

# 虚位移（虚功）原理

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组



# 本讲主要内容

- 1、约束及其分类
- 2、虚位移、虚功及理想约束
- 3、虚位移（虚功）原理

# 1、约束及其分类

## 约束

限制质点或质点系(系统) **运动的条件**称为 **约束**。

这个限制条件的数学方程称为 **约束方程**。

$$f_s(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t) = 0$$

$$s = 1, 2, \dots, m \quad m < 3N$$

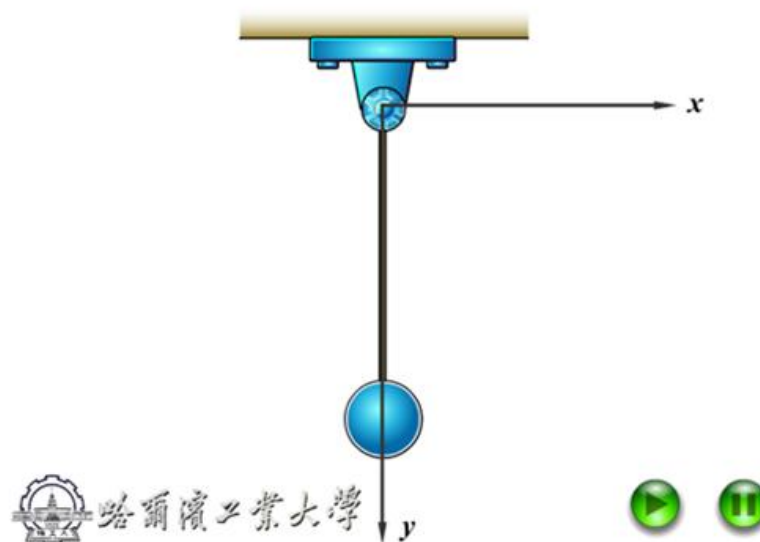
### 1. 几何约束和运动约束

**1.1 几何约束**: 仅限制质点或质点系在空间的 **几何位置** 的条件。

$$f_s(x_k, y_k, z_k; t) = 0$$

如右图

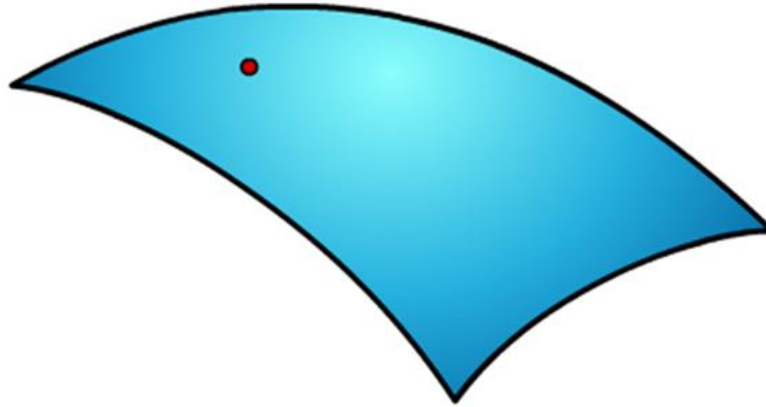
$$x^2 + y^2 = l^2$$



$$f(x, y, z) = 0$$

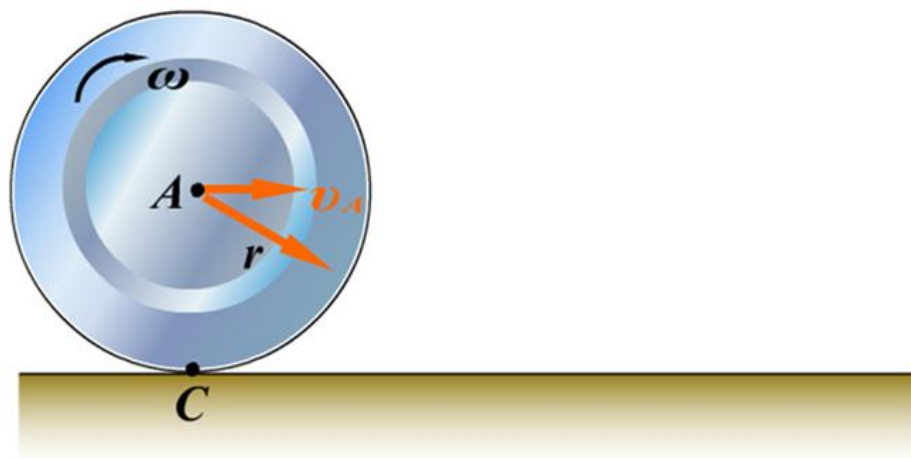


哈爾濱工業大學



**1.2 运动约束：**既限制质点系的**位置**又限制**运动速度**的约束。

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$



纯滚动条件:

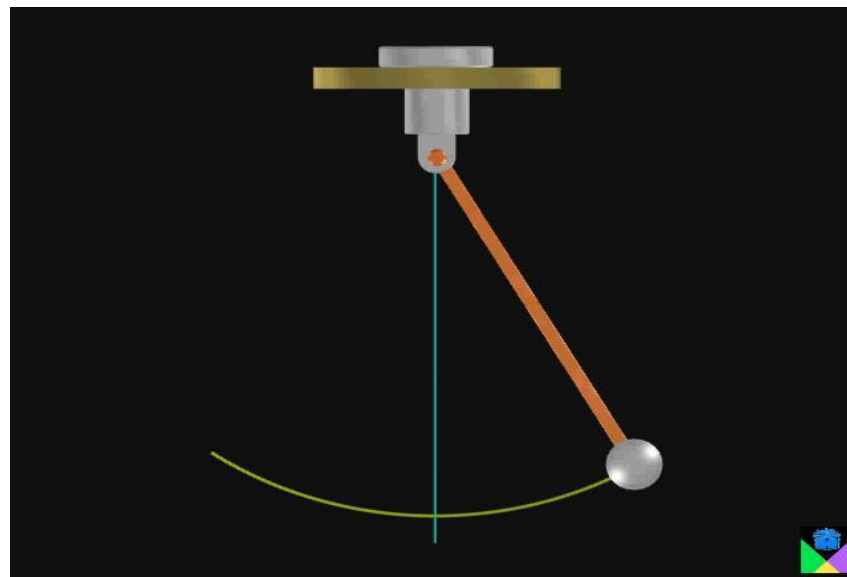
$$v_A - r\omega = 0$$

$$\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$$

## 2 定常约束和非定常约束

**2.1 定常约束：**约束条件不随时间变化(不显含 $t$ )的约束(稳定约束)。

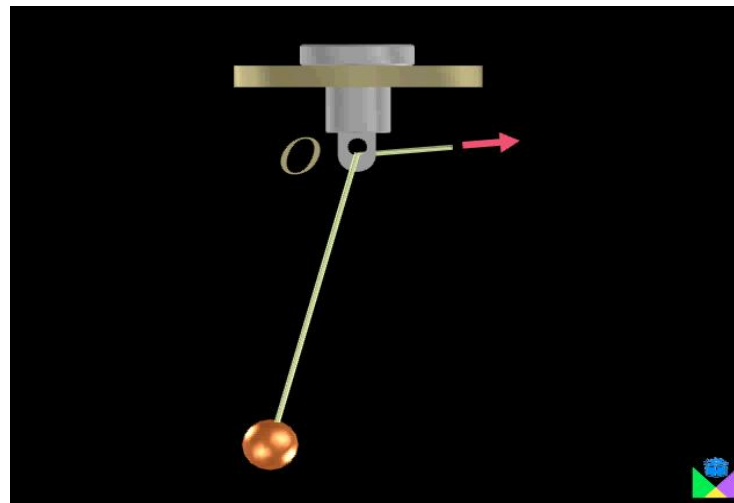
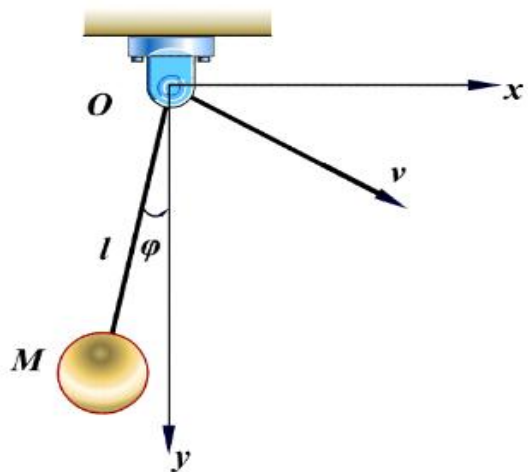
$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) = 0$$



