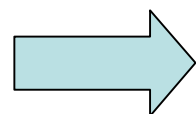


3、平面任意力系的平衡条件和平衡方程

(1) 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零


$$F'_R = 0 \quad M_O = 0$$

因为 $F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$ $M_O = \sum M_O(F_i)$

所以, 平面任意力系的平衡方程

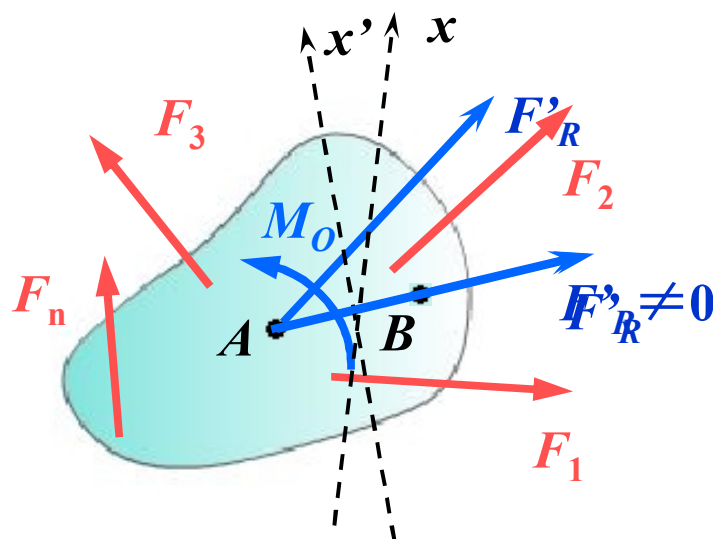
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases} \quad \text{一般式}$$

平面任意力系平衡的解析条件：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。

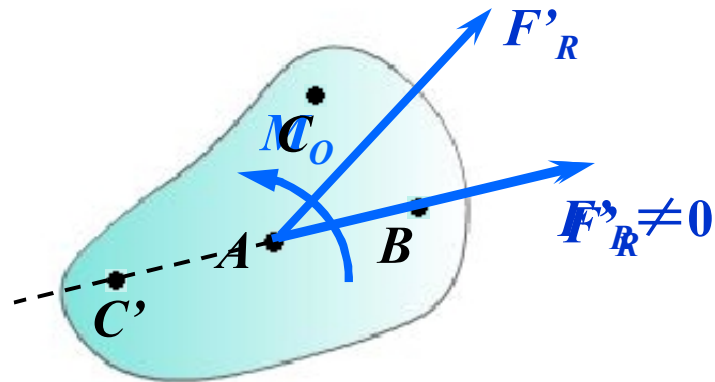
平面任意力系的平衡方程另两种形式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \quad \text{二矩式}$$

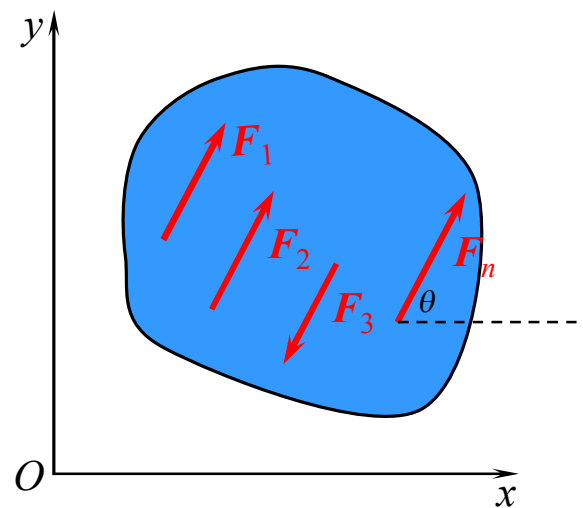
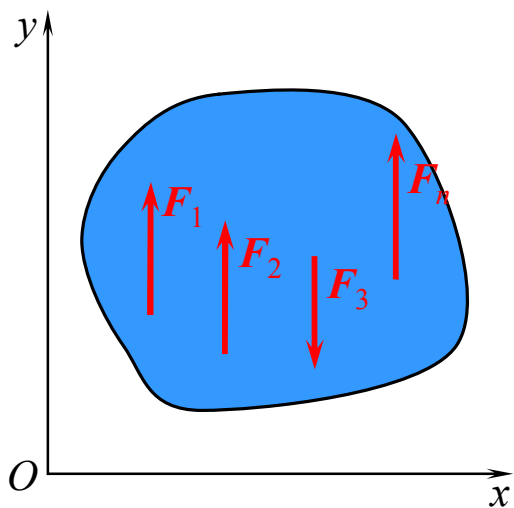
两个取矩点连线，不得与投影轴垂直



