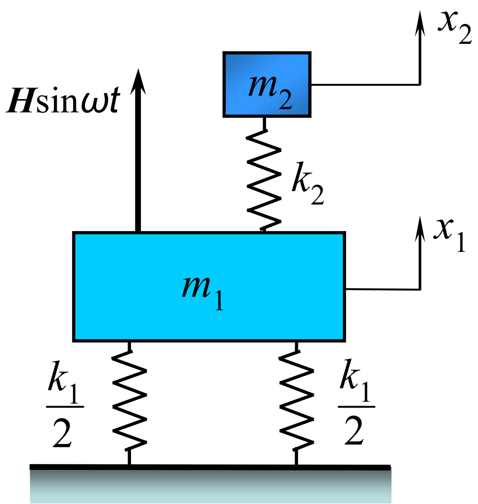
2、两个自由度系统的受迫振动

主物块上面作用有周期性的激振力$H\sin\omega t$， 附加物块通过一个刚度系数为k_2的弹簧与主物块连接， 可以起到减少主物块振动的作用，这样的装置就称为**动力减振器**。



分别用下x_1和x_2表示两个质量块相对于各自平衡位置的位移，建立两个物块的**运动微分方程**:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + H\sin\omega t$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1)$$

令 $b = \dfrac{k_1 + k_2}{m_1}$， $c = \dfrac{k_2}{m_1}$， $d = \dfrac{k_2}{m_2}$， $h = \dfrac{H}{m_1}$

则微分方程可以简化为:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + bx_1 - cx_2 = h\sin\omega t \\ \ddot{x}_2 - dx_1 + dx_2 = 0 \end{cases}$$

设方程组的一组**特解**为:

$$x_1 = A\sin\omega t, \quad x_2 = B\sin\omega t$$

式中A和B为m_1 和m_2的振幅,是待定常数。

将特解代入简化后的微分方程组，得到关于振幅的方程组：

$$(b-\omega^2)A-cB=h,\quad -dA+(d-\omega^2)B=0$$

解上述代数方程组得到两个振幅为：

$$A=\frac{h(d-\omega^2)}{(b-\omega^2)(d-\omega^2)-cd}\qquad B=\frac{hd}{(b-\omega^2)(d-\omega^2)-cd}$$

（1）当激振频率 $\omega \to 0$

此时激振周期 $T\to\infty$，表示激振力变化极其缓慢，实际上相当于静力作用。

$$\Longrightarrow\quad A=B=\frac{h}{b-c}=\frac{H}{k_1}=b_0$$

b_0相当于在大小等于力幅H的常力作用下主物体m_1的静位移，这时两个物体具有相同的位移量。

（2）固有频率

频率方程:

$$\begin{vmatrix} b-\omega^2 & -c \\ -d & d-\omega^2 \end{vmatrix}=(b-\omega^2)(d-\omega^2)-cd=0$$

可解得系统的固有频率 ω_1和 ω_2。

当激振频率 $\omega=\omega_1$或 $\omega=\omega_2$时，$(b-\omega^2)(d-\omega^2)-cd=0$，$A$、$B\to\infty$，系统发生共振。两个自由度的系统具有两个共振频率。

（3）振幅比

$$\frac{A}{B}=\frac{d-\omega^2}{d}$$

两物体的振幅比与激振频率有关，不再是自由振动的主振型。

当激振频率 $\omega=\omega_1$或 $\omega=\omega_2$时，$\frac{A}{B}=\frac{d-\omega_1^2}{d}$ 或 $\frac{d-\omega_2^2}{d}$，与自由振动对应的主振型相同。

