2、动量矩定理

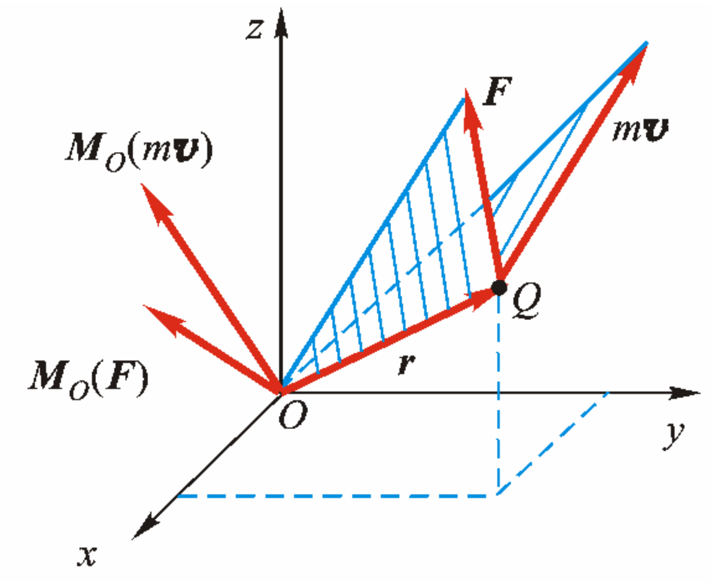
动量矩定理

质点的动量矩定理

设O为定点，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m\vec{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})$$

$$=\boxed{\vec{v}\ 0}\ \vec{v}+\vec{r}\times\boxed{\vec{F}}\ \vec{v})$$



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m\vec{v})=\vec{M}_O(\vec{F})$$

投影式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_x(m\vec{v})=M_x(\vec{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_y(m\vec{v})=M_y(\vec{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_z(m\vec{v})=M_z(\vec{F})$$

质点对某定点的动量矩对时间的一阶导数，等于作用力对同一点的矩.

——质点的动量矩定理

质点系的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{i})})+\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\overset{0}{\boxed{\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{i})})}}+\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

质点系对某**定点**O的动量矩对时间的导数,等于作用于质点系的外力对于同一点的矩的矢量和.

——质点系的动量矩定理

投影式:

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

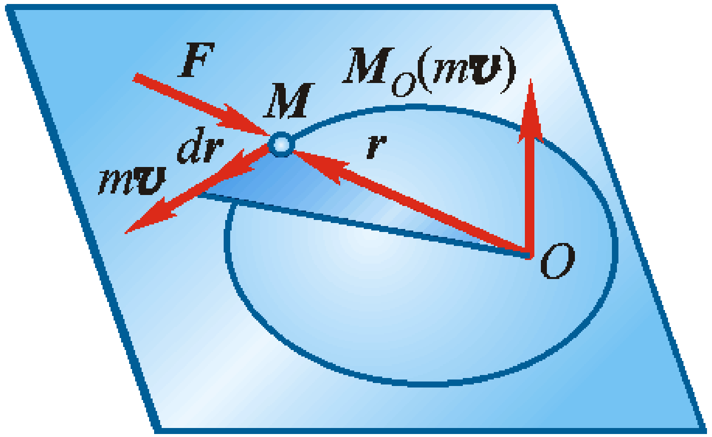
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

问题: 内力能否改变质点系的动量矩?

动量矩守恒定律

若$\sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)}) \equiv 0$ 则$\vec{L}_O$ =常矢量，

若$\sum M_z(\vec{F}^{(e)}) \equiv 0$ 则 L_z =常量。



面积速度定理:

质点在有心力作用下其面积速度守恒.

人造卫星绕地球运动

有心力：力作用线始终通过某固定点，该点称力心.

$\vec{M}_O(\vec{F}) = 0$ ➡ $\vec{M}(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} =$ 常矢量

(1) $\vec{r}$ 与 $\vec{V}$ 必在一固定平面内，即点M的运动轨迹是平面曲线.