$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{三矩式} \\ \text{三个取矩点, 不得共线} \end{array}$$



(2) 平面平行力系的平衡方程



$$\sum F_x = 0 \quad 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \cos \theta - F_2 \cos \theta + F_3 \cos \theta + \dots = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_1 \sin \theta - F_2 \sin \theta + F_3 \sin \theta + \dots = 0$$

平面平行力系的方程为两个，有两种形式

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad \text{各力不得与投影轴垂直}$$

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \quad \text{两点连线不得与各力平行}$$

例2 起重机 $P_1=10\text{kN}$,可绕铅直轴 AB 转动;起重机挂钩上挂有重为 $P_2=40\text{kN}$ 的重物,尺寸如图所示.

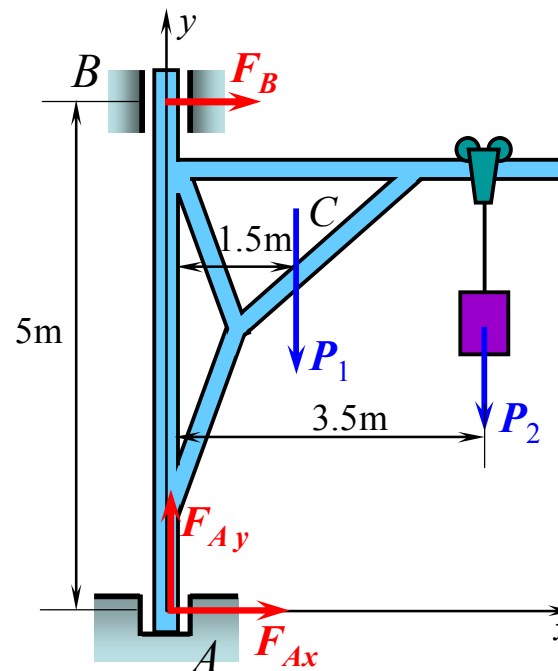
求: A 、 B 处的约束反力.

解: 取起重机为研究对象, 画受力图.

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F_B \cdot 5 - 1.5 \cdot P_1 - 3.5 \cdot P_2 = 0$$



解得

$$F_{Ay} = 50\text{kN} \quad F_B = -31\text{kN} \quad F_{Ax} = 31\text{kN}$$

请同学们用二矩式方程求解, 并比较两种方法的特点.

例3 自重为 $P=100\text{kN}$ 的T字形钢架 ABD 置于铅垂面内，载荷如图所示，其中 $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$ ，集中力 $F=400\text{kN}$ ，线性分布载荷的最大值 $q=20\text{kN/m}$ ， $l=1\text{m}$ ，试求固定端 A 的约束力。

解：取钢架为研究对象，画受力图。

首先将线性分布载荷简化成一个集中力 F_1 ，大小等于

$$F_1 = \frac{1}{2} q \times 3l = 30\text{kN}$$

其作用线位置利用合力矩定理（对 A 点力矩相等）：

$$F_1 h = \int_0^{3l} q \frac{y}{3l} dy \cdot (3l - y) \rightarrow h = l$$

列平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_1 - F \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_{Ay} + P + F \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A - M - F_1 l + F \cos 60^\circ \cdot l + F \sin 60^\circ \cdot 3l = 0$$

解得 $F_{Ax} = 316.4\text{kN} \quad F_{Ay} = 300\text{kN} \quad M_A = -1188\text{kN}\cdot\text{m}$

M_A 为负，表明 A 处所受到的约束力偶方向与标示的相反（为顺时针）

