

2、第二类拉格朗日方程 的应用

例 1 质量为 m_1 的物块 C 以细绳跨过定滑轮 B 联于点 A , A , B 两轮皆为均质圆盘, 半径为 R , 质量为 m_2 , 弹簧刚度为 k , 质量不计。

求: 当弹簧较软, 在细绳能始终保持张紧的条件下, 此系统的运动微分方程。

解: 此系统具有一个自由度, 以物块平衡位置为原点, 取 x 为广义坐标。以平衡位置为重力零势能点。

取弹簧原长处为弹性力零势能点。

系统在任意位置 x 处的势能为:

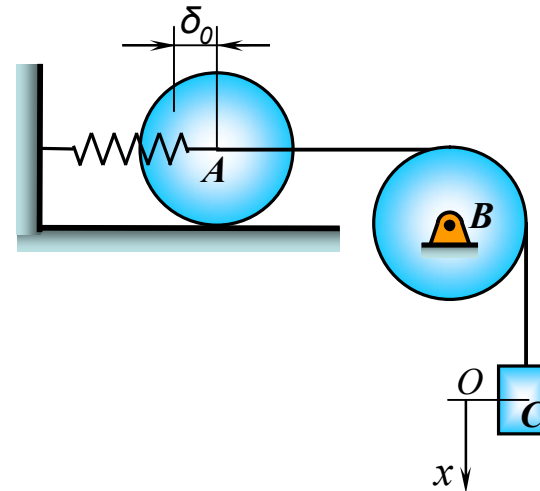
$$V = \frac{1}{2}k(\delta_0 + x)^2 - m_1gx \quad \text{其中 } \delta_0 \text{ 为平衡位置处弹簧的伸长量}$$

系统的动能为:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m_2R^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m_2R^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = (m_2 + \frac{1}{2}m_1)\dot{x}^2$$

系统的主动力为有势力, 为保守系统, 系统的拉格朗日函数为:

$$L = T - V = (m_2 + \frac{1}{2}m_1)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(\delta_0 + x)^2 + m_1gx$$



代入保守系统的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\text{得 } (2m_2 + m_1)\ddot{x} + k\delta_0 + kx - m_1g = 0$$

$$\text{注意到 } k\delta_0 = m_1g$$

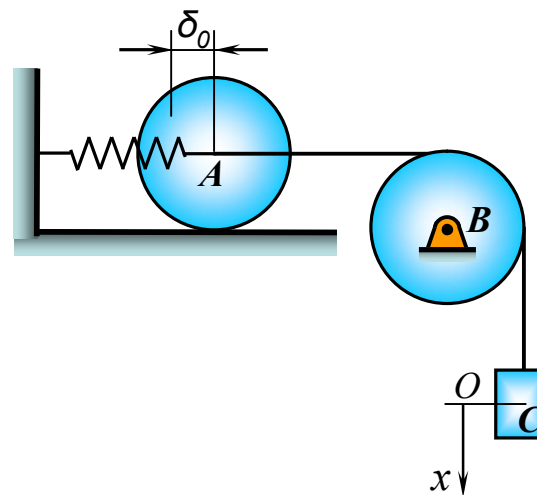
则系统的运动微分方程为:

$$(2m_2 + m_1)\ddot{x} + kx = 0$$

这是自由振动的微分方程，其振动周期为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m_2 + m_1}{k}}$$

运用拉格朗日方程求解完整约束系统的动力学问题，特别是保守系统的动力学问题，不必分析受力，也不用分析运动，只需用广义坐标表示出系统的动能和势能，形式简洁、便于计算，应用非常简单方便。



例 2 已知：如图所示的运动系统中，重物 M_1 的质量为 m_1 ，可沿光滑水平面移动。摆锤 M_2 的质量为 m_2 ，两个物体用长为 l 的无重杆连接。

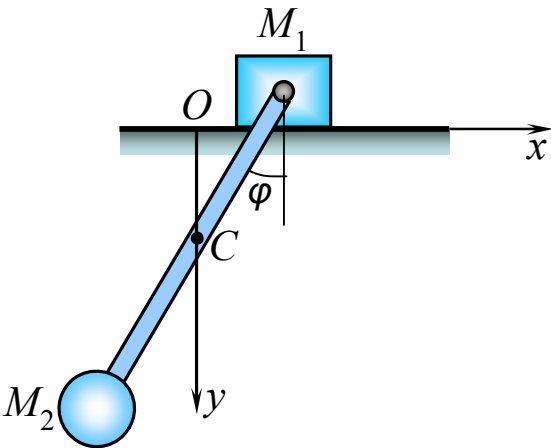
求：此系统的运动微分方程。

解：系统有两个自由度，选 M_1 的水平坐标 x_1 和 φ 为广义坐标，并将质点位置用广义坐标表示：

$$x_1 = x_1, y_1 = 0; \quad x_2 = x_1 - l \sin \varphi, y_2 = l \cos \varphi$$

将上式两端对时间 t 求导数得：

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1, \quad \dot{y}_1 = 0; \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_2 = -l\dot{\varphi} \sin \varphi$$



系统的**动能**为：

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2} (l\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi)$$

