普遍定理综合应用举例

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组

普遍定理综合应用举例

普遍定理

- **动量定理**
  - 质心运动定理
分析质点系受力
与质心运动的关系
- **动量矩定理**
  - 相对于质心和质心轴
  - 相对于定点和定轴
    - 定轴转动刚体的转动微分方程
- **动能定理**
  - 积分形式
    - 求速度或角速度
  - 微分形式功率方程
    - 求加速度或角加速度

质心运动定理 + 相对于质心和质心轴 → 描述质点系整体运动
如：平面运动刚体的
运动微分方程

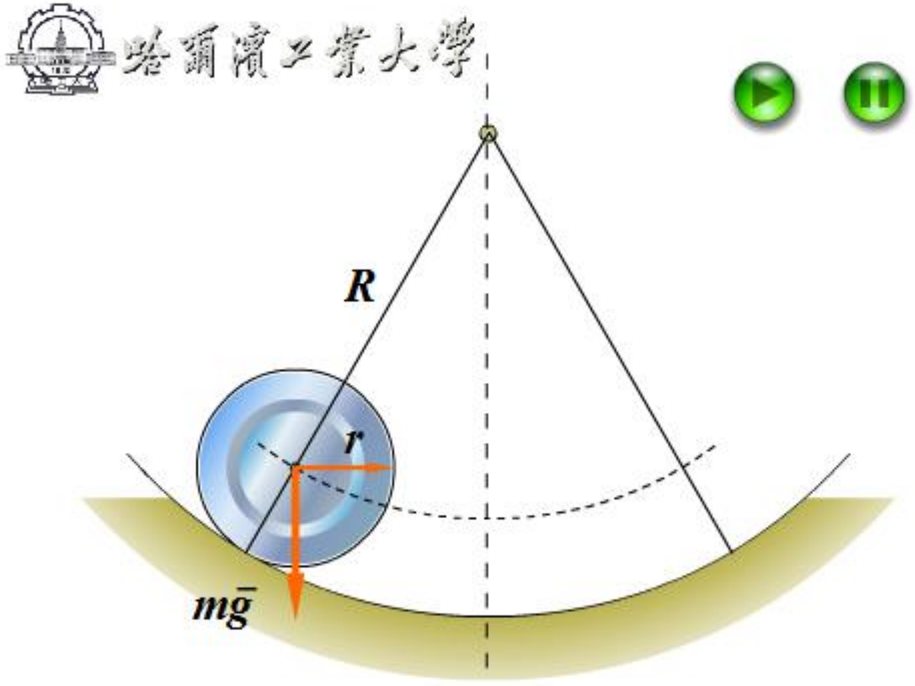
普遍定理综合应用举例

动量和动量矩	动能
矢量，有大小方向	非负的标量，与方向无关
内力不能使之改变 外力能使之改变	内力可以改变动能
约束力是外力时对之有影响	理想约束不影响
当外力主矢为零时，系统动量守恒 当外力对定点O或质心的主矩为零时，系统对定点或者质心的动量矩守恒	在保守系统中，机械能守恒
动量定理描述质心的运动变化 动量矩定理描述绕质心或绕定点的运动变化	动能定理描述质心运动及相对质心运动中动能的变化 研究机械运动与其他运动形式有能量转化的问题

例1

均质圆轮半径为 r，质量为m，受到轻微扰动后，在半径为R的 圆弧上往复滚动。设表面足够粗糙，使圆轮在滚动时无滑动. 求:轮心 C的运动微分方程.

