的速度合成定理

例：小环在金属丝上的运动



哈爾濱工業大學

速度之间的关系



$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{r}_1$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和－－点的速度合成定理

速度合成定理的推导

定系： $Oxyz$，动系：$O'x'y'z'$，动点： M

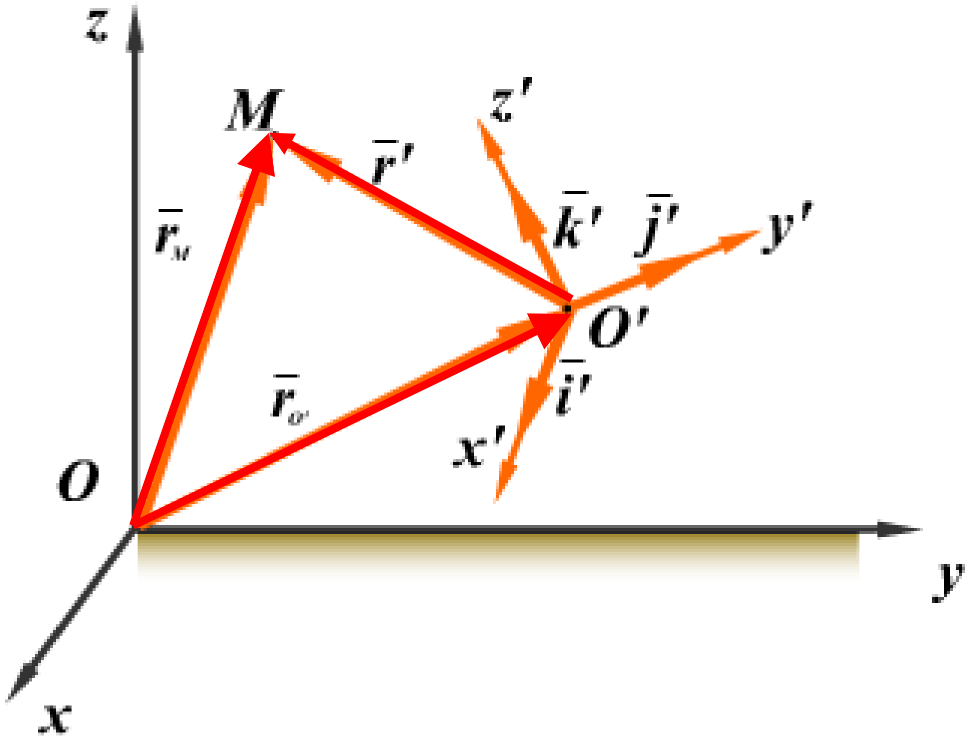
$$\vec{r}_M = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M'}$$

M' 为牵连点

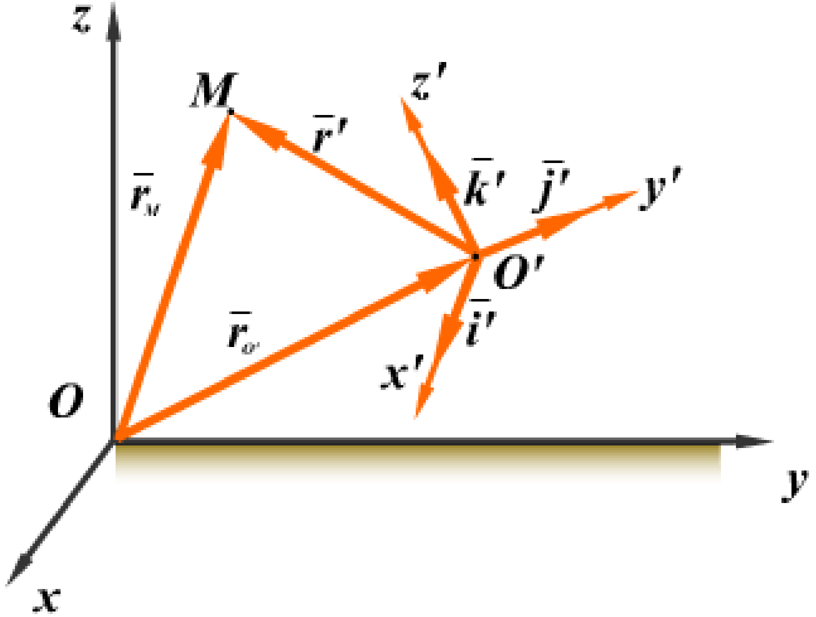
位置在M点位置
动系上一点



常矢量

$$\vec{v}_{\mathrm{r}} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,'$$

导数上加“~”表示相对导数



$$\vec{v}_{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{M'}}{\mathrm{d}t}$$

