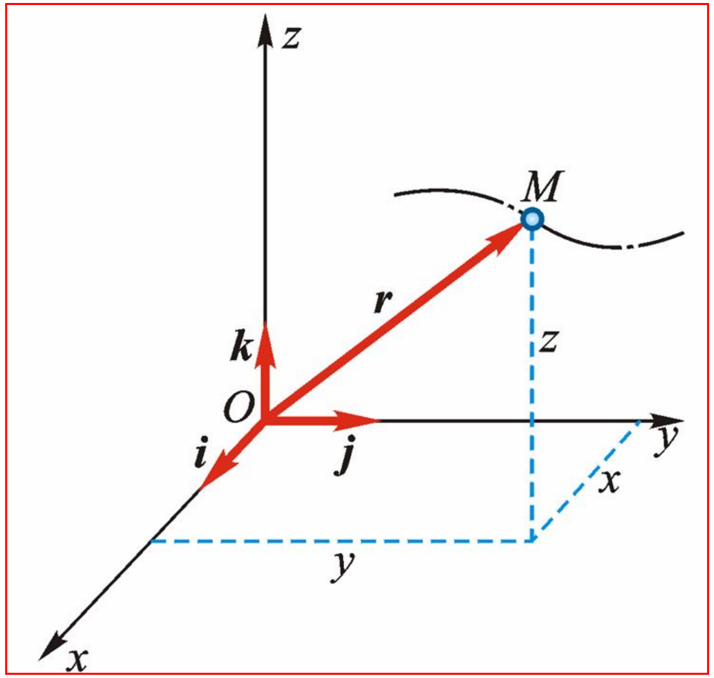
3、直角坐标法

直角坐标法

运动方程

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

消去时间 → 轨迹方程



直角坐标与矢径坐标之间的关系

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

速度

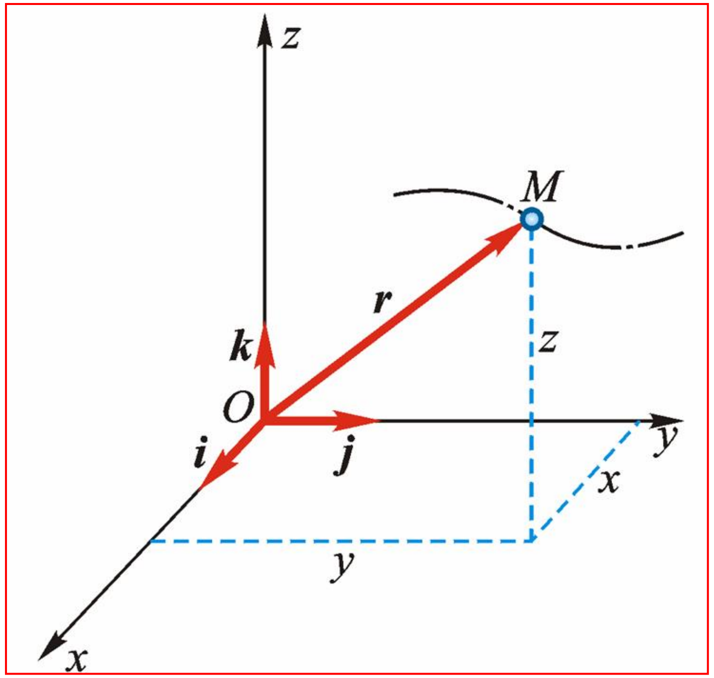
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

常矢量

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$



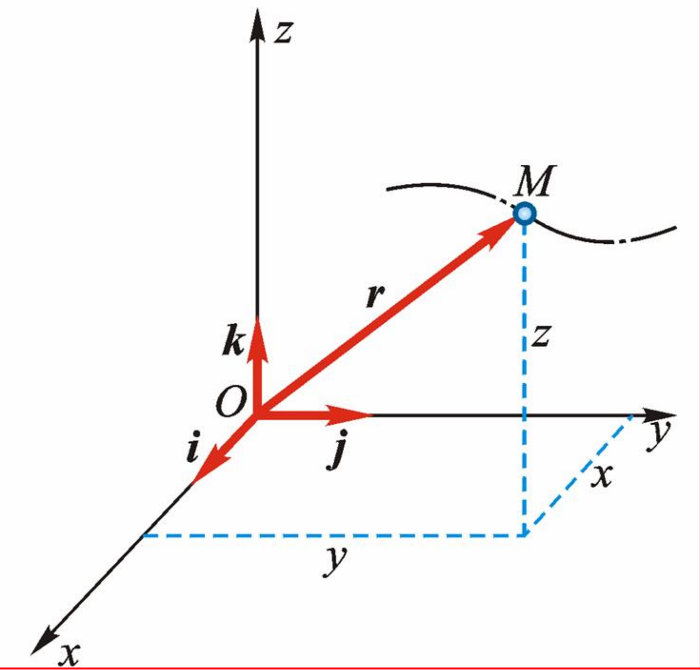
加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$