例题:
利用平面运动刚体运动微分方程求解



功率方程求解

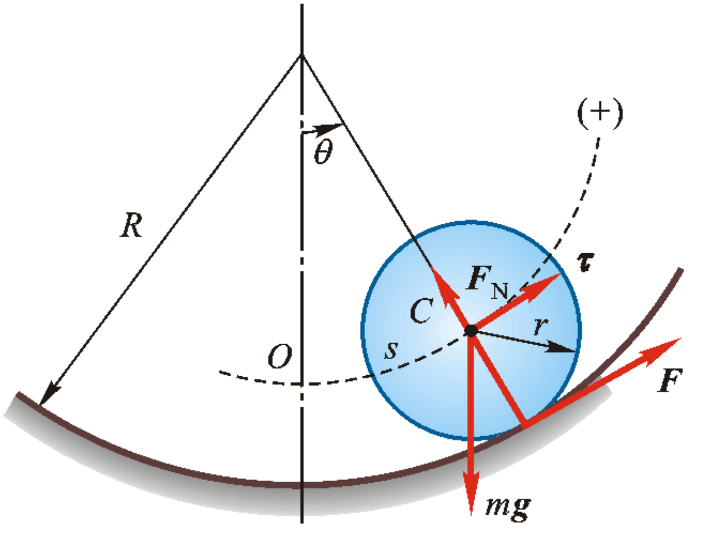
解: 分析圆轮，受力如图所示。

$$T=\frac{1}{2}mv_C^{\ 2}+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{3}{4}mv_C^2 \qquad v_C=\omega r \qquad J_C=\frac{1}{2}mr^2$$

$$P=m\vec{g}\cdot\vec{v}=m\vec{g}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}\right)$$

$$=m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{g}\cdot\vec{\tau}=m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(-g\sin\theta)$$

$$=-mg\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$



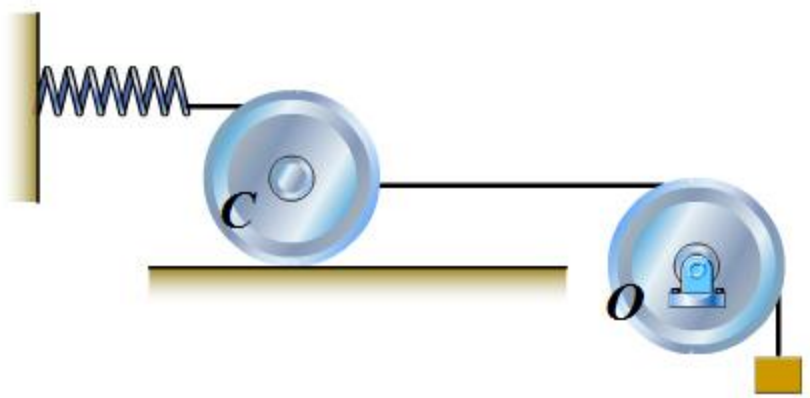
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=P \Rightarrow \frac{3}{4}m\cdot 2v_C\cdot\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta\, v_C$$

$$\theta=\frac{s}{R-r} \qquad \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2gs}{3(R-r)}=0$$

例2

物块和两均质轮的质量皆为m，轮半径皆为R。滚轮上缘绕一刚度系数为k的无重水平弹簧，轮与地面间无滑动。现于弹簧的原长处自由释放物块。

求：重物下降h时，v，a及滚轮与地面的摩擦力。



求速度和加速度可用动能定理

求摩擦力可用相对质心的动量矩定理

普遍定理综合应用举例

解: 动能定理，分析系统。 $T_1 = 0$ $\qquad \omega = v/r$

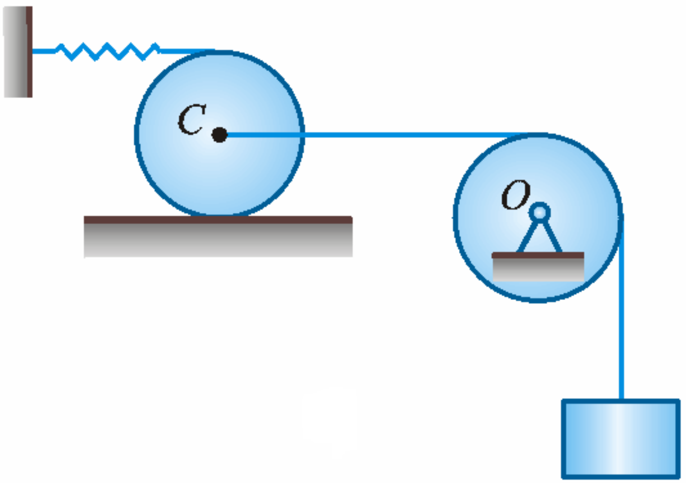
$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\left(m\upsilon^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\right) = \frac{3}{2}mv^2$$

