5、以矢量表示角速度和角加速度

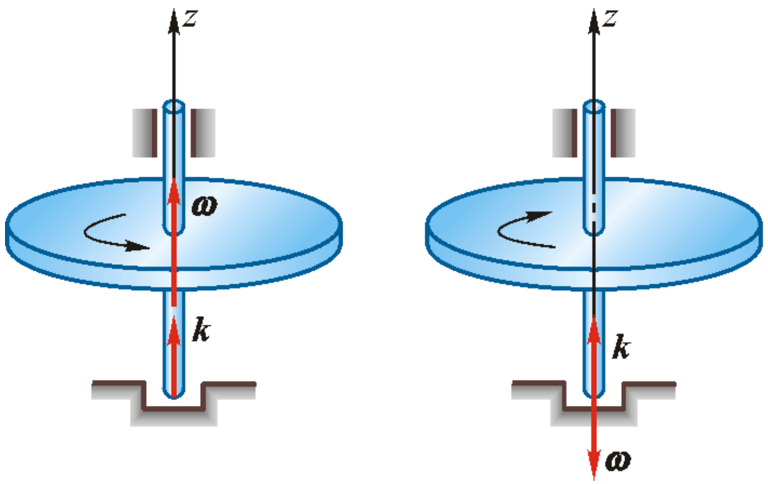
以矢积表示点的速度和加速度

以矢量表示角速度和角加速度
以矢积表示点的速度和加速度

角速度矢量

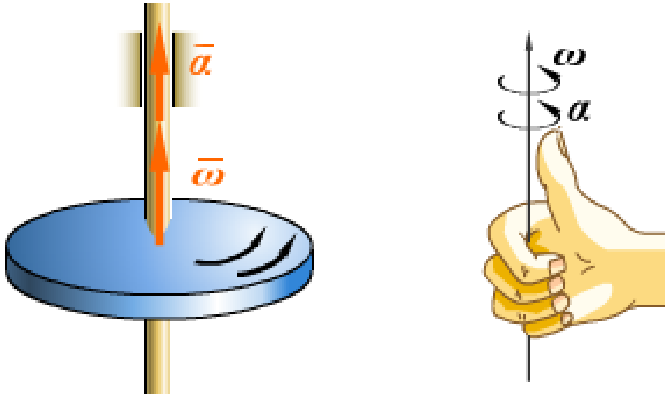
$$\vec{\omega}\begin{cases}\text{大小} & |\vec{\omega}| = |\omega| = \left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right| \\ \text{作用线} & \text{沿轴线　滑动矢量} \\ \text{指向} & \text{右手螺旋定则}\end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$



角加速度矢量

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \alpha\vec{k}$$



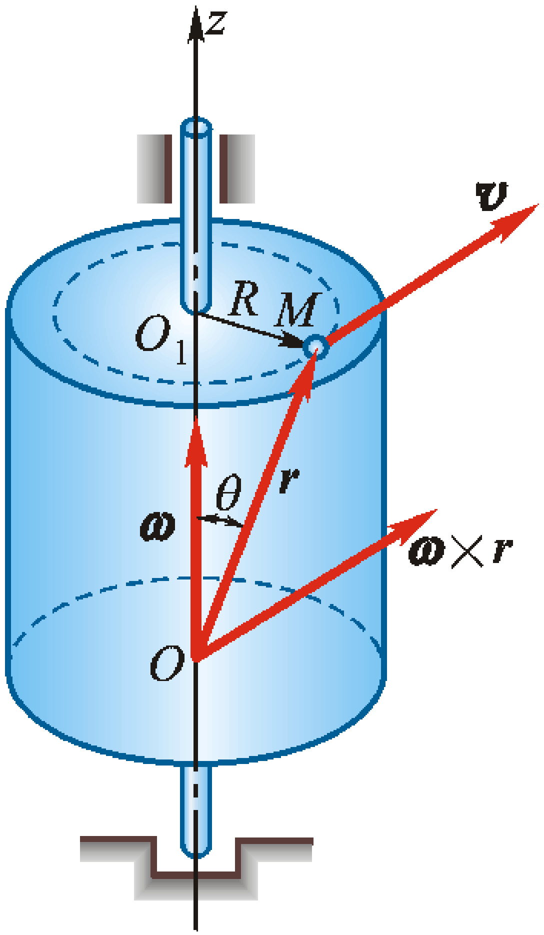
(a)　(b)