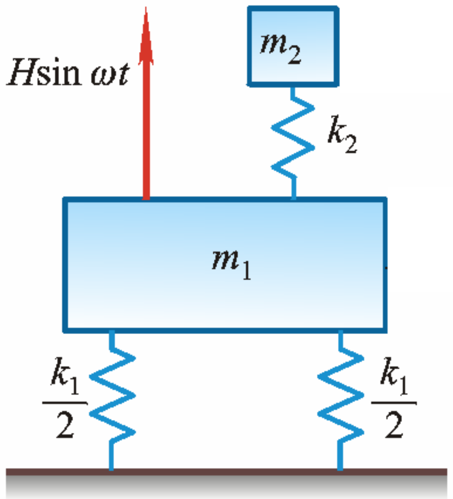
当系统发生各阶共振时，受迫振动是各阶主振型。

利用实验测固有频率和固有振型。

（4）振幅与激振频率的关系

实例：$k_1=k_2=k \quad m_1=2m_2=m$

$$b=\frac{k_1+k_2}{m_1}=\frac{2k}{m},\quad c=\frac{k_2}{m_1}=\frac{k}{m},\quad d=\frac{k_2}{m_2}=\frac{2k}{m},\quad h=\frac{H}{m_1}=\frac{H}{m}$$



令$\omega_0=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 为没有m_2时，主质量系统的固有频率

$$\Rightarrow\quad b=d=2\omega_0^2,\quad c=\omega_0^2$$

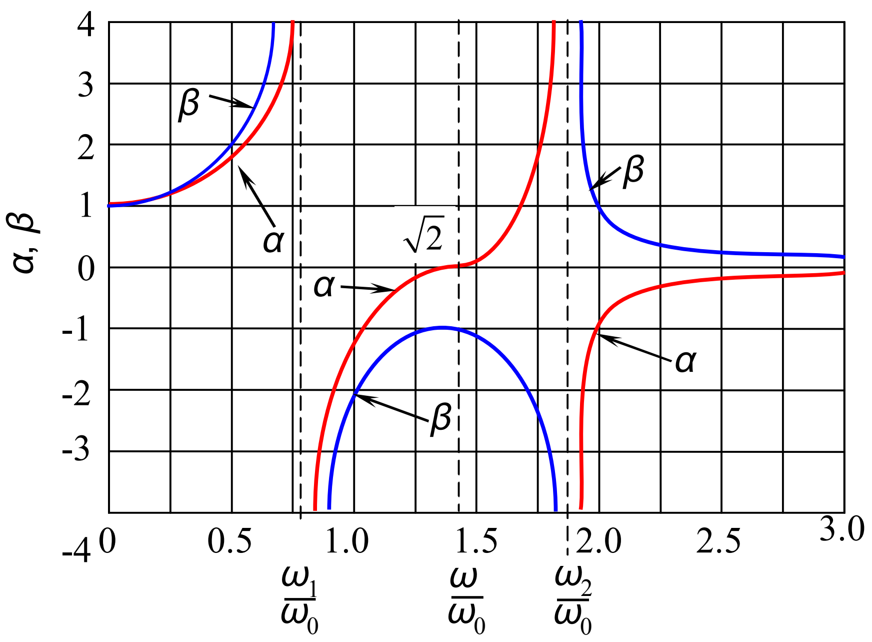
$$\omega_1^2=0.586\omega_0^2,\quad \omega_2^2=3.41\omega_0^2$$

引入静变形 $b_0 = \dfrac{H}{k}$ 并代入b、c、d、h，得到两个物体关于静变形的振幅比：

$$\alpha = \frac{A}{b_0} = \frac{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{2\left[1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 - 1}$$

$$\beta = \frac{B}{b_0} = \frac{1}{2\left[1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 - 1}$$

振幅比—频率比曲线



i 当ω =0时，α=β=1，即A=B=b_0。

ii 当ω增大时，两物体振幅增大；当 $\omega = \omega_1$时，A, B →∞，发生共振。

iii 当ω略大于ω_1时，A, B 仍很大，但均为负值。再继续增大ω，振幅均减小。

iv 当$\omega = \sqrt{d} = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}} = \sqrt{2}\omega_0$ 时，A=0，B=b_0。m_2振动，m_1不动—动力减振。

