运动学总结

张莉

哈尔滨工业大学理论力学教研组



点的运动

点的运动学

在一个参考系点的 运动的几何性质

矢量法

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

直角坐标法

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$
 \Rightarrow 轨迹 方程



$$z = z(t)$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
 $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

自然法

自然轴系

$$s = f(t)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, \vec{\tau}$$

$$a_{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^{2}s}{\mathrm{d}t^{2}}$$

$$a_{\rm n} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$a = \sqrt{a^2_{t} + a^2_{n}}$$

 $a = \sqrt{a_{t}^{2} + a_{n}^{2}} \quad \tan\theta = \frac{a_{t}}{a_{n}}$

点的合成运动

在不同参考系内点运动几何性质的关系

动点 定系 动系

绝对运动 相对运动 牵连运动

牵连点

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = y_{O'} + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

点的速度合成定理

$$\vec{v}_{\rm a} = \vec{v}_{\rm e} + \vec{v}_{\rm r}$$

点的加速度合成定理

牵连运动为平移时

$$\vec{a}_{\rm a} = \vec{a}_{\rm e} + \vec{a}_{\rm r}$$

牵连运动为转动时

$$\vec{a}_{\rm a} = \vec{a}_{\rm e} + \vec{a}_{\rm r} + \vec{a}_{\rm C}$$

科氏加速度

$$\vec{a}_{\rm C} = 2\vec{\omega}_{\rm e} \times \vec{v}_{\rm r}$$

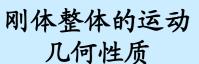
刚体的运动

刚体的平移

刚体内任一直线在 运动过程中始终平 行于初始位置,这 种运动称为平行移 动,简称平移。 各点运动轨迹的形 状完全相同且彼此 平行,每一瞬时各 点的速度和加速度 相等

刚体的平移归 结为点的运动 学

刚体的定轴转动



刚体上(或其扩展部分)两点保持不动,则这种运动称为刚体绕定轴转动,简称刚体的转动。

$$\varphi = f(t)$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

刚体上一点的运 动几何性质 (自然法)

$$s = R\varphi$$

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_{t} = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = R\alpha$$

$$a_{n} = \frac{v^{2}}{\rho} = \frac{1}{R}(R\omega)^{2} = R\omega^{2}$$

$$a = \sqrt{a_{\rm t}^2 + a_{\rm n}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\tan\theta = \frac{a_{\rm t}}{a_{\rm n}} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

轮系传动

以矢量表示角速度 和角加速度 以矢积表示点的速 度和加速度

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$$

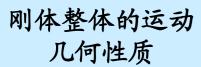
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \alpha \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{n} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

刚体的平面运动



在运动中,刚体上的 任意一点与某一固定 平面始终保持相等的 距离,这种运动称为 平面运动。

> 简化为平面图 形的运动

$$\begin{cases} x_{O'} = f_1(t) \\ y_{O'} = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$

分解为随基点平 移和绕基点转动 刚体上一点的 速度

基点法 (合成运动)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

速度投影法

$$\left(\vec{v}_{B}\right)_{AB} = \left(\vec{v}_{A}\right)_{AB}$$

速度瞬心法

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}$$

速度瞬心的确定方法

刚体上一点的 加速度

基点法

$$(\vec{v}_B)_{AB} = (\vec{v}_A)_{AB} \stackrel{!}{=} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{t}} + \vec{a}_{BA}^{\text{n}}$$