$$\sum W = mgh - \frac{1}{2}k(2h)^2 = mgh - 2kh^2$$

$$\sum W = T_2 - T_1$$

$$v = \sqrt{\frac{2(mg-2kh)h}{3m}}$$

$$mgh - 2kh^2 = \frac{3}{2}mv^2 \qquad \text{（a）}$$

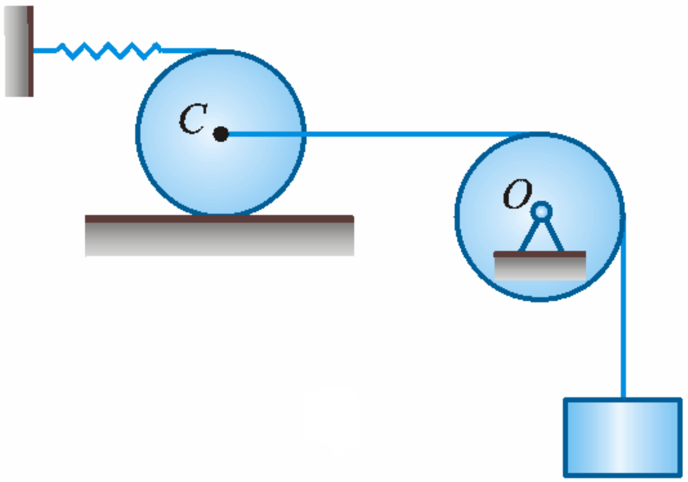


将式（a）对 t 求导

$$3mv\,\boxed{a} = (mg - 4kh)\,\boxed{v}$$

得 $a = \dfrac{g}{3} - \dfrac{4kh}{3m}$

分析滚轮，受力如图所示。

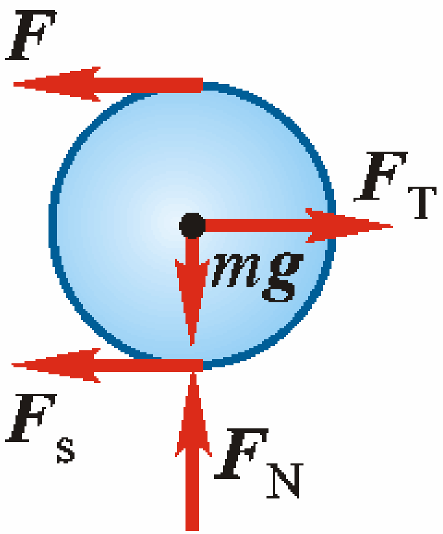


相对质心的动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{v}{R}\right)=\left(F_\mathrm{s}-F\right)R$$

