基于快速傅里叶变换（FFT）的模拟非周期信号频谱近似计算

岳志邦 202100171093 自动 21.2 班
朱骥尧 202100171048 自动 21.2 班
朱梓豪 202100171236 自动 21.2 班

2024 年 6 月 22 日

目录

1 题目描述

利用 **FFT 算法**对**模拟非周期信号**进行频谱近似计算，分析计算结果与理论频谱的差异，并研究 **FFT 分辨率**对计算结果的影响。

2 设计要求

1. 生成一个模拟非周期信号（矩形脉冲信号，或者自选），频率和幅度可自行设定。
2. 设计一个 FFT 频谱近似计算实验，选择合适的采样率和 FFT 长度。
3. 比较计算的频谱结果与理论频谱的差异，分析误差来源。
4. 研究不同 FFT 长度对计算结果的影响，探讨 FFT 分辨率的重要性。

3 实验主旨与过程实现

本实验旨在通过快速傅里叶变换（FFT）算法对模拟的非周期信号进行频谱近似计算。通过实验，我们将生成一个矩形脉冲信号作为示例信号，利用自行编写的 FFT 算法计算其频谱，并探讨不同采样率、FFT 长度对频谱计算精度的影响。实验还将分析频谱计算误差的来源及如何优化 FFT 计算以提高准确性。

我们使用 **Python** 语言设计程序。

3.1 生成一个模拟非周期信号

选择一个矩形脉冲信号作为模拟非周期信号。信号的幅度、宽度和周期可以根据实验要求进行设定。在本实验中，我们选用矩形脉冲信号，设定了信号的周期为 1 秒，幅度为 1，脉冲宽度为 0.1 秒（在生成信号时，通过额外处理使此信号具有非周期性）。

```
# 设置信号参数：
amplitude = 1
# 脉冲宽度
width = 0.1
# 信号周期
period = 1
```

可知，频率即为 1Hz.

3.2 FFT 频谱近似计算

设计 FFT 频谱近似计算实验，设置采样率和 FFT 长度，绘制时域波形图。

为了进行频谱计算，实现了一个基于递归的 FFT 算法，并对输入信号进行了补零操作，以确保信号长度达到 FFT 要求的最小长度。这一步骤在保持频谱形状不变的情况下增加了频谱分辨率。

首先设置采样率：

```
# 采样率
new_sampling_rate = 120
```

```
# 采样点
num_samples = int(new_sampling_rate * period)
```

(由于采样率太低会出现**混叠效应**，因此设置在 120，尽管奈奎斯特采样定理要求 2 倍，但实测 100 倍以下可能出现混叠)

生成新的时间轴和信号：

```
# 时间轴
t = np.linspace(0, period, num_samples, endpoint=False)
# 信号
signal = amplitude * (t % period < width)
```

虽然信号是有周期属性的（周期是 1），但在生成时间轴时只生成了 1 个周期的长度，因此它在时域上仍然是**非周期的**，可以看作一个非周期性质的矩形脉冲信号。

接下来编写 FFT 计算函数（不使用 Numpy 内置 FFT 变换函数）：

```
# 检查是否为2的幂
def pad_to_power_of_two(x):
    N = len(x)
    if np.log2(N) % 1 > 0:
        next_power_of_two = 2**int(np.ceil(np.log2(N)))
        padded_x = np.zeros(next_power_of_two)
        padded_x[:N] = x
        return padded_x
    else:
        return x

def fft(x):
    x = pad_to_power_of_two(x)
    N = len(x)
    if N <= 1:
        return x
    even = fft(x[0::2])
    odd = fft(x[1::2])

    # W_nk = exp(-2j * pi * k / N)
    # T是FFT的奇数项:
    T = [ np.exp(-2j * np.pi * k / N)  * odd[k] for k in range(N // 2)]
    return [even[k] + T[k] for k in range(N // 2)] + \ [even[k] - T[k] for k in range(N // 2)]
```

3.3 原始信号显示

使用 Matplotlib 创建图板（字体使用 Windows 字体微软雅黑）：

```
# 生成2×2的图板
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(14, 10))
# 选定字体微软雅黑
my_font = FontProperties(fname=r"c:\windows\fonts\SimHei.ttf", size=12)
```

在第一个子图显示原始信号时域波形，横轴为时间，纵轴为幅度：

```
axs[0, 0].plot(t, signal)
axs[0, 0].set_title('时域波形', fontproperties=my_font)
axs[0, 0].set_xlabel('时间', fontproperties=my_font)
axs[0, 0].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[0, 0].grid(True)
```

