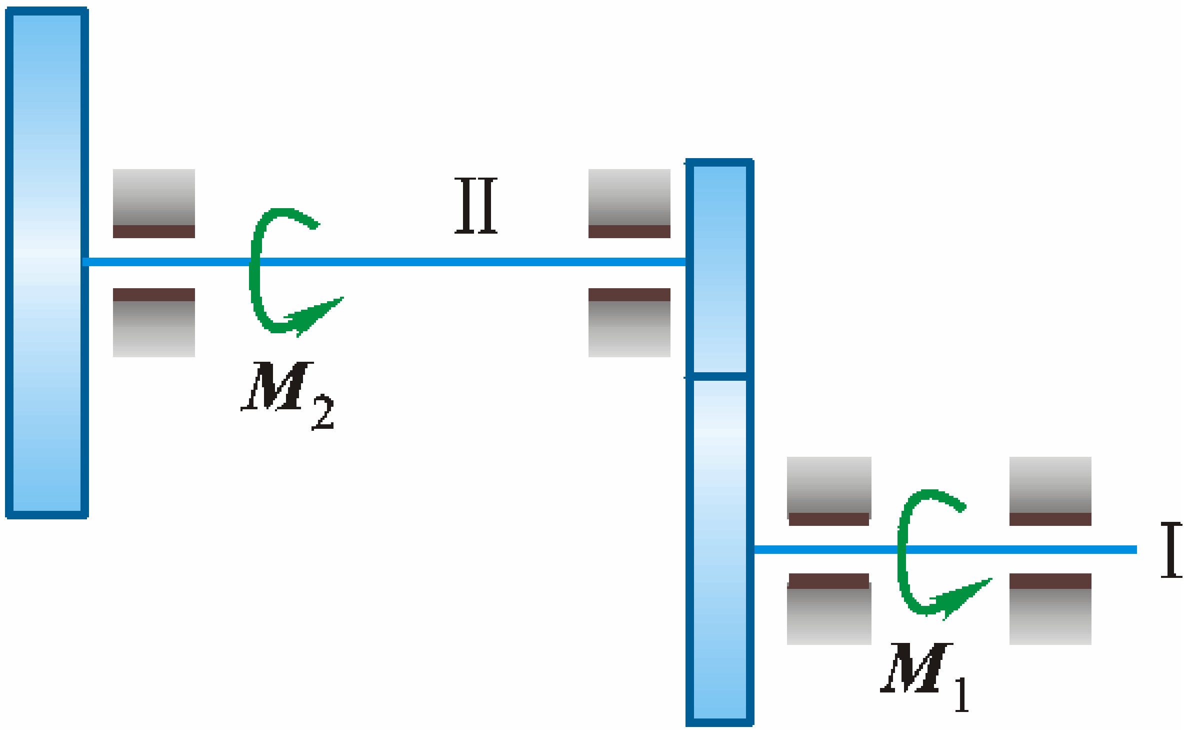


问题:

用系统的整体动量和动量矩能否反映系统的运动状态?

