绕定轴转动刚体的轴承动约束力

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

1、轴承约束力、动约束力

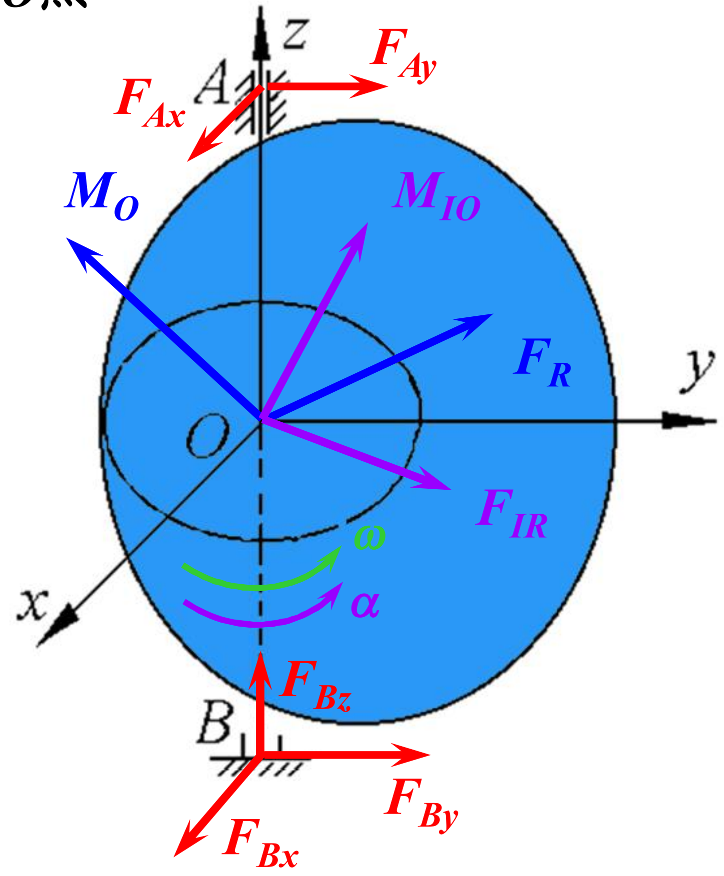
刚体的角速度 ω，角加速度 α（逆时针），主动力系向 O 点简化：主矢 F_R，主矩 M_O，惯性力系向 O 点简化：主矢 F_{IR}，主矩 M_{IO}。

轴承 A 处的约束力： F_{Ax}， F_{Ay}

轴承 B 处的约束力： F_{Bx}， F_{By}， F_{Bz}

根据动静法，列平衡方程：

$$
\begin{cases}
\sum F_x = 0 & F_{Ax}+F_{Bx}+F_{Rx}+F_{Ix}=0 \\
\sum F_y = 0 & F_{Ay}+F_{By}+F_{Ry}+F_{Iy}=0 \\
\sum F_z = 0 & F_{Bz}+F_{Rz}=0 \\
\sum M_x = 0 & F_{By}\cdot OB-F_{Ay}\cdot OA+M_x+M_{Ix}=0 \\
\sum M_y = 0 & F_{Ax}\cdot OA-F_{Bx}\cdot OB+M_y+M_{Iy}=0
\end{cases}
$$



由此求得两轴承的全约束力:

$$
\left\{
\begin{aligned}
F_{Ax} &= -\frac{1}{AB}[(M_y + F_{Rx}\cdot OB) + (M_{Iy} + F_{Ix}\cdot OB)] \\
F_{Ay} &= \frac{1}{AB}[(M_x - F_{Ry}\cdot OB) + (M_{Ix} - F_{Iy}\cdot OB)] \\
F_{Bx} &= \frac{1}{AB}[(M_y - F_{Rx}\cdot OA) + (M_{Iy} - F_{Ix}\cdot OA)] \\
F_{By} &= -\frac{1}{AB}[(M_x + F_{Ry}\cdot OA) + (M_{Ix} + F_{Iy}\cdot OA)] \\
F_{Bz} &= -F_{Rz}
\end{aligned}
\right.
$$

全约束力由两部分组成:

- 一部分由主动力引起的，不能消除，称为静约束力;
- 另一部分是由于惯性力系引起的，称为动约束力。

后者可以通过调整加以消除。

轴承全约束力 $\begin{cases}\text{静约束力}\\ \text{动约束力}\end{cases}$

使动约束力为零，须有：

$$F_{Ix}=F_{Iy}=0$$

$$\Downarrow$$

$$ma_{Cx}=0$$

$$ma_{Cy}=0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{Cx}=a_{Cy}=0$$

$$\Downarrow$$

转轴过质心

$$M_{Ix}=M_{Iy}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2=0\\ J_{xz}\omega^2+J_{yz}\alpha=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