3.4 计算信号的频谱近似

计算信号的频谱近似，绘制频谱图，并与理论频谱进行比较。

通过计算 FFT 得到的结果，绘制信号的频谱图，并与理论频谱进行对比。频谱图展示了信号在频率域上的成分分布情况，通过分析频谱图的差异，可以深入理解频谱计算误差的来源，例如频谱泄露、分辨率不足等问题。

```
# 计算并绘制频谱图
N = 1024  # FFT长度
fft_result = fft(signal)

# FFT结果的幅度谱。对FFT结果取绝对值，并除以FFT长度N，以获得每个频率分量的幅度值：
fft_magnitude = np.abs(fft_result) / N

# 保留正一半的FFT结果，因为实际分量大小是正负的和，因此需要乘以2：
fft_magnitude = fft_magnitude[:N // 2] * 2
# 计算频率轴：
freqs = np.fft.fftfreq(N, d=t[1] - t[0])[:N // 2]
# 做截取：
if len(freqs) > len(fft_magnitude):
    freqs = freqs[:len(fft_magnitude)]
axs[0, 1].stem(freqs, fft_magnitude)
axs[0, 1].set_title('频谱图', fontproperties=my_font)
axs[0, 1].set_xlabel('频率', fontproperties=my_font)
axs[0, 1].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[0, 1].grid(True)
```

原始信号时域波形与 FFT 变换后的频谱如图 1 所示。

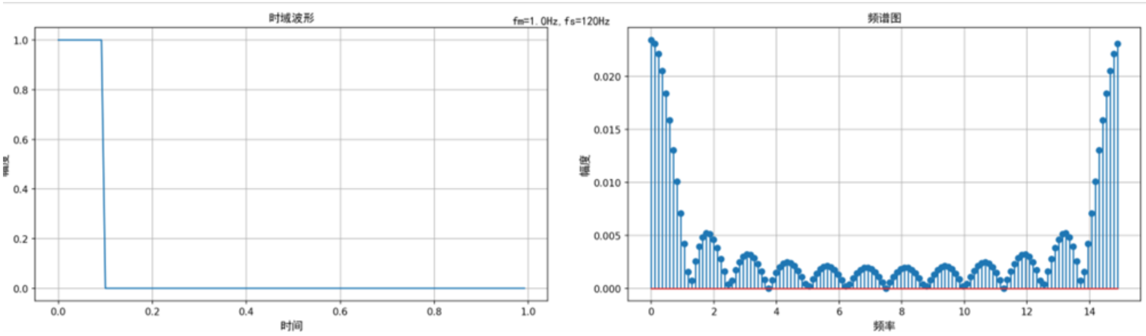


图 1: 时域波形与 FFT 频谱

3.5 误差的来源及 FFT 分辨率对计算结果的影响

3.5.1 误差的来源

通过切换不同的采样率进行上述实验，可知**采样率**的大小是误差的来源之一。此外，对图 1 右侧观察到出现了**泄漏效应**。

泄漏效应的出现主要是因为信号的长度有限，导致在计算 FFT 时无法完整地捕获到信号的周期性特征，从而在频谱图中表现为主瓣变宽，以及频谱图右侧出现了额外的能量。

研究不同 FFT 长度对频谱计算结果的影响。通过对比不同长度下的频谱图，我们发现 FFT 长度越大，频谱分辨率越高，能够更清晰地分辨信号中的频率成分。这也使得栅栏效应减弱，谱线更加清晰。

3.5.2 不同长度 FFT

绘制不同 FFT 长度的频谱图：

```
# 长度分别为256, 512, 1024, 2048
for idx, N in enumerate([256, 512, 1024, 2048]):
    fft_result = fft(signal)
    fft_magnitude = np.abs(fft_result) / N
    fft_magnitude = fft_magnitude[:N // 2] * 2
    freqs = np.fft.fftfreq(N, d=t[1] - t[0])[:N // 2]
    print(len(freqs), len(fft_magnitude))
    # 截取:
    if len(freqs) > len(fft_magnitude):
        freqs = freqs[:len(fft_magnitude)]
    axs[1, 0].stem(freqs, fft_magnitude, label=f'FFT Length = {N}',
        linefmt=f'C{idx}', markerfmt=f'C{idx}o')

axs[1, 0].set_title('频谱图 - 不同FFT长度对比', fontproperties=my_font)
axs[1, 0].set_xlabel('频率', fontproperties=my_font)
axs[1, 0].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].grid(True)
```