选质点 M_2 在最低处时的位置为系统的**零势能位置**，则系统的**势能**为：

$$V = m_2 g l (1 - \cos \varphi)$$

注意：零势能位置的选取不是唯一的。**选取原则：**计算方便

系统的主动动力为有势力，此为**保守系统**，可写出系统的**动势**，运用**保守系统的拉格朗日方程**求解，此处我们运用一般形式的**第二类拉格朗日方程**求解。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2}(l\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi) \quad V = m_2 gl(1 - \cos\varphi)$$

先计算

$$x_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi + m_2 l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \\ Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \end{array} \right.$$

再计算

$$\varphi \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} - m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{x}_1 \cos\varphi + m_2 l \dot{x}_1 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -m_2 gl \sin\varphi \end{array} \right.$$

代入拉格朗日方程得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi + m_2 l \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = 0 \\ m_2 l (l \ddot{\varphi} - \ddot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_1 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) + m_2 gl \sin\varphi = 0 \end{array} \right.$$

如果质点 M_2 摆动很小，可以近似地认为 $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$

且可以忽略含 $\dot{\varphi}^2$ 和 $\dot{x}_1\dot{\varphi}$ 的高阶小量，

微分方程可改写为：

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l \ddot{\varphi} = 0 \\ l \ddot{\varphi} - \ddot{x}_1 = -g\varphi \end{cases}$$

从以上两式中消去 \ddot{x}_1 ，得到 $\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0$

这是自由振动的微分方程，其通解为： $\varphi = A \sin(\omega_0 t + \theta)$

固有角频率： $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$ 摆动周期： $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{l}{g}}$

如果 $m_1 \gg m_2$ 则质点 M_1 的位移 x_1 将很小，

质点 M_2 的摆动周期将趋于普通单摆的周期： $\lim_{m_1 \rightarrow \infty} T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

也可以从微分方程中消去 $\ddot{\varphi}$ ，得到： $\ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1} g \varphi$

可见质点 M_1 沿 x 方向也作自由振动。

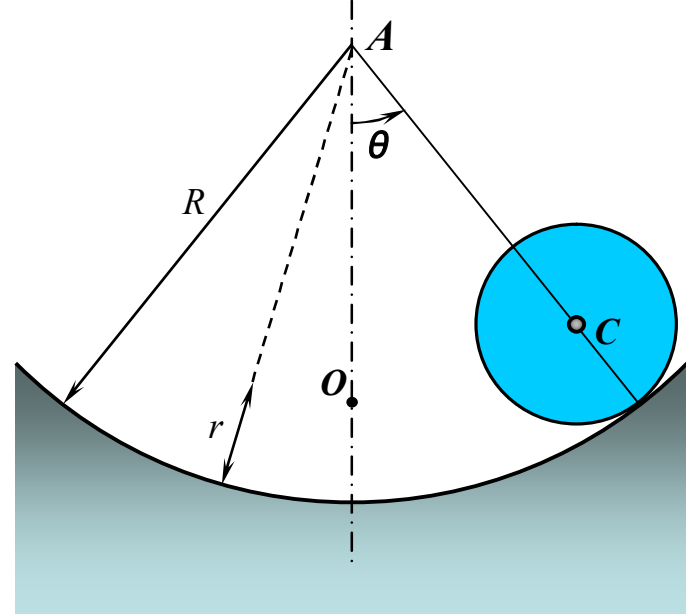
这种机构又被称为椭圆摆，原因是 M_1 永远做水平运动，而 M_1 和 M_2 的质心 C 点只能做铅垂运动（系统水平方向质心运动守恒）， M_2 的运动轨迹为一椭圆。

例 3 已知：均质圆轮半径为 r 质量为 m ，受到轻微扰动后，在半径为 R 的圆弧上往复滚动，如图所示. 设表面足够粗糙，使圆轮在滚动时无滑动.

求：质心 C 的运动规律.

解：系统只有一个自由度，选 θ 为广义坐标.

$$\begin{aligned} \text{系统的动能为: } T &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r} \right)^2 \\ &= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$



选圆弧轨道的圆心 A 为**零势能位置**，则系统的**势能**为： $V = -mg(R-r)\cos\theta$

此为**保守系统**，系统的拉格朗日函数为：

$$L = T - V = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\theta$$

代入**保守系统的拉格朗日方程**： $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

得 $3(R-r)\ddot{\theta} + 2g\sin\theta = 0$

与列刚体平面运动微分方程计算结果相同，
但显然此处更加简洁方便！

利用拉格朗日方程解题的步骤及注意事项

步骤:

- 1、确定系统的自由度并选择合适的广义坐标;
- 2、利用广义坐标表示出系统的动能;
- 3、确定每个质点上的主动力, 判断是否是保守系统;
- 4、对于保守系统, 利用广义坐标表示系统的势能, 写出系统的动势;
- 5、对于非保守系统, 计算每个广义坐标所对应的广义力;
- 6、将动势或者是动能和广义力分别代入保守系统的拉格朗日方程或一般形式的拉格朗日方程进行计算。

注意:

- 1、表示系统的势能时, 需要选取系统的零势能位置, 这个位置选取是灵活的, 需要表示的是系统相对该位置的相对势能, 选取的原则是: 相对势能表示越方便、越简单越好。
- 2、涉及广义力的计算时, 可以利用广义力的定义计算, 也可以利用广义虚位移的任意性进行计算, 保守系统还可以通过势能函数对广义坐标的偏导数来计算。