3、单自由度系统的有阻尼自由振动

（1）阻尼

习惯称振动过程中的阻力为阻尼。

产生阻尼的原因：介质产生的介质阻尼；结构、材料变形产生的内阻尼；接触面间的摩擦产生的干摩擦阻尼等。

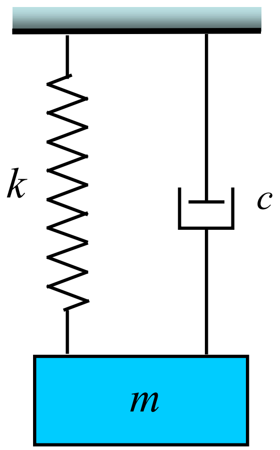
当振动速度不大时，由于介质的黏性引起的阻力近似地与速度的一次方成正比，这样的阻尼称为黏性阻尼。

黏性阻尼中质点受到的阻力F_d与质点振动速度v之间的关系可表示为：

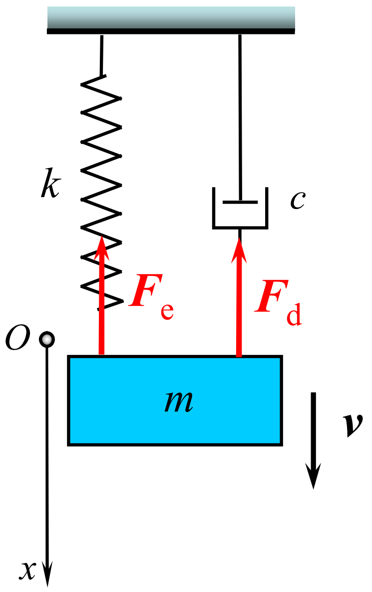
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}} = -c\boldsymbol{v}$$

比例系数 c 称为黏性阻力系数(简称阻力系数)，负号表示阻力与速度方向相反。一般以阻尼元件（c，粘壶）表示振动系统中的黏性阻尼。

一般的机械振动系统
- 弹性元件（k）
- 惯性元件（m）
- 阻尼元件（c）



（2）振动微分方程



如果以平衡位置为坐标原点，则在建立自由振动系统的振动微分方程时可以不再计入重力的作用。分析物块受力。

① 恢复力F_e，方向指向平衡位置O，大小与偏离平衡位置的距离成正比。

$$F_e = -kx$$

② 黏性阻尼力F_d，方向与速度方向相反，大小与速度大小成正比。

$$F_d = -cv_x = -c\frac{dx}{dt}$$

物块的运动微分方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

方程两边同除以m，并令：

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ （ω_0—固有角频率），

$\delta = \dfrac{c}{2m}$ （δ—阻尼系数），得到：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

——有阻尼自由振动微分方程的标准形式

解的形式为：$x = e^{rt}$　　其中r为待定常数。

代入微分方程中，并消去公因子e^{rt}，得到本征方程：$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$

本征方程的两个根分别为：$r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$　　$r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

由此得到微分方程的通解：$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

（3）欠阻尼状态

当 $\delta < \omega_0$时，阻力系数 $c < 2\sqrt{mk}$，此时阻尼较小，称为欠阻尼状态。

此时本征方程的两个根为共轭复数

$$r_1 = -\delta + \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad r_2 = -\delta - \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

