

动力学普遍方程

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组



本讲主要内容

- 1、自由度与广义坐标
- 2、广义坐标表示的质点系的平衡条件
- 3、保守系统的平衡条件及稳定性
- 4、动力学普遍方程

1、自由度与广义坐标

概念出现背景

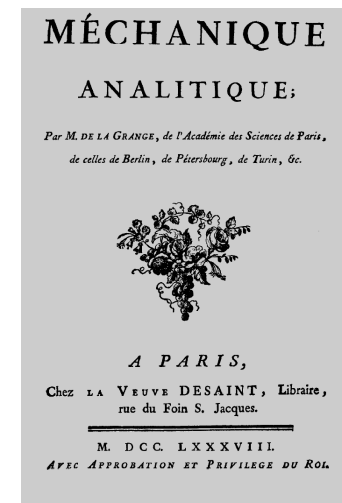
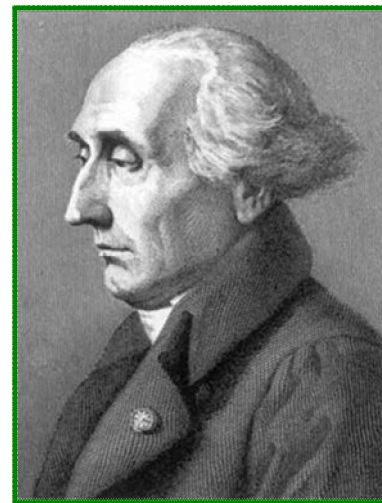
质点系根据其与外界的联系，可以分为自由系统和非自由系统。

经典力学的发展经历了两个主要阶段：一个是以牛顿、胡克等人为代表的牛顿力学（矢量力学）；另一个是以拉格朗日、哈密顿等人为代表的分析力学。

牛顿力学在研究质点和简单刚体系统的动力学问题方面取得了辉煌成就，主要面向的是自由系统。但是到了18世纪，随着欧洲工业革命的兴起，大量具有复杂约束的机械运动（非自由系统）动力学问题开始出现，利用矢量力学分析时出现很多问题：

- 对于复杂约束系统，约束力的性质和分布是未知的；
- 动力学方程的表述形式复杂(如球坐标系下的运动方程)；
- 质点系动力学问题为含大量方程的微分方程组。

1788年拉格朗日发表了《分析力学》一书，提出了解决这些复杂系统动力学问题的新观点和新方法：采用功和能量来描述物体的运动和相互作用力之间的关系。



拉格朗日（1736-1813）和《分析力学》

与矢量力学相比，分析力学方法的特点：

- (1) 把约束看成对系统位置（速度）的限定，而不是看成一种力。
 - (2) 使用广义坐标、功、能等代数量研究系统运动，大量使用数学分析方法，得到标量方程。
 - (3) 追求一般理论和一般模型，对于具体问题，只是代入和展开的工作，处理问题规范化。
 - (4) 不仅研究获得运动微分方程的方法，也研究其求解的一般方法。
- 分析力学在求解各种复杂约束系统动力学问题方面取得了辉煌的成就，为现代动力学理论的发展奠定了基础，是继牛顿力学后，力学发展史上的又一座里程碑。也对近代数学和物理学的发展起到了巨大的推动作用。

研究非自由系统（约束系统）的动力学问题，必须先阐明约束、自由度和广义坐标的概念。

1. 自由度

完整约束条件下，确定质点系的位置所需要的独立参数的数目，称为质点系的自由度数，简称自由度。（本课程仅讨论完整约束情形！）

例1：确定一个自由质点在空间的位置需3个独立的参量。

→ 自由质点有3个自由度。

例2：质点 M 被限定只能在曲面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的上半部分运动，由此解出：

$$z = c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$$

质点 M 在空间中的位置就由 x, y 这两个独立参数所确定，

→ 质点 M 的自由度数为2。

例3： n 个质点组成的质点系，若受到 m 个完整约束作用，

→ 质点系的自由度数 $N=3n-m$ 。

2. 广义坐标

描述质点系在空间中位置的那些独立的参数，称为质点系的广义坐标。
广义坐标一定是相互独立的！

- 对于受完整约束的系统， 广义坐标的数目 = 系统的自由度数
- 对于受非完整约束的系统， 广义坐标的数目 > 系统的自由度数

设由 n 个质点组成的系统受 m 个完整双侧约束, 约束方程为:

$$f_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \dots, m)$$

系统 N 个独立的坐标参量表示为:

$$q_1, q_2, \dots, q_N \quad (N = 3n - m) \quad \text{拉格朗日广义坐标}$$

相应地，系统的 n 个坐标矢量可表示为 N 个广义坐标的函数:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

每个质点（每个坐标矢量）对应的虚位移可由等时变分运算表示为:

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad \delta q_k: \text{广义虚位移}$$

例4 如图所示为一在空间摆动的单摆，摆长为 l ，任意时刻与 z 轴的夹角为 θ ，其在 xOy 平面上的投影与 x 轴的夹角为 φ 。请给出摆球的自由度，并选择合适的广义坐标表示摆球的位置。

解： 1、自由质点的自由度为**3**，现在摆球受到**1**个约束，约束方程为：

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

因此，摆球的自由度数为**2**。

2、摆球的位置（坐标）可由 x ， y ， z 三个变量表示，但它们之间不相互独立。由摆球的自由度数可知，它们中只有两个是独立的。

• 选择 x ， y 为独立变量（**广义坐标**）的话，有：

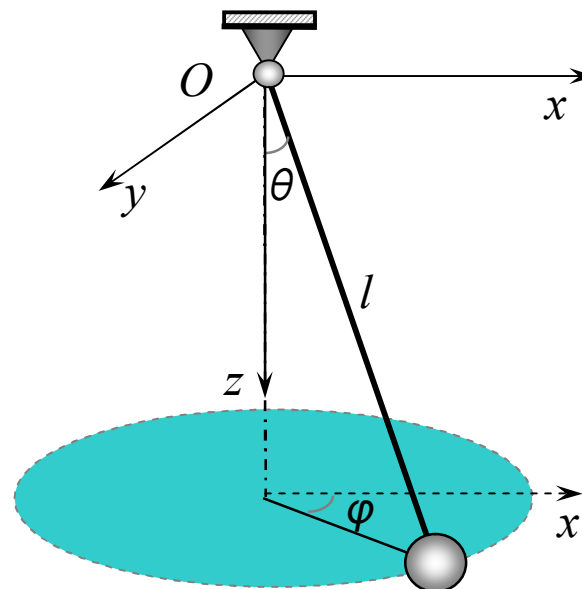
$$z = z(x, y) = \sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$$

• 选择 θ ， φ 为独立变量（**广义坐标**）的话，有：

$$x = x(\theta, \varphi) = l \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = y(\theta, \varphi) = l \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = z(\theta, \varphi) = l \cos \theta$$



- 广义坐标的选取不是唯一的；
- 广义坐标可以是线坐标，也可以是角坐标，或其他物理量；
- 广义坐标是分析力学的基础。