3、刚体惯性力系的简化

简化方法

采用静力学中的力系简化的理论。将所有虚拟的惯性力视作一个力系向任一点O简化而得到一个惯性力$\boldsymbol{F}_{IR}$（主矢）和一个惯性力偶$\boldsymbol{M}_{IO}$（主矩）。

$$\boldsymbol{F}_{IR}=\sum\boldsymbol{F}_{iI}=\sum(-m_i\boldsymbol{a}_i)$$

考虑到：$$\sum m_i\boldsymbol{a}_i=\frac{\mathrm{d}^2(\sum m_i\boldsymbol{r}_i)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2(m\boldsymbol{r}_C)}{\mathrm{d}t^2}=m\boldsymbol{a}_C$$

故：$$\boldsymbol{F}_{IR}=\sum(-m_i\boldsymbol{a}_i)=-m\boldsymbol{a}_C$$ 与简化中心无关

无论刚体作什么运动，惯性力系主矢都等于刚体质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度方向相反。

$$\boldsymbol{M}_{IO}=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{iI})=\sum\boldsymbol{r}_i\times(-m_i\boldsymbol{a}_i)$$ 一般与简化中心有关

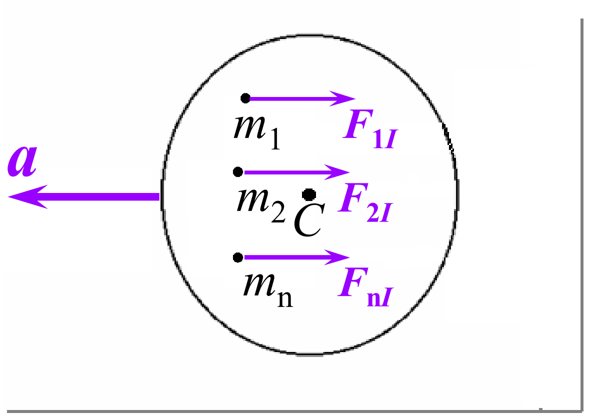
1、刚体作平移

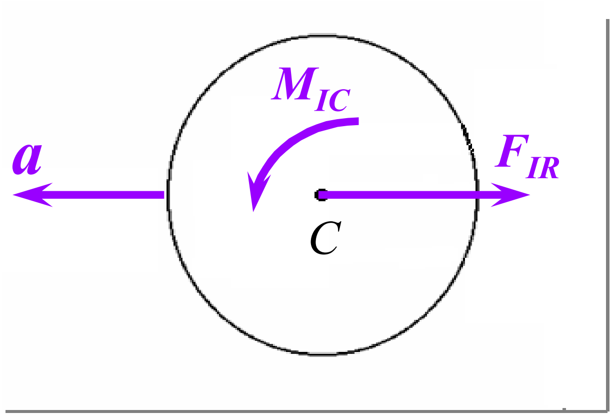
向质心C简化： $\boldsymbol{F}_{IR}=\sum \boldsymbol{F}_{iI}=\sum(-m_i\boldsymbol{a})\ =-m\boldsymbol{a}_C$

$$\boldsymbol{M}_{IC}=\sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_{iI})=\sum \boldsymbol{r}_i\times(-m_i\boldsymbol{a}_C)\ =-(\sum m_i\boldsymbol{r}_i)\times\boldsymbol{a}_C$$

