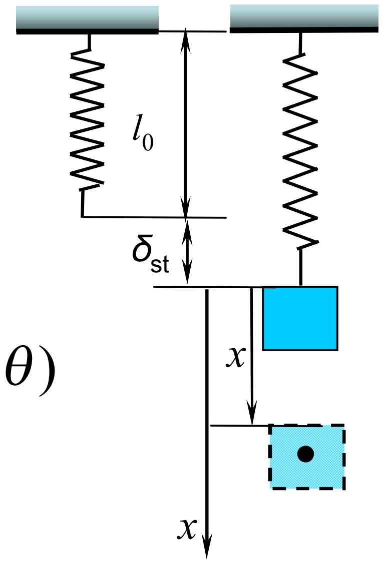
2、计算固有频率的能量法

无阻尼自由振动系统，物块运动规律为：

$$x = A\sin(\omega_0 t + \theta)$$

物块的速度为：$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \theta)$

在某瞬时t，物块的动能为：$T = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\cos^2(\omega_0 t + \theta)$



系统的势能V为弹簧的势能和物块重力势能的和。

选平衡位置为重力零势能点，则有：$V = \dfrac{1}{2}k[(x+\delta_{st})^2 - \delta_{st}^2] - Px$

因为 $k\delta_{st} = P$ 得：$V = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \theta)$

对于有重力影响的弹性系统，如果以平衡位置为零势能位置，则在任意位置的重力势能与弹性势能之和，相当于由平衡位置处计算变形的单独弹性力的势能。

- 当物体处于平衡位置（振动中心）时，速度达到最大，物块具有最大的动能。

$$T_{\max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

- 当物块处于偏离振动中心的极端位置时，系统具有最大势能。

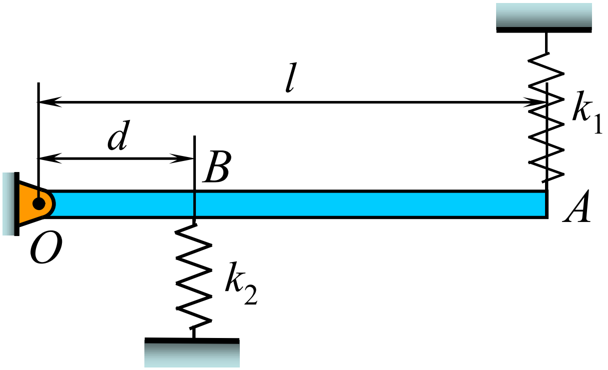
$$V_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

由机械能守恒定律，有： $T_{\max} = V_{\max}$

代入$T_{\max}$和$V_{\max}$的表达式，得到： $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

例4 在图示振动系统中，摆杆OA对铰链点O的转动惯量J，杆的点A和B各安置一个弹簧，刚度系数分别为k_1和k_2。系统在水平位置处于平衡。

求：系统作微振动时的固有频率。



解：设摆杆OA作自由振动时，摆角φ的变化规律为：

$$\varphi = \Phi \sin(\omega_0 t + \theta)$$

则系统振动时摆杆的最大角速度 $\dot{\varphi}_{\max} = \omega_0 \Phi$

故系统的最大动能 $T_{\max} = \dfrac{1}{2} J \omega_0^2 \Phi^2$

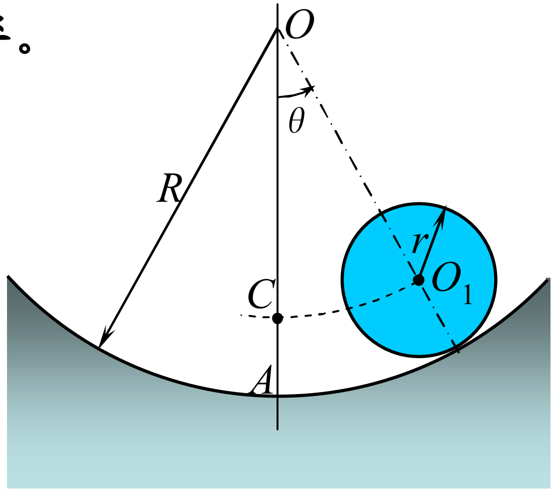
以平衡位置为零势能位置，则在计算系统势能时可以不考虑重力，直接计算两个弹簧相对于平衡位置的变形所产生的最大弹性势能（对应最大角位移Φ）

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k_1 (l\Phi)^2 + \frac{1}{2} k_2 (d\Phi)^2 = \frac{1}{2}(k_1 l^2 + k_2 d^2)\Phi^2$$

由机械能守恒定律有 $T_{\max} = V_{\max}$

即 $\dfrac{1}{2} J \omega_0^2 \Phi^2 = \dfrac{1}{2}(k_1 l^2 + k_2 d^2)\Phi^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1 l^2 + k_2 d^2}{J}}}$

例5 图示一质量为m，半径为r的圆柱体，在一半径为R的圆弧槽上作无滑动的滚动。求：圆柱体在平衡位置附近作微小振动的固有频率。



解：设在振动过程中，OO_1连线与铅垂线OA夹角为 θ

圆柱体中心O_1的线速度 $v_{O_1}=(R-r)\dot{\theta}$

圆柱体只滚不滑，角速度为 $\omega=(R-r)\dot{\theta}/r$

系统的**动能**为

$$T=\frac{1}{2}mv_{O_1}^2+\frac{1}{2}J_{O_1}\omega^2=\frac{1}{2}m[(R-r)\dot{\theta}]^2+\frac{1}{2}(\frac{mr^2}{2})[\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}]^2$$

$$=\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

圆柱在最低点平衡，取圆心的最低位置C为零势能点，系统的**势能**为

$$V=mg(R-r)(1-\cos\theta)=2mg(R-r)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

微幅振动，所以 $\sin\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2}$ $\Rightarrow$ $V=\frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$

设系统作自由振动时 θ 的变化规律为 $\theta=A\sin(\omega_0 t+\beta)$

则系统的**最大动能** $T_{max}=\frac{3m}{4}(R-r)^2\omega_0^2A^2$

系统的**最大势能** $V_{max}=\frac{1}{2}mg(R-r)A^2$

由**机械守恒定律** 有 $T_{max}=V_{max}$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}}$$