其中 $F=2kh$

$$\Rightarrow \quad F_\mathrm{s}=F+\frac{1}{2}ma=\frac{mg}{6}+\frac{4}{3}kh$$



求作用力，须先求加速度，求加速度可用动能定理的微分形式；
求作用力，应用动量或动量矩定理。

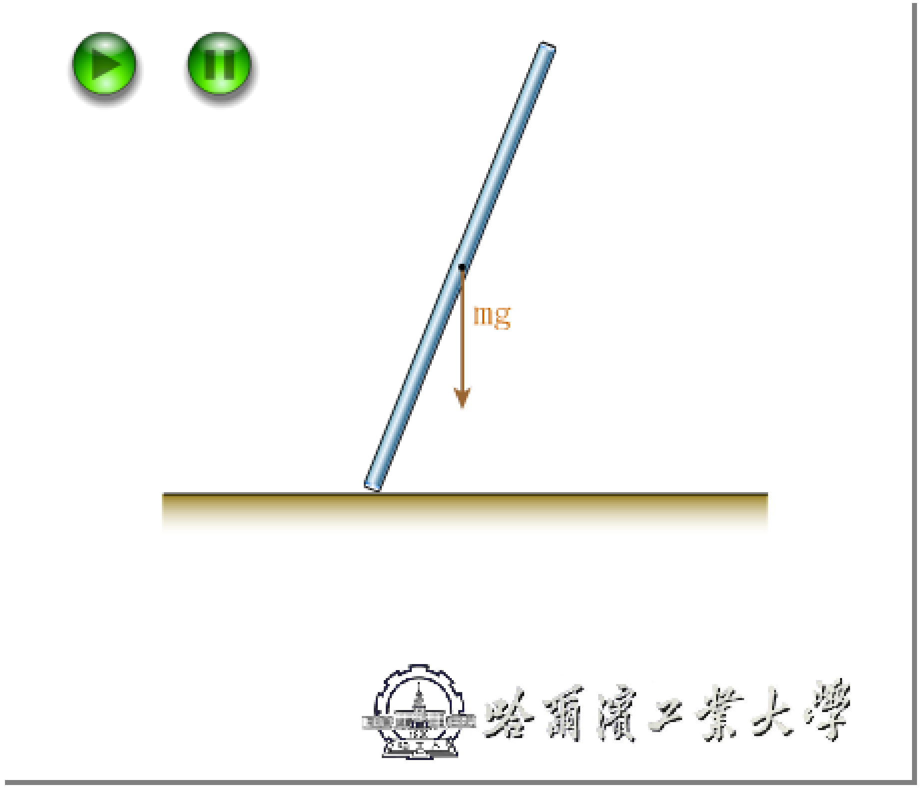
分别研究两轮和物块，应用各自的运动微分方程求解。

普遍定理综合应用举例

例3

均质细杆长l，质量为m，静止直立于光滑地面上。杆受到微小干扰而倒下。

求：杆刚到达地面时的角速度和地面约束力。



求角速度可用动能定理

求约束力可用平面运动刚体的运动微分方程

解: 分析杆，地面光滑，水平方向不受力，由质心守恒定律可知，质心铅直向下运动。P为杆瞬心。

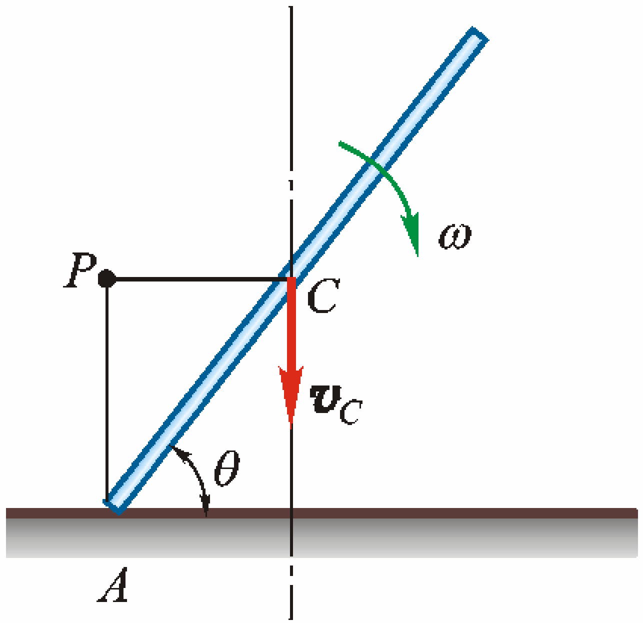
$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{2v_C}{l\cos\theta} \qquad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2$$