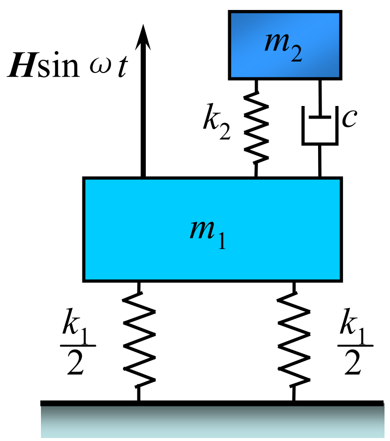
v 当$\omega > \sqrt{d} = \sqrt{2}\omega_0$ 时，A>0，B<0。两物体反向振动，m_1与激振力同相位。

vi 当 $\omega = \omega_2$时，A, B →∞，发生第二次共振；当ω>ω_2时，两物体振动反向，但振幅逐渐减小，最后随ω的增大而趋于零。

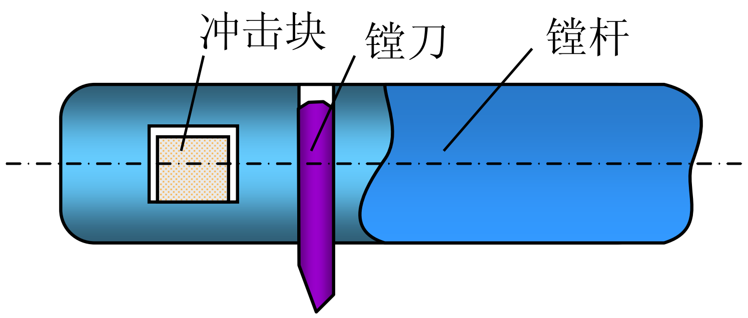
动力减振器

当激振频率 ω 等于动力减震器自身固有频率时，β=-1，即减振器质量m_2的振幅为-b_0，也就是$-H/k_1=-H/k_2$。此时，弹簧k_2作用在主质量m_1上的力为$k_2x_2=-H\sin\omega t$，正好与加在主质量上的激振力平衡，主质量相当于不受激振力作用一样，保持静止，从而达到了减振目的。—无阻尼动力减振器

有阻尼动力减振器

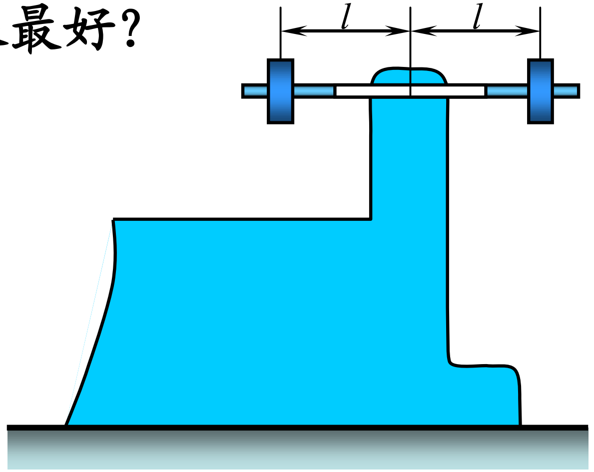


冲击动力减振器



例3 电机的转速为1500r/min，由于转子不平衡使机壳发生较大的振动，为减少机壳的振动，机壳上安装数个如图的动力减振器，该减振器由一钢制圆截面弹性杆和两个安装在杆两端重块组成，杆的中部固定在机壳上，重块到中点的距离l可用螺杆来调节，重块质量为m=5kg，圆杆的直径D=20mm。

问：重块距中点的距离l等于多少时减振器的减振效果最好？



解：当动力减振器的固有频率ω_0与受迫振动频率ω相等时，减振器的减震效果最好。因此调整减振器的螺杆，使其固有频率等于机壳受迫振动频率。

电机机壳受迫振动的角频率为：

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} = 50\pi \, \mathrm{rad/s}$$

由材料力学相关知识，螺杆的刚度系数k可表示为：$k = 3EI/l^3$

其中$I=\pi D^4/64$是螺杆截面惯性矩，E=2.1x 10^5 MPa 是材料的弹性模量，l为悬臂杆的杆长，D为杆的圆截面直径。

减振器自身的固有频率为 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{3E\cdot\pi D^4}{64ml^3}}$

令$\omega_0=\omega$，得：$l = \sqrt[3]{\dfrac{3E\cdot\pi D^4}{64m\omega^2}} = 342\mathrm{mm}$