2、单自由度系统的
有阻尼受迫振动

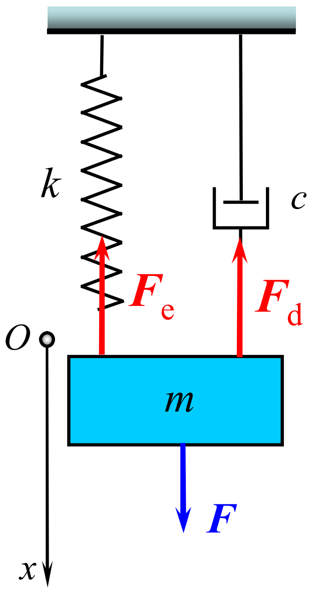
（1）振动微分方程

如果以平衡位置为坐标原点，则在建立自由振动系统的振动微分方程时可以不再计入重力的作用。分析物块受力。

① 激振力F，简谐激振力。 $F = H\sin(\omega t)$

② 恢复力F_e，方向指向平衡位置O，大小与偏离平衡位置的距离成正比。 $F_e = -kx$

③ 黏性阻尼力F_d，方向与速度方向相反，大小与速度大小成正比。 $F_d = -cv_x = -c\dfrac{dx}{dt}$



物块的运动微分方程为： $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\dfrac{dx}{dt} + H\sin(\omega t)$

方程两边同除以m，并令：$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$（$\omega_0$，固有角频率），$2\delta = \dfrac{c}{m}$（$\delta$，阻尼系数），

$h = \dfrac{H}{m}$ 得到：$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h\sin(\omega t)$

——有阻尼受迫振动微分方程的标准形式

解可以写成：$x = x_1 + x_2$ x_1对应齐次方程的通解；x_2对应的是特解。

欠阻尼的情况下（$\delta < \omega_0$），齐次方程的通解可写为：$x_1 = Ae^{-\delta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + \theta)$

特解可写为： $x_2 = b\sin(\omega t - \varepsilon)$ ε表示受迫振动的相位角落后于激振力的相位角

将x_2代入微分方程，得到：

$$-b\omega^2\sin(\omega t-\varepsilon)+2\delta b\omega\cos(\omega t-\varepsilon)+\omega_0^2 b\sin(\omega t-\varepsilon)=h\sin(\omega t)$$

将等式右边的$h\sin(\omega t)$做一个变换，得到：

$$h\sin(\omega t)=h\sin[(\omega t-\varepsilon)+\varepsilon]\ =h\cos\varepsilon\sin(\omega t-\varepsilon)+h\sin\varepsilon\cos(\omega t-\varepsilon)$$

代入微分方程，整理得到：

$$[b(\omega_0^2-\omega^2)-h\cos\varepsilon]\sin(\omega t-\varepsilon)+[2\delta b\omega-h\sin\varepsilon]\cos(\omega t-\varepsilon)=0$$

对任意瞬时t，上式都必须是恒等式，所以有：

$$\left.\begin{aligned} b(\omega_0^2-\omega^2)-h\cos\varepsilon=0 \\ 2\delta b\omega-h\sin\varepsilon=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad b=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}} \qquad \tan\varepsilon=\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

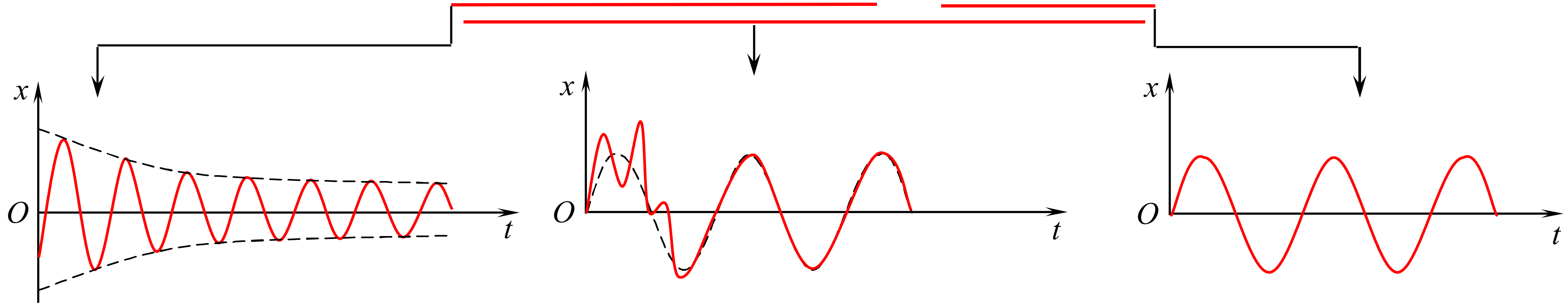
于是，微分方程的通解为：

$$x=Ae^{-\delta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t+\theta)+b\sin(\omega t-\varepsilon)$$

