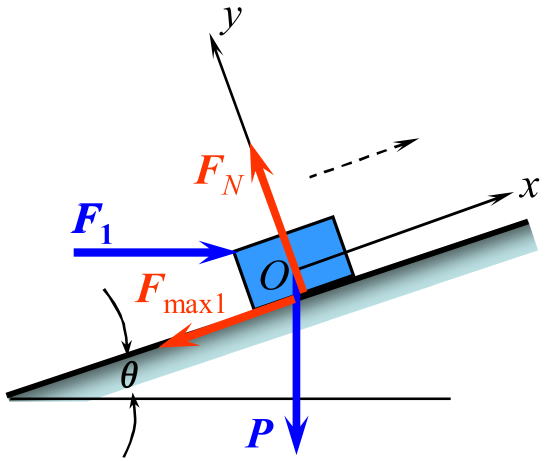
3、考虑摩擦的平衡问题

（解析法）

例2 物体重为P，放在倾角为θ的斜面上，已知重物与斜面间的静滑动摩擦系数为f_s，今在重物上作用一个向右的水平力F，试计算当物体静止时F的大小。

分析：由经验已知，当F太大时，物块将上滑；而当F太小时，物块将沿斜面滑下。因此F使物块平衡时，其大小应该介于二者之间，关键是找出这两个临界值。



解：取重物为研究对象，建立如图坐标系。

假设物块处于往上滑动的临界状态，此时的水平作用力大小为F_1，对应的摩擦力为最大静摩擦力F_{max1}，方向斜向下，画出物块受力。

列平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1\cos\theta - P\sin\theta - F_{max1} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_1\sin\theta - P\cos\theta + F_N = 0$$

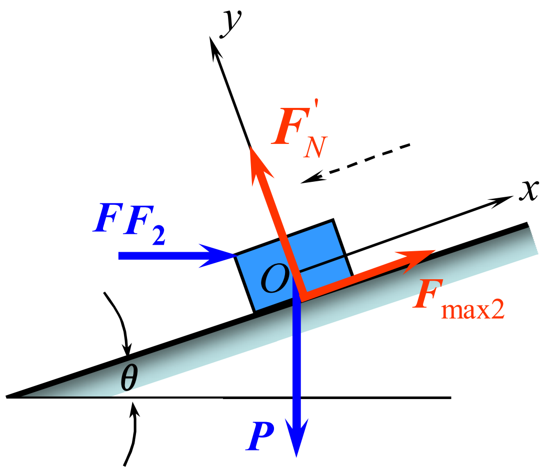
物块处于临界平衡状态，摩擦力为最大静滑动摩擦力，故：

$$F_{max1} = f_s F_N$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}P$$

此为力F的最大值！

假设物块处于往下滑动的临界状态，此时的水平作用力大小为***F*2**，对应的摩擦力为最大静摩擦力$F_{\max 2}$，方向斜向上，画出物块受力。



列平衡方程:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_2\cos\theta - P\sin\theta + F_{\max 2} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_2\sin\theta - P\cos\theta + F_{\rm N}' = 0$$

物块处于临界平衡状态，摩擦力为最大静滑动摩擦力，故:

$$F_{\max 2} = f_{\rm s} F_{\rm N}'$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{\sin\theta - f_{\rm s}\cos\theta}{\cos\theta + f_{\rm s}\sin\theta} P$$

此为力***F***的最小值!

故使物块保持静止（平衡）的***F***大小范围为:

$$\frac{\sin\theta - f_{\rm s}\cos\theta}{\cos\theta + f_{\rm s}\sin\theta} P \le F \le \frac{\sin\theta + f_{\rm s}\cos\theta}{\cos\theta - f_{\rm s}\sin\theta} P$$

考虑摩擦的平衡问题的特点

仍为平衡问题，平衡方程照用，求解步骤与前面基本相同.