动能定理

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组

主要内容

1、力的功的计算

2、动能的计算

3、动能定理

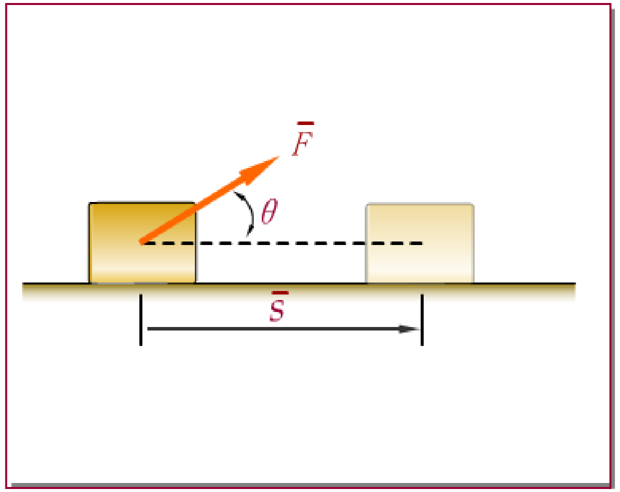
4、功率、功率方程和机械效率

1、力的功的计算

力的功的计算

常力在直线运动中的功

$$W = F\cos\theta \cdot s = \vec{F}\cdot\vec{s}$$



变力在曲线运动中的功

元功 $$\delta W = F\cos\theta \cdot ds$$

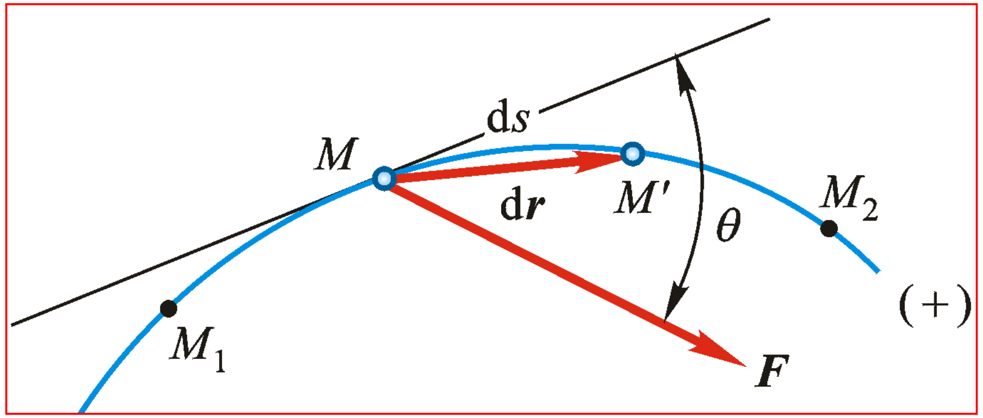
$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2}\delta W = \int_{M_1}^{M_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$



几种常见力的功

● 重力的功

质点

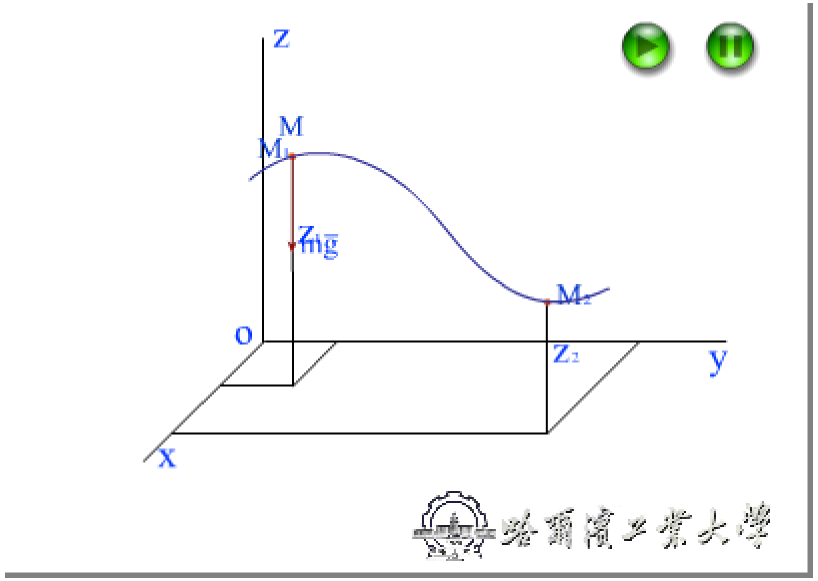
$$F_x = F_y = 0 \quad F_z = -mg \qquad W_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\mathrm{d}z = mg(z_1 - z_2)$$

