动量定理

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组

主要内容

1、动量和冲量的概念

2、动量定理

3、质心运动定理

1、动量和冲量的概念

动量和冲量的概念

动量

质点的动量 $m\vec{v}$

质点系的动量 $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$

问题:

是否存在简便方法计算质点系的动量?

质量中心

简称质心 $\vec{r}_c=\dfrac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}$ 描述质点系质量分布

质心的坐标公式

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}\qquad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m}\qquad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{m}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}_c$$

$$\begin{cases} p_x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \\ p_y = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i \\ p_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i \end{cases}$$

冲量

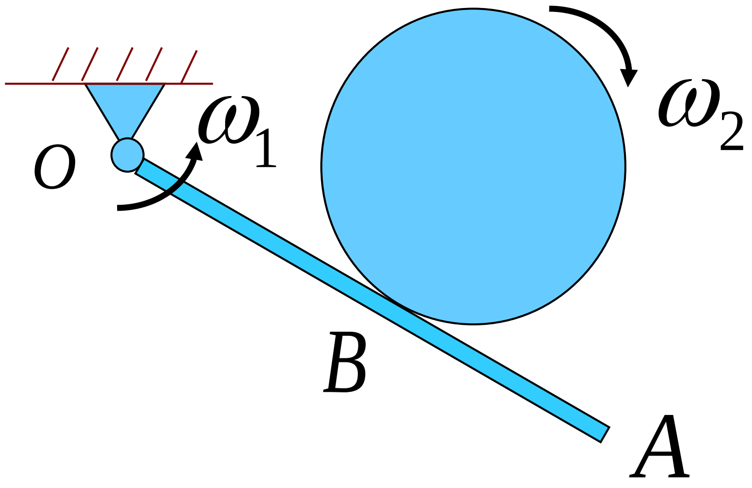
常力的冲量 $\vec{I} = \vec{F}t$

变力的元冲量 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t \Rightarrow \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

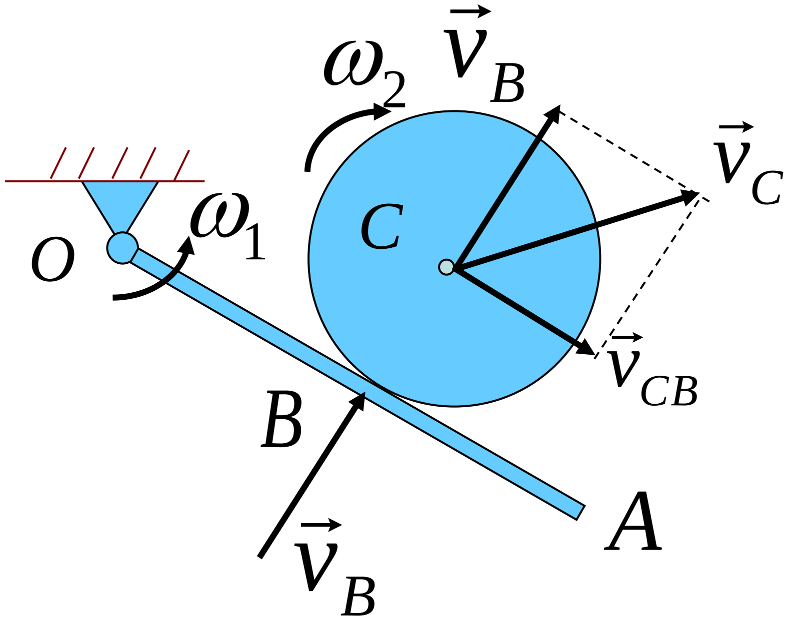
例1

已知：均质圆盘在OA杆上纯滚动，$m=20\text{kg}$， $R=100\text{mm}$，OA杆的角速度为 $\omega_1=1\text{rad/s}$ ，圆盘相对于OA杆转动的角速度为 $\omega_2=4\text{rad/s}$,$OB=100\sqrt{3}\text{mm}$ 。

求：此时圆盘的动量。



解:



$$v_B = \omega_1 \cdot OB = 100\sqrt{3}\text{mm/s}$$

$$v_{CB} = (\omega_2 - \omega_1) \cdot R = 300\text{mm/s}$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{CB}^2} = 200\sqrt{3}\text{mm/s}$$

