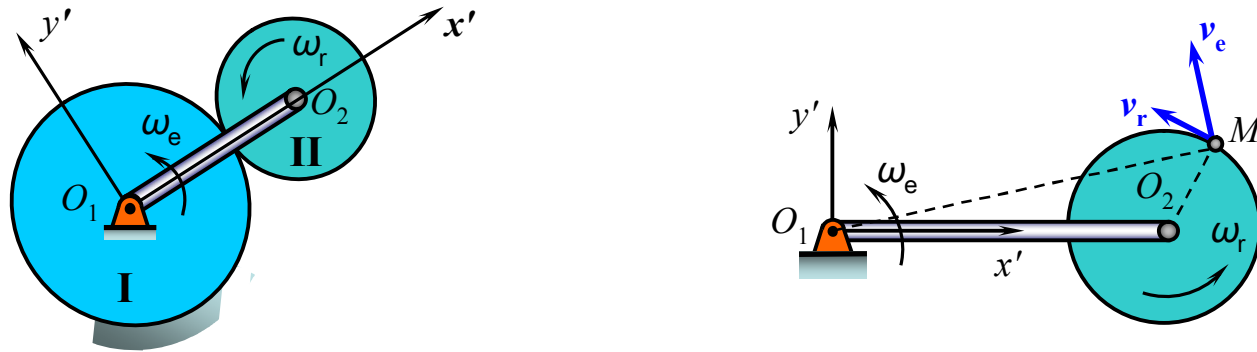


2、绕两个平行轴转动的合成

绕两个平行轴转动的合成



牵连运动为动参考 $O_1x'y'$ 绕轴 O_1 的定轴转动。

相对运动为齿轮 II 相对动参考 $O_1x'y'$ 做圆周运动。

牵连角速度为 ω_e ；相对角速度为 ω_r 。

齿轮 II 的运动由绕两个平行轴的转动与转动合成。

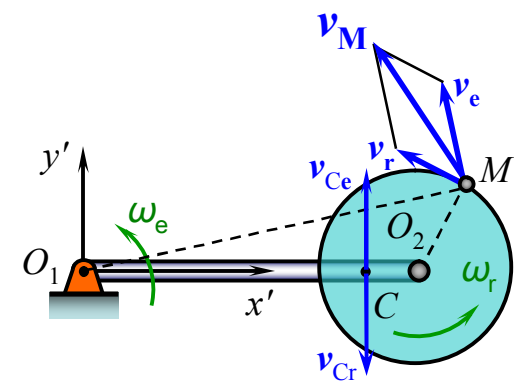
M 点的牵连速度大小 $v_e = O_1M \cdot \omega_e$ 方向垂直于 O_1M

M 点的相对速度大小 $v_r = O_2M \cdot \omega_r$ 方向垂直于 O_2M

M 点的绝对速度 $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$

每一瞬时， O_1O_2 连线上总可以在齿轮上找到一点 C ，它的牵连速度与相对速度方向相反，大小相等。

齿轮上 C 的绝对速度等于零， C 为速度瞬心，过 C 点且与轴 O_1 ， O_2 平行的轴称为瞬时转动轴，简称瞬轴。



- i 当 ω_e 与 ω_r 同向时，瞬轴 C 在 O_1O_2 之间。
- ii 当 ω_e 与 ω_r 反向时，瞬轴 C 在 O_1O_2 两点之外。

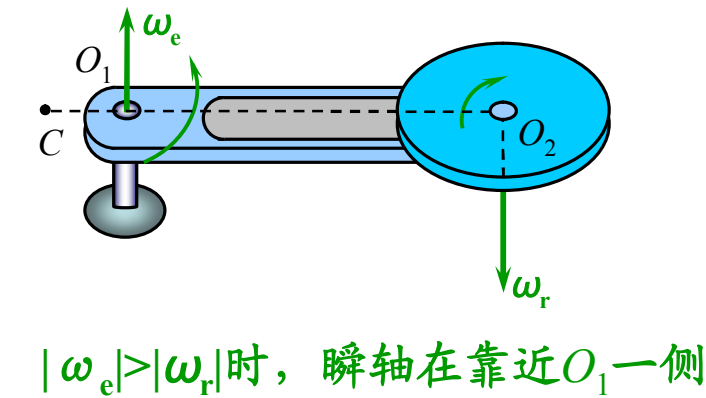
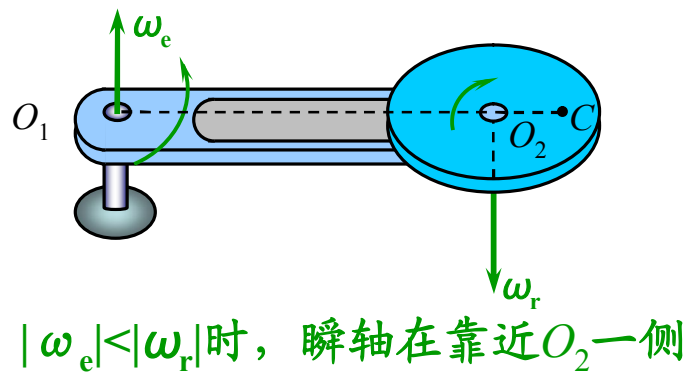
在点 C ，绝对速度等于零，有： $v_e = v_r$