几个新特点

1 画受力图时，必须考虑摩擦力F_S;

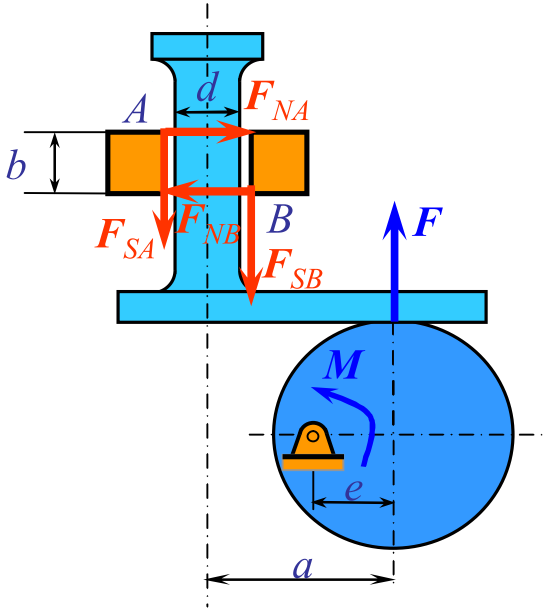
2 要严格区分物体处于临界、非临界平衡状态;

3 因$0 \leq F_s \leq F_{max}$，问题的解往往在一个范围内。

例3 凸轮挺杆机构滑道尺寸为d，宽度为b，挺杆与滑道间静滑动摩擦系数为f_s，不计凸轮与挺杆处摩擦，不计挺杆质量；

求：挺杆不被卡住之尺寸a值.

分析：由经验可知，当a太大时，挺杆会被卡住，此时挺杆会在AB两点与滑道接触。可取刚要被卡住还没被卡住的临界平衡状态分析，此时对应的是最大的a值。



解：取挺杆为研究对象，系统处于临界平衡状态，分析挺杆受力。列平衡方程：

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{NA} - F_{NB} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_{SA} - F_{SB} + F = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad -F_{NB}b - F_{SB}d + F(a + \frac{d}{2}) = 0$$

挺杆处于临界平衡状态，摩擦力为最大静滑动摩擦力，故：

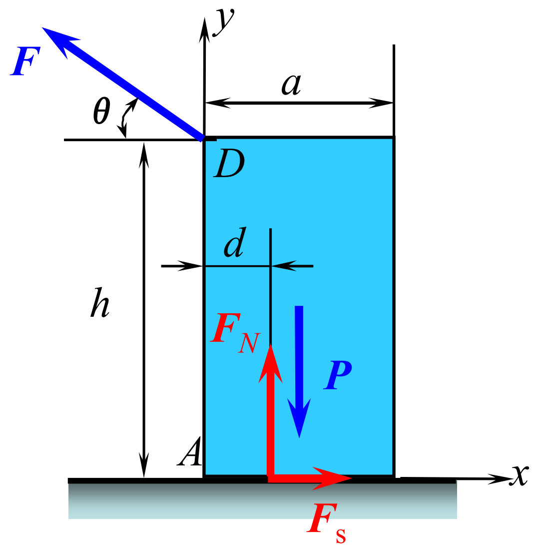
$$F_A = f_s F_{NA} \qquad F_B = f_s F_{NB}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{b}{2f_s}$$

故挺杆不被卡住时：$\boxed{a < \dfrac{b}{2f_s}}$

例4 均质木箱重P=5kN，与地面的静滑动摩擦系数f_s=0.4，木箱尺寸h=2a=2m，在箱子D点作用一斜向上的拉力F，θ=30°。

求：(1)当拉力F=1kN时，木箱是否平衡？
(2)能保持木箱平衡的最大拉力。



解：(1)假设木箱平衡，分析木箱受力。

列平衡方程:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_s - F\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{\mathrm{N}} - P + F\sin\theta = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad hF\cos\theta + F_{\mathrm{N}}d - P\cdot\frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}} = 4500\mathrm{N}, \quad F_s = 866\mathrm{N}, \quad d = 0.171\mathrm{m}$$