式中，A和 θ 为积分常数，由运动的初始条件确定。等式右边表示，有阻尼受迫振动由两部分组成：第一部分对应的衰减振动；第二部分对应的是受迫振动。这两部分都与阻尼有关。

（2）振动规律

$$x = Ae^{-\delta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t+\theta)+b\sin(\omega t-\varepsilon)$$



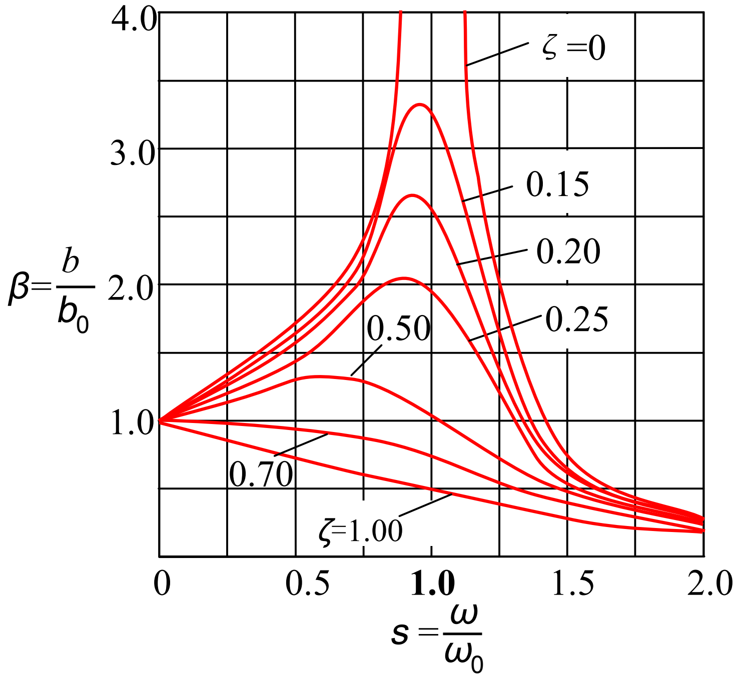
衰减振动有显著影响的这段振动过程称为过渡过程（或瞬态过程）；过渡过程以后的振动过程称为稳态过程。

虽然有阻尼存在，但受简谐激振力作用的受迫振动仍然是谐振动，其振动频率等于激振力的频率，振幅为：

$$b=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}} \qquad s=\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\zeta=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{\delta}{\omega_0} \qquad \beta=\frac{b}{b_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2+4\zeta^2 s^2}}$$

$$\tan\varepsilon=\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=\frac{2\zeta s}{1-s^2}$$



① 当 $\omega \ll \omega_0$，即 $s \to 0$

此时，阻尼对振幅的影响很小，可忽略系统的阻尼把系统当作无阻尼受迫振动处理。

② 当 $\omega \to \omega_0$，即 $s \to 1$

此时，振幅显著增大。但阻尼对振幅有显著影响，阻尼减小，振幅显著增加。

当 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ 时，振幅b具有最大值b_{max}，此时的频率称为共振频率。

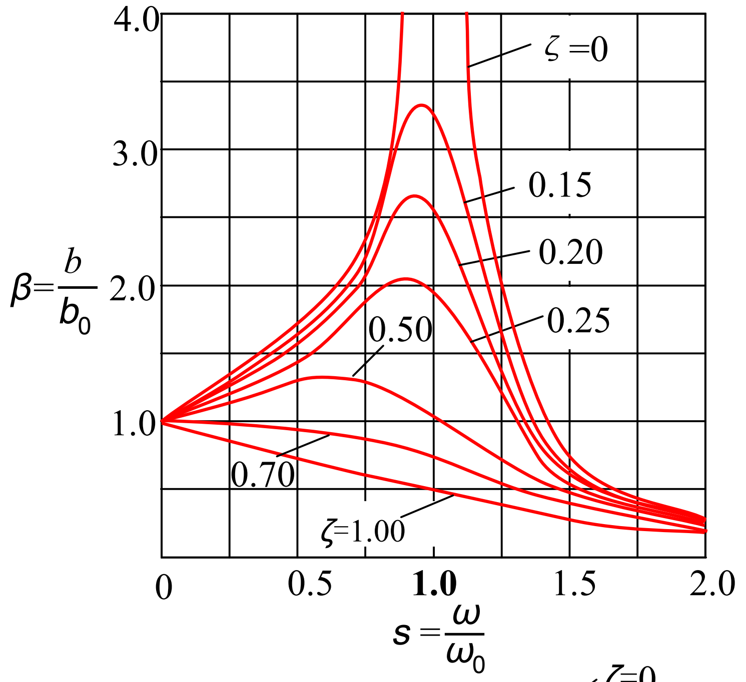
$$b_{max} = \frac{h}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{b_0}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