$$=-m\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{a}_C\ =0$$

$\boldsymbol{r}_C$ —质心到简化中心C的矢径。





刚体平移时惯性力系可以简化为通过质心的合力，其大小等于刚体的质量与加速度的乘积，合力的方向与加速度方向相反。

$$\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$$

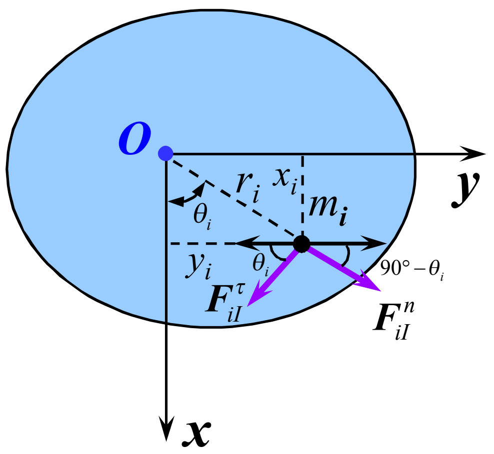
2、刚体定轴转动

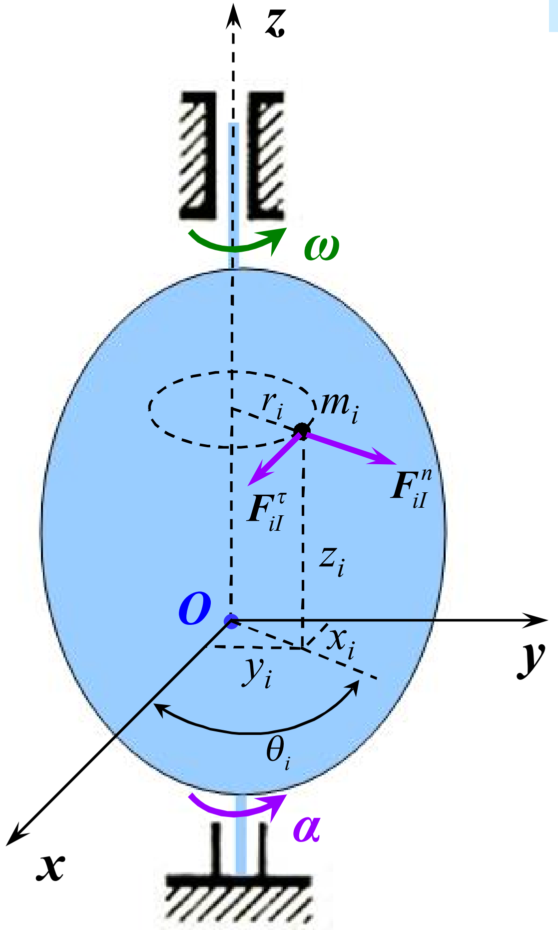
向转轴上任一点O简化:

刚体上任一点i的惯性力:

$$F_{iI}^{n}=m_i a_i^{n}=m_i r_i \omega^2$$

$$F_{iI}^{\tau}=m_i a_i^{\tau}=m_i r_i \alpha$$





惯性力系对x，y，z轴的矩，分别以M_{Ix}，M_{Iy}，M_{Iz}表示

$$M_{Ix}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_{iI}^{\tau})+\sum M_x(\boldsymbol{F}_{iI}^{n})$$

$$=\sum m_i r_i \alpha \cos\theta_i \cdot z_i-\sum m_i r_i \omega^2 \sin\theta_i \cdot z_i$$

