

3、平面简单桁架的内力计算

桁架

一种由杆件彼此在两端用铰链连接而成的结构，它在受力后几何形状不变。

桁架结构的优点

- 结构强度大，稳定性和可靠性高，每根杆件只承受轴力，不承载弯矩和剪力。
- 重量轻、耗材少、安装方便。
- 分析、计算方便，更换部件容易。
- 适用范围广、结构灵活多变。
- 工程中被大量、广泛地使用。

本课程重点关注平面桁架问题。

节点 桁架中杆件的铰链接头。

关于平面桁架的几点假设：

1. 各杆均为直杆，各杆轴线位于同一平面内；
2. 杆件与杆件间均用光滑铰链连接；
3. 载荷作用在节点上，且位于桁架几何平面内；
4. 各杆件自重不计或平均分布在节点上。



理想桁架

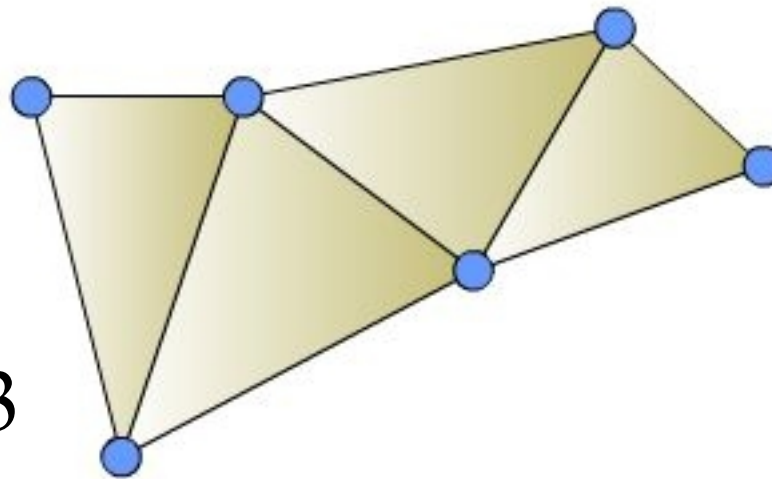
桁架中每根杆件均为二力杆

平面静定桁架 ($m=2n-3$)

总杆数 $m > 3$

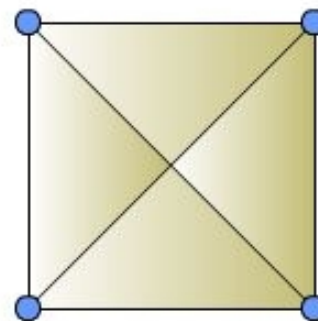
总结点数 $n > 3$

$$m - 3 = 2(n - 3) \longrightarrow m = 2n - 3$$



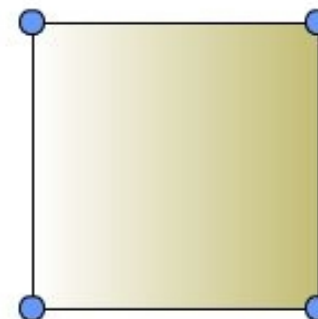
$$m > 2n - 3$$

平面复杂（超静定）桁架



$$m < 2n - 3$$

非桁架（机构）



计算桁架杆件内力的方法：(1) 节点法

逐个地取节点为研究对象，由已知力求出全部未知的杆件内力。

例6 平面桁架的尺寸和支座如图所示，在结点D处受一集中力 $F=10\text{kN}$ 的作用，试求桁架各杆件的内力。

解：(1) 求支座约束力。以整体为研究对象画受力图

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Bx} = 0$$

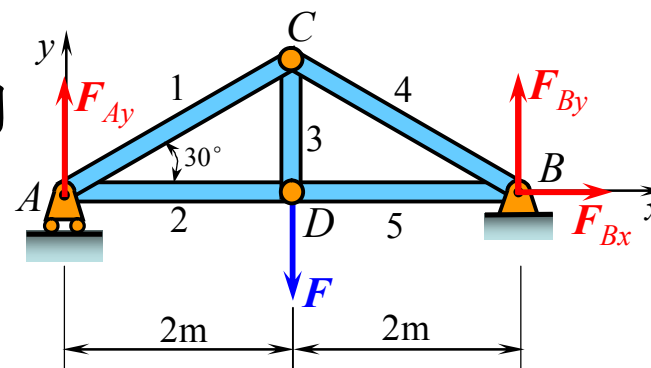
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - F = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad 2F - 4F_{Ay} = 0$$

$$F_{Bx} = 0$$

$$F_{By} = 5\text{kN}$$

$$F_{Ay} = 5\text{kN}$$



(2) 依次取一个结点为研究对象，计算各杆内力。

先取结点A，假设各杆均受拉力，画出其受力图。

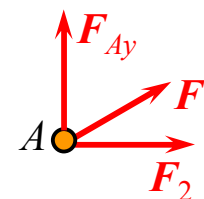
平面汇交力系的平衡问题，列平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \quad F_2 + F_1 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_1 \sin 30^\circ = 0$$

$$F_1 = -10\text{kN}$$

$$F_2 = 8.66\text{kN}$$



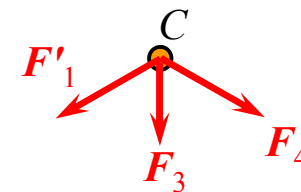
F_1 为负值，代表杆1实际受压力； F_2 为正值，代表杆2与假设一致，实际受拉力。