(2) $|\vec{r} \times m\vec{v}| = \left|\vec{r} \times m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = b =$ 常量 即 $\left|\vec{r} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| =$ 常量

$|\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}| = 2\mathrm{d}A$ 因此，$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}} =$ 常量

例1

高炉运送矿石的卷扬机如图所示。已知鼓轮的半径为R，转动惯量为J，作用在鼓轮上的力偶矩为M。小车和矿石的总质量为m，轨道的倾角为θ。设绳的质量和各处摩擦不计。

求：小车的加速度a。

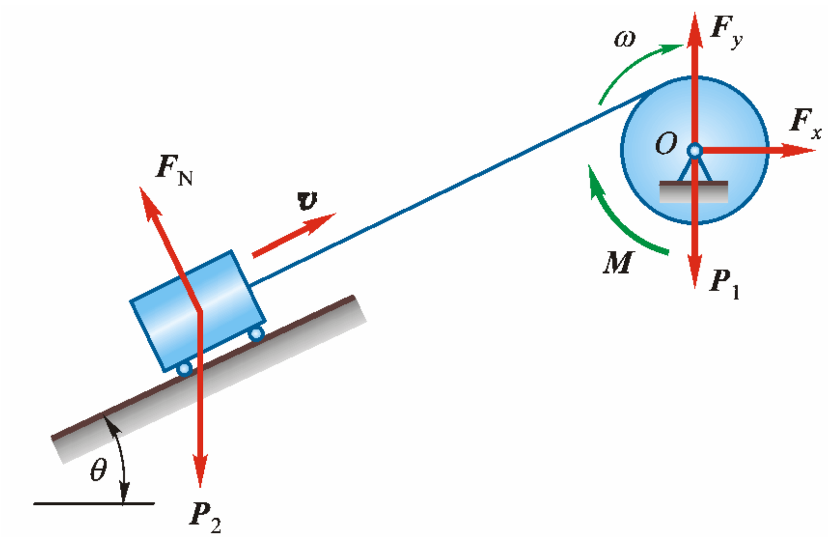
解: 取小车和鼓轮为研究对象，受力如图所示。

$$L_O = J\omega + mvR \qquad M_O^{(e)} = M - mg\sin\theta \cdot R$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[J\omega + mvR] = M - mg\sin\theta \cdot R$$

由 $\omega = \dfrac{v}{R}$ $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$，得

$$a = \frac{MR - mgR^2\sin\theta}{J + mR^2}$$



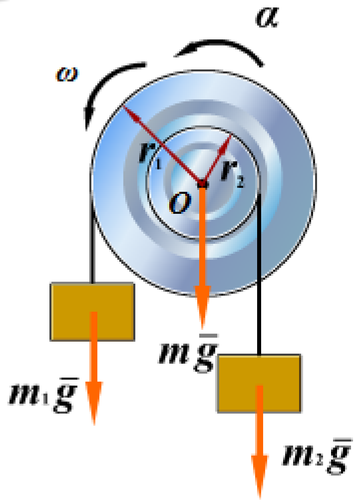
例2

已知：m_1，m，m_2，J_O，r_1，r_2，不计摩擦.

求：（1）α

（2）O 处约束力 F_N

（3）绳索张力 F_{T_1}，F_{T_2}

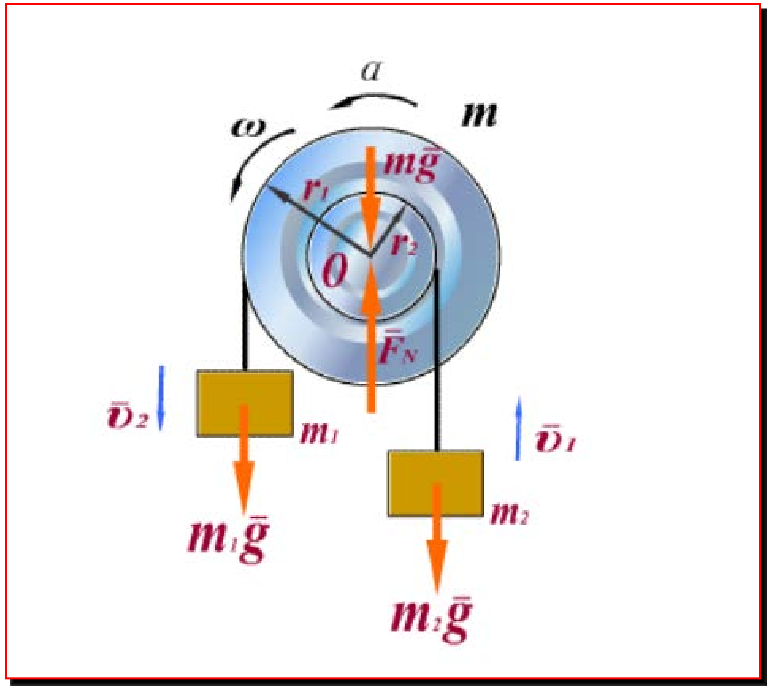


解: (1) 分析系统，受力如图所示。

$$L_O = J_O\omega + m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2$$

$$= \omega(J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

$$\sum M_O(\vec{F}^{(e)}) = (m_1 r_1 - m_2 r_2)g$$



由 $\dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\vec{F}^{(e)})$ ，得

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2)g}{J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

