3、定轴转动刚体转动微分方程

定轴转动刚体的转动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$L_z=J_z\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega)=\sum M_z(\vec{F}_i)+\sum M_z(\vec{F}_{N_i})$$

$$=\sum M_z(\vec{F}_i)$$

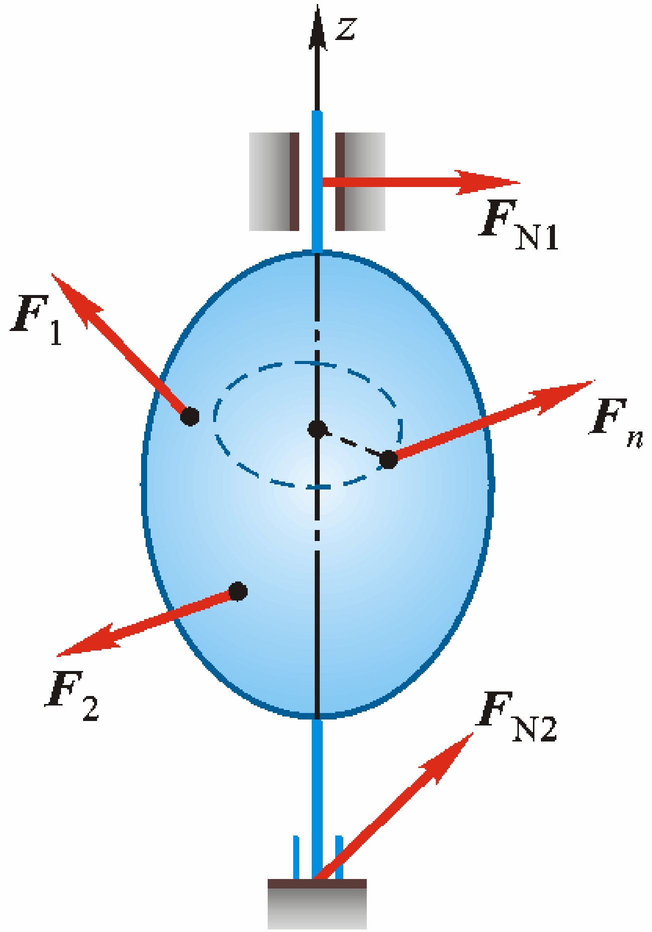
刚体惯性的度量

即：$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\vec{F}_i)$

$$J_z\alpha=\sum M_z(\vec{F}_i)$$

$$J_z\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\sum M_z(\vec{F}_i)$$

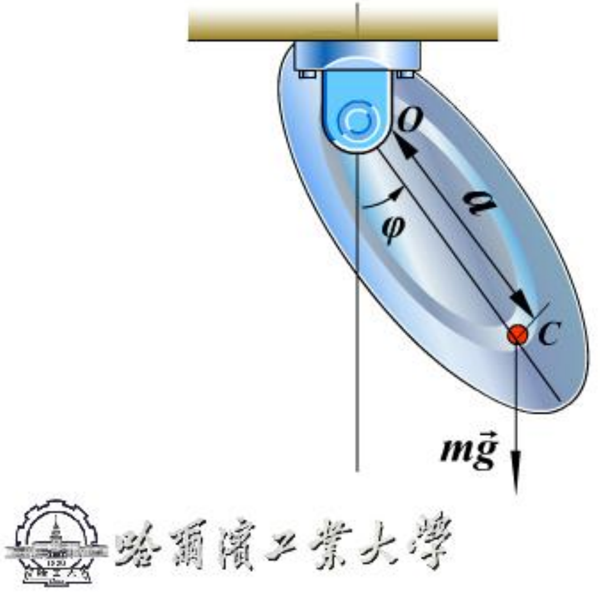
转动微分方程

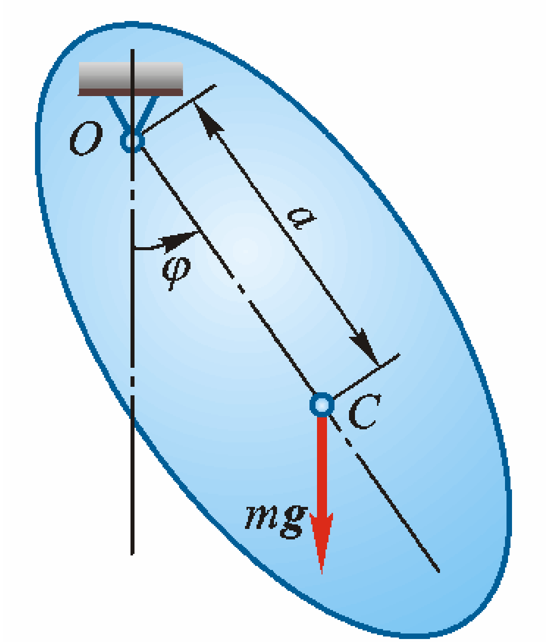


例1

物理摆（或称为复摆）的质量为m，C为其质心，摆对悬挂点的转动惯量为J_O。

求：微小摆动周期。





解： $$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mga\sin\varphi$$

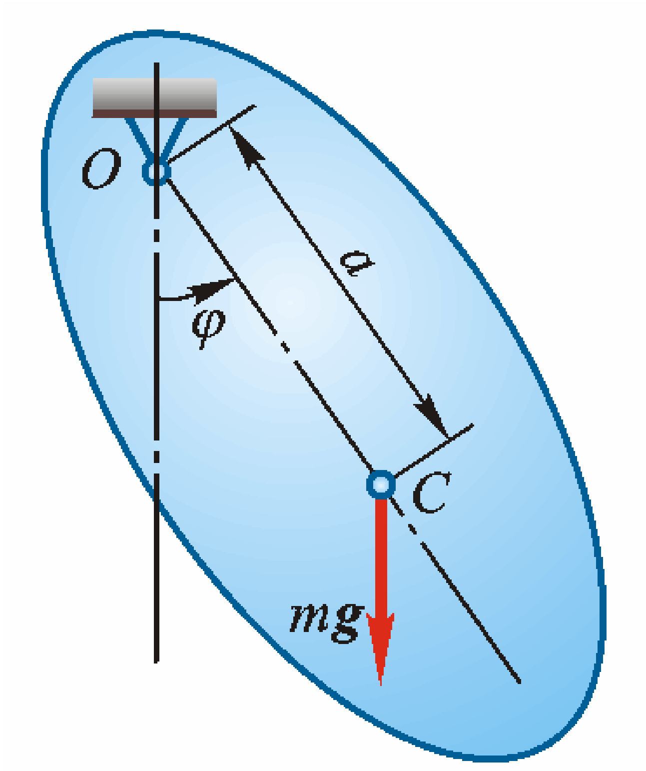
微小摆动时， $\sin\varphi\approx\varphi$

$$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mga\varphi$$

即： $$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mga}{J_O}\varphi=0$$

ω

