碰撞理论的应用

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

本讲主要内容

1、 碰撞问题举例

2、碰撞对绕定轴转动刚体的作用

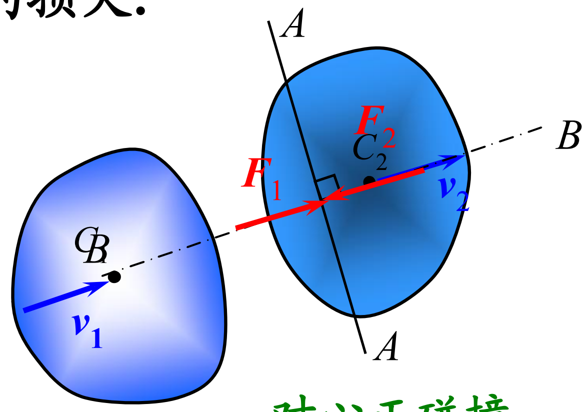
1、碰撞问题举例

应用动量定理和动量矩定理的积分形式，并用恢复因数建立补充方程，可以分析碰撞前后物体运动与其受力之间的关系。

例1 两物体的质量分别为m_1和m_2，恢复因数为e，产生对心正碰撞。

求：碰撞结束时各自质心的速度和碰撞过程中动能的损失.

解：两物体同向运动，碰撞的条件是$v_1>v_2$。取两物体组成的质点系为研究对象，因为无外碰撞冲量，质点系动量守恒。



对心正碰撞

（1）速度

假设碰撞结束时，两物体质心的速度分别为v'_1和v'_2，由冲量定理，往法线方向（直线BB）投影，有：

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2$$

由恢复因数的定义有： $e=\dfrac{v'_2-v'_1}{v_1-v_2}$

联立解得：

$$\left.\begin{aligned} v'_1&=v_1-(1+e)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)\\ v'_2&=v_2+(1+e)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2)\end{aligned}\right\}$$

如果$m_1>>m_2$，则$v'_1\approx v_1$，$v'_2=v_1+e(v_1-v_2)$.

即物体1速度几乎不变，物体2的速度大于物体1。

• 在理想情况下，$e=1$，有：

$$v_1' = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)\,,\quad v_2' = v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)$$

如果$m_1=m_2$，则$v'_1=v_2$, $v'_2=v_1$. 即两物体在碰撞结束时交换了速度。

• 在极限情况下，$e=0$，有：$v_1' = v_2' = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}$

即两物体在碰撞结束时，两物体速度相同，一起运动。

（2）动能

分别以T_1和T_2表示质点系在碰撞开始和结束时的动能，有：

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\,,\quad T_2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

碰撞过程中损失的动能为：

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_1(v_1^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - v_2'^2)$$
$$= \frac{1}{2}m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') + \frac{1}{2}m_2(v_2 - v_2')(v_2 + v_2')$$

将前面得到的v'_1和v'_2的一般解代入得：

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}(1+e)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)[(v_1+v_1')-(v_2+v_2')]$$

由 $e=\dfrac{v_2'-v_1'}{v_1-v_2}$ 得 $v_2'-v_1'=e(v_1-v_2)$ 代入上式，得：

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(1-e^2)(v_1-v_2)^2$$

- 在理想情况下，$e=1$，有$\Delta T=0$.

即发生完全弹性碰撞时，系统动能没有损失，碰撞前后系统具有相同的动能。

- 在极限情况下，$e=0$，动能的损失为： $\Delta T = T_1 - T_2 = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2$

如果第二个物体在碰撞前处于静止，则$v_2=0$，此时有：

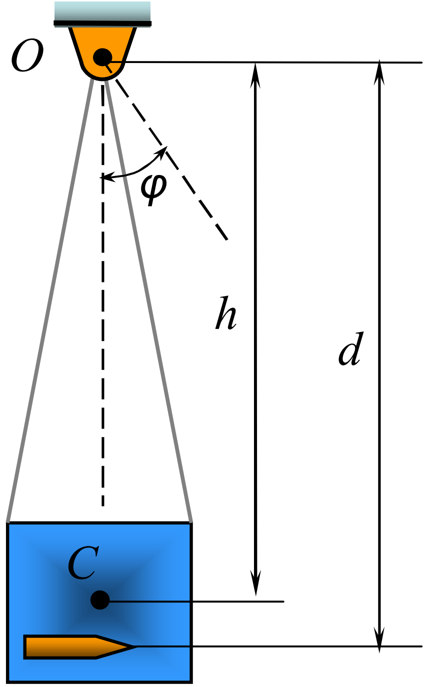
$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}v_1^2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}T_1$$

塑性碰撞中，动能的损失与两物体的质量比有关。

当$m_2>>m_1$时， $\Delta T\approx T_1$。即系统碰撞前的动能几乎完全损失于碰撞过程。

当$m_2<<m_1$时， $\Delta T\approx 0$。即系统碰撞前的动能几乎完全没有损失。

例2 如图所示为一测量子弹速度的装置，称为**射击摆**，其是一个悬挂于水平轴O的填满砂土的筒。当子弹水平射入砂筒后，使筒绕轴O转过一偏角φ，测量偏角的大小即可求出子弹的速度，已知摆的质量为m_1，对于轴O的转动惯量为J_O，摆的重心C到轴O的距离为h，子弹的质量为m_2，子弹射入砂筒时子弹到轴O的距离为d，悬挂索的重量不计。求：子弹的速度.