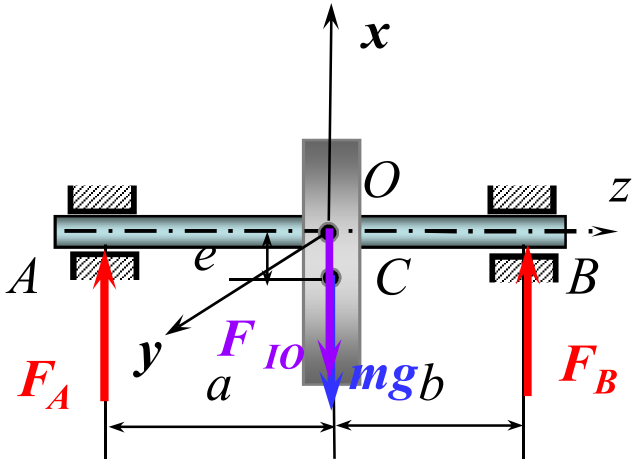
$$J_{xz}=J_{yz}=0$$

$$\Downarrow$$

对z轴惯性积为零，z轴为刚体在O点的惯性主轴

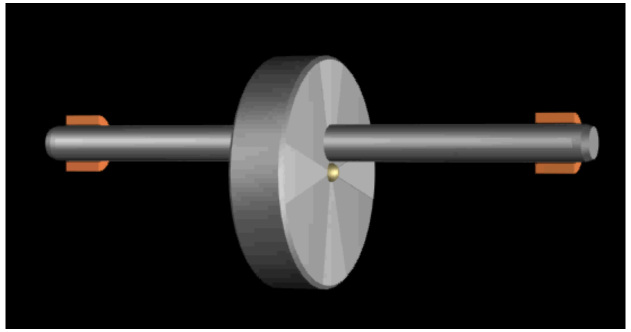
当刚体转轴为中心惯性主轴时，轴承的动约束力为零。

例1 设匀质转子质量为m，质心 C 到转轴的距离是e，转子以匀角速度ω绕水平轴转动，$AO=a$，$OB=b$，假定转轴与转子的对称平面垂直，求当质心C转到最低位置时轴承所受的压力。



解：转子有质量对称平面，并且转轴垂直于该质量对称平面，因此轴Oz是转子在点 O 的惯性主轴。惯性力对点 O 的主矩在过O点的 x 轴和 y 轴上投影 M_{Ix}和 M_{Iy} 恒等于零。又$\alpha=0$，故$M_{Iz}=0$。因此转子的惯性力系在O点合成为一个力(主矢) F_{IO}，大小等于：

$$F_{IO}=me\omega^2$$



方向沿 OC。当质心 C 转到最低位置时，轴上实际所受的力如图 所示。

根据动静法列平衡方程：

$$\sum M_B=0,\quad (mg+F_{IO})b-F_A(a+b)=0 \quad (1)$$

$$\sum M_A=0,\quad F_B(a+b)-(mg+F_{IO})a=0 \quad (2)$$

静约束力　　　　附加动约束力

解得:

$$F_A=\frac{b}{a+b}(mg+F_{IO})=\frac{bmg}{a+b}(1+\frac{e\omega^2}{g})$$

$$F_B=\frac{a}{a+b}(mg+F_{IO})=\frac{amg}{a+b}(1+\frac{e\omega^2}{g})$$

两轴承所受的力分别和F_A，F_B的大小相等而方向相反。

假设转子重20kg，到两个轴承的距离a和b均为0.5m,转子转速为12000r/min,偏心矩为0.1mm，

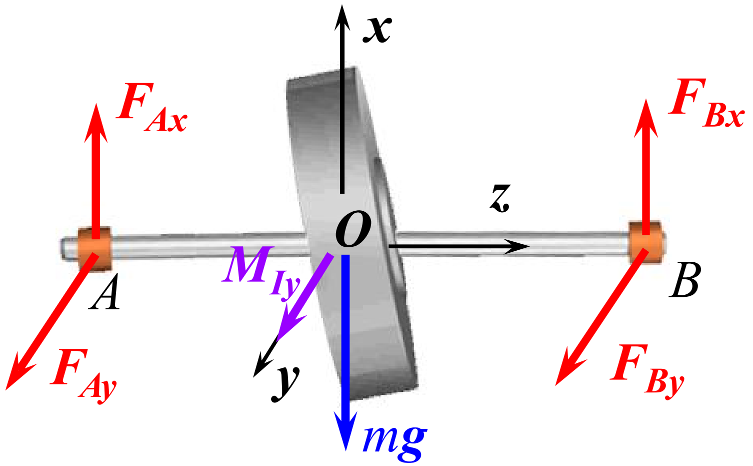
则在两个轴承上产生的动约束力为1579N

是静约束力98N的16.1倍！

偏心距会给轴承带来巨大的动约束力。

工程上也可以对偏心距的振动和冲击效应加以利用：打夯机、手机振动模块等。

例2 若上题中，轮子在装配过程中无偏心距，但由于安装误差，轮盘盘面垂线与转轴有一个1°的偏角，已知轮盘为均质圆盘，半径R=20cm，厚度h=2cm，其他条件不变，求轴承提供的动约束力。



解：取轮盘和轴为研究对象，分析作用于系统的外力。

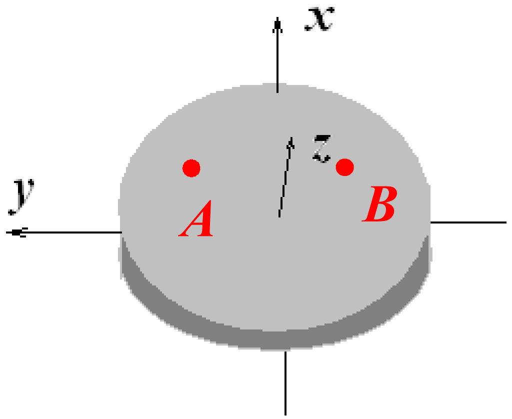
取固定于轮盘的坐标系$Oxyz$

在圆盘上加惯性力，往O点简化，其主矢大小为：

$$F_{IO} = ma_C = 0$$

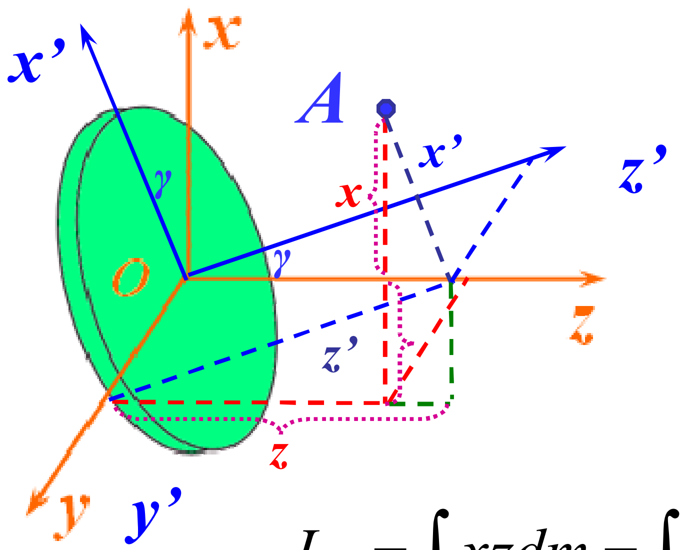
主矩大小：

$\alpha=0$，所以 $M_{Iz}=-J_z\alpha=0$



$J_{yz} = \int_V yzdm = 0$ 所以 $M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2=0$

$M_{Iy}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2= J_{xz}\omega^2\neq0$



$$J_{xz}=\int_V xzdm$$

$$x=x'\cos\gamma+z'\sin\gamma$$

$$z=z'\cos\gamma-x'\sin\gamma$$

$$J_{xz}=\int_V xzdm=\int_V(x'\cos\gamma+z'\sin\gamma)(z'\cos\gamma-x'\sin\gamma)dm$$

$$=\sin\gamma\cos\gamma\cdot\int_V(z'^2-x'^2)dm+(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)\cdot\int_V x'z'dm$$

$$=\sin\gamma\cos\gamma\cdot\int_V(z'^2-x'^2)dm$$

$$\int_V(z'^2-x'^2)dm=\int_V\left[(z'^2+y'^2)-(x'^2+y'^2)\right]dm$$

$$=\int_V r_{x'}^2dm-\int_V r_{z'}^2dm=J_{x'}-J_{z'}=\frac{1}{12}m(3R^2+h^2)-\frac{1}{2}mR^2$$

$$J_{xz}=\sin\gamma\cos\gamma\cdot\int_V(z'^2-x'^2)dm=\frac{m}{24}(h^2-3R^2)\sin 2\gamma$$

$$J_{xz} = \frac{m}{24}(h^2 - 3R^2)\sin 2\gamma$$

本题中γ=1° =0.01745rad, 所以sin2$\gamma \approx 2\gamma$

$$J_{xz} = \frac{m\gamma}{12}(h^2 - 3R^2) = -0.003478\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$