也就是： $\omega_e \cdot O_1C = \omega_r \cdot O_2C$

或者：
$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$$

此为瞬轴 C 的位置需要满足的条件。

当 $|\omega_e| = |\omega_r|$ 时，如果同向，瞬轴在 O_1O_2 连线的中点处；如果反向，瞬轴在无穷远处，表明齿轮此时做平移运动。



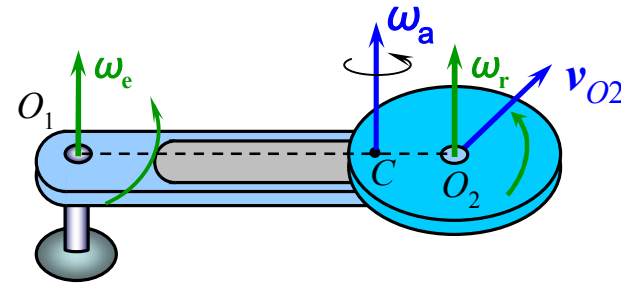
齿轮绕瞬轴转动的角速度 ω_a 的大小和方向。

i 当 ω_e 与 ω_r 同向时

$$v_{O_2} = \omega_e \cdot O_1O_2 = \omega_a \cdot O_2C \quad \text{因此: } \omega_a = \frac{v_{O_2}}{O_2C} = \frac{O_1O_2}{O_2C} \omega_e$$

当 ω_e 与 ω_r 同向时, $O_1O_2 = O_1C + O_2C$

$$\text{并且: } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad \longrightarrow \quad \omega_a = \omega_e + \omega_r \quad \text{方向与}\omega_e、\omega_r\text{相同}$$



ω_e 与 ω_r 同向时, 瞬轴在 O_1O_2 之间

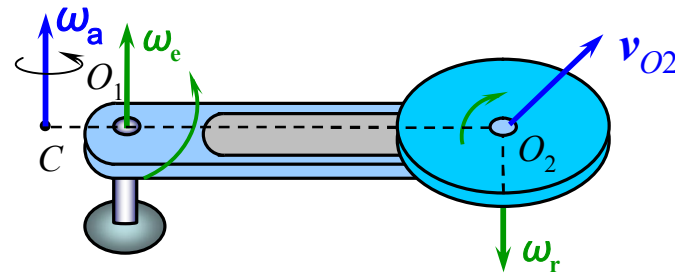
※ 当刚体同时绕两平行轴同向转动时, 刚体的合成运动为绕瞬轴的转动, 绝对角速度等于牵连角速度与相对角速度的和; 瞬轴的位置内分两轴间的距离, 内分比与两个角速度成反比。

ii 当 ω_e 与 ω_r 反向时

$$v_{O_2} = \omega_e \cdot O_1O_2 = \omega_a \cdot O_2C \quad \text{因此: } \omega_a = \frac{v_{O_2}}{O_2C} = \frac{O_1O_2}{O_2C} \omega_e$$

当 ω_e 与 ω_r 反向时, $O_1O_2 = |O_2C - O_1C|$

$$\text{并且: } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad \longrightarrow \quad \omega_a = |\omega_e - \omega_r| \quad \text{方向与}\omega_e、\omega_r\text{中较大的一个相同}$$



ω_e 与 ω_r 反向时, 瞬轴在 O_1O_2 之外

※ 当刚体同时绕两平行轴反向转动时, 刚体的合成运动为绕瞬轴的转动, 绝对角速度等于牵连角速度与相对角速度之差, 转向与较大的角速度的转向相同; 瞬轴的位置外分两轴间的距离, 在较大的角速度的轴外侧, 外内分比与两个角速度成反比。当两角速度大小相同时, 刚体合成运动为平移——转动偶。

例1 系杆 O_1O_2 以角速度 ω_e 绕轴 O_1 转动，半径为 r_2 的行星齿轮活动地套在与系杆一端固结的轴 O_2 上，并与半径为 r_1 的固定齿轮相啮合。

求：行星齿轮的绝对角速度 ω_2 ，以及它相对于系杆的角速度 ω_r 。

解：属于绕两个平行轴转动的合成问题。

两个转动角速度方向相同，瞬轴位于 O_1O_2 之间，显然位于啮合点 C 处。

根据：瞬轴的位置内分两轴间的距离，内分比与两个角速度成反比，得到：

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \frac{r_1}{r_2} \omega_e$$

根据：刚体的合成运动为绕瞬轴的转动，绝对角速度等于牵连角速度与相对角速度的和，得到：

$$\omega_2 = \omega_r + \omega_e = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \omega_e$$