$$=\alpha\sum m_i x_i z_i-\omega^2\sum m_i y_i z_i$$

考虑到：$\cos\theta_i=\dfrac{x_i}{r_i}$ $\sin\theta_i=\dfrac{y_i}{r_i}$

$$M_{Ix}=\alpha\sum m_i x_i z_i-\omega^2\sum m_i y_i z_i$$

令：$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$

$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i$

称为对z轴的惯性积，取决于刚体质量对于坐标轴的分布情况

$$\therefore\quad M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2$$

同理可得惯性力系对y轴的矩M_{Iy}为：

$$M_{Iy}=J_{xz}\omega^2+J_{yz}\alpha$$

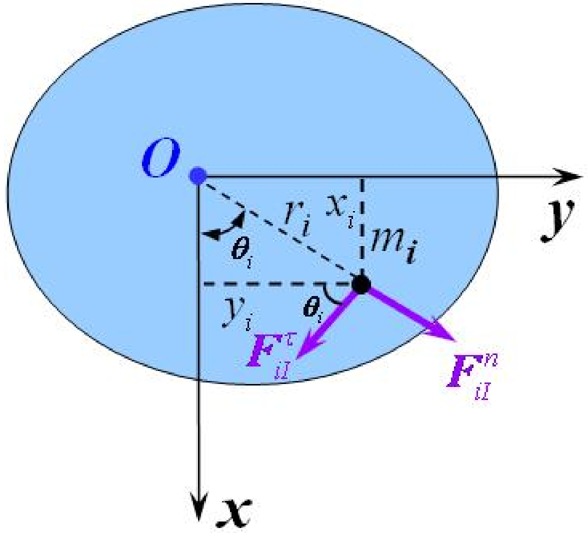
而惯性力系对转轴z轴的矩M_{Iz}为：

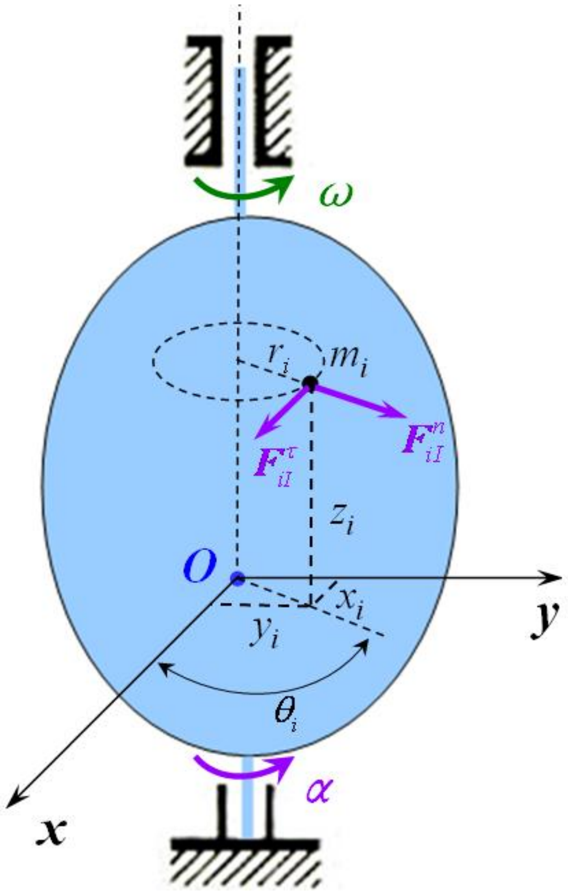
$$M_{Iz}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_{iI}^{\tau})=\sum -m_i r_i\alpha\cdot r_i$$

$$=-(\sum m_i r_i^2)\alpha=-J_z\alpha$$

刚体定轴转动时，惯性力系向转轴上任一点O简化主矩为：

$$\boldsymbol{M}_{IO}=M_{Ix}\boldsymbol{i}+M_{Iy}\boldsymbol{j}+M_{Iz}\boldsymbol{k}$$





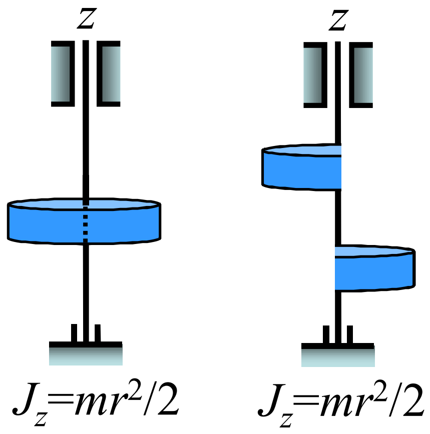
惯性积的物理意义

当刚体绕某个轴（例如z轴）转动时，这样的两个积分：

$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i \quad J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$ 称之为对该转轴的惯性积。

