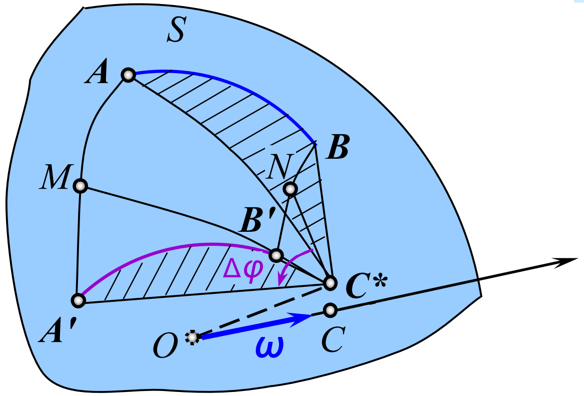
3、瞬时转动轴·角速度·角加速度
各点的速度、加速度

(1) 瞬时转动轴·角速度·角加速度

Δt 趋于零时，$\Delta\phi$ 也趋于零，轴 OC^* 趋近于某一极限位置 OC. 轴 OC 称为刚体在该瞬时的瞬时转动轴，简称瞬轴。



刚体在不同的瞬时，瞬轴的位置不同。

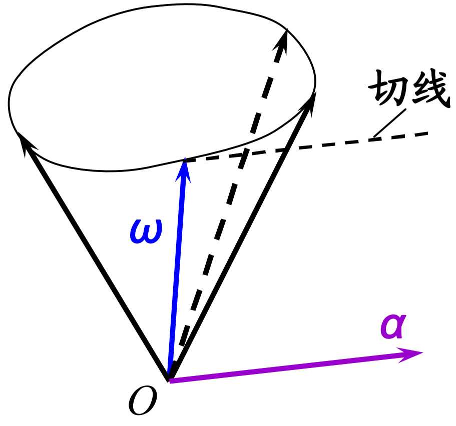
刚体绕瞬轴转动的角速度 ω 为矢量，大小为：

$$|\omega| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

ω 方向沿瞬轴，指向按右手法则规定。

ω 为矢量，大小和方向都在变化，ω 对时间 t 的一阶导数，称为刚体绕定点运动的角加速度，用 α 表示。

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$



α 也是矢量，方向沿角速度矢 ω 的矢端曲线切线。

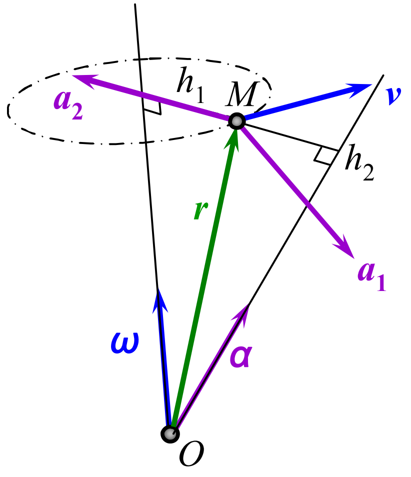
一般情况下，α 与 ω 不共线，这与刚体绕定轴转动不同。

(2) 刚体上各点的速度和加速度

刚体上任一点M的速度$\boldsymbol{v}$，可表示为：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

大小：等于ωh_1，方向：$\boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{v}$满足右手定则。



刚体上任一点M的加速度$\boldsymbol{a}$，可表示为：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

第一项 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$ —转动加速度

大小：等于αh_2，方向：$\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{a}_1$满足右手定则。

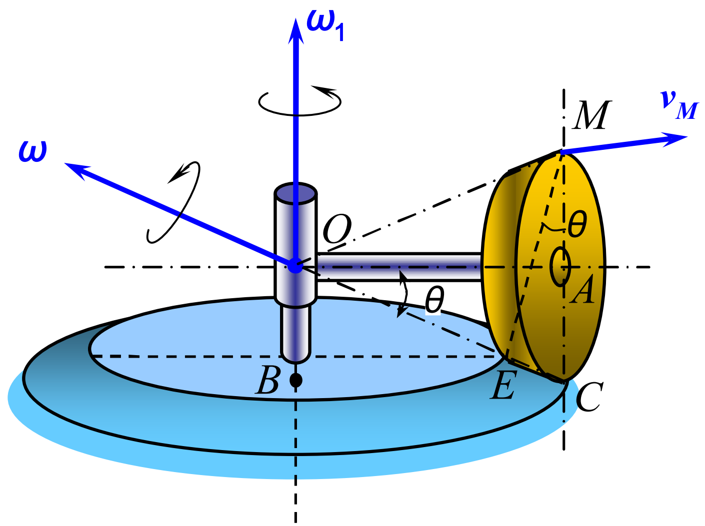
第二项 $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ —向轴加速度