$$x^2 + y^2 = l^2$$

## 2.2 非定常约束: 约束条件随时间变化(显含 $t$ )的约束(不稳定约束)。

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$



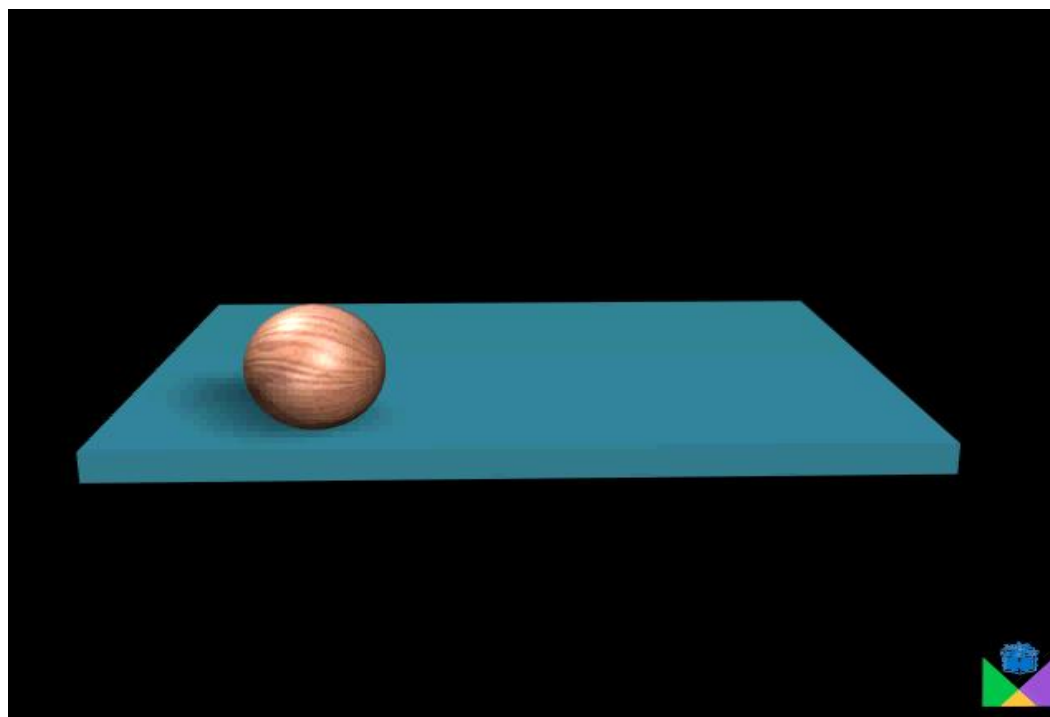
$$x^2 + y^2 = (l_0 - vt)^2$$



### 3 其他分类的约束

**3.1 非完整约束：**约束方程中包含坐标对时间的导数, 且不可能积分成有限形式的约束(不可积分的运动约束)。

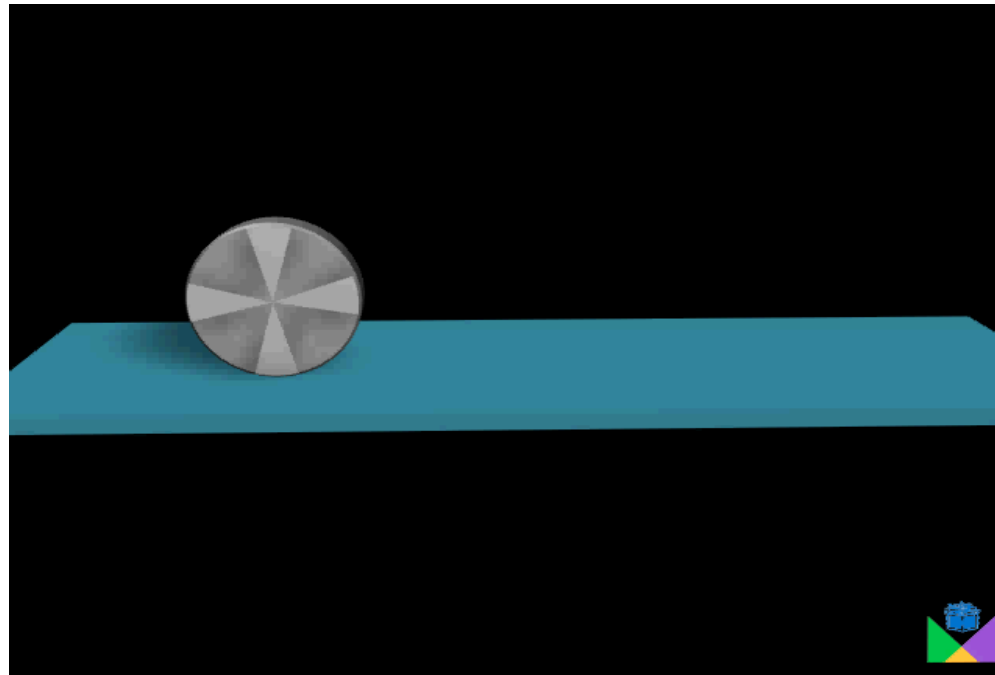
$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$