质点系

$$\sum W_{12} = \sum m_i g(z_{i1} - z_{i2})$$

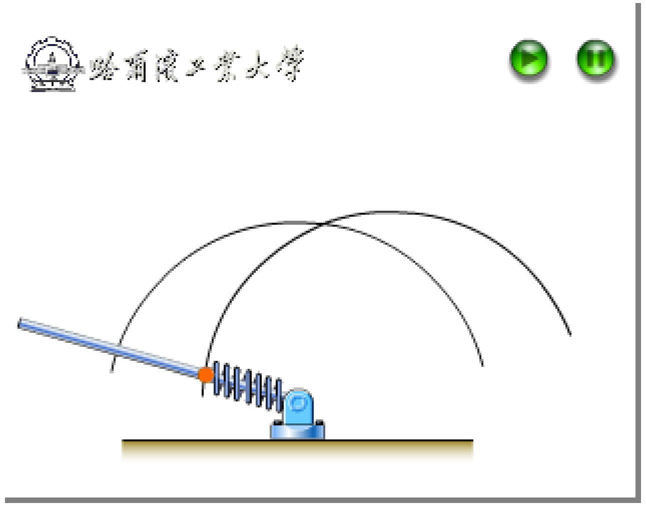
由 $mz_C = \sum m_i z_i$

得 $\sum W_{12} = mg(z_{C1} - z_{C2})$



重力的功只与始、末位置有关，与路径无关。

● 弹性力的功

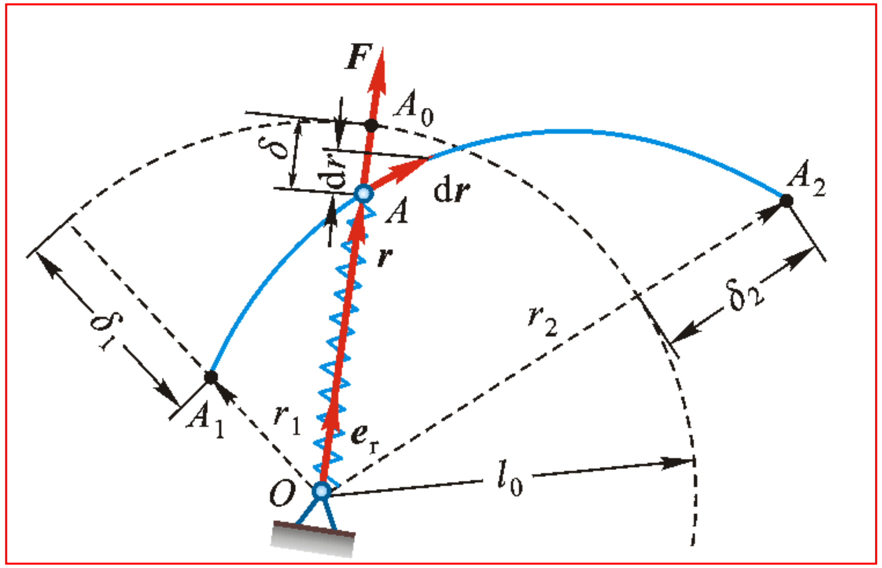


$$W_{12} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{A_1}^{A_2} -k(r - l_0)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2r}\mathrm{d}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2r}\mathrm{d}(r^2) = \mathrm{d}r$$

得 $W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -k(r - l_0)\mathrm{d}r$



即 $$\boxed{W_{12} = \frac{k}{2}(\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2)}$$

$$\delta_1 = r_1 - l_0, \delta_2 = r_2 - l_0$$

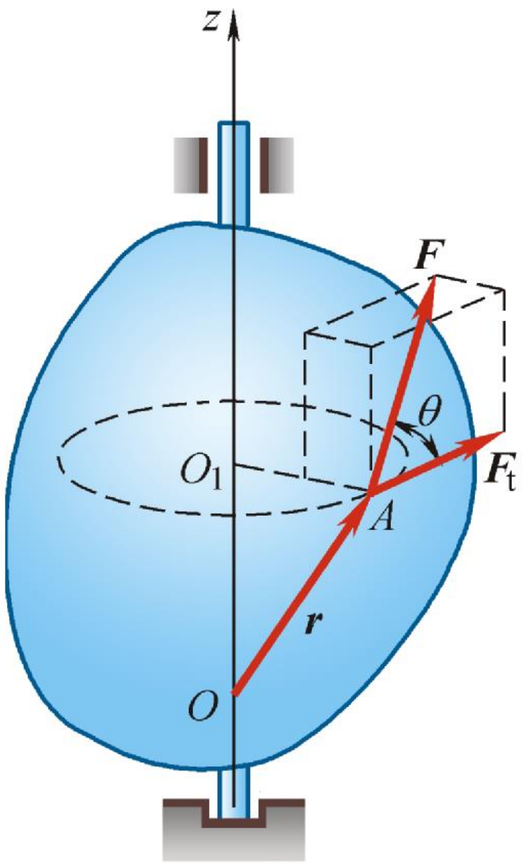
弹性力的功也与路径无关

● 定轴转动刚体上作用力的功

$$\delta W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_t \mathrm{d}s = F_t R \mathrm{d}\varphi$$