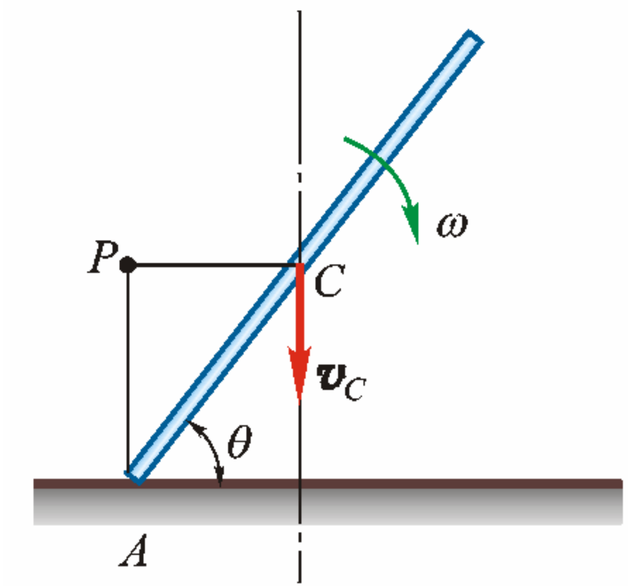
$$mg\frac{l}{2}(1-\sin\theta) = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{1}{3\cos^2\theta}\right)v_C^2$$

$\theta = 0$ 时

$$v_C = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$



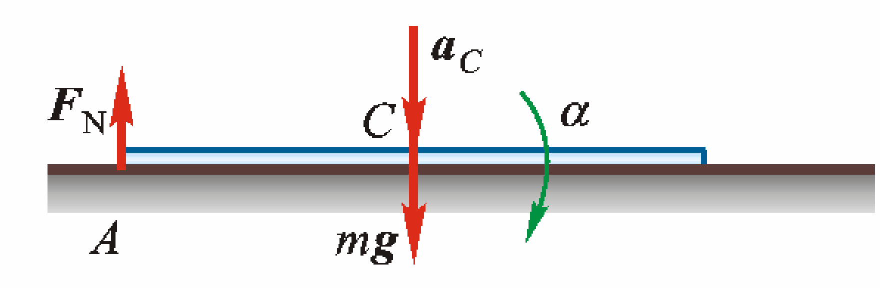
在水平位置，分析杆受力如图所示。



由刚体平面运动微分方程：

$$mg - F_{\mathrm{N}} = ma_C \qquad \text{(a)}$$

$$F_{\mathrm{N}} \frac{l}{2} = J_C \alpha = \frac{ml^2}{12} \alpha \qquad \text{(b)}$$



利用基点法：

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{CA}^{\mathrm{n}}$$

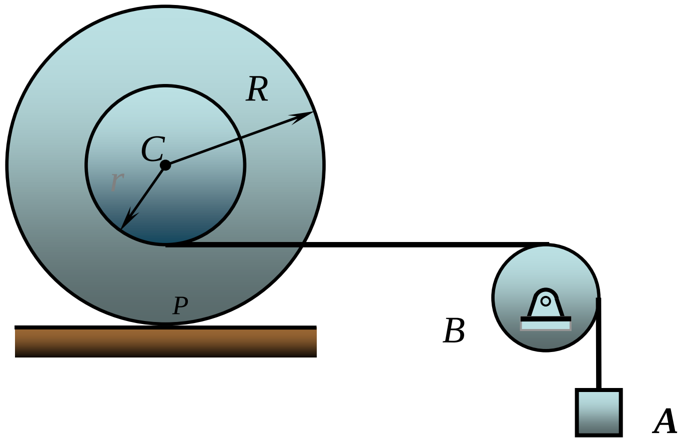
$$a_C = a_{CA}^{\mathrm{t}} = \frac{l}{2} \alpha \qquad \text{(c)}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{N}} = \frac{mg}{4}$$

