2、变质量动力学在火箭发射中的应用

(1) 单级火箭

设火箭在真空中运动且不受任何外力作用，其喷射出的气体相对速度$\boldsymbol{v}_r$的大小不变，方向与火箭速度方向相反，此问题称齐奥尔科夫斯基第一类问题。

变质量质点的运动微分方程 $m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}^{(e)}+\boldsymbol{F}^{\phi}$

在运动方向的投影为： $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_r\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 或 $\mathrm{d}v=-v_r\dfrac{\mathrm{d}m}{m}$

设在初始时刻t=0时，v=v_0, m=m_0，积分上式得：$v=v_0+v_r\ln\dfrac{m_0}{m}$

设燃料燃尽时质量为m_f，速度为v，并令 $N=\dfrac{m_0}{m_f}$ —质量比

令 $v_f=v_r\ln N$ 称为火箭的特征速度，代表火箭在v_0的基础上所能增加的速度。

$\Longrightarrow$ $N=\dfrac{m_0}{m_f}=e^{v_f/v_r}$ —齐奥尔科夫斯基公式　　表明在v_r已知时欲使火箭达到特征速度v_f所应具备的质量比。

如果火箭在真空中且处于均匀的重力场内，沿铅垂方向向上运动，此问题称齐奥尔科夫斯基第二类问题。

此时在运动方向的投影为：$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-v_r\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$

设在初始时刻t=0时，v=v_0, m=m_0，积分得：$v=v_0-gt+v_r\ln\dfrac{m_0}{m}$

(2) 二级火箭

设第一级火箭总质量为m_1，其内携带的燃料质量为m_{1c}，且$m_{1c}=\varepsilon m_1$；第二级火箭总质量为m_2，其内携带的燃料质量为$m_{2c}=\varepsilon m_2$；载荷的质量为m_P。设燃料喷出的相对速度vr大小不变，方向与火箭速度方向相反，每秒喷出的燃料质量也为常数。火箭由静止开始运动，略去重力。

由一级火箭的结果，可知当第一级火箭燃料燃尽时，火箭的速度为:

$$v_1 = v_r \ln \frac{m_1 + m_2 + m_P}{m_1 + m_2 + m_P - \varepsilon m_1}$$

然后，抛掉第一级，初始总质量变为$m_2 + m_P$，初始速度为v_1。当第二级火箭燃料燃尽时，火箭的速度为:

$$v_2 = v_1 + v_r \ln \frac{m_2 + m_P}{m_2 + m_P - \varepsilon m_2}$$

如果取$m_1=m_2=50\ m_P$，$\varepsilon=0.8$, $v_r/g=300\text{s}$, 则由上两式得到$v_2 \approx 6000\text{m/s}$

如果采用单级火箭，仍然应用这些参数的话，$v \approx 4600\text{m/s}$，比采用二级火箭速度要低得多。

设两级火箭的总量$m_1 + m_2=m$ 为常量，如何分配m_1与 m_2的比例使得v_2最大，是二级火箭必须考虑的问题。由上述结果得到:

$$v_2 = v_r \ln \frac{m + m_P}{m + m_P - \varepsilon m_1} + v_r \ln \frac{m_2 + m_P}{m_2 + m_P - \varepsilon m_2}$$

$$v_2 = -v_r \ln\left[1-\frac{\varepsilon(m-m_2)}{m+m_P}\right] - v_r \ln\left[1-\frac{\varepsilon m_2}{m_2+m_P}\right]$$

对m_2求导，并令$dv_2/dm_2=0$，得：$\dfrac{\varepsilon/(m_1+m_P)}{1-\varepsilon(m-m_2)/(m+m_P)} = \dfrac{\varepsilon m_P/(m_2+m_P)^2}{1-\varepsilon m_2/(m+m_P)}$

化简得：$(1-\varepsilon)(m_2^2+2m_P m_2 - m_P m)=0 \Longrightarrow m_2 = -m_P \pm \sqrt{m_P^2+m_P m}$

由$m_2>0$，且同除以m，得：$\dfrac{m_2}{m} = -\dfrac{m_P}{m} + \left(\dfrac{m_P^2+m_P m}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{m_P}{m} + \left(\dfrac{m_P^2}{m^2}+\dfrac{m_P}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

由于$m_P/m<<0$，将上式按照幂级数展开，取近似

$$\frac{m_2}{m} = -\frac{m_P}{m} + \left(\frac{m_P}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_P}{m}+\cdots\right) = \left(\frac{m_P}{m}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_P}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{m_P}{m}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

因$m_P/m<<0$，略去m_P/m的一次项及高阶项，上式的近似结果为：

$$\frac{m_2}{m} = \left(\frac{m_P}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m_P}{m}}$$

满足此式的质量比（第二级火箭质量与一二级火箭总质量之比）将使二级火箭末速度达到最大值。

代入v_2的表达式得到：$v_{2\max} = -2v_r \ln\left\{1-\varepsilon\left[1-(m_P/m)^{1/2}\right]\right\}$