由 $M_z = F_t R$

$$\boxed{\delta W = M_z \mathrm{d}\varphi}$$



从角 φ_1 转动到角 φ_2 过程中力 $\vec{F}$ 的功为

$$W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \mathrm{d}\varphi$$

若 $M_z =$ 常量

则 $\boxed{W_{12} = M_z(\varphi_2 - \varphi_1)}$ 　可计算力偶作功

- 任意运动刚体上力系的功

无论刚体作何运动，力系的功总等于力系中所有力作功的代数和。

将力系向刚体上任一点简化，一般简化为一个力和一个力偶。由力系的等效原理，这个力和力偶所作的元功等于力系中所有力所作元功的和，有

$$\delta W = \sum \delta W_i = \vec{F}_R{}' \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \vec{M}_C \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$$

可以是任意点

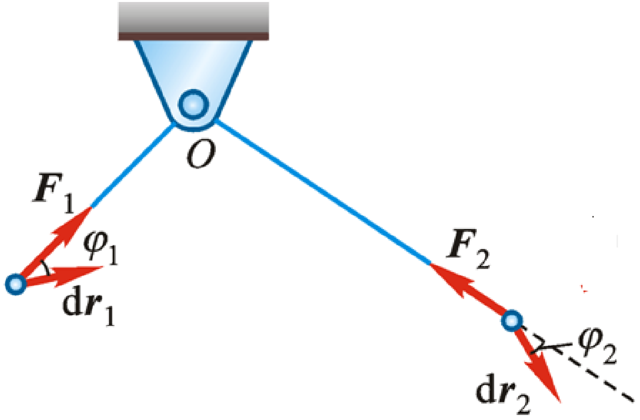
平面运动刚体 $$\delta W = \vec{F}_R{}' \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + M_C \mathrm{d}\varphi$$

当质心由 $C_1 \sim C_2$，转角由 $\varphi_1 \sim \varphi_2$ 时，力系的功为

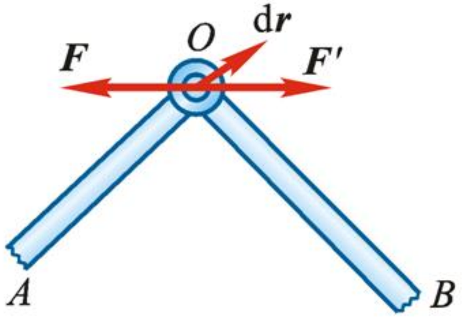
$$W_{12} = \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}_\mathrm{R}' \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_C \mathrm{d}\varphi$$

约束力的功

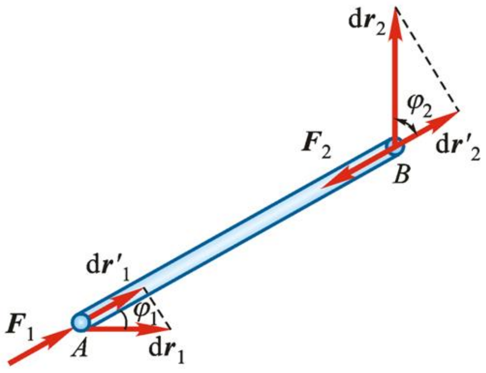
光滑固定面约束，其约束力垂直于作用点的位移、约束力作功等于零.



不可伸长的柔索



光滑铰链



刚性二力杆

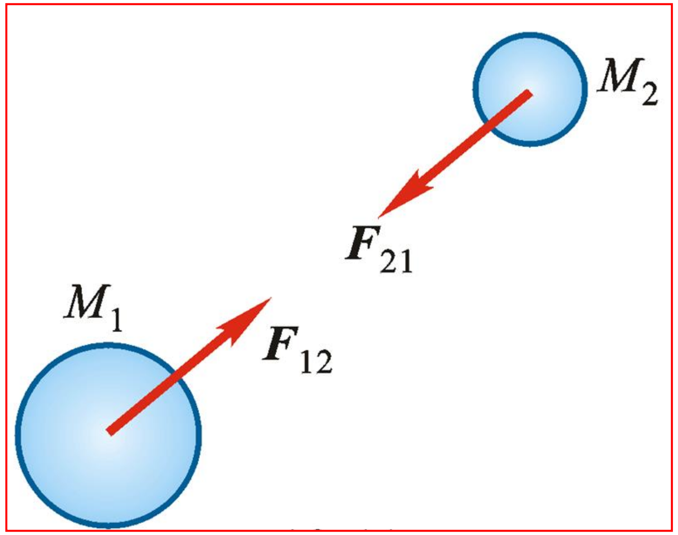
纯滚动

光滑铰支座
固定端约束

理想约束

对理想约束，在动能定理中只计入主动力的功即可.

