第一类拉格朗日方程

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组

设由n个质点组成的系统受m个完整双侧约束作用，约束方程为:

$$f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, m)$$

上式两端进行等时变分运算得到:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \quad (k = 1,2,3,\cdots, m)$$

其中

$$\frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\boldsymbol{k}$$

引入拉格朗日乘子 $\lambda_k \quad (k = 1,2,\cdots, m)$ 并求和得到:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i}\right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

系统的动力学普遍方程为:

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

两方程相减得到:

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i})\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

在3*n*个质点坐标中，独立坐标有3*n*-*m*个。上式表明，对于*m*个不独立的坐标的变分，可以选取适当的 λ_k，使得变分前的系数为零。

而考虑到独立坐标虚位移的独立性和任意性，此时独立坐标变分前的系数也应等于零，于是有:

$$\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

——带拉格朗日乘子的质点系动力学方程

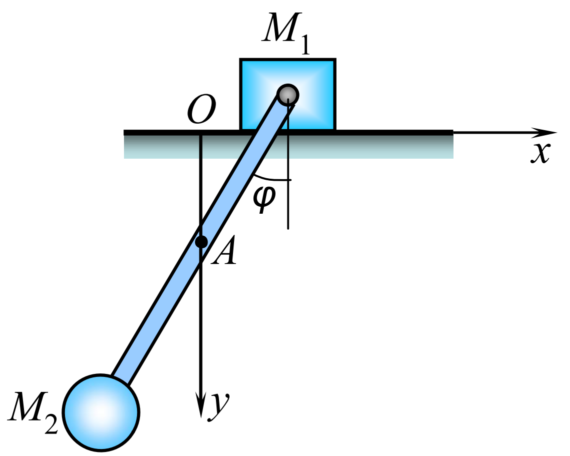
第一类拉格朗日方程

*n*个矢量方程，对应3*n*个代数方程。方程中含有3*n*+*m*个未知量，包括3*n*个坐标变量与*m*个拉格朗日乘子变量，需与*m*个约束方程联立求解。

与质点系统的达朗贝尔原理相对比，含拉格朗日乘子项 $(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i})$ 对应于*m*个约束作用于系统内各质点上的约束力。

例 1 已知：如图所示的运动系统中，重物M_1的质量为m_1，可沿光滑水平面移动。摆锤M_2的质量为m_2，两个物体用长为l的无重杆连接。

求：此系统的运动微分方程。



解：取整个系统为研究对象，建立如图所示坐标系。

设质点 M_1的坐标为 x_1，y_1；质点M_2的坐标为 x_2，y_2

则系统的约束方程为：

$$f_1 = y_1 = 0$$

$$f_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$$

约束方程对各质点坐标的梯度项 $\dfrac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f_k}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial f_k}{\partial z_i}\boldsymbol{k}$ 为：

$$\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}_1} = \boldsymbol{j}\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{r}_1} = 2(x_1 - x_2)\boldsymbol{i} + 2(y_1 - y_2)\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{r}_2} = -[2(x_1 - x_2)\boldsymbol{i} + 2(y_1 - y_2)\boldsymbol{j}]$$

作用在各质点上的主动力为： $\boldsymbol{F}_1 = m_1 g\boldsymbol{j}$， $\boldsymbol{F}_2 = m_2 g\boldsymbol{j}$

将以上各式代入第一类拉格朗日方程

$$\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,\ n)$$

得到：

$$\left.\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + 2\lambda_2(x_1 - x_2) = 0\\
&m_1\ddot{y}_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2(y_1 - y_2) - m_1 g = 0\\
&m_2\ddot{x}_2 - 2\lambda_2(x_1 - x_2) = 0\\
&m_2\ddot{y}_2 - 2\lambda_2(y_1 - y_2) - m_2 g = 0
\end{aligned}\right\}$$

由约束条件再得到两个补充方程。将约束方程两边同时对时间t求二阶导数：

$$\ddot{y} = 0$$

$$(x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (y_1 - y_2)(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 = 0$$

6个方程，6个未知量，是可以求解的。

消去 λ_1，λ_2 ，得到系统的运动微分方程:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$$
$$\ddot{y}_1 = 0$$
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{y}_2 - m_2 g = 0$$
$$(x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (y_1 - y_2)(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 = 0$$

而

$$\lambda_1 = m_1 g + m_2 g - m_1\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2$$
$$\lambda_2 = \frac{m_2\ddot{x}_2}{2(x_1 - x_2)}$$

与矢量力学的运动学方程相对照，可知 $(-\lambda_1)$是光滑接触面的约束力；$(2\lambda_2 l)$ 是二力杆M_1M_2的内力。

第一类拉格朗日方程主要是运用在直角坐标系下表示的动力学普遍方程和约束方程来求解动力学问题。适宜于求解直角坐标表示的动力学问题。

值得指出的是：与第二类拉格朗日方程相比，采用拉格朗日乘子法(第一类拉格朗日方程)也可以求解具有非完整约束系统的动力学问题，因而更具有普遍性。