

4、非惯性系中质点的 动能定理

惯性参考系中的动能定理只适用于惯性系。在非惯性参考系中，由于质点的运动微分方程中含有惯性力，因此需要重新推导动能定理。

质点的相对运动动力学基本方程为 $m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{Ie} + \mathbf{F}_{IC}$

式中 $\mathbf{F}_{Ie} = -m\mathbf{a}_e$ ， $\mathbf{F}_{IC} = -m\mathbf{a}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ $\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$ 是 \mathbf{v}_r 对时间 t 的相对导数
上式两端点乘相对位移 $d\mathbf{r}'$

$$m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \cdot d\mathbf{r}' = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \mathbf{F}_{Ie} \cdot d\mathbf{r}' + \mathbf{F}_{IC} \cdot d\mathbf{r}'$$

注意到 $\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r$ ，并且科氏惯性力 \mathbf{F}_{IC} 垂直于相对速度 \mathbf{v}_r ，所以 $\mathbf{F}_{IC} \cdot d\mathbf{r}' = 0$

上式变为： $m\mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{v}_r = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \mathbf{F}_{Ie} \cdot d\mathbf{r}'$

$\delta W'_F$ —表示力 \mathbf{F} 在质点的相对位移上的元功。

$\delta W'_{Ie}$ —表示牵连惯性力 \mathbf{F}_{Ie} 在质点的相对位移上的元功。

则有： $d(\frac{1}{2}mv_r^2) = \delta W'_F + \delta W'_{Ie}$ ——质点相对运动动能定理（微分形式）

质点在非惯性系中相对动能的增量等于作用于质点上的力与牵连惯性力在相对运动中所作的元功之和。

积分上式得 $\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv_{r0}^2 = W'_F + W'_{Ie}$ ——质点相对运动动能定理（积分形式）

质点在非惯性系中相对动能的变化等于作用于质点上的力与牵连惯性力在相对路程上所作功的和。

注意：因为在非惯性系中科式惯性力始终垂直于相对速度，因此在相对运动中科式惯性力始终不做功。

例4 已知：一平板与水平面成 θ 角，板上有一质量为 m 的小球，如图所示，若不计摩擦等阻力。

求：(1) 平板以多大加速度向右平移时，小球能保持相对静止？

(2) 若平板又以这个加速度的两倍向右平移时，小球应沿板向上运动。球沿板走了 l 距离后，小球的相对速度是多少？

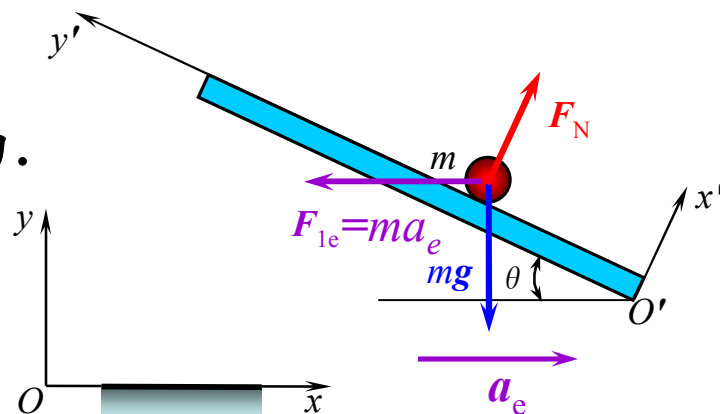
解：(1) 建立固结于平板的动坐标系 $O'x'y'$ ，惯性参考系为 Oxy 。分析平板的运动及小球的受力。

小球相对静止，方程为：

$$\sum F_{x'} = 0, F_N - mg \cos \theta - F_{Ie} \sin \theta = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0, -mg \sin \theta - F_{Ie} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow a_e = g \tan \theta$$