内力的功



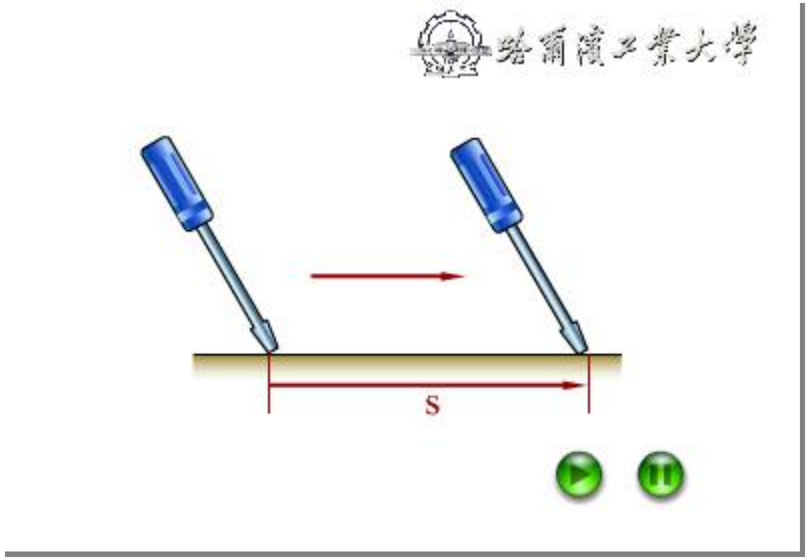
内力的功不一定为零

汽车气缸内气体的压力为内力，作功不为零，使汽车的动能增加。

机器中轴和轴承的摩擦力是内力，但作功不为零，为负。

刚体内力的功的和为零。

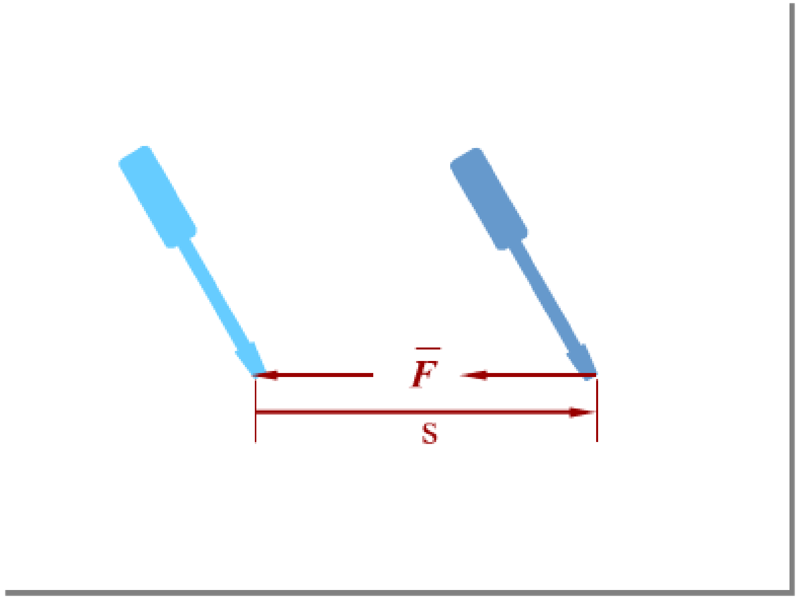
思考：

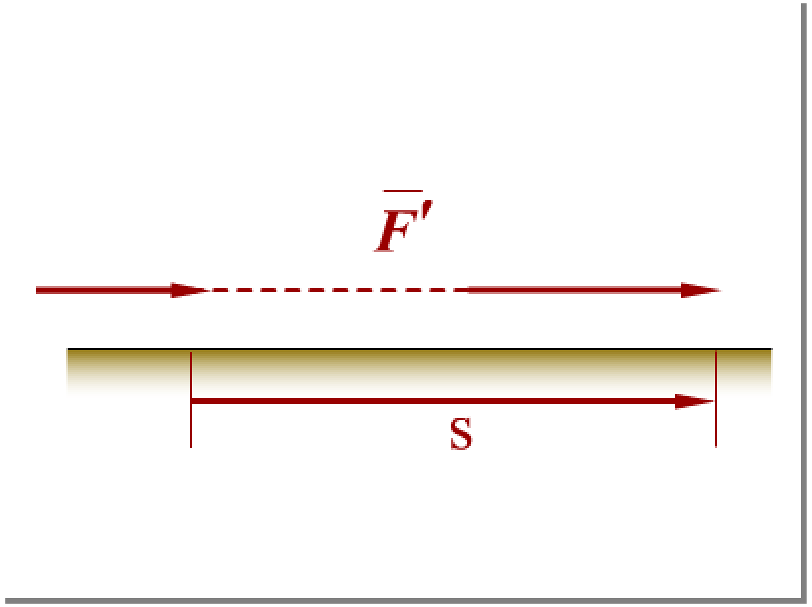


$$W_1 = -F \cdot s$$