得到： $M_{Iy} = J_{xz}\omega^2 = -5492\ \mathrm{kg.m^2/s^2}$

由轴承动约束力的计算公式

$$F_{Ax} = -\frac{1}{AB}(M_{Iy} + F_{Ix} \cdot OB)$$

$$F_{Ay} = \frac{1}{AB}(M_{Ix} - F_{Iy} \cdot OB)$$

$$F_{Bx} = \frac{1}{AB}(M_{Iy} - F_{Ix} \cdot OA)$$

$$F_{By} = -\frac{1}{AB}(M_{Ix} + F_{Iy} \cdot OA)$$

得到：

$$F_{Ax} = -\frac{1}{AB}M_{Iy} = 5492\mathrm{N}$$

$$F_{Ay} = 0$$

$$F_{Bx} = \frac{1}{AB}M_{Iy} = -5492\mathrm{N}$$

$$F_{By} = 0$$

动约束力是静约束力98N的56倍！

装配误差会给轴承带来巨大的动约束力。

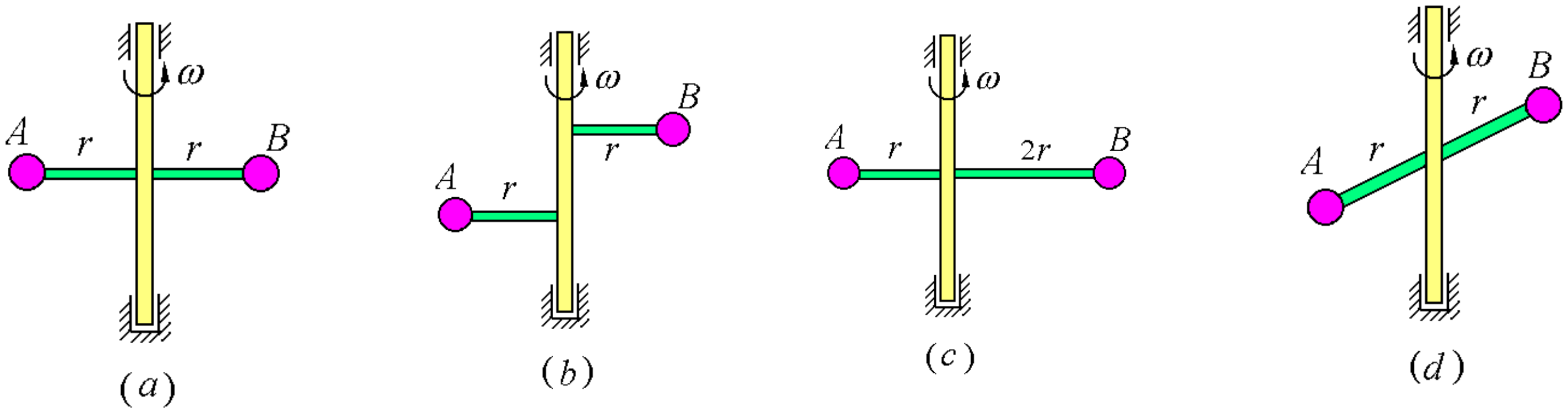
2、静平衡与动平衡的概念

静平衡：当刚体转轴通过质心，且刚体除重力外,没有受到其它主动力作用时，则刚体可以在任意位置静止不动，这种现象称为静平衡。

动平衡：当刚体转轴通过质心且为惯性主轴时，刚体转动时，不出现轴承附加动约束力，这种现象称为动平衡。

动平衡在工程中具有重要意义。

例3 质量不计的刚轴以角速度ω匀速转动，其上固结着两个质量均为m的小球A和B。指出在图示各种情况下，哪些是静平衡的？哪些是动平衡的？



动平衡： (*a*)　　　　静平衡： (*a*)、 (*b*)、 (*d*)

动平衡的刚体，一定是静平衡的；

反过来，静平衡的刚体，不一定是动平衡的。