不变量

$$= \dot{\vec{r}}_{O'} + x'\dot{\vec{i}}\,' + y'\dot{\vec{j}}\,' + z'\dot{\vec{k}}\,'$$

$$\vec{v}_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{M}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}_{O'} + x'\dot{\vec{i}}\,' + y'\dot{\vec{j}}\,' + z'\dot{\vec{k}}\,' + \dot{x}'\vec{i}\,' + \dot{y}'\vec{j}\,' + \dot{z}'\vec{k}\,'$$

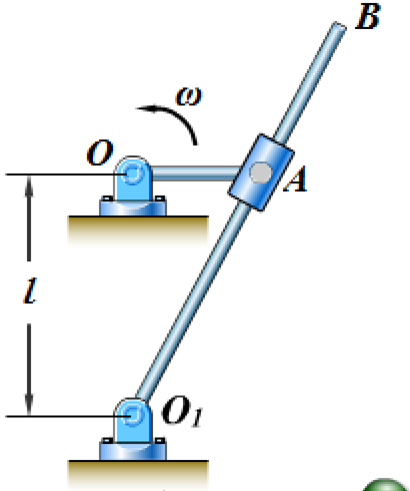
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}}$$

例1

已知：刨床的急回机构如图所示。曲柄OA的一端A与滑块用铰链连接。当曲柄OA以匀角速度ω绕固定轴O转动时，滑块在摇杆O_1B上滑动，并带动杆O_1B绕定轴O_1摆动。设曲柄长为$OA=r$，两轴间距离$OO_1=l$。

求：曲柄在水平位置时摇杆的角速度ω_1。

曲柄摇杆机构



解: 动点：滑块 A　　动系：摇杆 O_1B

绝对运动－绕O点的圆周运动；

相对运动－沿O_1B的直线运动；

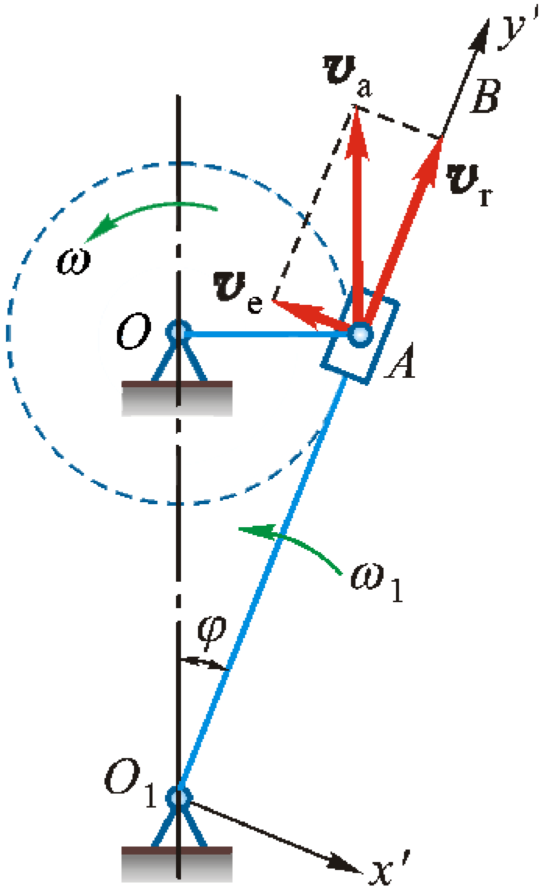
牵连运动－绕O_1轴定轴转动。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小	$r\omega$	?	?
方向	√	√	√