（2）由质心运动定理

$$F_{\mathrm{N}}-(m+m_1+m_2)g=(m+m_1+m_2)a_{Cy}$$

$$a_{Cy}=\ddot{y}_C=\frac{\sum m_i\ddot{y}_i}{\sum m_i}=\frac{-m_1a_1+m_2a_2}{m+m_1+m_2}=\frac{\alpha(-m_1r_1+m_2r_2)}{m+m_1+m_2}$$

$$F_{\mathrm{N}}=(m+m_1+m_2)g+\alpha(-m_1r_1+m_2r_2)$$

（3）研究 m_1

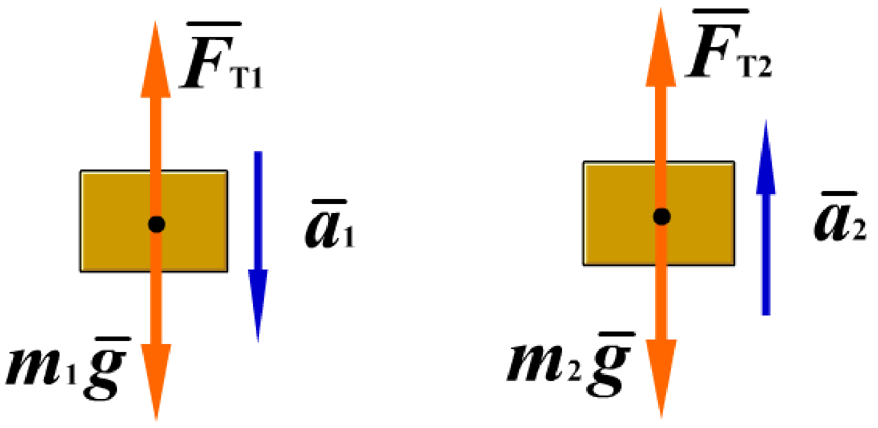
$$m_1g-F_{\mathrm{T}_1}=m_1a_1=m_1r_1\alpha$$