结果如图 2 所示：

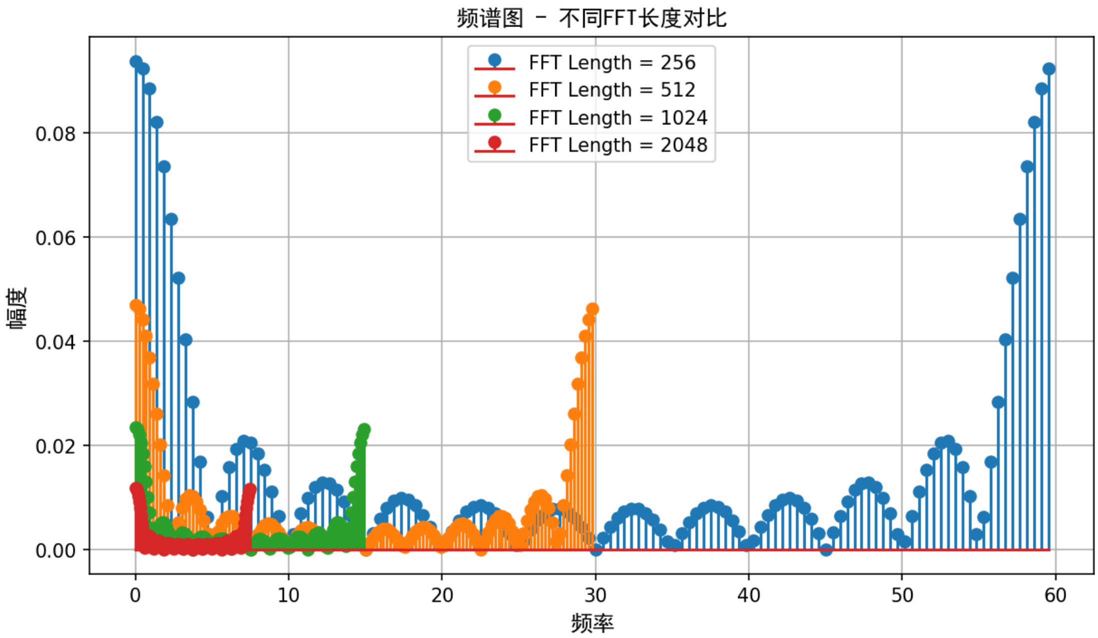


图 2: 不同长度 FFT 对比

N 越大，分辨率越强，栅栏效应越弱，能看到更多的谱线。
分辨率越强，每个频率分量之间的间隔越小，信号越窄、越集中。

3.6 优化 FFT 计算

为了优化 FFT 计算，提高频谱计算的准确性，我们引入了汉明窗口对信号进行加窗处理。加窗可以减少频谱泄露，从而提高频谱的准确性和清晰度。优化后的频谱图展示了加窗后的效果，能够更精确地反映信号的频谱特征。

优化后的频谱图（加窗，汉明窗，非矩形窗，减少频谱泄漏）：

```
# 汉明窗
windowed_signal = signal * np.hamming(len(signal))
```

末端补零，保证最小记录点数 N 达到 1024，N 应满足 $\frac{T_1}{T}$。

补零可以在保持原频谱形状不变的情况下，使谱线变密，同时可以有效规避**泄漏效应**。

```
fft_result = fft(zero_padded_signal)
fft_magnitude = np.abs(fft_result) / len(zero_padded_signal)
fft_magnitude = fft_magnitude[:len(zero_padded_signal) // 2] * 2
freqs = np.fft.fftfreq(len(zero_padded_signal), d=t[1] - t[0])[:len(
    zero_padded_signal) // 2]
axs[1, 1].stem(freqs, fft_magnitude)
axs[1, 1].set_title('优化后的频谱图', fontproperties=my_font)
axs[1, 1].set_xlabel('频率', fontproperties=my_font)
axs[1, 1].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[1, 1].grid(True)
```

最后调整布局：

```
# 调整布局：
plt.tight_layout()
plt.suptitle(f'fm={1/period}Hz,fs={new_sampling_rate}Hz', fontproperties=my_font)
plt.show()
```