而 $F_{\max} = f_s F_{\mathrm{N}} = 1800\mathrm{N} > F_s$

故木箱不会滑动；

又因为 $d > 0$，

故木箱不会翻倒。

$\Rightarrow$ **木箱平衡**

这一类问题，我们称之为一般平衡问题，即主动力已知，判断系统是否平衡的问题。通常这类问题的解法是，假设系统平衡，此时物体所受摩擦力为静摩擦力，可列平衡方程求解，然后验证结果是否与假设相符，相符的话则假设正确；不相符则说明假设有误，系统处于非平衡态，需要按照非平衡态对应的情况来计算。

(2) 设木箱刚好要滑动还未滑动时的拉力为F1，分析受力

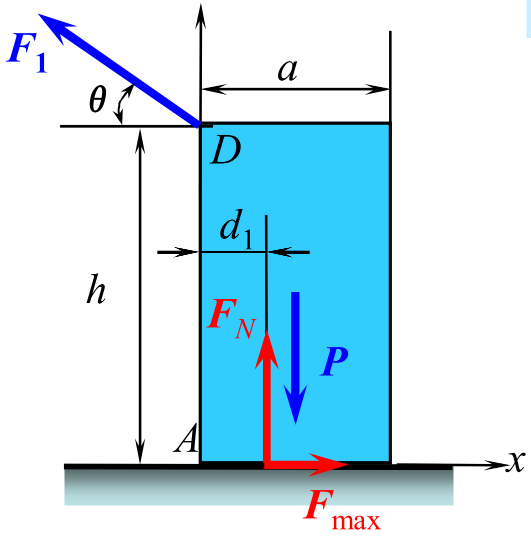
列平衡方程:

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_{\max} - F_1 \cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P + F_1 \sin\theta = 0$$

$$F_{\max} = f_s F_N$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = \frac{f_s P}{\cos\theta + f_s \sin\theta} = 1876\text{N}$$

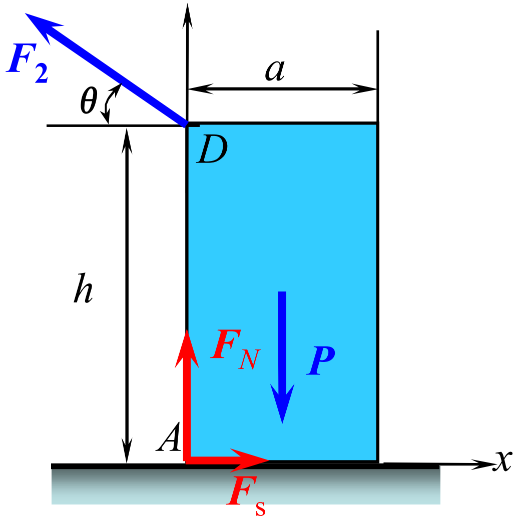


设木箱有翻动趋势时的拉力为F2，分析受力

列平衡方程:

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_2 \cos\theta \cdot h - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{Pa}{2h\cos\theta} = 1443\text{N}$$



$$F \le \min\{F_1, F_2\}$$

最大拉力为1443N

这一类问题，我们称之为临界平衡问题，即主动力未知，计算系统平衡（不平衡）时，主动力需要满足何种条件的问题。通常这类问题的解法是，取系统的临界平衡状态（考虑摩擦时摩擦力对应的为最大静摩擦力），计算此时的主动力大小，得到主动力的边界值，然后根据实际情况确定主动力范围，其解通常是在某个范围内。

思考:

解有摩擦的平衡问题时，摩擦力是否一定要给出真实的方向?

答案:

考虑有摩擦的物体平衡问题时，按摩擦力的性质可分为两类
（1）一般平衡问题：摩擦力未达到最大值，可以假定方向。
（2）临界平衡问题：必须给出摩擦力方向。