如果取$m_P/m=1/100$，则 $m_2/m=1/10$, $m_1/m=9/10$，仍然采用 $\varepsilon=0.8$, $v_r/g=300s$，则 $v_{2\max}\approx 7500m/s$，比平均分配时的速度6000m/s大得多。

(3) 多级火箭

设多级火箭中各级火箭的质量分别为m_1，m_2，……，m_n，各级火箭携带的燃料质量为$\varepsilon_i m_i$；载荷的质量为m_P；各级火箭喷射气体的相对速度方向与火箭速度方向相反，大小分别为v_{r1}，v_{r2}，……，v_{rn}，不计重力，则第i级火箭在燃料燃尽时火箭所增加的速度（特征速度）为：

$$\Delta v_i = v_{ri} \ln \frac{m_i + m_{i+1} + \cdots + m_n + m_P}{(1-\varepsilon_i) m_i + m_{i+1} + \cdots + m_n + m_P}$$

令 $$\mu_i = \frac{m_i + m_{i+1} + \cdots + m_n + m_P}{(1-\varepsilon_i) m_i + m_{i+1} + \cdots + m_n + m_P}$$

当第n级（最后一级）火箭燃料燃尽时，火箭的速度为：

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} v_{ri} \ln \mu_i$$

通常把载荷送上预定轨道所需的v_n是定值，如何分配各级火箭的质量比例使得火箭的总质量最小呢？

火箭第i级到第n级的质量与第$i+1$级到第n级的质量（均包括载荷）之比为：

$$\frac{m_i + m_{i+1} + \cdots + m_n + m_P}{m_{i+1} + m_{i+2} + \cdots + m_n + m_P} = \frac{\varepsilon_i \mu_i}{1-(1-\varepsilon_i)\mu_i}$$

设火箭的总质量（不包括载荷）为m，则有：

$$\frac{m+m_P}{m_P}=\left(\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n+m_P}{m_2+m_3+\cdots+m_n+m_P}\right)\left(\frac{m_2+m_3+\cdots+m_n+m_P}{m_3+m_4+\cdots+m_n+m_P}\right)\cdots\left(\frac{m_n+m_P}{m_P}\right)$$

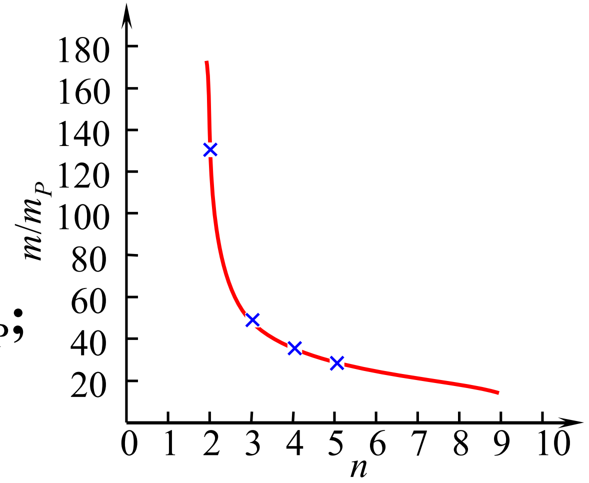
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i\mu_i}{1-(1-\varepsilon_i)\mu_i}$$ 取自然对数：$$\ln\frac{m+m_P}{m_P}=\sum_{i=1}^{n}\{\ln\mu_i+\ln\varepsilon_i-\ln[1-(1-\varepsilon_i)\mu_i]\}$$

因为火箭的载荷m_P为给定值，因此求$\ln[(m+m_P)/m_P]$的最小值即为求m的最小值。

为了简单起见，假设各级火箭v_{ri}相同，ε_i相同，得：$\mu_1=\mu_2=\cdots\mu_n=\mu=e^{v_n/nv_r}$

欲使火箭总质量最小，每一级火箭燃料燃尽后所增加的速度Δv_i的值应相同。

满足该条件的火箭总质量为：$$m_{\min}=\left\{\frac{\varepsilon^n e^{v_n/v_r}}{\left[1-e^{v_n/nv_r}(1-\varepsilon)\right]^n}-1\right\}m_P$$



对于近地轨道，仍取此前参数，单级火箭$m_{\min}<0$；
二级火箭(n=2), $m_{\min}\approx 147m_P$；三级火箭(n=3), $m_{\min}\approx 51m_P$；
四级火箭(n=4), $m_{\min}\approx 40m_P$；五级火箭(n=5), $m_{\min}\approx 36m_P$；
n级火箭($n\to\infty$), $m_{\min}\approx 13.2m_P$。

各级火箭质量比为：$$\frac{m_i}{m_{i+1}}=\frac{\varepsilon\mu}{1-\mu(1-\varepsilon)}$$

例如二级火箭(n=2)，$m_1:m_2$=12:1；
三级火箭(n=3)，$m_1:m_2:m_3\approx 13.7:3.7:1$。