3、拉格朗日方程的初积分

拉格朗日方程给出的是关于广义坐标 q_k 的二阶微分方程组，如果要求系统的运动规律的话，需要求解该微分方程组，对方程进行积分。一般来说，二阶微分方程组的积分是很困难的，但是对于保守系统，在某些特定条件下，可以方便地得出方程初积分的一般形式，这对于方程的求解是有帮助的。

1. 循环积分

拉格朗日函数L中可能显含所有的广义速度，但可能不显含某广义坐标q_k，则称该坐标为循环坐标，此时有：

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\text{常数}$$

---拉格朗日方程的循环积分

如果系统的循环坐标不止一个，那么有几个循环坐标就有几个循环积分。

注意势能V中不显含任何广义速度，因此对于循环坐标 q_k来说，有：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=p_k=\text{常数}$$

p_k，与广义坐标q_k对应的广义动量

对于循环坐标，其广义动量守恒。

2. 广义能量积分

若系统所受到的约束均为定常约束，我们知道:

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1\ ,\ q_2\cdots,\ q_N)\ (i=1,2,\cdots,\ n)$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

从而有：$T=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\sum_{k=1}^{N}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{N}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}m_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad m_{kl}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}$$

——广义质量

将*T*展开后，很容易证明:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k=2T$$

——关于齐次函数的欧拉定理

注意势能V不含$\dot{q}_k$项，从而有：$\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k=2T$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \quad (k=1,2,\cdots,\ N)$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]=0$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=0$$

$$\Longrightarrow 2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T-L)=0$$

$$\Longrightarrow 2T-L=T+V=C$$

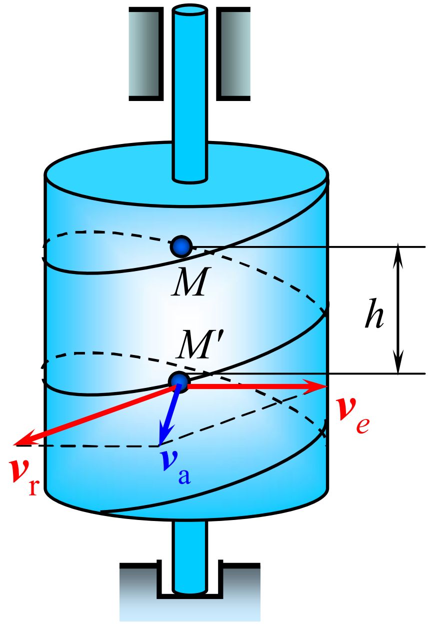
---保守系统的机械能守恒定律

---保守系统中拉格朗日方程的能量积分

循环积分和广义能量积分都是由原来的二阶微分方程积分一次得到的，即将原方程降了一阶。因此，在应用拉格朗日方程求解时，首先应分析有无广义能量积分和循环积分存在，若存在这些积分，则可以直接写出其积分形式，使问题简化。

例 4 如图所示一个均质圆柱体，可绕其垂直中心轴自由转动，圆柱表面上刻有一倾角为 θ 的螺旋槽，今在槽中放一小球 M，自静止开始沿槽下滑，同时也使得圆柱体绕轴线转动，设小球质量为 m_1，圆柱体的质量为 m_2，半径为 R，不计摩擦.

求：当小球下降的高度为 h 时，小球相对于圆柱体的速度，以及圆柱体的角速度.



解：小球与圆柱体组成的是具有两个自由度的系统。

取圆柱体的转角 φ 和沿螺旋槽方向的弧坐标 s 为广义坐标

系统涉及小球和圆柱体之间的相对运动，为了计算系统的动能，先分析系统的运动。取小球为动点，圆柱体为动系。

则小球的动能为：

$$T_1=\frac{1}{2}m_1v_a^2=\frac{1}{2}m_1\left[v_e^2+v_r^2+2v_ev_r\cos(\pi-\theta)\right]$$

$$=\frac{m_1}{2}(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{s}^2-2R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta)$$

圆柱体的动能为：

$$T_2=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(\frac{m_2}{2}R^2)\dot{\varphi}^2=\frac{1}{4}m_2R^2\dot{\varphi}^2$$

系统的**动能**为： $T=T_1+T_2=\frac{1}{4}[2m_1\dot{s}^2+(2m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2-4m_1R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]$

选择小球起点为零势能点，则系统**势能V**可表示为： $V=-m_1gs\sin\theta$

系统的**拉格朗日函数**为：

$$L=T-V=\frac{1}{4}[2m_1\dot{s}^2+(2m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2-4m_1R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]+m_1gs\sin\theta$$

显然，L中不显含时间t和广义坐标φ，系统有**广义能量积分**和**循环积分**。

设： $\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=C_1$ ⇒ $\frac{2m_1+m_2}{2}R^2\dot{\varphi}-m_1R\dot{s}\cos\theta=C_1$

$$T+V=C_2$$

⇒ $\frac{1}{4}[2m_1\dot{s}^2+(2m_1+m_2)R^2\dot{\varphi}^2-4m_1R\dot{s}\dot{\varphi}\cos\theta]-m_1gs\sin\theta=C_2$

将初始条件 t=0 时 $s=0$，$\dot{s}=0$，$\dot{\varphi}=0$ 代入上式，得到： $C_1=C_2=0$

⇒ $\dot{\varphi}=\frac{2m_1}{(2m_1+m_2)R}\dot{s}\cos\theta$

令 $h = s\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{2m_1\sin^2\theta + m_2}{2m_1 + m_2}\dot{s}^2 = 2gh$$

由此得小球相对于圆柱体的速度为：

$$\boxed{v_{\mathrm{r}} = \dot{s} = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2}{2m_1\sin^2\theta + m_2}2gh}}$$

圆柱体转动的角速度为：

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{2m_1\cos\theta}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(2m_1 + m_2)(2m_1\sin^2\theta + m_2)}}}$$

这个例子中，通过观察发现系统的拉格朗日函数中不显含其中的一个广义坐标φ，判断出系统存在广义能量积分和循环积分，从这两个积分入手，很容易得到微分方程的一次积分解，为整个问题的求解带来很大的方便。