例1

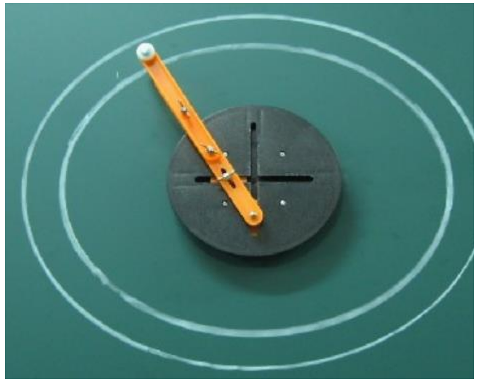
已知：椭圆规的曲柄OC可绕定轴O转动，其端点C与规尺AB的中点以铰链相连接，而规尺A，B两端分别在相互垂直的滑槽中运动，$OC = AC = BC = l, MC = a, \varphi = \omega t$

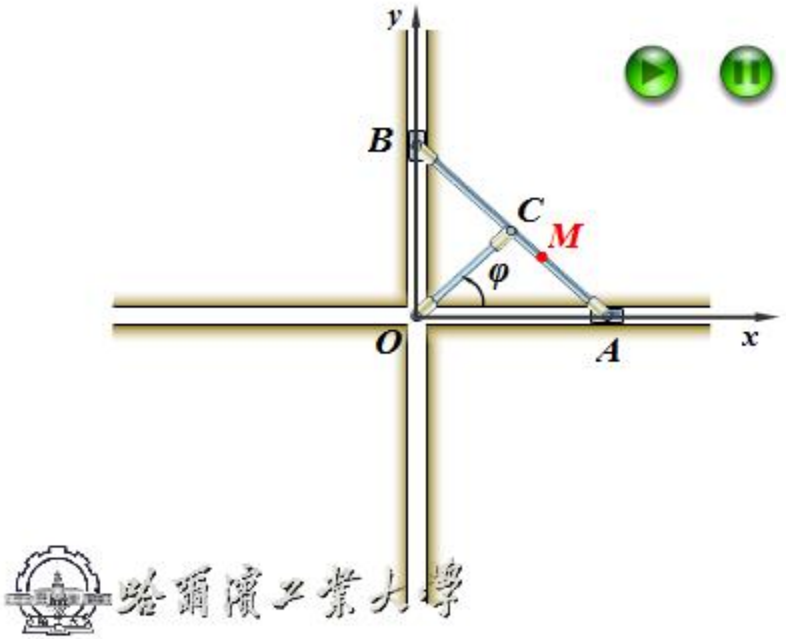
求：① M 点的运动方程；

② 轨迹；

③ 速度；

④ 加速度。



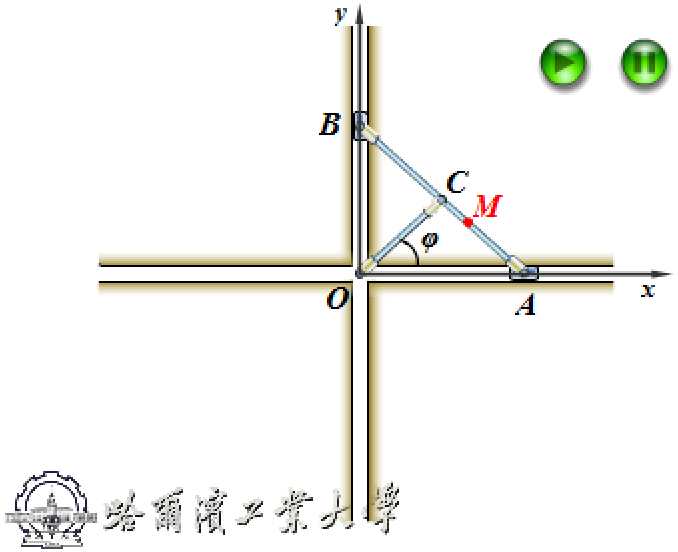


解: 点M作曲线运动，取坐标系Oxy如图所示。

运动方程

$$x=(OC+CM)\cos\varphi=(l+a)\cos\omega t$$

$$y=AM\sin\varphi=(l-a)\sin\omega t$$



消去t, 得轨迹

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1$$

速度

$$v_x = \dot{x} = -(l + a)\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \dot{y} = (l - a)\omega \cos \omega t$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(l+a)^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + (l-a)^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}$$

$$= \omega \sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos 2\omega t}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}\,) = \frac{v_x}{v} = -\frac{(l+a)\sin \omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos 2\omega t}}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{j}\,) = \frac{v_y}{v} = \frac{(l-a)\cos \omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos 2\omega t}}$$

加速度

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -(l+a)\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -(l-a)\omega^2 \sin \omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(l+a)^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + (l-a)^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \omega^2 \sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos 2\omega t}$$