微分方程的解可写成： $x = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + \theta)$

令 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ —有阻尼自由振动的固有角频率

$$\Rightarrow \quad x = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$$

式中A和 θ 为积分常数，由运动的初始条件确定。

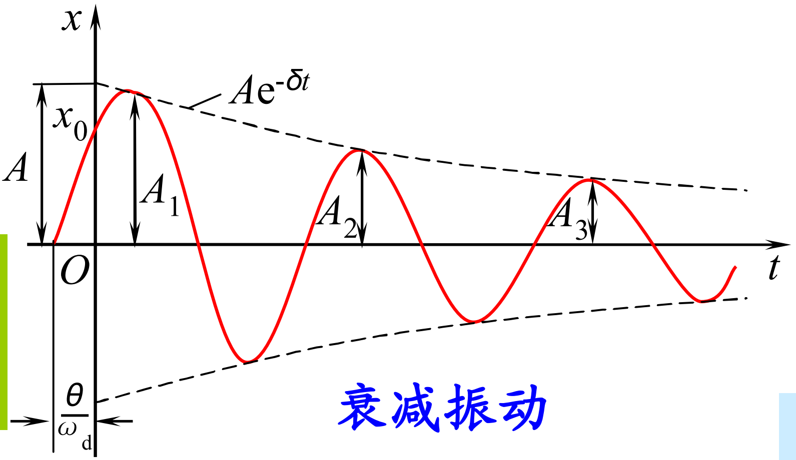
设$t=0$ 时， $x = x_0 \quad v = v_0$

$$x = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta) \Rightarrow v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta) + A\omega_\mathrm{d} e^{-\delta t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$$

$$x_0 = A\sin\theta \qquad v_0 = A\omega_\mathrm{d}\cos\theta - A\delta\sin\theta$$

于是得到初始幅值A和初相角θ的表达式为：

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \delta x_0)^2}{\omega_0^2 - \delta^2}} \qquad \tan\theta = \frac{x_0\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{v_0 + \delta x_0}$$



衰减振动

衰减振动不是周期振动。但仍具有振动的特点。

定义：质点从一个最大偏离位置到下一个最大偏离位置所需要的时间称为衰减振动的周期，记为T_d。

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

令 $\zeta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ ζ称为阻尼比

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-(\frac{\delta}{\omega_0})^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

还可得:

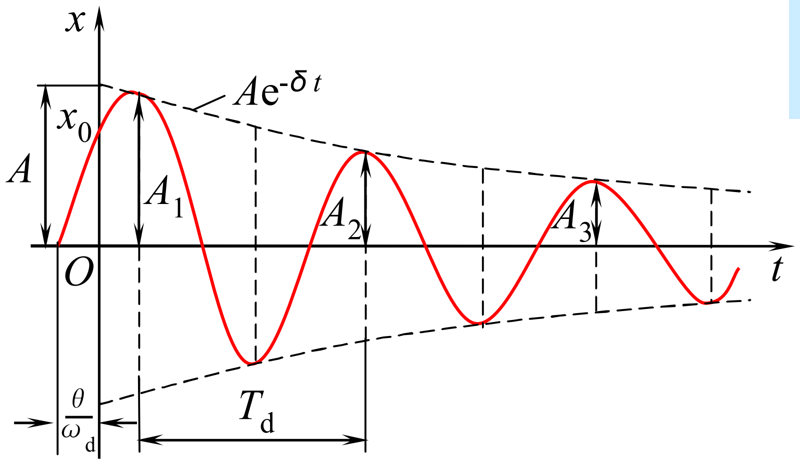
$$T_d = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad f_d = f\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

阻尼的存在，使得系统自由振动周期增大，频率减小。

由 $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \theta)$ 可见，

$Ae^{-\delta t}$相当于振幅。



设在某瞬时t，振动达到的最大偏离值为A_i

有 $$A_i = Ae^{-\delta t_i}$$

经过一个周期T_d后，振动到达下一个略小的最大偏离值为A_{i+1}，有

$$A_{i+1} = Ae^{-\delta(t_i + T_d)}$$

定义 $$\eta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-\delta t_i}}{Ae^{-\delta(t_i+T_d)}} = e^{\delta T_d}$$

