4、空间力偶系的合成与平衡

力偶系

完全由一群力偶所组成的力系。

平面力偶系

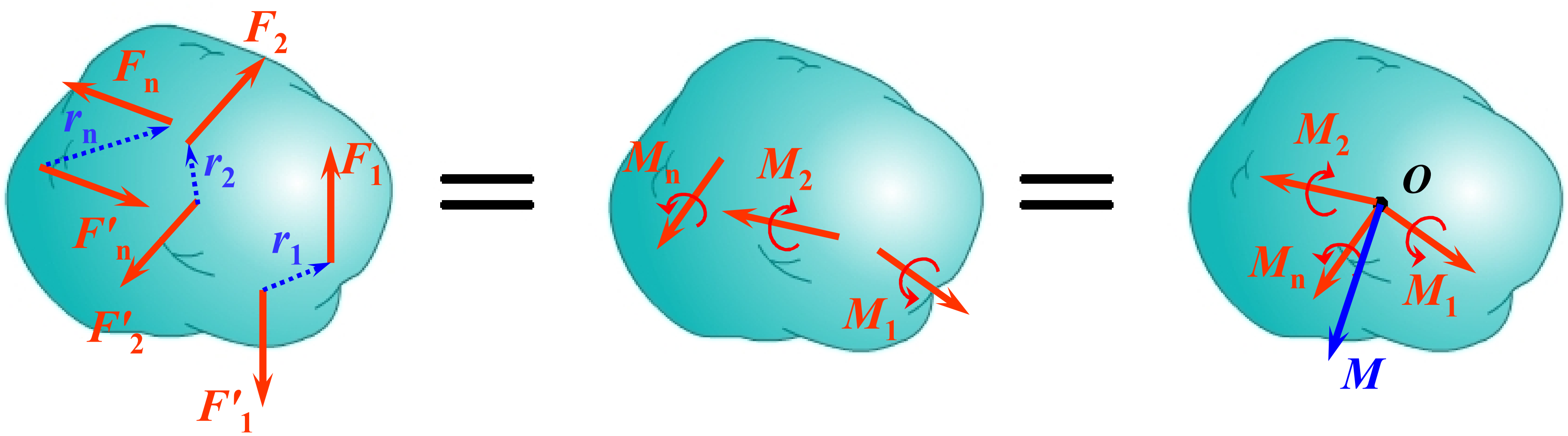
各力偶的作用面均处于同一平面内。

空间力偶系

各力偶的作用面不处于同一平面内。

空间力偶系能否像平面力偶系一样用简单力系（一个力偶）等效代替？平衡条件（方程）是什么？

(1) 空间力偶系的合成



$$M_1 = r_1 \times F_1 \qquad M_2 = r_2 \times F_2 \qquad \cdots\cdots \qquad M_n = r_n \times F_n$$

$$\Rightarrow \quad M = \sum M_i$$

任意个空间分布的力偶可以合成为一个**合力偶**，合力偶矩矢量等于各分力偶矩矢的矢量和。

如果已知各分力偶矩，采用解析法，由合矢量投影定理：

$$M_x = \sum M_x \,, M_y = \sum M_y \,, M_z = \sum M_z$$

合力偶矩矢的大小

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

合力偶矩矢的方向（方向余弦）

$$\cos\alpha = \frac{\sum M_x}{M} \qquad \cos\beta = \frac{\sum M_y}{M} \qquad \cos\gamma = \frac{\sum M_z}{M}$$