它是表示刚体转动惯性的量。　　质量是表示刚体平移惯性的量。

转动惯量J_z能够准确描述刚体绕定轴转动时的转动惯性？

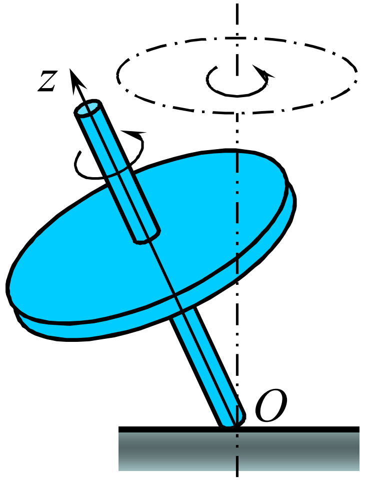


转动惯量J_z和惯性积J_{xz}和J_{yz}一起才能完整描述绕z轴转动时的转动惯性。

当刚体在空间绕定点转动时，可以分解成绕过该定点的三根坐标轴转动，此时刚体的转动惯性需要通过刚体对三个坐标轴的转动惯量（3个）和对三个坐标轴的惯性积（6个），一共9个量来描述。

$$J_O=\begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

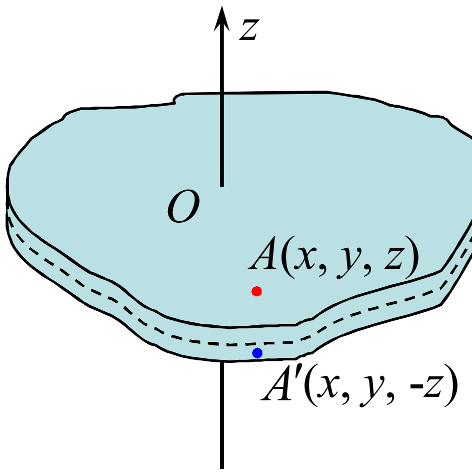
惯性张量



转动惯量J_z描述的是刚体的质量分布相对于转轴的集中度；

惯性积Jxz和Jyz描述的是刚体的质量分布相对于转轴的对称度。

如果刚体具有垂直于转轴的质量对称平面，简化中心O取为此平面与转轴的交点，则



$$J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$$

$$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$$

z轴为刚体过O点的一个惯性主轴

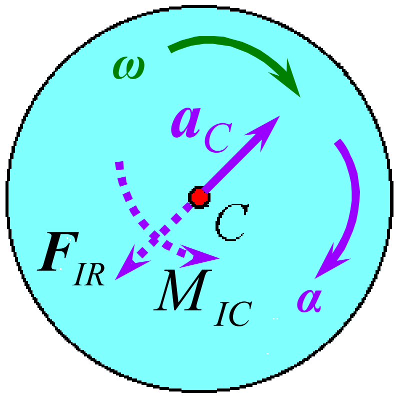
惯性力系简化的主矩为：

$$M_{IO} = M_{Iz} = -J_z \alpha$$

当刚体质量有对称平面且绕垂直于此对称面的轴作定轴转动时，惯性力系向转轴简化为此对称面内的一个力和一个力偶。这个力等于刚体质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度方向相反，作用线通过转轴；这个力偶的矩等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积，转向与角加速度的转向相反。

3、刚体作平面运动

假设刚体具有质量对称平面，并且平行于该平面作平面运动。此时，刚体的惯性力系可先简化为对称平面内的平面力系。



刚体平面运动可分解为

随基点（质点C）的平移： $\boldsymbol{F}_{IR} = -m\boldsymbol{a}_C$

绕通过质心轴的转动： $M_{IC} = -J_C\alpha$

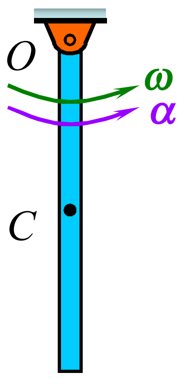
$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{F}_{IR} = -m\boldsymbol{a}_C \\ M_{IC} = -J_C\alpha \end{array}}$$