η称为缩减因数

令 $\Lambda = \ln\frac{A_i}{A_{i+1}} = \delta T_d$ Λ称为对数缩减

还可得: $$\Lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta$$

（4）临界阻尼状态

当 $\delta=\omega_0$时，阻尼比 ζ=1，此时阻尼较大，称为临界阻尼状态。

此时系统的黏性阻力系数用c_{er}表示，称为临界阻力系数，有 $c_{\mathrm{cr}}=2\sqrt{mk}$

在临界阻尼情况下，本征方程的根为两个相等的实根，即： $r_1=r_2=-\delta$

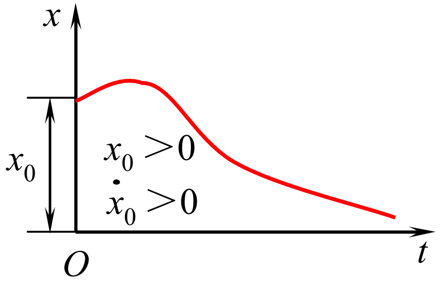
由此得到微分方程的通解： $x=\mathrm{e}^{-\delta t}(C_1+C_2 t)$

表明：物体的运动是随时间的增长而无限地趋向平衡位置。运动已不具有振动的特点。

（5）过阻尼状态

当 $\delta>\omega_0$时，阻尼比 ζ>1，阻尼很大，称为过阻尼状态。此时阻力系数$c>c_{\mathrm{er}}$

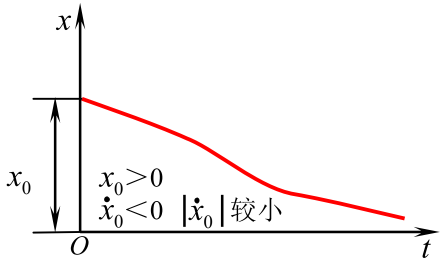
在过阻尼情况下，本征方程的根为两个不相等的实根，即：

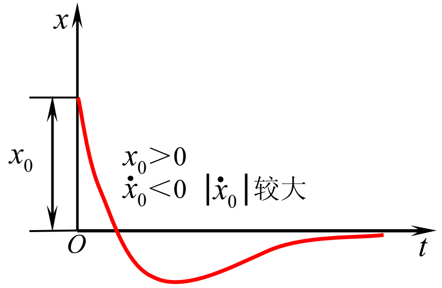


$$r_1=-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2} \qquad r_2=-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$$

由此得到微分方程的通解:

$$x=-\mathrm{e}^{-\delta t}(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t})$$

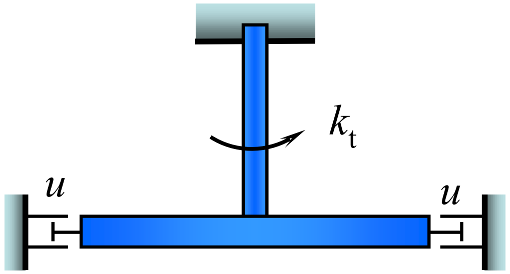




运动也已不具备振动的性质。

例6 图为一弹性杆支持的圆盘，弹性杆扭转刚度系数为k_t，圆盘对杆轴的转动惯量为J，如圆盘外缘受到与转动速度成正比的切向阻力，而圆盘衰减扭振的周期为T_d。

求：圆盘所受阻力偶矩与转动角速度的关系。



解：圆盘外缘切向阻力与转动速度成正比，则阻力力偶的力偶矩M与圆盘转动角速度ω成正比，且方向相反。这个比例系数即为所求的圆盘所受阻力偶矩与转动角速度的关系。

假设阻力偶矩$M=u\,\omega$，u为阻力偶系数，则圆盘绕杆轴转动的微分方程为：

$$J\ddot{\varphi} = -k_t\varphi - \mu\dot{\varphi}$$

移项得：

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mu}{J}\dot{\varphi} + \frac{k_t}{J}\varphi = 0$$

显然阻尼系数 $\delta = \dfrac{\mu}{2J}$，固有角频率 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_t}{J}}$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k_t}{J} - \frac{\mu^2}{4J^2}}$$

根据衰减振动周期的计算公式

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

得到圆盘的衰减振动周期为：

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k_t}{J} - \dfrac{\mu^2}{4J^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{2}{T_d}\sqrt{T_d^2 k_t J - 4\pi^2 J^2}}$$