求解动力学问题时，常需要利用运动学知识分析速度和加速度；
有时需要先判明是否存在动量和动量矩守恒，如果是，需要利用守恒条件

例4

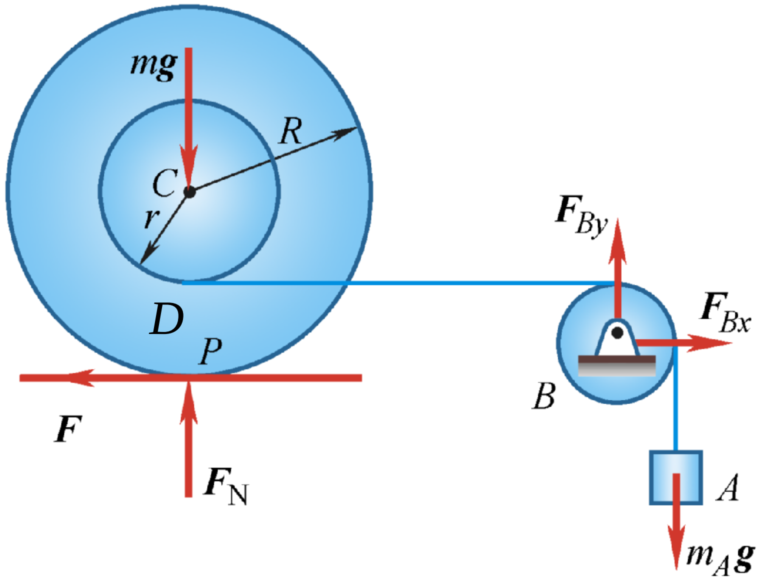
塔轮质量 $m=200\text{kg}$，大半径 $R=600\text{mm}$，小半径 $r=300\text{mm}$，对轮心**C**的回转半径 $\rho_C=400\text{mm}$，质心在几何中心**C**。小半径上缠绕无重细绳，绳水平拉出后绕过无重滑轮**B**悬挂一质量为 $m_A=80\text{kg}$ 的重物**A**。求：（**1**）若塔轮和水平地面间为纯滚动，**C**点加速度，绳张力，摩擦力为多少；（**2**）纯滚动条件；（**3**）若静滑动摩擦因数为**0.2**，动滑动摩擦因数为**0.18**，绳张力为多少？



求加速度可用动能定理微分形式，求力可用质心运动定理或相对质心的动量矩定理；
第三问摩擦力是已知的，采用哪种方法求解，决定于是否是纯滚动。

解： （1）以整体为研究对象，其受力如图所示。

$$T_2=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2+\frac{1}{2}m_Av_A^2$$



其中： $v_C=\omega R \qquad v_A=\omega(R-r)$

$a_C=\alpha R$

由加速度基点法 $\vec{a}_D=\vec{a}_C+\vec{a}_{DC}^t+\vec{a}_{DC}^n$

向水平方向投影 $a_A=a_{Dx}=a_C-\alpha r$

$$a_A=\alpha(R-r)$$

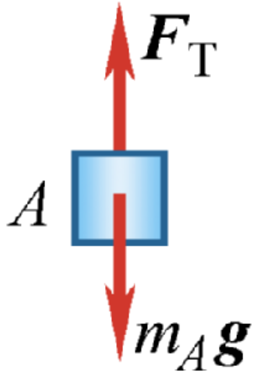
$$\Rightarrow \quad T_2=\frac{1}{2}\left[m(\rho_C^2+R^2)+m_A(R-r)^2\right]\omega^2$$

力的功 $\qquad W=m_Ags$

$$\Rightarrow \quad m_Ags=\frac{1}{2}\left[m(\rho_C^2+R^2)+m_A(R-r)^2\right]\omega^2-T_1$$ 函数式