优化后的频谱图如图 3 所示：

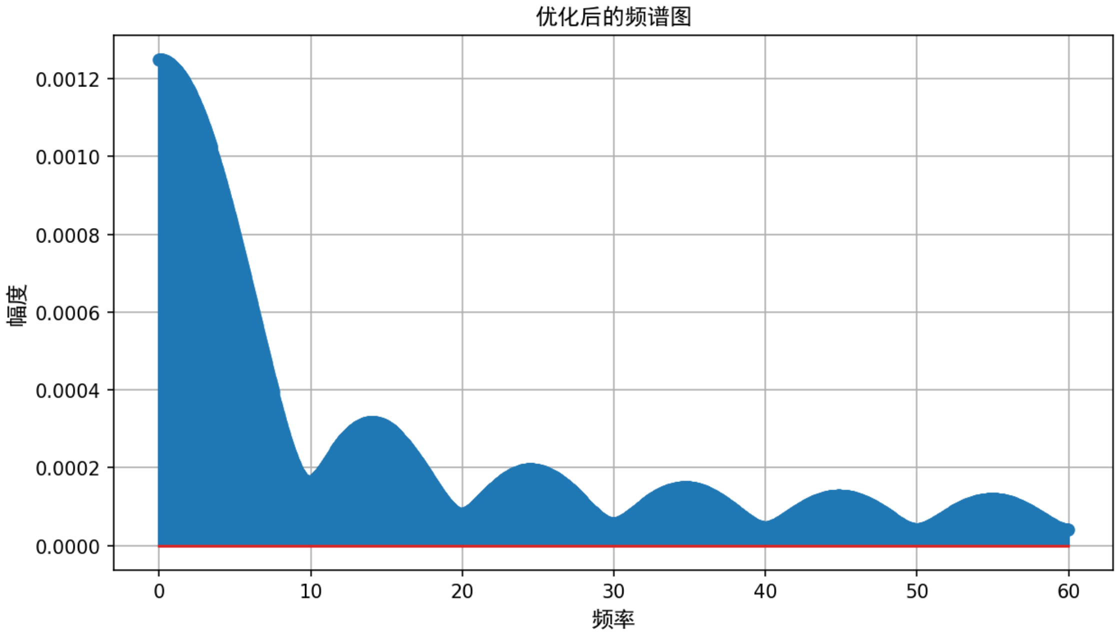


图 3: 优化后的频谱图

4 总程序

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.font_manager import FontProperties

my_font = FontProperties(fname=r"c:\windows\fonts\SimHei.ttf", size=12)

# 信号参数
amplitude = 1
width = 0.1  # 脉冲宽度
period = 1  # 信号周期

# 设置新的采样率
new_sampling_rate = 120
```

```python
# 采样率太低会出现混叠效应，因此设置在120
# 尽管奈奎斯特采样定理要求2倍，但实测100倍以下可能出现混叠
num_samples = int(new_sampling_rate * period)

# 生成新的时间轴和信号
t = np.linspace(0, period, num_samples, endpoint=False)
signal = amplitude * (t % period < width)

def pad_to_power_of_two(x):
    N = len(x)
    if np.log2(N) % 1 > 0:  # 检查N是否为2的幂
        next_power_of_two = 2**int(np.ceil(np.log2(N)))
        padded_x = np.zeros(next_power_of_two)
        padded_x[:N] = x
        return padded_x
    else:
        return x

def fft(x):
    x = pad_to_power_of_two(x)
    N = len(x)
    if N <= 1:
        return x
    even = fft(x[0::2])
    odd = fft(x[1::2])
    # W_nk = exp(-2j * pi * k / N)
    # T是FFT的奇数项
    T = [ np.exp(-2j * np.pi * k / N)  * odd[k] for k in range(N // 2)]
    return [even[k] + T[k] for k in range(N // 2)] + [even[k] - T[k]
        for k in range(N // 2)]

# 创建子图
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(14, 10))

# 绘制时域波形
axs[0, 0].plot(t, signal)
axs[0, 0].set_title('时域波形', fontproperties=my_font)
axs[0, 0].set_xlabel('时间', fontproperties=my_font)
axs[0, 0].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[0, 0].grid(True)

# 计算并绘制频谱图
```

```
N = 1024  # FFT长度
fft_result = fft(signal)
# FFT结果的幅度谱。对FFT结果取绝对值，并除以FFT长度N，以获得每个频率分
    量的幅度值。
fft_magnitude = np.abs(fft_result) / N
# 保留正一半的FFT结果，因为实际分量大小是正负的和，因此需要乘以2
fft_magnitude = fft_magnitude[:N // 2] * 2
# 计算频率轴
freqs = np.fft.fftfreq(N, d=t[1] - t[0])[:N // 2]
# 截取
if len(freqs) > len(fft_magnitude):
    freqs = freqs[:len(fft_magnitude)]
axs[0, 1].stem(freqs, fft_magnitude)
axs[0, 1].set_title('频谱图', fontproperties=my_font)
axs[0, 1].set_xlabel('频率', fontproperties=my_font)
axs[0, 1].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[0, 1].grid(True)


# 绘制不同FFT长度的频谱图
# N越大，分辨率越强，栅栏效应越弱，能看到更多的谱线
# 分辨率越强，每个频率分量之间的间隔越小，信号越窄、越集中
for idx, N in enumerate([256, 512, 1024, 2048]):
    fft_result = fft(signal)
    fft_magnitude = np.abs(fft_result) / N
    fft_magnitude = fft_magnitude[:N // 2] * 2
    freqs = np.fft.fftfreq(N, d=t[1] - t[0])[:N // 2]
    print(len(freqs), len(fft_magnitude))
    # 截取
    if len(freqs) > len(fft_magnitude):
        freqs = freqs[:len(fft_magnitude)]
    axs[1, 0].stem(freqs, fft_magnitude, label=f'FFT Length = {N}',
        linefmt=f'C{idx}', markerfmt=f'C{idx}o')

axs[1, 0].set_title('频谱图 - 不同FFT长度对比', fontproperties=my_font)
axs[1, 0].set_xlabel('频率', fontproperties=my_font)
axs[1, 0].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[1, 0].legend()
axs[1, 0].grid(True)