$$W_2 = 0$$

$$\Rightarrow W = W_1 + W_2 = -F \cdot s$$

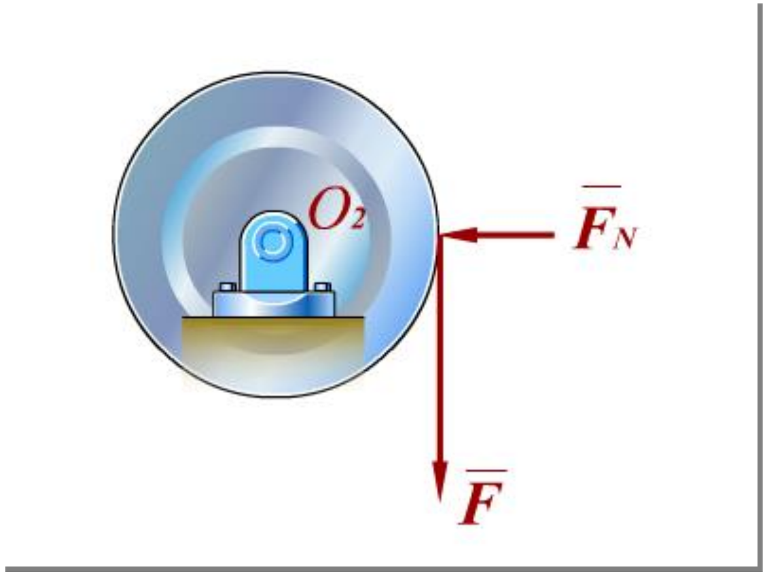


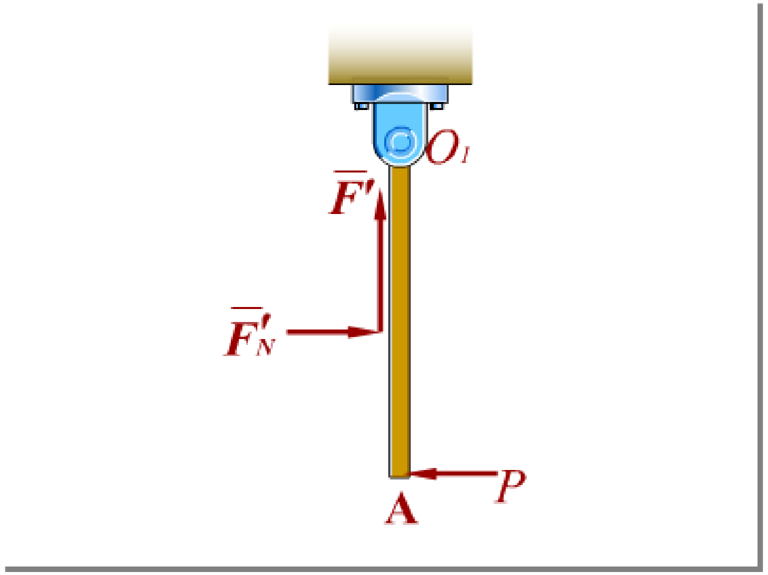


$$W_1 = -F \cdot R\varphi$$

$$W_2 = 0$$

$$\Rightarrow W = W_1 + W_2 = -F \cdot R\varphi$$