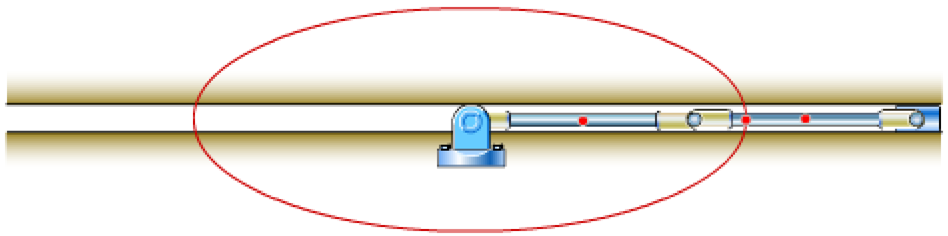
$$\vec{p} = m\vec{v}_C \quad \Rightarrow \quad p = 6.93\text{N} \cdot \text{s}$$

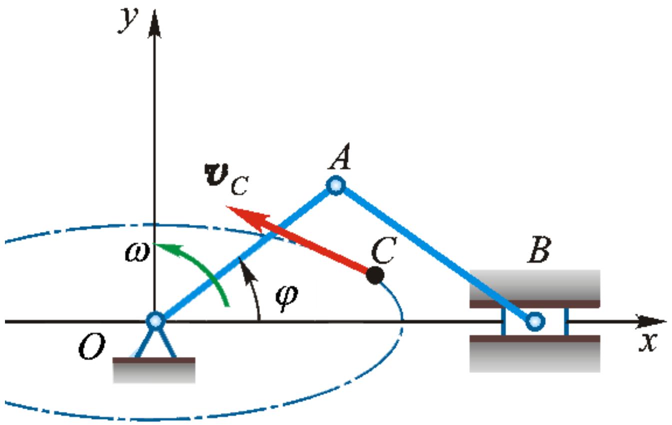
例2

已知：ω为常量，均质杆$OA = AB = l$，两杆质量皆为m_1，

滑块 B 质量 m_2.

求：质心运动方程、轨迹及系统动量.

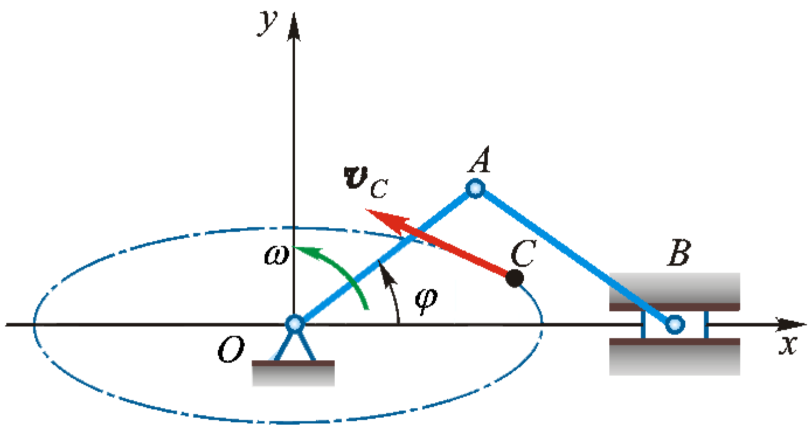




解: 设 $\varphi = \omega t$，质心运动方程为

$$x_C = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_1 \frac{3l}{2} + 2m_2 l}{2m_1 + m_2} \cos\omega t$$

$$= \frac{2(m_1 + m_2)}{2m_1 + m_2} l \cos\omega t$$



$$y_C = \frac{2m_1 \frac{l}{2}}{2m_1 + m_2} \sin\omega t = \frac{m_1}{2m_1 + m_2} l \sin\omega t$$

消去t得轨迹方程

$$\left[\frac{x_c}{2(m_1 + m_2)l/(2m_1 + m_2)}\right]^2 + \left[\frac{y_c}{m_1 l/(2m_1 + m_2)}\right]^2 = 1$$

系统动量沿x, y轴的投影为:

$$p_x = mv_{Cx} = m\dot{x}_C = -2(m_1 + m_2)l\omega\sin\omega t$$

$$p_y = mv_{Cy} = m\dot{y}_C = m_1 l\omega\cos\omega t$$

系统动量的大小为:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = l\omega\sqrt{4(m_1 + m_2)^2\sin^2\omega t + m_1^2\cos^2\omega t}$$