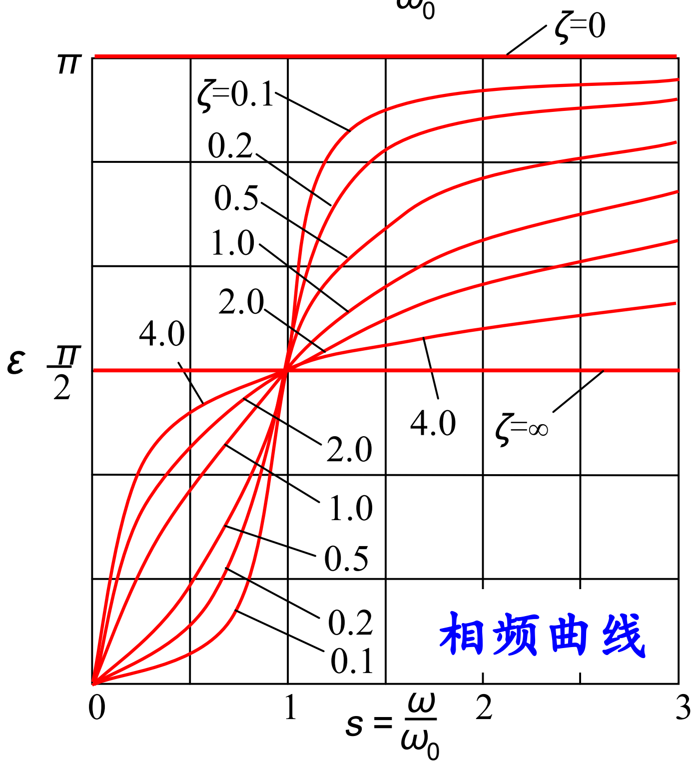
一般情况下，阻尼比 ζ<<1，可认为共振频率 $\omega \approx \omega_0$，共振的振幅为：$b_{max} \approx b_0/(2\zeta)$

③ 当 $\omega \gg \omega_0$ 阻尼对的振幅影响也很小，也可以忽略阻尼，把系统当作无阻尼受迫振动处理。

$$x_2 = b\sin(\omega t - \varepsilon) \qquad \tan\varepsilon = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\zeta s}{1-s^2}$$

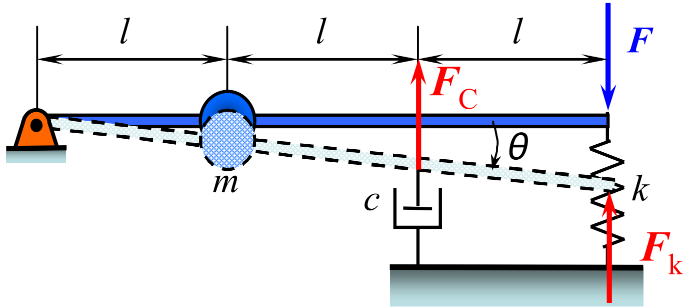
有阻尼受迫振动的相位角，总比激振力落后一个相位角 ε，ε 称为相位差。





例4 如图为一无重刚杆，其一端铰支，距铰支端l处有一质量为m的质点，距$2l$处有一阻尼器，其阻尼系数为c，距$3l$处有一刚度系数为k的弹簧。并作用一简谐激振力$F=F_0\sin\omega t$。刚杆在水平位置平衡。

求：系统的振动微分方程，系统的固有频率ω_0，以及当激振力频率ω等于ω_0时质点的振幅。



解：设在任一瞬时刚杆摆动的角度为θ，则杆摆动的角加速度为$\ddot{\theta}$，分析刚杆受力。

主动力，简谐激振力：$F=F_0\sin(\omega t)$

阻尼力：$F_C=cv=2l\dot{\theta}c$　　弹簧力：$F_k=kx=3l\theta k$

系统的振动微分方程为：$J\ddot{\theta}=\sum M=-F_C\cdot 2l-F_k\cdot 3l+F\cdot 3l$

$$\Rightarrow\quad ml^2\ddot{\theta}=-4cl^2\dot{\theta}-9kl^2\theta+3F_0l\sin\omega t$$

整理得：$\boxed{\ddot{\theta}+\dfrac{4c}{m}\dot{\theta}+\dfrac{9k}{m}\theta=\dfrac{3F_0}{ml}\sin\omega t}$

令$\omega_0=\sqrt{\dfrac{9k}{m}}$，$\delta=\dfrac{2c}{m}$，$h=\dfrac{3F_0}{ml}$

ω_0即为系统的固有频率。当$\omega=\omega_0$时

$$b=\frac{h}{2\delta\omega_0}=\frac{3F_0}{4c\omega_0 l}=\frac{F_0}{4cl}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

质点的振幅：

$$\boxed{B=lb=\frac{F_0}{4c}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$