$$v_e = v_a \sin\varphi = \omega r \sin\varphi$$

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{r^2\omega}{l^2 + r^2}$$

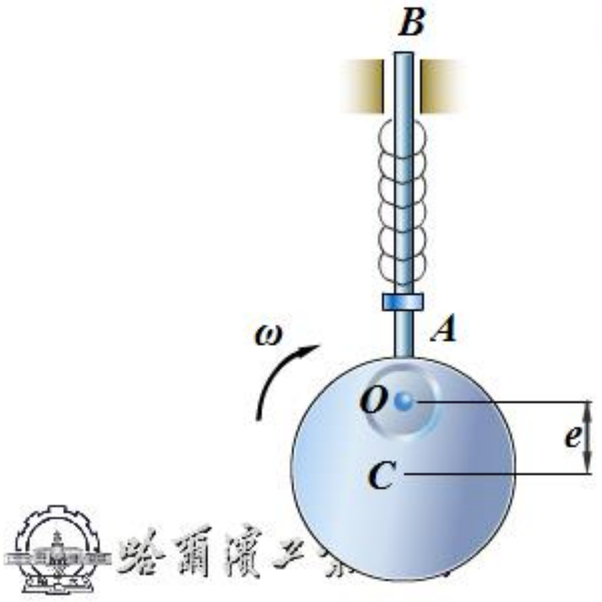


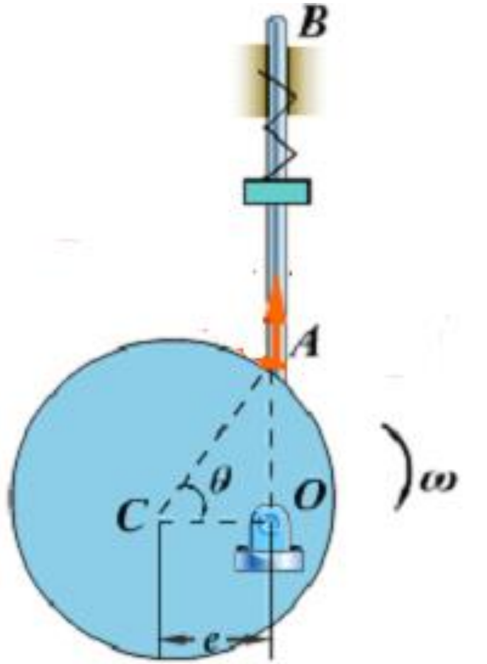
例2

已知：如图所示半径为R、偏心距为e的凸轮，以角速度ω绕O轴转动，杆AB能在滑槽中上下平移，杆的端点A始终与凸轮接触，且OAB成一直线。

求：在图示位置时，杆AB的速度。

偏心凸轮机构





解： 动点：*AB*杆上*A*　　动系：凸轮

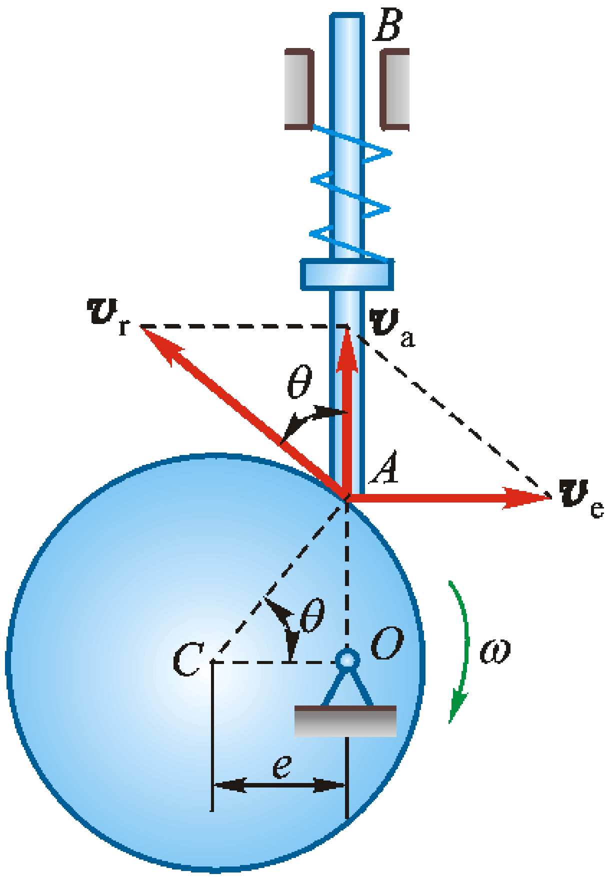
绝对运动：直线运动（*AB*）

相对运动：圆周运动（半径*R*）

牵连运动：定轴运动（轴*O*）

	$\vec{v}_a =$	$\vec{v}_e$	$+\ \vec{v}_r$
大小	?	$\omega \cdot OA$	?
方向	√	√	√

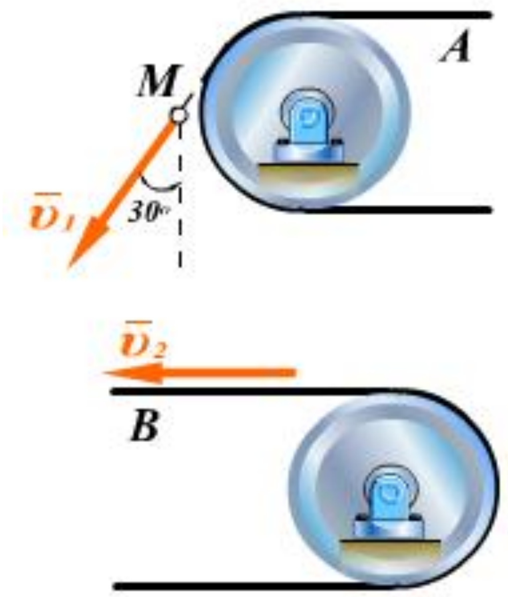
$$v_a = v_e \cot\theta = \omega \cdot OA \cdot \frac{e}{OA} = \omega e$$



例3

已知：矿砂从传送带*A*落入到另一传送带*B*上，如图所示。站在地面上观察矿砂下落的速度为 $v_1 = 4\,\mathrm{m/s}$，方向与铅直线成30^0角。传送带*B*水平传动速度 $v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$ 。

求：矿砂相对于传送带*B*的速度。