解：以子弹与砂筒组成的质点系为研究对象，子弹射入砂筒并与砂筒一起运动可近似视为碰撞过程。

碰撞过程中，系统仅受重力和绳子的拉力这些外力的作用，它们对轴O的矩等于零，所以碰撞前后系统对轴O的动量矩不变。 设碰撞开始时子弹速度为v，则：$L_{O1}=m_2vd$

设碰撞结束时摆的角速度为ω，则：$L_{O2}=J_O\omega+m_2\omega d^2$

二者相等，解得：$v=\dfrac{J_O+m_2d^2}{m_2d}\omega$

此后，子弹与砂筒一起绕O轴转过φ角至最高点，应用

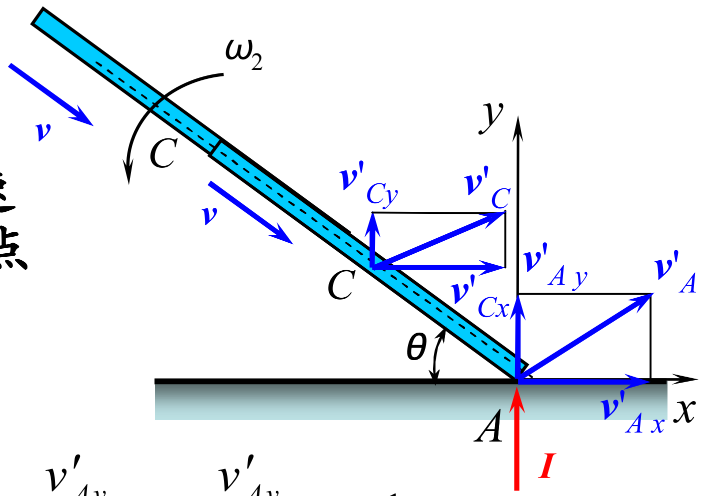
动能定理，得到：$0-(\frac{1}{2}J_O\omega^2+\frac{1}{2}m_2d^2\omega^2)=-m_1gh(1-\cos\varphi)-m_2gd(1-\cos\varphi)$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{m_1h+m_2d}{J_O+m_2d^2}g}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{v=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{m_2d}\sqrt{(J_O+m_2d^2)(m_1h+m_2d)g}}$$

例3 均质细杆长 l，质量为 m，速度为 v 平行于杆，杆与地面成 θ 角，斜撞于光滑地面，设为完全弹性碰撞。

求：碰撞后杆的角速度.



解：杆在碰撞过程中做平面运动，碰撞前杆的角速度 ω_1=0，假设碰撞后角速度为 ω_2，质心 C 和 A 点撞击后的速度如图所示。

地面光滑，杆只受到竖直方向的碰撞冲量 I。

由刚体平面运动碰撞方程，得到：

$$\begin{cases} mv'_{Cx} - mv_{Cx} = \sum I_x & (1) \\ mv'_{Cy} - mv_{Cy} = \sum I_y & (2) \\ J_C\omega_2 - J_C\omega_1 = \sum M_C(\boldsymbol{I}^{(e)}) & (3) \end{cases}$$

针对式(1)，由于 I_x=0，所以有：

$$v'_{Cx} = v_{Cx} = v_C\cos\theta = v\cos\theta$$

为了表示 A 点的速度，选质心为基点，有：$v'_A = v'_C + v'_{AC}$

沿 y 轴投影，得到：

$$v'_{Ay} = v'_{Cy} + \frac{l}{2}\cos\theta\cdot\omega_2$$

由恢复因数 $e = \dfrac{v'_{Ay}}{v_{Ay}} = \dfrac{v'_{Ay}}{v\sin\theta} = 1$

得 $v'_{Ay} = v\sin\theta$

代入左侧 v'_{Ay} 的表达式，得到：

$$v\sin\theta = v'_{Cy} + \frac{l}{2}\omega_2\cos\theta \qquad (4)$$

针对式(2)和式(3)，可得：

$$\begin{cases} mv'_{Cy} + mv\sin\theta = I \\ \dfrac{1}{12}ml^2\omega_2 = I\cdot\dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases}$$

消去 I 得到 $v'_{Cy} = \dfrac{l\omega_2}{6\cos\theta} - v\sin\theta$

代入式(4) 得 $\boxed{\omega_2 = \dfrac{6v\sin 2\theta}{(1+3\cos^2\theta)l}}$