运动学总结

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组

点的运动

点的运动学

在一个参考系点的运动的几何性质

矢量法

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$$

直角坐标法

$$x=x(t)\quad y=y(t)\quad z=z(t)$$

➡ 轨迹方程

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

自然法

自然轴系

$$s=f(t)$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}\qquad \tan\theta=\frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}}$$

点的合成运动

在不同参考系内点运动几何性质的关系

动点 定系 动系

绝对运动
相对运动
牵连运动

牵连点

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = y_{O'} + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

点的速度合成定理

$$\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}$$

点的加速度合成定理

牵连运动为平移时

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}}$$

牵连运动为转动时

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{C}}$$

科氏加速度

$$\vec{a}_{\mathrm{C}} = 2\vec{\omega}_{\mathrm{e}} \times \vec{v}_{\mathrm{r}}$$

刚体的运动

刚体的平移

刚体内任一直线在运动过程中始终平行于初始位置，这种运动称为平行移动，简称平移。

各点运动轨迹的形状完全相同且彼此平行，每一瞬时各点的速度和加速度相等

刚体的平移归结为点的运动学

刚体的定轴转动

刚体整体的运动几何性质

刚体上(或其扩展部分)两点保持不动，则这种运动称为刚体绕定轴转动，简称刚体的转动。

$$\varphi = f(t)$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

刚体上一点的运动几何性质（自然法）

$$s = R\varphi$$

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ddot{s} = R\alpha$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\tan\theta = \frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

轮系传动

以矢量表示角速度和角加速度 以矢积表示点的速度和加速度

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \alpha\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{n}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

刚体的平面运动

刚体整体的运动几何性质

在运动中，刚体上的任意一点与某一固定平面始终保持相等的距离，这种运动称为平面运动。

简化为平面图形的运动

$$\begin{cases} x_{O'} = f_1(t) \\ y_{O'} = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$

分解为随基点平移和绕基点转动

刚体上一点的速度

基点法（合成运动）

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

速度投影法

$$\left(\vec{v}_B\right)_{AB} = \left(\vec{v}_A\right)_{AB}$$

速度瞬心法

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}$$

速度瞬心的确定方法

刚体上一点的加速度

基点法

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$