**3.2 完整约束：**约束方程中不包含坐标对时间的导数，或者约束方程中的微分项可以积分为有限形式的约束(几何约束或可积分的运动约束)。

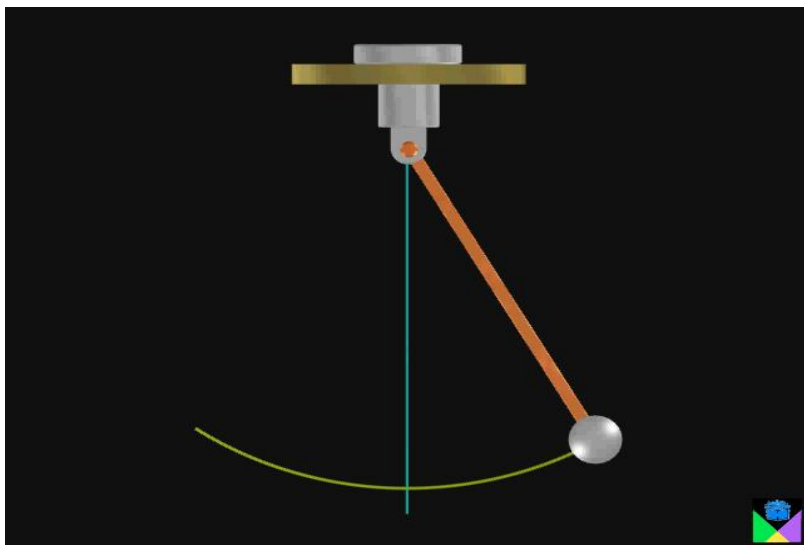
$$f_s(x_k, y_k, z_k; t) = 0$$

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$

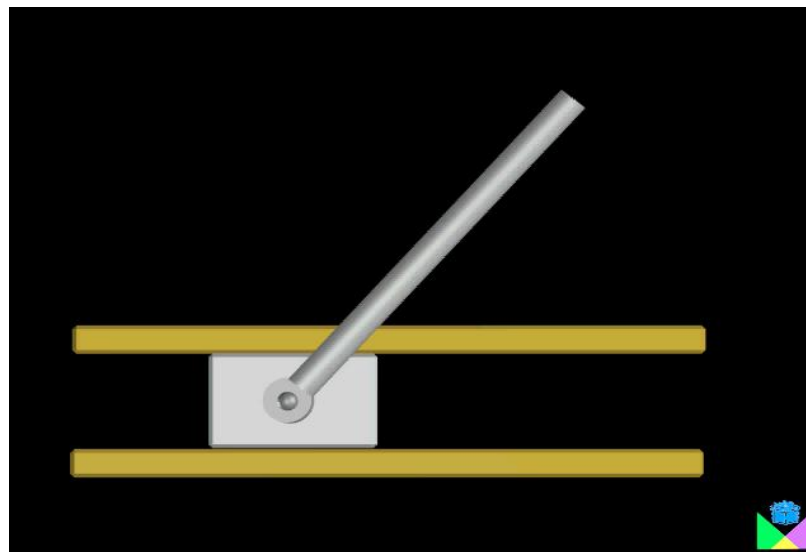


### 3.3 双侧约束：约束方程是等式的约束(固执约束)。

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) = 0$$



$$x^2 + y^2 = l^2$$

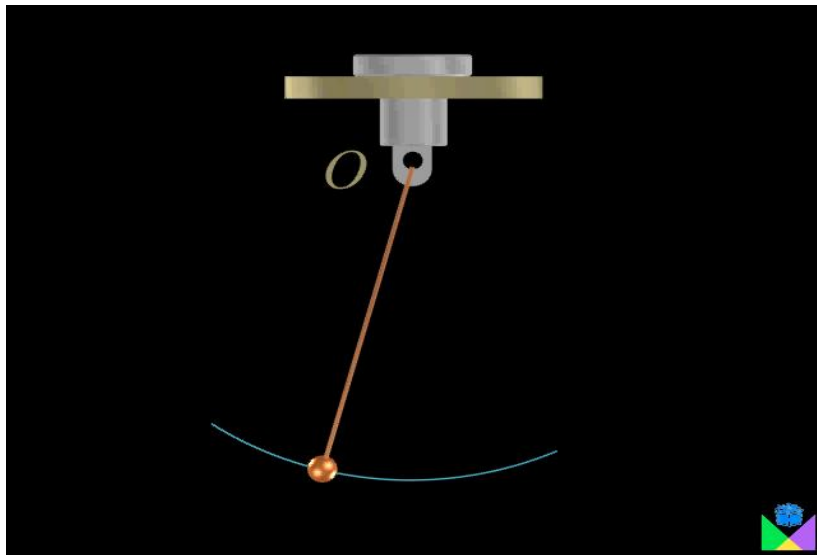


$$y = C$$

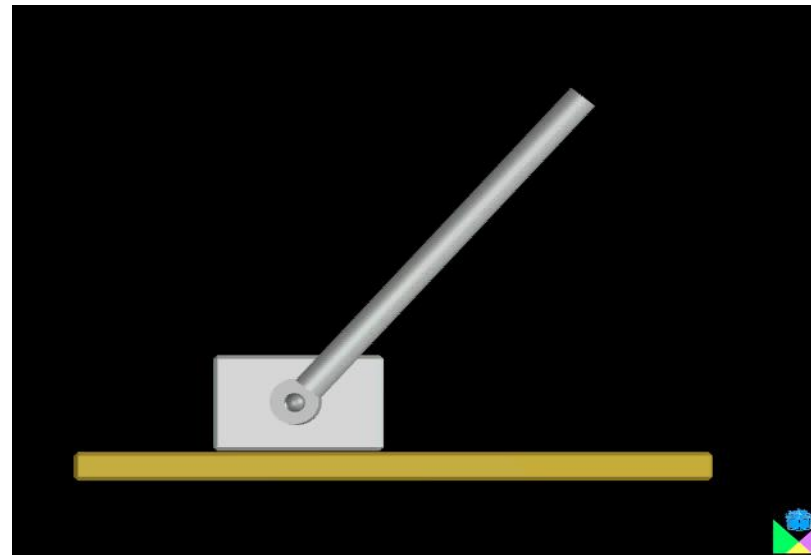