两端对时间求导得

$$m_A g v_A = \left[m(\rho_C^2 + R^2) + m_A(R-r)^2\right]\omega\alpha$$

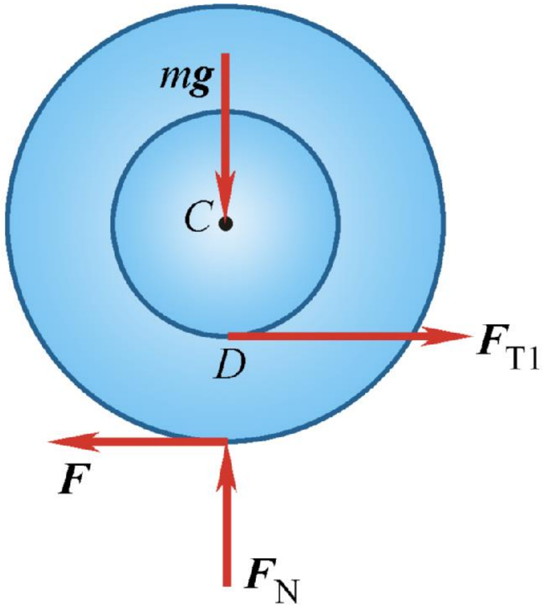


➡ $\alpha = 2.115\text{rad/s}^2 \quad a_A = 0.635\text{m/s}^2 \quad a_C = 1.269\text{m/s}^2$

研究重物A，受力如图所示 $m_A a_A = m_A g - F_T$

➡ $F_T = 733\text{N}$

研究塔轮，受力如图所示

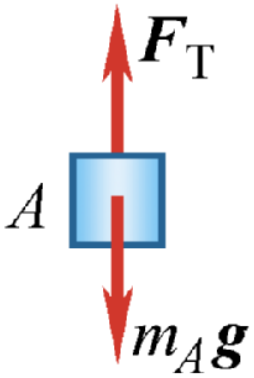


$$ma_C = F_{T_1} - F \qquad F_{T_1} = F_T$$

➡ $F = 479\text{N}$

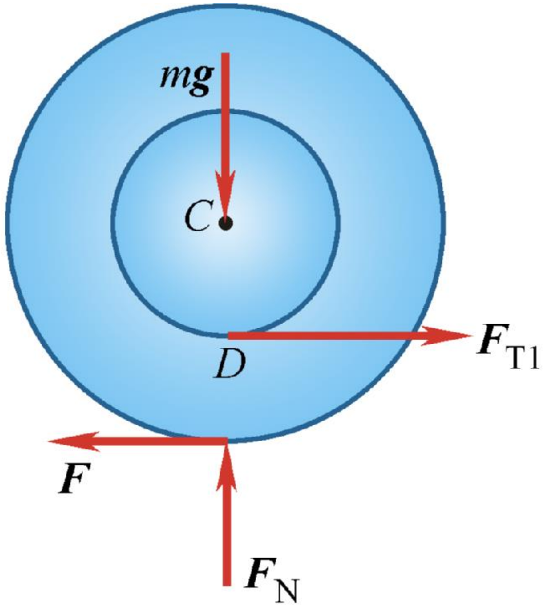
（2） $F \le f_s F_N \quad F_N = mg \quad \Rightarrow \quad f_s \ge 0.244$

静摩擦因数



（3）塔轮连滚带滑运动

研究重物A和塔轮，受力如图所示。



$$m_A a_A = m_A g - F_T \qquad m a_C = F_{T_1} - F$$

mgf

$$m\rho_C^2 \alpha = FR - F_{T_1} r \qquad F_{T_1} = F_T$$

由加速度基点法 $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^t + \vec{a}_{DC}^n$

向水平方向投影 $a_A = a_{Dx} = a_C - \alpha r$

$a_C \ne \alpha R$

$\Rightarrow \quad F_T = 667\text{N}$