通解为 $$\varphi=\varphi_O\sin\left(\sqrt{\frac{mga}{J_O}}t+\theta\right)$$



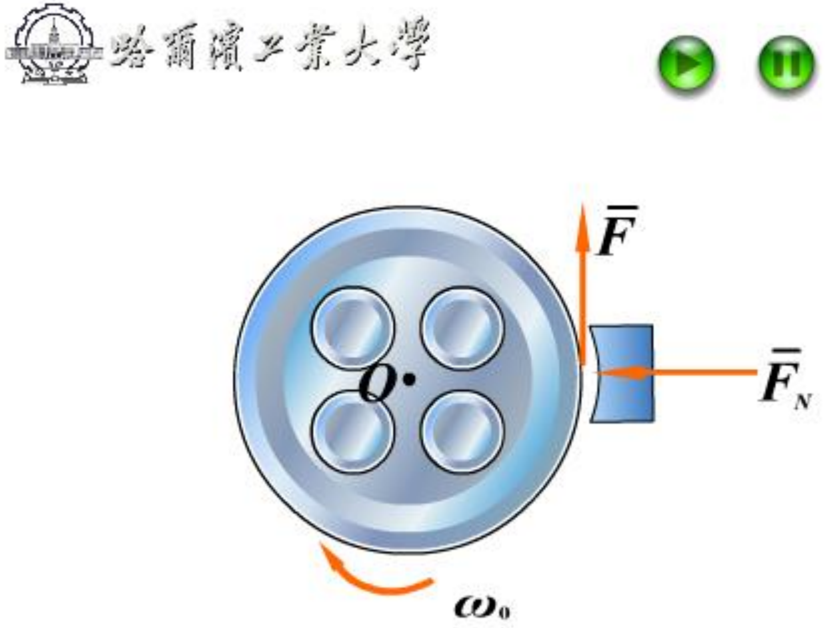
φ_O 称角振幅，θ 称初相位，由初始条件确定.

周期 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mga}}$$

例2

飞轮对轴O的转动惯量为J_O，以角速度ω绕轴O转动。制动时闸块给轮以正压力F_N。已知闸块和轮之间的动滑动摩擦因数为f，轮的半径为R，轴承摩擦忽略不计。

求：制动所需要的时间.



解：

$$J_O \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = FR = f\,F_N R$$

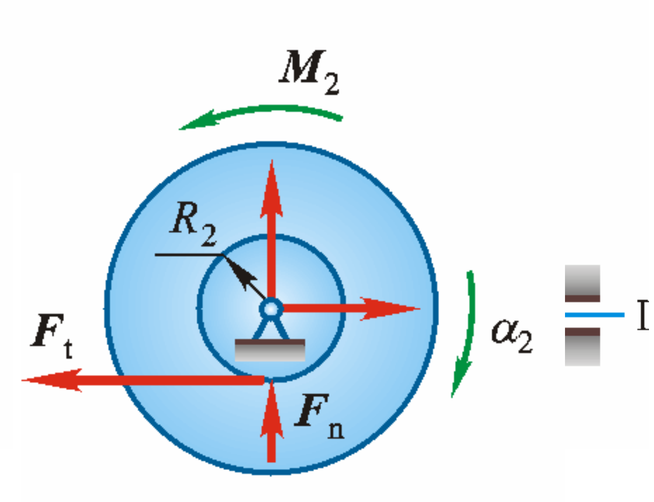
$$\int_{-\omega_0}^{0} J_O \mathrm{d}\omega = \int_0^t fF_N R\mathrm{d}t$$

$$t = \frac{J_O \omega_0}{fF_N R}$$

例3

传动轴系如图所示。设轴I和轴II的转动惯量为J_1和J_2，传动比为 $i_{12}=R_2/R_1$ ，其中R_1和R_2为轮I和II的半径。今在轴I上作用主动力矩M_1，轴II上有阻力矩M_2。各处摩擦忽略不计。

求：轴I的角加速度。



解：

$$J_1\alpha_1 = M_1 - F_t' R_1$$

$$J_2\alpha_2 = F_t R_2 - M_2$$

因 $F_t' = F_t$，$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = i_{12} = \dfrac{R_2}{R_1}$，得

$$\alpha_1 = \frac{M_1 - \dfrac{M_2}{i_{12}}}{J_1 + \dfrac{J_2}{i_{12}^2}}$$