### 3.3 单侧约束: 约束方程是不等式的约束(非固执约束)。

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) \geq 0$$

$$f_s(x_k, y_k, z_k; \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k; t) \leq 0$$



$$x^2 + y^2 \leq l^2$$



$$y \geq C$$

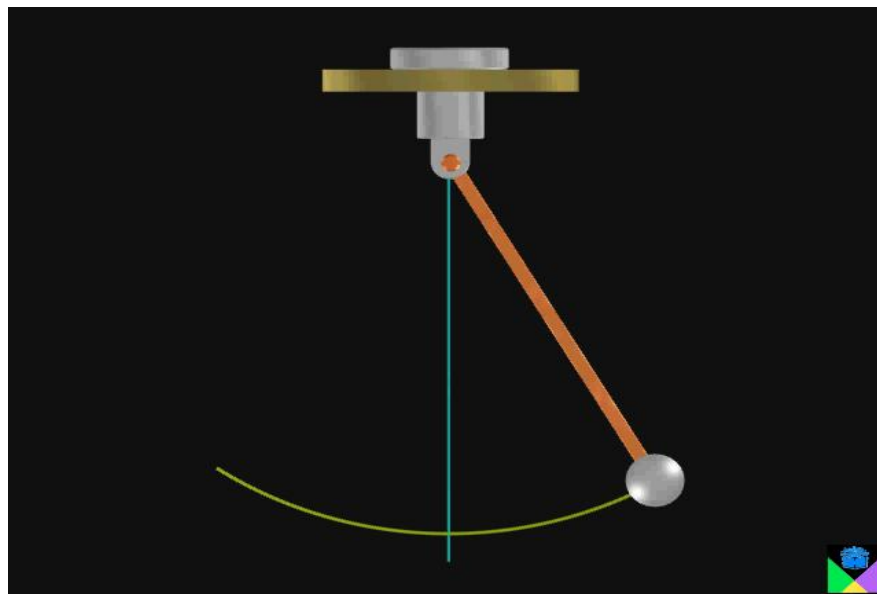
## 4. 本讲所讨论的约束

仅讨论定常的、双侧、完整、几何约束

$$f_s(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0$$

$$s = 1, 2, \dots, m \quad m < 3N$$

$N$ 为质点数,  $m$ 为约束方程数.



$$x^2 + y^2 = l^2$$