大小：等于$h_1\omega^2$，方向：垂直于$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{v}$指向瞬轴。

刚体绕定点运动时，刚体内任一点的速度等于绕瞬轴转动的角速度与矢径的矢量积；该点的加速度等于绕瞬轴的向轴加速度与绕角加速度矢的转动加速度的矢量和。

例1 行星锥齿轮的轴OA以匀角速度ω_1绕铅直轴OB转动，设$OA=l$，$AC=r$, 求齿轮上点M的速度和加速度。

3、瞬时转动轴·角速度·角加速度，各点的速度、加速度



解：行星齿轮的运动是绕定点O的运动。大齿轮不动，所以啮合点C的速度等于零，所以OC连线为瞬轴。

设行星轮绕瞬轴转动的角速度为ω。

则行星轮中心A点速度为：

$$v_A = OA\sin\theta\cdot\omega$$

同时，A点绕O做圆周运动，速度为：$v_A = OA\cdot\omega_1$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{\omega_1}{\sin\theta} \text{ =常量}$$

点M的速度大小为：$v_M = ME\cdot\omega = 2r\cos\theta\dfrac{\omega_1}{\sin\theta}$

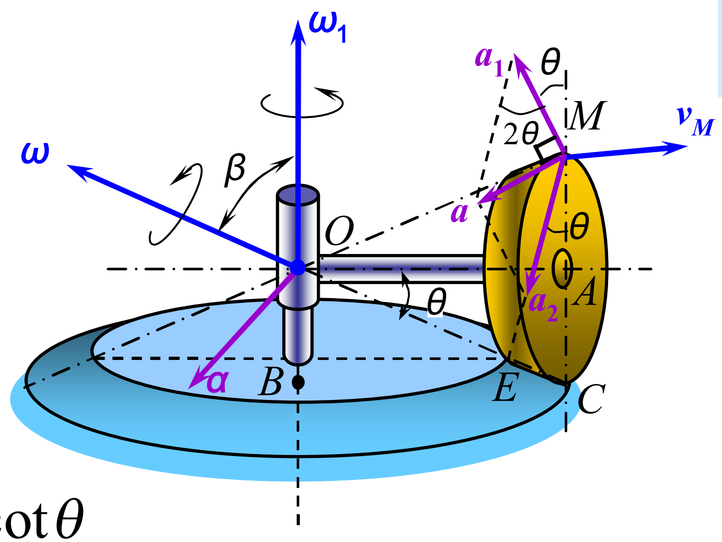
考虑到M到OC的距离为A到OC距离的2倍，所以：$2r\cos\theta = 2l\sin\theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_M = 2l\sin\theta\frac{\omega_1}{\sin\theta} = 2l\omega_1}$$

它的方向垂直于平面OMC，指向如图。

行星齿轮的角加速度为：$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$

因为ω只改变方向不改变大小，而且它和z轴间夹角$\beta=90^{\circ}-\theta$的大小保持不变，所以它的矢端曲线是水平的圆周。$\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}_1$始终位于$OMC$平面内。



有：$\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}$

α的大小为：$\alpha=\omega_1\cdot\omega\sin\beta=\omega_1\dfrac{\omega_1}{\sin\theta}\cos\theta=\omega_1^2\cot\theta$

M点的**转动加速度$\boldsymbol{a}_1$**大小为：$a_1=\alpha\cdot OM=\omega_1^2\cot\theta\dfrac{l}{\cos\theta}=\dfrac{l}{\sin\theta}\omega_1^2$

它垂直由α和OM形成的平面，指向如图。

因为α垂直于ω和ω_1, 所以α垂直于平面OMC，故$\boldsymbol{a}_1$在OMC平面内。

M点的**向轴加速度$\boldsymbol{a}_2$**大小为：$a_2=\omega^2\cdot ME=\omega^2\cdot 2l\sin\theta=\dfrac{2l}{\sin\theta}\omega_1^2$

它的方向自点M指向E，也在OMC平面内。

故：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$　　由余弦定理得：$a^2=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos 2\theta$

将a_1, a_2代入上式，并注意到：

$$\cot\theta=\frac{l}{r},\ \sin\theta=\frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}\quad\Rightarrow\quad \boxed{a=\omega_1^2 l\sqrt{9+\left(\frac{l}{r}\right)^2}}$$