速度的矢积表达

大小 $|\vec{v}|=|\vec{\omega}|R=|\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\sin\theta$

方向 右手定则

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$



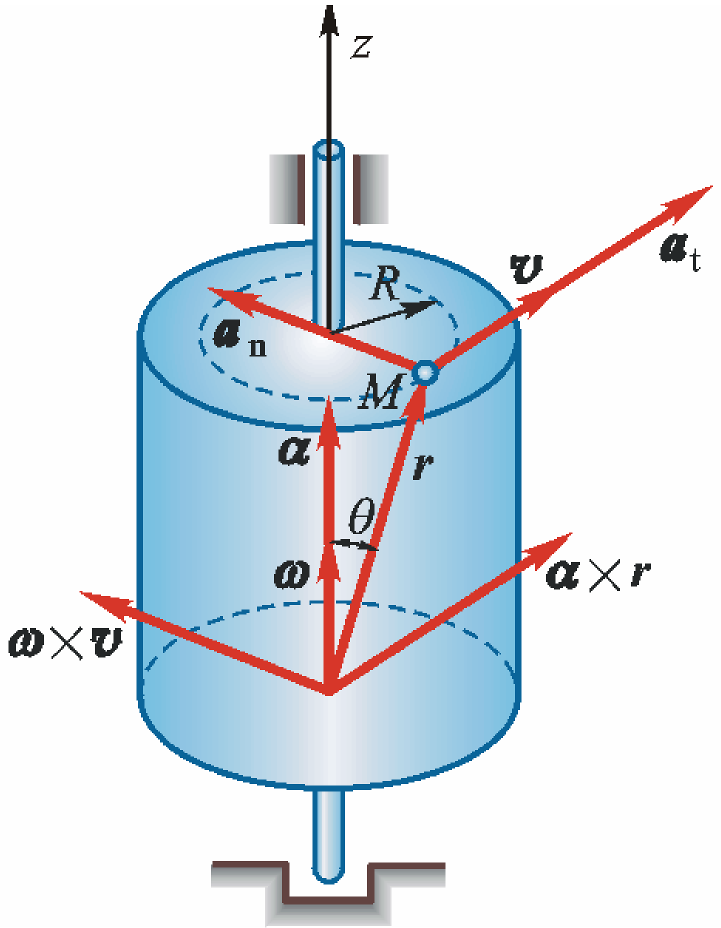
加速度的矢积表达

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}}$$



$\vec{a}_{\mathrm{t}}=\vec{\alpha}\times\vec{r}$ 　　*M*点切向加速度

$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ 　　*M*点法向加速度

例1

已知：刚体绕定轴转动，已知转轴通过坐标原点O，角速度矢为

$$\vec{\omega}=5\sin\frac{\pi t}{2}\vec{i}+5\cos\frac{\pi t}{2}\vec{j}+5\sqrt{3}\vec{k}$$

求：t =1s时，刚体上点M（0，2，3）的速度矢及加速度矢。

解：

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5\sin\frac{\pi t}{2} & 5\cos\frac{\pi t}{2} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-10\sqrt{3}\vec{i}-15\vec{j}+10\vec{k}$$

$$\vec{\omega}=5\sin\frac{\pi t}{2}\vec{i}+5\cos\frac{\pi t}{2}\vec{j}+5\sqrt{3}\vec{k}$$

$$\vec{v}=-10\sqrt{3}\vec{i}-15\vec{j}+10\vec{k}$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\left(-\frac{15}{2}\pi+75\sqrt{3}\right)\vec{i}-200\vec{j}-75\vec{k}$$

例2

已知：某定轴转动刚体通过点M_0（2，1，3），其角速度矢的方向余弦为0.6，0.48，0.64，角速度的大小ω=25rad/s 。

求：刚体上点M（10，7，11）的速度矢。

解： 角速度矢量

$$\vec{\omega}=\omega\vec{n} \qquad \vec{n}=(0.6,0.48,0.64)$$

M点相对于转轴上一点M_0的矢径

$$\vec{r}=\vec{r}_M-\vec{r}_{M_0}=(10,7,11)-(2,1,3)=(8,6,8)$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\omega(\vec{n}\times\vec{r})=\omega\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0.6 & 0.48 & 0.64\\ 8 & 6 & 8\end{vmatrix}=8\vec{j}-6\vec{k}$$