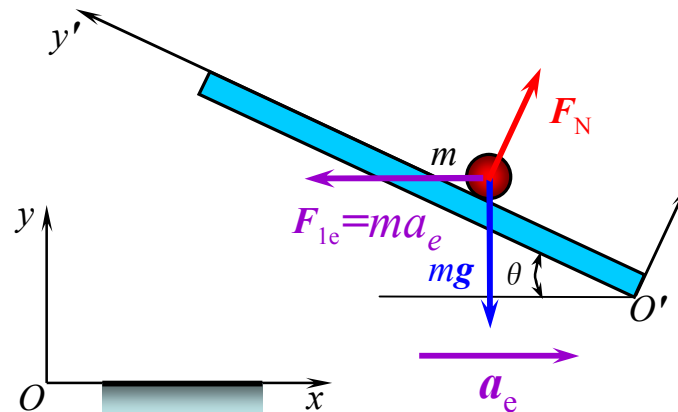


(2) 当加速度 $a_e = 2g \tan \theta$ 时, 牵连惯性力 $F_{\text{Ie}} = 2mg \tan \theta$

应用相对运动动能定理, 有:

$$\frac{m}{2} v_r^2 - 0 = (F_{\text{Ie}} \cos \theta) l - (mg \sin \theta) l$$

$$\Rightarrow v_r = \sqrt{2gl \sin \theta}$$



例5 半径为 R 的环形管绕铅垂轴 z 以匀角速度 ω 转动。管内有一质量为 m 的小球, 原在最低处平衡, 小球受微小扰动时可能会沿圆管上升。忽略管壁摩擦。

求: 小球能达到的最大偏角 φ_{max} 。

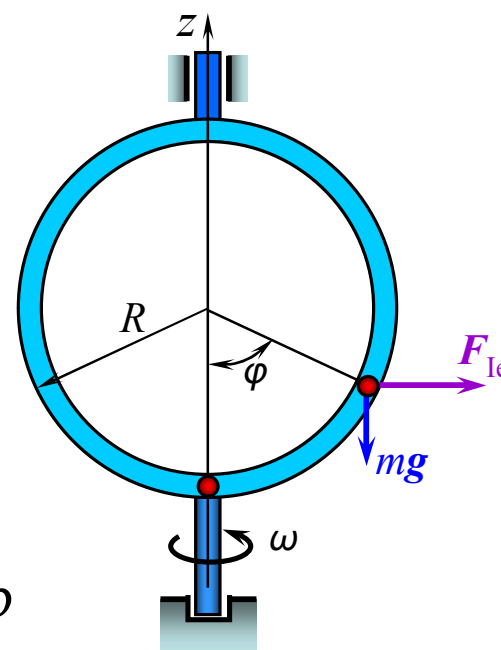
解: 以环形管为动参考系, 小球在任意角度 φ 时, 受力及运动如图。 $F_{\text{Ie}} = m\omega^2 R \sin \varphi$

经过微小角度 $d\varphi$ 后, 惯性力做的功为:

$$\delta W_1 = F_{\text{Ie}} R d\varphi \cos \varphi = m\omega^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

由相对运动的动能定理

$$0 - 0 = -mgR(1 - \cos \varphi_{\text{max}}) + \int_0^{\varphi_{\text{max}}} m\omega^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$



$$\longrightarrow mgR(\cos \varphi_{\max} - 1) + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \varphi_{\max} = 0$$

因 $\sin^2 \varphi_{\max} = 1 - \cos^2 \varphi_{\max}$

$$\longrightarrow mgR(\cos \varphi_{\max} - 1) + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 (1 - \cos^2 \varphi_{\max}) = 0$$

整理得 $\omega^2 R \cos^2 \varphi_{\max} - 2g \cos \varphi_{\max} + 2g - \omega^2 R = 0$

一个解为 $\cos \varphi_{\max} = \frac{g + (\omega^2 R - g)}{\omega^2 R}$

当 $\cos \varphi_{\max} = \frac{g + (\omega^2 R - g)}{\omega^2 R} = 1$ 时, 对应于小球在最低处的情况。

另一个解为 $\cos \varphi_{\max} = \frac{g - (\omega^2 R - g)}{\omega^2 R} = \frac{2g}{\omega^2 R} - 1$ 对应于小球在当前位置。

$$\longrightarrow \varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{2g}{\omega^2 R} - 1\right)$$

只有当 $\omega^2 R \geq g$, 结果才有意义。而当 $\omega^2 R < g$ 时, 小球不会沿管道上升, 在最低处才是稳定的。