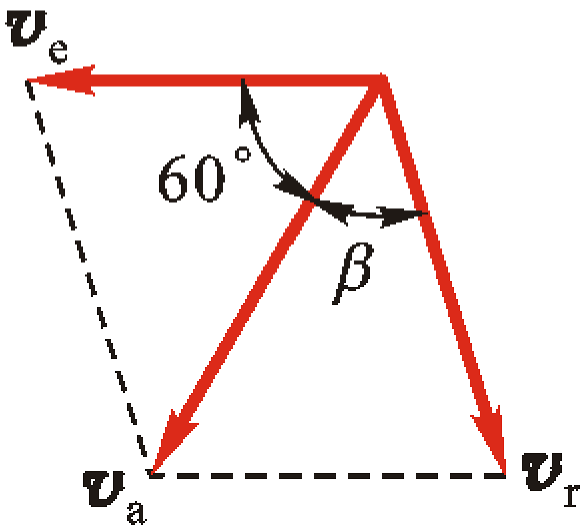


解： 动点：矿砂M 动系：传送带B

绝对运动：直线运动（$\vec{v}_1$）

牵连运动：平移（$\vec{v}_2$）

相对运动：未知



$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小	v_1	v_2	?
方向	√	√	?

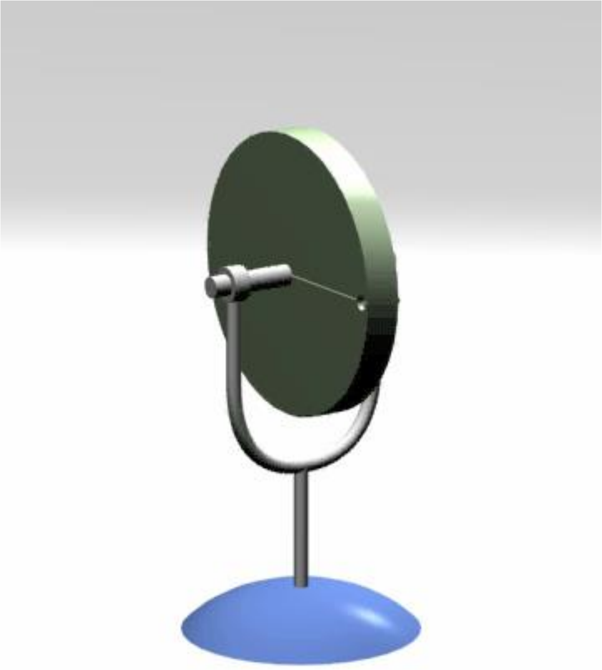
$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2 - 2v_a v_e \cos 60^\circ} = 3.6\,\mathrm{m/s}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v_e}{v_r}\sin 60^\circ\right) = 46^\circ 12'$$

例4

已知：圆盘半径为R，以角速度ω_1绕水平轴CD转动，支承CD的框架又以角速度ω_2绕铅直的AB轴转动，如图所示。圆盘垂直于CD，圆心在CD与AB的交点O处。

求：当连线OM在水平位置时，圆盘边缘上的点M的绝对速度。



解: 动点：M点　　动系：框架 $BACD$

绝对运动：未知

相对运动：圆周运动（圆心O点）

牵连运动：定轴转动（AB轴）

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小？	$R\omega_2$	$R\omega_1$
方向？	√	√

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

$$\beta = \arctan(\frac{v_e}{v_r}) = \arctan(\frac{\omega_2}{\omega_1})$$