再取结点 **C**，仍然假设各杆均受拉力，画出其受力图。

其中 $F_1' = F_1 = -10\text{kN}$

平面汇交力系的平衡问题，列平衡方程：

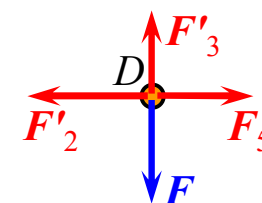
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_4 \cos 30^\circ - F_1' \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad -F_3 - (F_1' + F_4) \sin 30^\circ = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F_3 &= 10\text{kN} \\ F_4 &= -10\text{kN} \end{aligned}$$



再取结点 **D**，仍然假设各杆均受拉力，画出其受力图。

只有杆5的内力未知，列平衡方程：

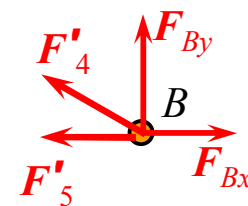
$$\sum F_x = 0 \quad F_5 - F_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad F_5 = 8.66\text{kN}$$



最后可取结点 **B**，来验证已经得到的结果。

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$



证明计算的结果是正确的。

计算桁架杆件内力的方法：(2) 截面法

如只想计算某几个杆件的内力，可选取一适当截面，假想地把桁架截开，考虑任何一部分的平衡，可求出这些被截杆件的内力。

例7 平面桁架如图所示，各杆的长度均等于1m，在结点E、G、F处分别作用载荷 $F_E=10\text{kN}$ ， $F_G=7\text{kN}$ ， $F_F=5\text{kN}$ ，试计算杆1, 2, 3的内力。

解：(1) 求支座约束力。

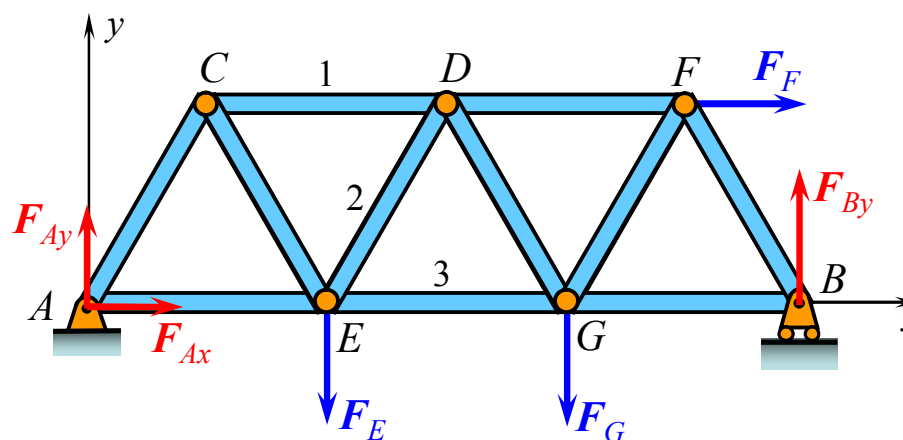
以整体为研究对象画受力图。

平面任意力系，列平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - F_E - F_G = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad 2F_E + 1 \cdot F_G - 3F_{Ay} - F_F \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = 0$$



$$F_{Ax} = -5\text{kN} \quad F_{Ay} = 7.557\text{kN} \quad F_{By} = 9.44\text{kN}$$

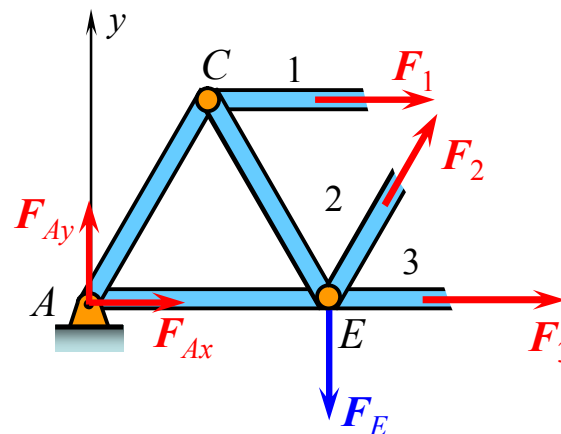
(2) 为求1, 2, 3 杆的内力, 作一截面将三杆截断, 选取左边为研究对象, 假设各杆都受拉力, 画受力图。

平面任意力系, 列平衡方程:

$$\sum M_E = 0 \quad -F_1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ - F_{Ay} \cdot 1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_2 \sin 60^\circ - F_E = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_1 + F_2 \cos 60^\circ + F_3 = 0$$



→ $F_1 = -8.726 \text{ kN} (\text{压力}) \quad F_2 = 2.821 \text{ kN} (\text{拉力}) \quad F_3 = 12.32 \text{ kN} (\text{拉力})$

- 采用截面法时, 选择适当的力矩方程, 通常可以较快地求得某些指定杆件的内力。
- 平面任意力系只有三个独立的平衡方程, 因此, 作截面时每次最好只截断三根内力未知的杆。
- 当要求内力的杆件数大于3时, 可以先采取截面法计算其中某几根(小于或等于3)的内力, 然后采取节点法计算相邻杆件的内力。总之, 要根据实际情况灵活选择应用方法。