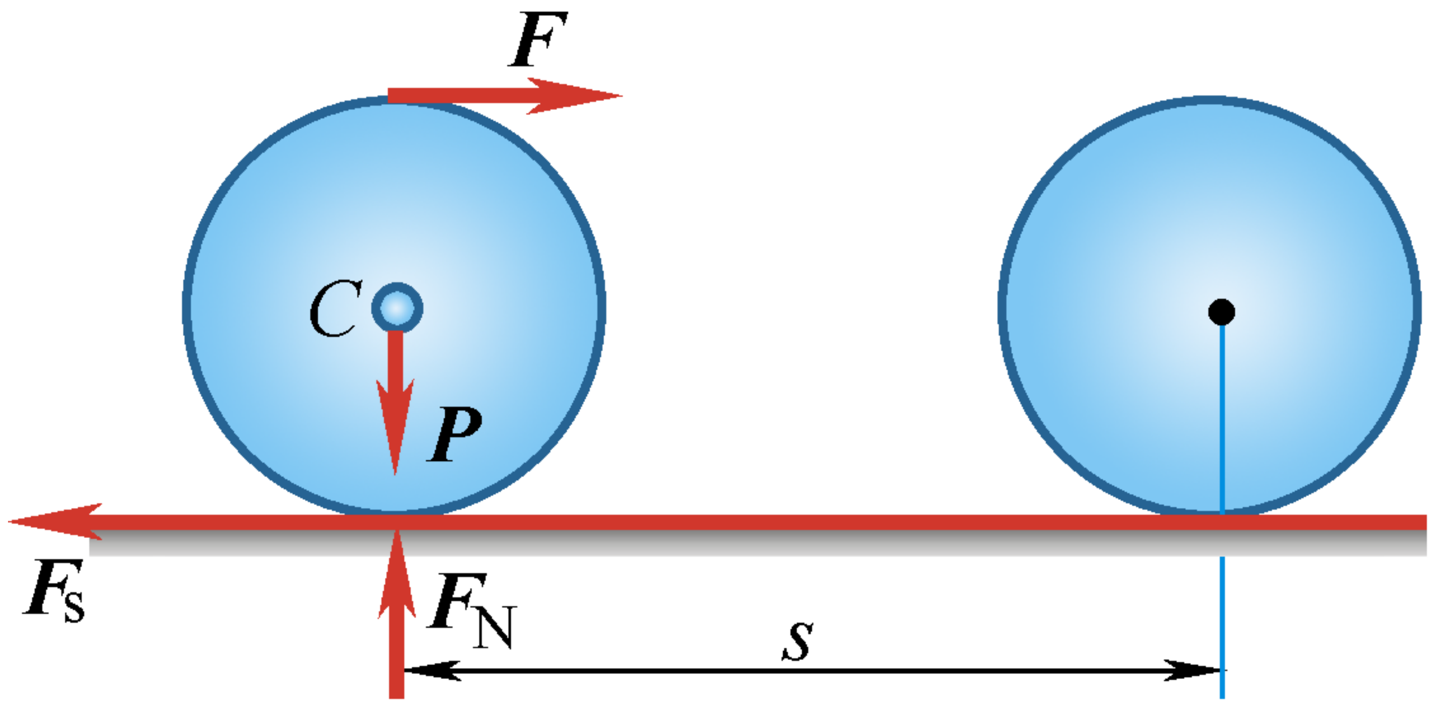




例1

已知:均质圆盘质量为m,半径为R,其外缘缠绕很多圈无重细绳，绳头上常力F作用使圆盘沿水平直线纯滚动。

求:O走过S路程时力的功。



解： 重力，摩擦力，法向约束力都不作功，只有力F作功，将力F向质心简化，得

$$W = \underbrace{F'}_{F}s + \underbrace{M_C}_{FR}\underbrace{\varphi}_{s/R} = 2Fs$$

不简化　　力F的作用点（绳头）走过的路程为2s