$$F_{\mathrm{T}_1}=m_1(g-r_1\alpha)$$

（4） 研究 m_2

$$F_{\mathrm{T}_2}-m_2g=m_2a_2=m_2r_2\alpha$$

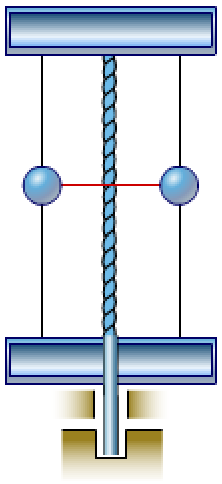
$$F_{\mathrm{T}_2}=m_2(g+r_2\alpha)$$

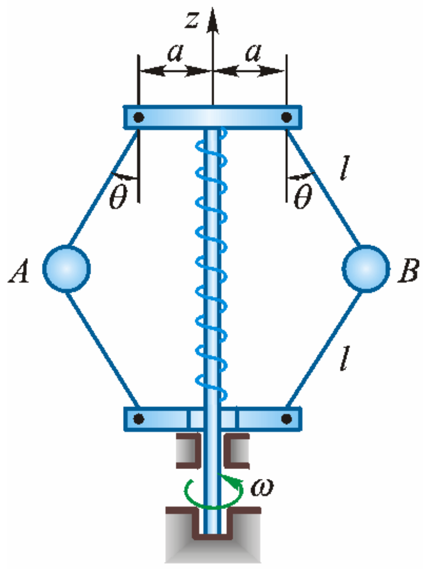


例3

小球*A*，*B*以细绳相连，质量皆为*m*，其余构件质量不计。忽略摩擦，系统绕铅直轴*z*自由转动，初始时系统的角速度为 ω_0。

求：剪断绳后，θ 角时的 ω 。





解： 分析系统，重力和轴承约束力对转轴的矩为零，由动量矩守恒有

$$L_{z_1} = L_{z_2}$$

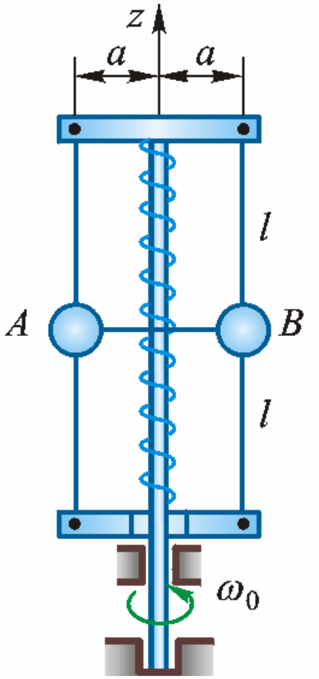
$\theta = 0$ 时，

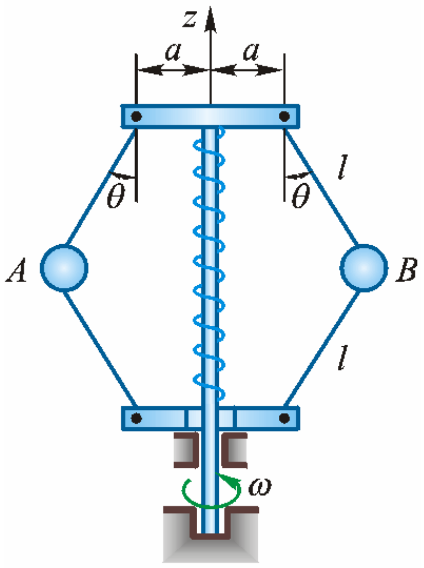
$$L_{z_1} = 2ma\omega_0 a = 2ma^2\omega_0$$

$\theta \neq 0$ 时，

$$L_{z_2} = 2m(a + l\sin\theta)^2\omega$$

$$\omega = \frac{a^2\omega_0}{(a + l\sin\theta)^2}$$

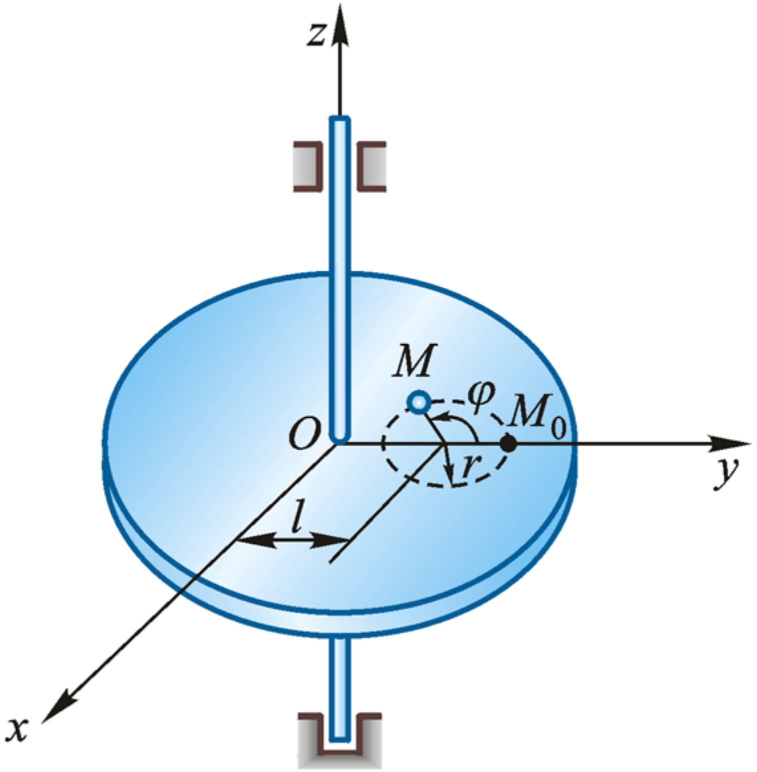




例4

质点质量m，放到转动惯量为J的圆盘上，以常速v_0做圆周运动，圆周运动的半径为r，圆心距转轴的距离为l，当质点在初始位置时，圆盘的角速度为零，摩擦忽略不计。

求：圆盘的角速度与φ关系。



解： $\sum M_z(\vec{F}) = 0 \longrightarrow L_z = \text{常量}$

$$L_{z_1} = mv_0(l + r)$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{v}_e$$

$$\Downarrow$$

$$L_{z_2} = M_z(m\vec{v}_0) + M_z(m\vec{v}_e) + J\omega$$

$$= mv_0(r + l\cos\varphi) + m\omega \cdot OM^2 + J\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \frac{mlv_0(1-\cos\varphi)}{J + m(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi)}$$