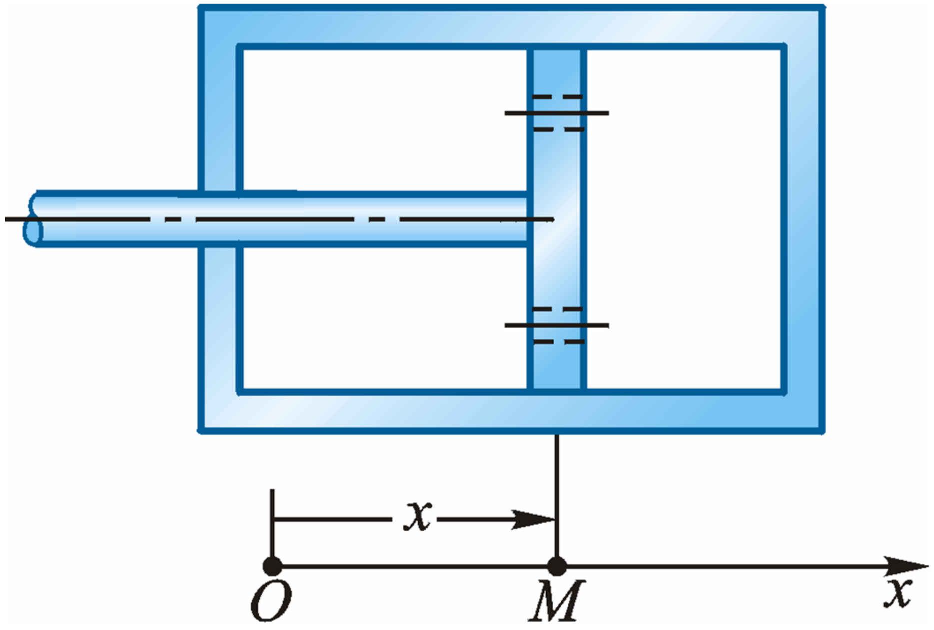
$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = -\frac{(l+a)\cos \omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos 2\omega t}}$$

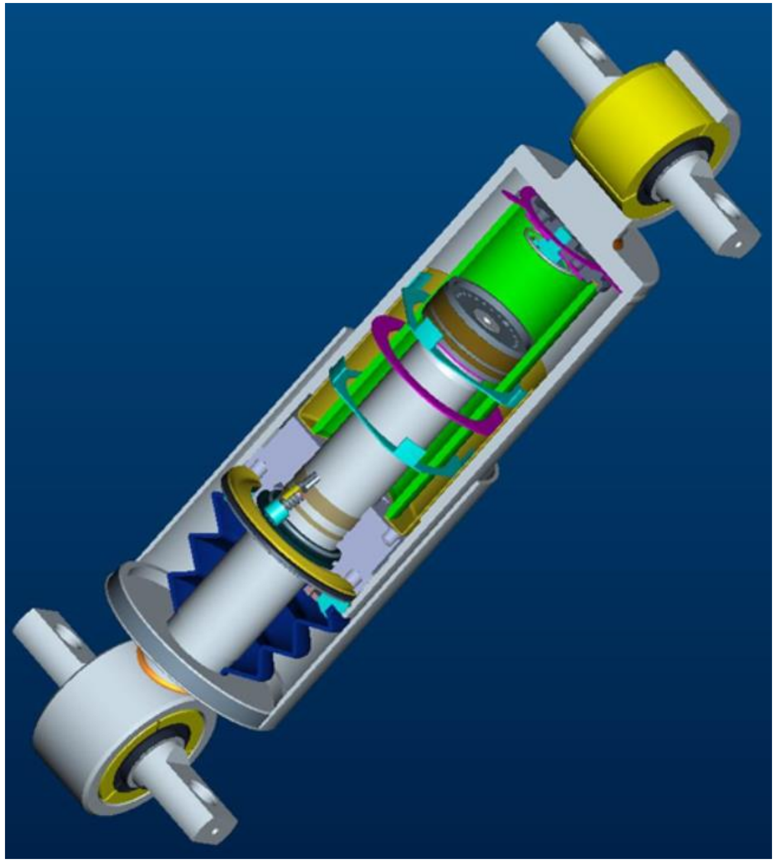
$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = -\frac{(l-a)\sin \omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos 2\omega t}}$$

例2

已知：如图所示，当液压减振器工作时，它的活塞在套筒内作直线往复运动。设活塞的加速度$\vec{a}=-k\vec{v}$（$\vec{v}$为活塞的速度k为比例常数），初速度为$\vec{v}_0$。

求：活塞的运动规律。





解: 活塞作直线运动，取坐标轴Ox如图所示

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$

得 $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$

$\ln\dfrac{v}{v_0}=-kt,\ v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-kt}$

得 $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$

$x=x_0+\dfrac{v_0}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)$