

2、用于碰撞过程的基本定理

不宜直接用力来度量碰撞的作用，也不宜用运动微分方程描述每一瞬时力与运动之间的关系。

常用的方法是只分析碰撞前、后运动状态的变化。

难以用力的功来计算机械能的损耗，一般不用动能定理。

常采用动量定理和动量矩定理的积分形式来确定力的作用于运动变化的关系。

(1) 用于碰撞过程的动量定理——冲量定理

假设单个质点的质量为 m ，碰撞开始瞬时的速度为 v ，结束瞬时的速度为 v' ，则质点的动量定理为

$$m v' - m v = \int_0^t F dt = I$$

式中 I 为碰撞冲量，普通力的冲量忽略不计。

对于质点系，作用在第 i 个质点上的碰撞冲量可分为外碰撞冲量 $I_i^{(e)}$ 和内碰撞冲量 $I_i^{(i)}$ ，按照质点的动量定理有：

$$m_i v_i' - m_i v_i = I_i^{(e)} + I_i^{(i)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i v_i' - \sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n I_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n I_i^{(i)}$$

因为内力总是成对出现，大小相等，方向相反，所以 $\sum_{i=1}^i I_i^{(e)} = 0$

于是有：

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n I_i^{(e)}$$

——用于碰撞过程的质点系动量定理(冲量定理)

质点系在碰撞开始和结束时动量的变化，等于作用于质点系的外碰撞冲量的主矢。

由于质点系的动量可用总质量 m 与质心速度 \mathbf{v}_C 的乘积来计算，所以上述定理又可以表示为：

$$m\mathbf{v}'_C - m\mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^n I_i^{(e)}$$

式中 \mathbf{v}_C 和 \mathbf{v}'_C 分别是碰撞开始和结束时质心的速度。

(2) 用于碰撞过程的动量矩定理——冲量矩定理

质点系动量矩定理的一般表达式为微分形式，即：

$$\frac{d}{dt}L_O = \sum_{i=1}^n M_O(F_i^{(e)}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}$$

将 dt 移到等式右侧，上式可写成：

$$dL_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} dt = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times d\mathbf{I}_i^{(e)}$$

对上式积分，得：

$$\int_{L_{O1}}^{L_{O2}} dL_O = \sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbf{r}_i \times d\mathbf{I}_i^{(e)}$$

一般情况下， \mathbf{r}_i 是未知的变量，上式难以积分。但在碰撞过程中，假设各质点的位置不变，因此各碰撞力的作用点的矢径 \mathbf{r}_i 是恒矢量，于是有：

$$L_{O2} - L_{O1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \int_0^t d\mathbf{I}_i^{(e)} \quad \text{或：} \quad L_{O2} - L_{O1} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{I}_i^{(e)}) = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{I}_i^{(e)})$$

——用于碰撞过程的动量矩定理(冲量矩定理)

质点系在碰撞开始和结束时对某定点 O 的动量矩的变化，等于作用于质点系的外碰撞冲量对同一点的矩。

(3) 用于刚体平面运动碰撞过程的基本定理——刚体平面运动的碰撞方程

质点系相对于质心的动量矩定理与对于固定点的动量矩定理具有相同的形式。

类似地，可得到用于碰撞过程的质点系相对于质心的动量矩定理：

$$L_{C2} - L_{C1} = \sum_{i=1}^n M_C(I_i^{(e)})$$

对于平行于其对称面的平面运动刚体 $L_C = J_C \omega$

此时，质点系相对于质心的动量矩定理可写成：

$$J_C \omega_2 - J_C \omega_1 = \sum M_C(I_i^{(e)})$$

$$m\mathbf{v}'_C - m\mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i^{(e)}$$

—— 刚体平面运动的碰撞方程