作用于质心C

总结

不论刚体作何种运动,其惯性力系的主矢大小均等于刚体的质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度方向相反。刚体平移时，惯性力系对质心的主矩为零；刚体定轴转动时，惯性力系对转轴上一点O的主矩由其三个分量确定；刚体平面运动时，惯性力系对质心C的主矩大小等于对通过质心C且垂直于质量对称面的转动惯量与角加速度的乘积，其转向与角加速度的转向相反。

例3 如图所示均质杆的质量为m，长为l，绕定轴O转动的角速度为ω，角加速度为α。试计算并画出惯性力系向O点简化的结果。

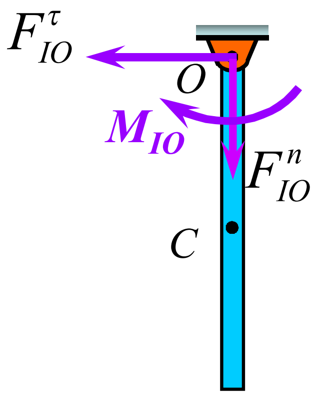


解：杆做定轴转动，惯性力系向转轴上的一点O点简化

主矢F_{IO}=-ma_C　　主矩M_{IO}= -$J_O\alpha$

主矢大小：

$$F_{IO}^{\tau} = m \cdot \frac{l}{2}\alpha \qquad F_{IO}^{n} = m \cdot \frac{l}{2}\omega^2$$



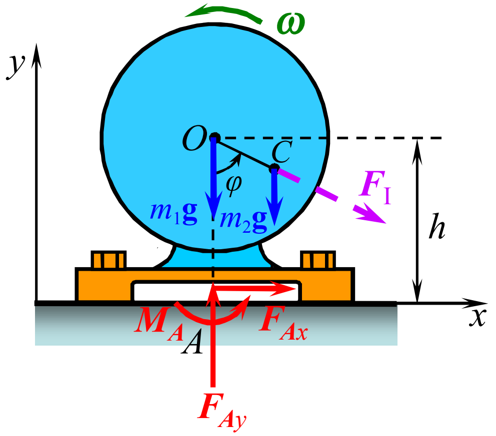
主矩大小：

$$M_{IO} = \frac{1}{3}ml^2 \cdot \alpha$$

注意：

此处不能以F_{IO}=-ma_C，惯性力与质心加速度a_C相反为由，而把惯性力系主矢画在C点。如果这样画的话是绝对错误的。

例4 如图所示电动机定子及其外壳总重量为m_1，质心位于O处。转子的质量为m_2，质心位于C处，偏心距$OC=e$，图视平面为转子的质量对称平面。电动机用地脚螺钉固定于水平基座上，转轴O与水平基座间的距离为h。运动开始时，转子质心C位于最低位置，转子以匀角速度ω转动，求电动机受到的总的约束力。



解：取电动机整体为研究对象，分析受力。

分析运动，虚加惯性力（偶），

F_I的大小为：$F_I = m_2 e\omega^2$

由达朗贝尔原理（动静法），列静力学平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \qquad F_x + F_I \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_y - (m_1 + m_2)g - F_I \cos\varphi = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad M - m_2 g e \sin\varphi - F_I h \sin\varphi = 0$$

代入$\varphi=\omega t$，得到：

$$F_x = -m_2 e\omega^2 \sin\omega t, F_y = (m_1 + m_2)g + m_2 e\omega^2 \cos\omega t, M = m_2 g e \sin\omega t + m_2 e\omega^2 h \sin\omega t$$

思考:

(1)、电动机受到的约束力有什么变化规律，与静止时相比有什么不同？

(2)、如果转子是加速转动，除了角速度ω，还有角加速度α，此时又该如何分析？