# 优化后的频谱图
# 加窗，汉明窗，非矩形窗，减少频谱泄露
```

```
windowed_signal = signal * np.hamming(len(signal))
# 末端补零，保证最小记录点数N达到1024
# 实际上，N应满足T1/T
# 补零可以在保持原频谱形状不变的情况下，使谱线变密
zero_padded_signal = np.pad(windowed_signal, (0, N - len(
    windowed_signal)), 'constant')
fft_result = fft(zero_padded_signal)
fft_magnitude = np.abs(fft_result) / len(zero_padded_signal)
fft_magnitude = fft_magnitude[:len(zero_padded_signal) // 2] * 2
freqs = np.fft.fftfreq(len(zero_padded_signal), d=t[1] - t[0])[:len(
    zero_padded_signal) // 2]
axs[1, 1].stem(freqs, fft_magnitude)
axs[1, 1].set_title('优化后的频谱图', fontproperties=my_font)
axs[1, 1].set_xlabel('频率', fontproperties=my_font)
axs[1, 1].set_ylabel('幅度', fontproperties=my_font)
axs[1, 1].grid(True)

# 调整布局
plt.tight_layout()
plt.suptitle(f'fm={1/period}Hz,fs={new_sampling_rate}Hz',
    fontproperties=my_font)
plt.show()
```

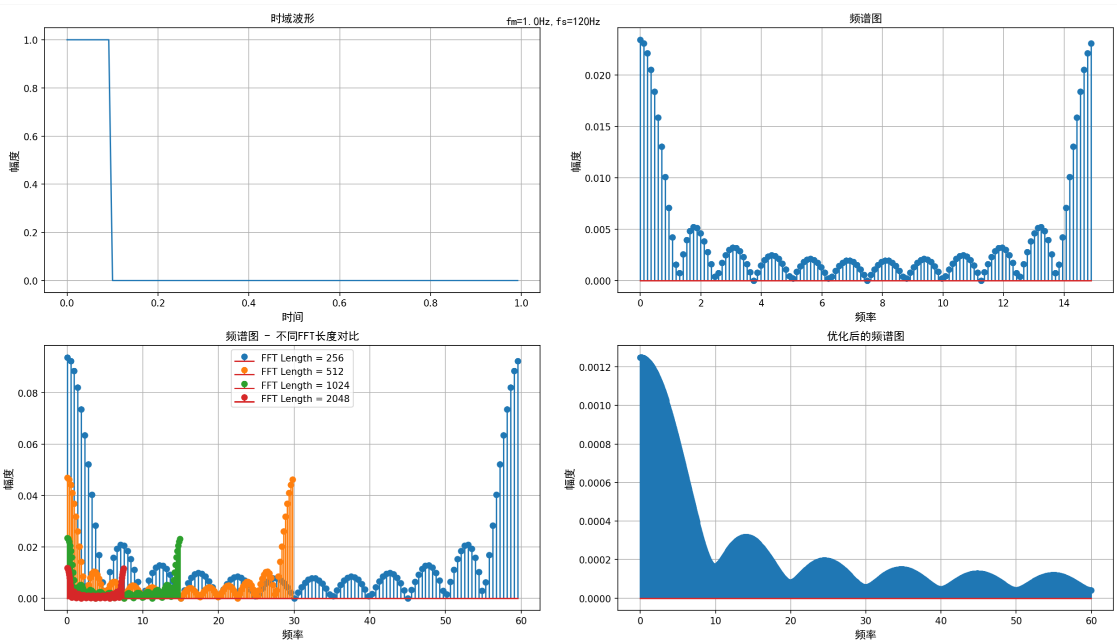


图 4: 最终结果

左上角子图为原始信号的时域波形。

右上角子图为采样频率在 120Hz，FFT 长度 N 取 1024 时的结果，可以观察到出现了明显的

泄漏效应。

左下角子图为不同 FFT 长度的结果，未加窗且未补零，也可以观察到明显的**泄漏效应**。此外可以观察到 FFT 长度越大**栅栏效应**越弱。

由于采样频率满足奈奎斯特采样定理且裕量很大，因此未观察到频谱混叠现象。

右下角为优化后的频谱图，可以看到效果相对其他频谱图极佳（FFT 长度取 1024）。

5 结论与讨论

本实验通过实际编程实现了 FFT 算法对模拟非周期信号频谱的计算。通过对比计算结果与理论预期，分析了频谱计算误差的可能来源，并讨论了采样率、FFT 长度对频谱分辨率和准确性的影响。实验结果表明，适当选择采样率和 FFT 长度，以及加窗处理，能有效提高频谱计算的准确性和可信度。

5.1 误差的处理方法

为了减小**栅栏效应**，以下两种方法较为有效：

