

# 变质量动力学

曾凡林

哈尔滨工业大学理论力学教研组



## 本讲主要内容

- 1、变质量质点的运动微分方程
- 2、变质量动力学在火箭发射中的应用
- 3、变质量质点的动力学普遍定理

# 1、变质量质点的运动 微分方程

### (1) 变质量质点的运动微分方程

在时刻 $t$ ，质点的质量为 $m$ ，速度为 $\boldsymbol{v}$

在时刻 $t+dt$ ，并入速度为 $\boldsymbol{v}_1$ 的微小质量 $dm$

并入后，系统质量变为 $m+dm$ ，速度变为 $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$

质点系在 $t$ 瞬时的动量： $\boldsymbol{p}_1 = m\boldsymbol{v} + dm \cdot \boldsymbol{v}_1$

质点系在 $t+dt$ 瞬时的动量： $\boldsymbol{p}_2 = (m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$

根据动量定理有： $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{F}^{(e)}dt$

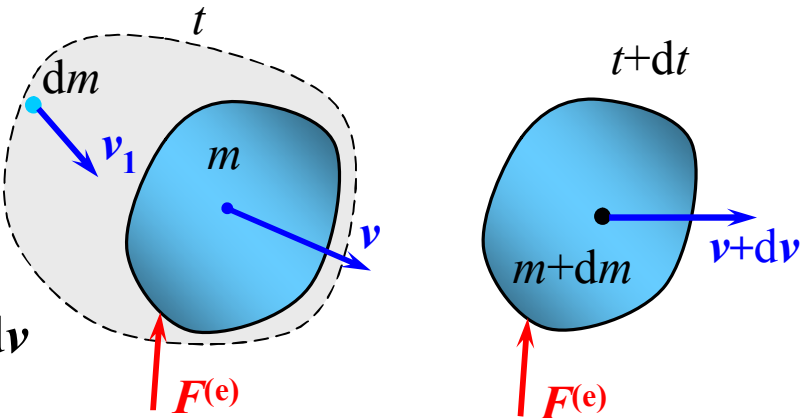
$$\longrightarrow m d\boldsymbol{v} + dm \cdot \boldsymbol{v} + dm \cdot d\boldsymbol{v} - dm \cdot \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{F}^{(e)}dt$$

略去高阶微量 $dm \cdot d\boldsymbol{v}$ ，并在等式两边同时除以 $dt$ ，得： $m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}^{(e)}$

式中 $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r$ 为微小质量在并入前相对于质点 $m$ 的相对速度，令  $\boldsymbol{F}_\phi = \frac{dm}{dt} \boldsymbol{v}_r$

则有： $m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)} + \boldsymbol{F}_\phi$  —变质量质点的运动微分方程

方程形式与常质量质点运动微分方程相似，仅在右端多了一项 $\boldsymbol{F}_\phi$ ，它具有力的量纲，常称为**反推力**。当 $dm/dt > 0$ 时， $\boldsymbol{F}_\phi$ 与 $\boldsymbol{v}_r$ 同向；当 $dm/dt < 0$ 时， $\boldsymbol{F}_\phi$ 与 $\boldsymbol{v}_r$ 反向。



## (2) 常用的几种质量变化规律

### i 质量按线性规律变化

$$m = m_0(1 - \beta t) \quad , \quad \beta t < 1$$

由  $\frac{dm}{dt} = -m_0\beta$  知，其反推力为：  $F_\phi = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_r = -m_0\beta \mathbf{v}_r$

当  $\mathbf{v}_r$  为常量时，反推力也为常量，且与  $\mathbf{v}_r$  方向相反。

### ii 质量按指数规律变化

$$m = m_0 e^{-\beta t}$$

由  $\frac{dm}{dt} = -\beta m_0 e^{-\beta t}$  知，其反推力为：  $F_\phi = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_r = -\beta m_0 e^{-\beta t} \mathbf{v}_r$

令  $\mathbf{a}_\phi$  表示仅在反推力  $F_\phi$  作用下变质量质点的加速度，则：

$$\mathbf{a}_\phi = \frac{F_\phi}{m} = \frac{-\beta m_0 e^{-\beta t} \mathbf{v}_r}{m_0 e^{-\beta t}} = -\beta \mathbf{v}_r$$

当  $\mathbf{v}_r$  为常量时， $\mathbf{a}_\phi$  也为常量，即由反推力引起的加速度为常量。