α β γ为合力矩矢M与x, y, z轴的正向夹角

作用点可以为刚体上任意位置。

(2) 空间力偶系的平衡条件和平衡方程

任意力偶系平衡的充分必要条件

合力偶矩等于零

平衡方程

$$\boldsymbol{M}=\sum \boldsymbol{M}_i=0$$

$$\sum M_x=0 \quad \sum M_y=0 \quad \sum M_z=0$$

一个空间力偶系如同空间汇交力系一样，能列三个独立的平衡方程，求解三个独立的未知量。

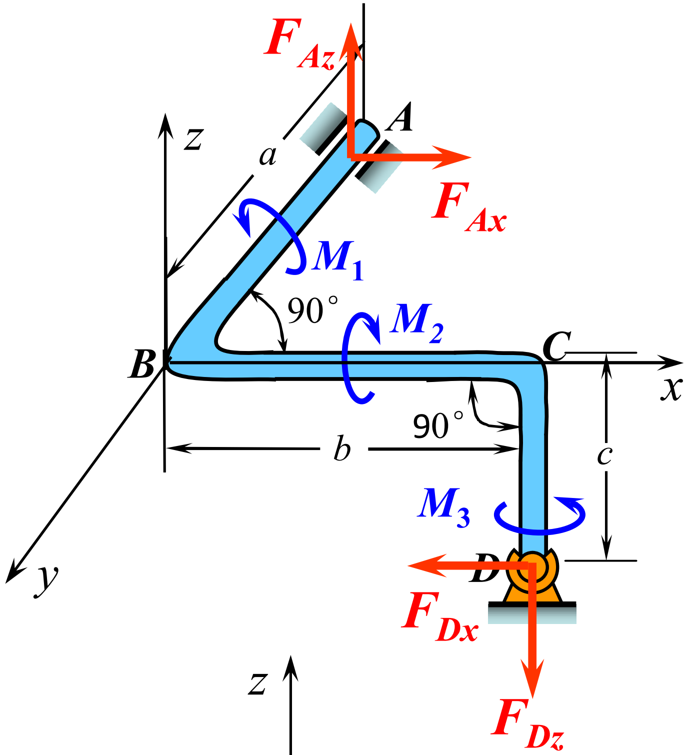
例3 无重曲杆$ABCD$有两个直角，且平面ABC与平面BCD垂直。杆的D端为球铰链支座，另一端A受径向轴承支持。在曲杆的AB、BC和CD上作用三个力偶，力偶所在的平面分别垂直于AB、BC和CD。已知力偶矩M_2和M_3求使曲杆处于平衡的力偶矩M_1和支座约束力。

解：取曲杆为研究对象，以B为原点，建立如图所示坐标系，分析受力。力偶要由力偶来平衡！

并且$F_{Ax}=F_{Dx}$, $F_{Az}=F_{Dz}$,未知约束力为2个，再加上M_1，一共3个未知量．空间力偶系，可求解。

为了方便，将所有力偶以力偶矩的形式，在B点表示，主动力偶为M_1, M_2和M_3

约束力偶矩不容易直接表示，可通过计算这些力偶中的力对B点的矩来得到，其实就是表示这些力对三个坐标轴的矩。

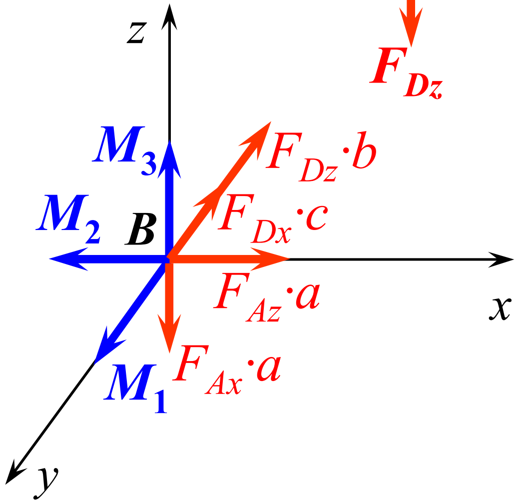


列空间力偶系的平衡方程：

$$\sum M_x = 0 \qquad F_{Az} \cdot a - M_2 = 0$$

$$\sum M_y = 0 \qquad M_1 - F_{Dx} \cdot c - F_{Dz} \cdot b = 0$$

$$\sum M_z = 0 \qquad M_3 - F_{Ax} \cdot a = 0$$



$$F_{Ax} = F_{Dx} = \frac{M_3}{a} \qquad F_{Az} = F_{Dz} = \frac{M_2}{a} \qquad M_1 = \frac{c}{a} M_3 + \frac{b}{a} M_2$$