1. **零填充**：在进行 FFT 之前，可以对信号进行零填充，增加信号的长度。零填充可以提高 FFT 的频率分辨率，减少栅栏效应的影响。零填充可以在保持形状不变的前提下，使谱线变密。

2. **增加信号长度**（增加 N）：增加信号长度可以提高 FFT 的频率分辨率，能够看到更多原来看不到的谱线。

为了减小**混叠误差**，可以通过

1. **设置合适的采样频率**：采样频率应满足奈奎斯特采样定理。

2. **控制频谱分辨力的大小**：频率分辨力与最小记录长度成反比，两者大小不能过于极端。

为了减少**泄漏效应**，以下三种方法较为有效：

1. **增加信号长度**（增加 N）：增加信号长度可以提高 FFT 的频率分辨率，从而减少泄漏效应。但是，增加信号长度会增加计算复杂度和内存消耗。

2. **使用窗函数**（加窗）：在计算 FFT 之前，可以对信号应用窗函数来减少泄漏效应。常用的窗函数包括汉明窗（Hamming Window）、黑曼窗（Blackman Window）等。窗函数可以在一定程度上抑制信号在两端的振荡，减少泄漏效应。

3. **零填充**：在计算 FFT 之前，可以对信号进行零填充，使得信号长度达到一个较大的 2 的幂次方。零填充可以增加频谱图的分辨率，但并不能完全消除泄漏效应。

零填充能够非常有效地消除误差，图 5 中上图是零填充后的频谱图，下图是零填充和汉明窗同时应用的频谱图，可以看到两者的效果相差并不很大，但都已非常可观了，特别是相较于无任何处理的频谱图而言（如图 1 所示）。

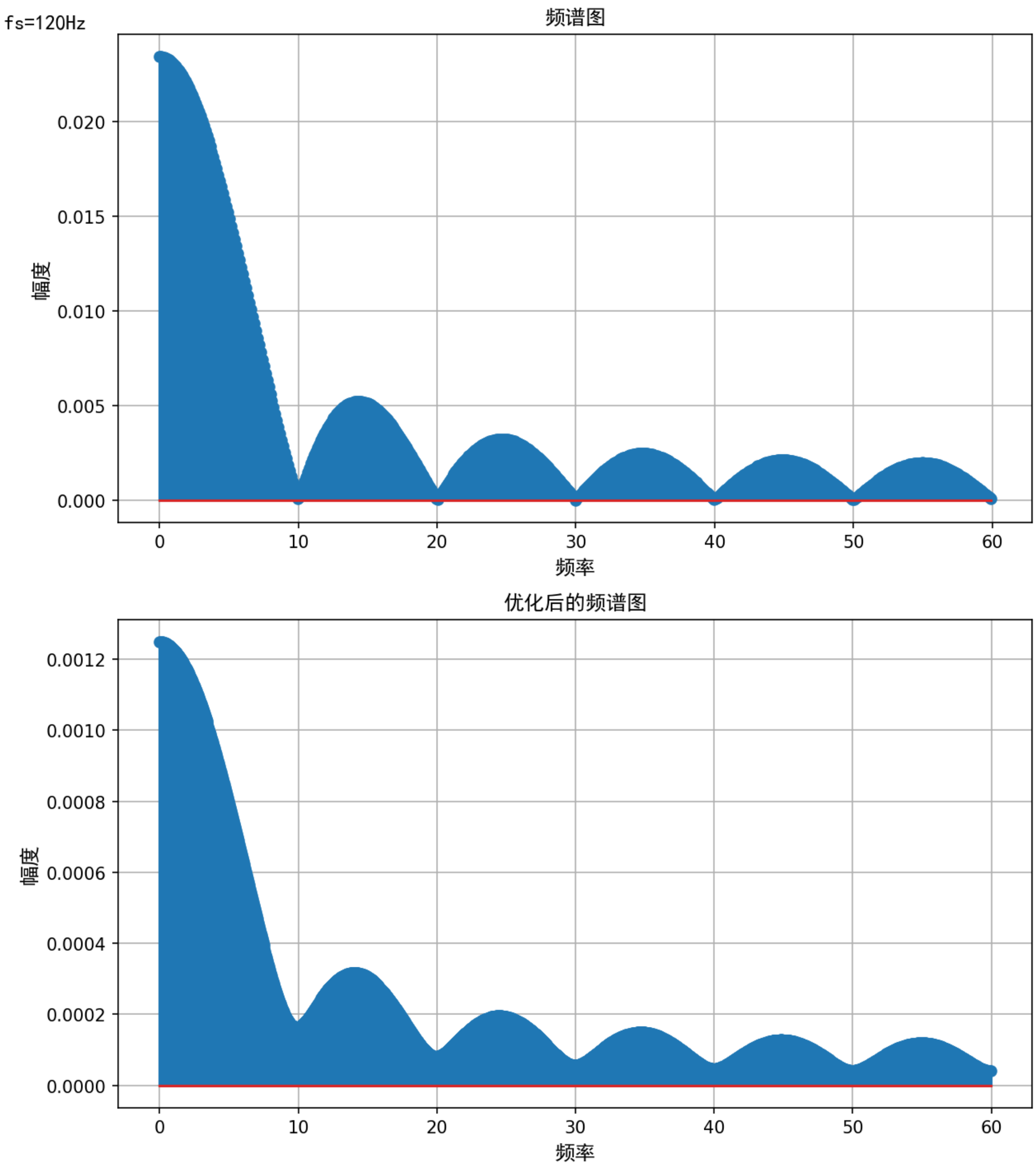


图 5: 零填充

5.2 采样频率的选取

如果严格参照奈奎斯特采样定理，设定采样频率为 2Hz，可以得到下图所示的结果：

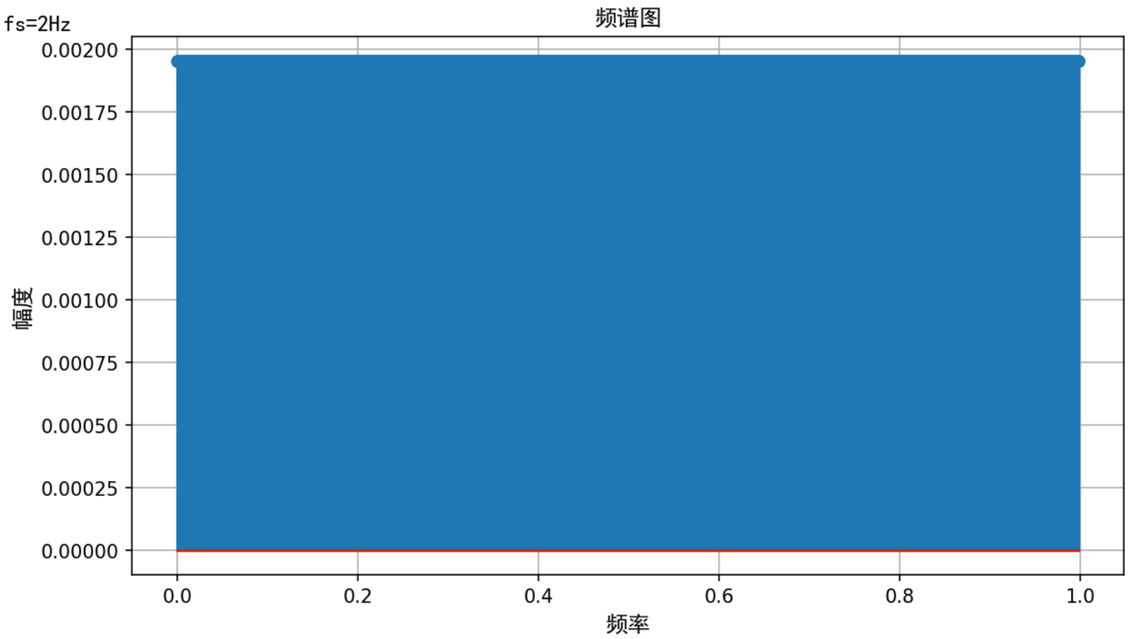


图 6: 2Hz 下频谱

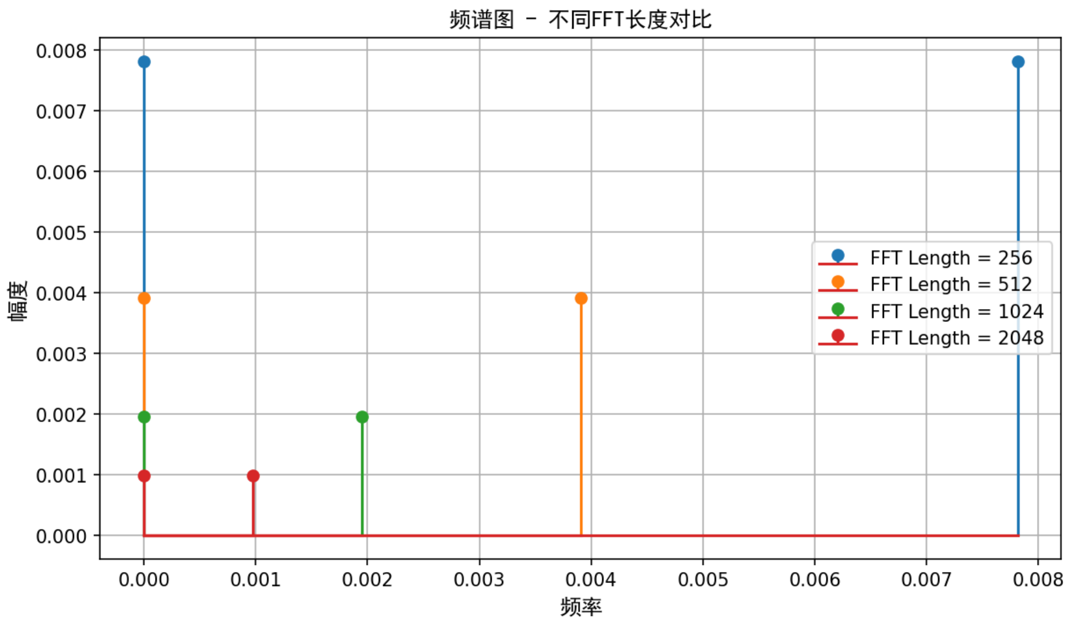


图 7: 2Hz 下不同长度 FFT

可以观察到混叠现象，这是由于实验物理条件的限制（如更换信号生成方式等），并不意味这奈奎斯特采样定理是错误的。

而采样频率过大效果也未必很好，1000Hz 效果与 120Hz 相比较差。

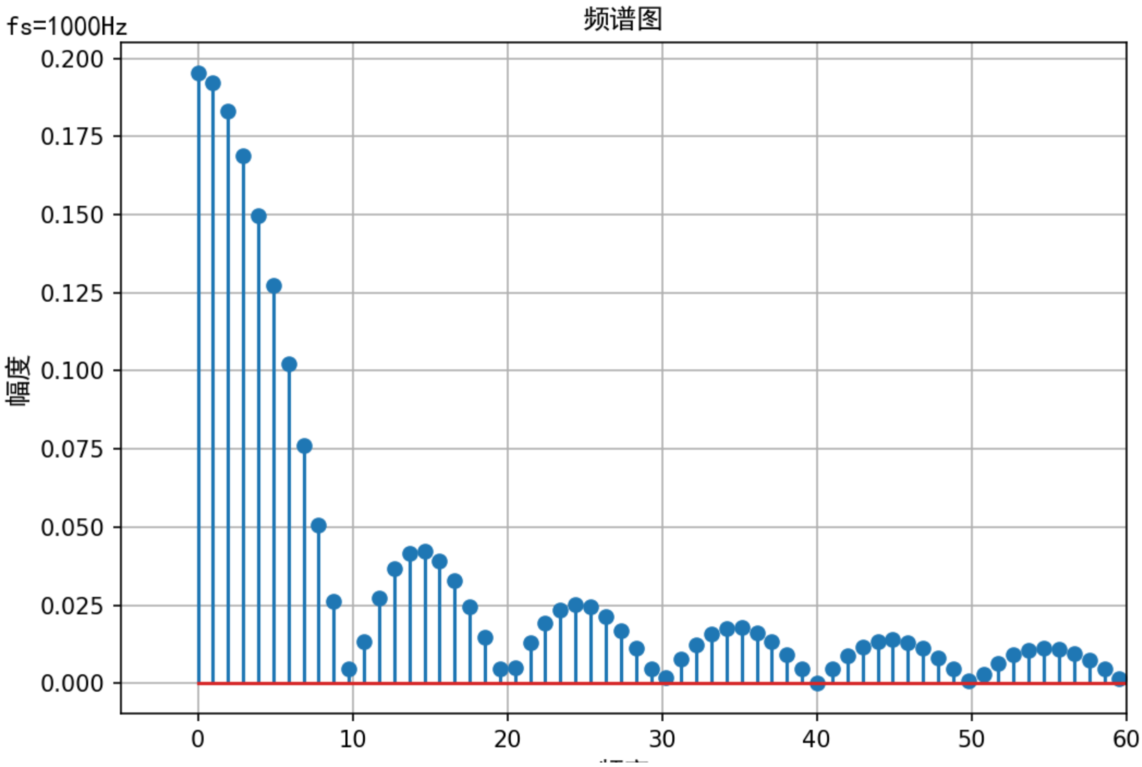


图 8: 1000Hz 下频谱

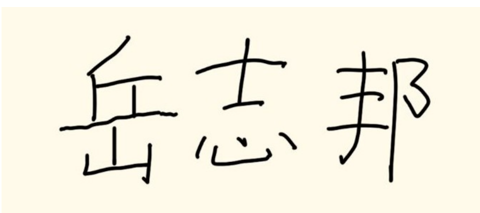
6 组员分工与签名

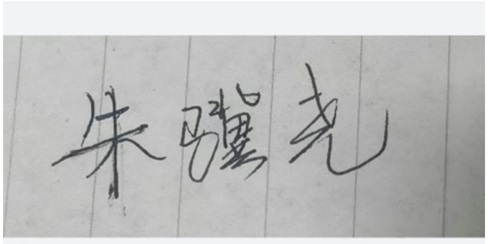
6.1 组员分工

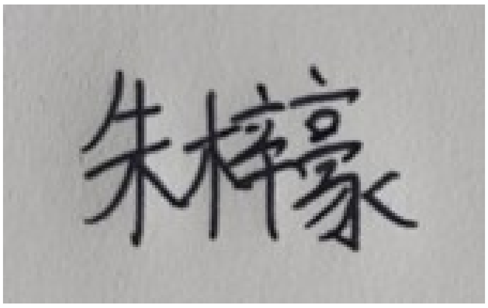
组员分工：

- 岳志邦：生成模拟非周期信号，设计 FFT 频谱近似计算工作量 40%
- 朱骥尧：分析计算误差的来源，绘制不同长度的频谱图工作量 30%
- 朱梓豪：优化 FFT 计算的方法，提高频谱近似的准确性工作量 30%

6.2 组员签名






朱梓豪