计算物理第十五次实验报告

曾郅琛 PB20071431

摘要：本次实验完成chaos中的系统状态确定和分析，探究横轴方向倍周期分岔中的标度行为，并试图探究在纵轴方向上的标度行为，实验通过c++和python完成。

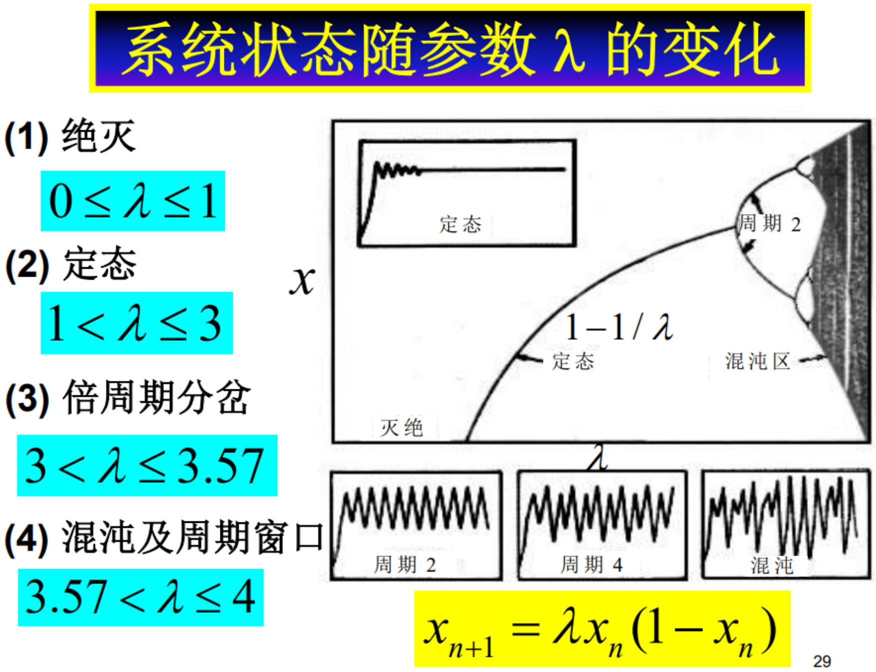
1 实验要求

以$x_n = \lambda sin(\pi x_{n-1})$为迭代方程进行迭代：

(1)画出系统状态随参数λ的变化图，要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态；
(2)列出各个倍周期分叉处的λ值，求相应的 Feigenbaum 常数

1.1 理论分析

在某一迭代函数下，系统状态会随参数的变化， 经历了灭绝， 定态， 倍周期分岔（周期数为2，4，8……）以及混沌及周期窗口四种状态。下图为课程中老师演示的系统状态随参数的变化曲线：



可以看到从周期数为2，4，8，16……的变化且变化得愈来愈快。接着再放大，可看到混沌之后的周期数为3或7……的窗口，然后倍周期很快经过3，6，12，……或 7，14，28……，然后再次中断进入新的混沌。

在本次实验中我们考虑倍周期分岔，且主要探究横轴方向倍周期分岔中的标度行为。

λ_m按以下的几何级数（幂函数）收敛到λ_∞：

$$\lambda_\infty - \lambda_m = A\delta^{-m} \quad (when \ \ m >> 1) \tag{1}$$

A是依赖于迭代函数的常数，而δ是不依赖于迭代函数的普适常数.

故而我们可以推导出计算δ的极限公式：

$$\delta = \lim_{m->\infty} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} \tag{2}$$

2 算法描述

2.1 系统状态的计算迭代

在实验中，我们完成对以下迭代格式系统的计算：

$$x_n = \lambda sin(\pi x_{n-1}) \tag{3}$$

对于某个区间的λ，通过固定步长改变参数值，且在每个λ取值下，我们设置了初始的去热化过程，将前1000次迭代舍去不作为最终系统的状态，再选取10^4量级的迭代得到最终点；

同时我们为了找到分岔点对应的λ取值，我们在最初的图像下进行进一步缩小区间减小步长，在每个分岔找到对应的λ近似取值。

2.2 初值敏感性

根据老师课上所说，我们知道，初值敏感性是混沌的一个重要的特征； 初值敏感性不是由任何外界随机因素引起的， 而是由系统本身确定的； 初值敏感性是混沌中类似随机现象的根源； 初值敏感性导致过程的不可预测性，初值敏感性又被通俗地称为"蝴蝶效应"。

在实验中同样遇到该问题，这将在后续实验结果中说明并提出一种解决方案。

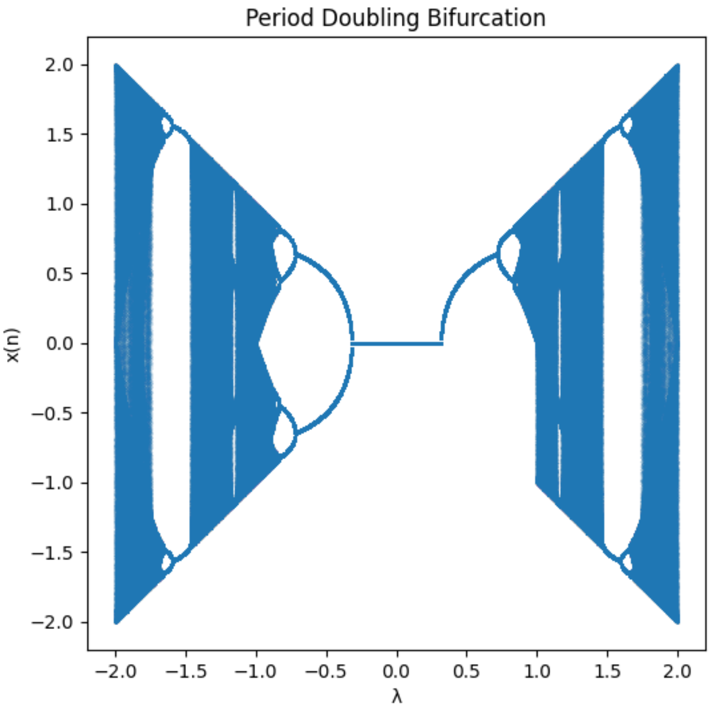
2.3 确定倍周期分岔点

在实验中，我们通过不断的对λ取值区间和λ更新步长进行更新，从而探索具有更高精度的倍周期分岔点，其中选择倍周期分岔根据python对数据处理后确定。

2.4 算法代码解释

- `double function(double lambda, double x)`
  - 描述迭代函数；
- 更新不同范围λ，步长，在上述描述算法下进行迭代输出；

3 系统状态随参数λ的变化图区间[-2, 2]

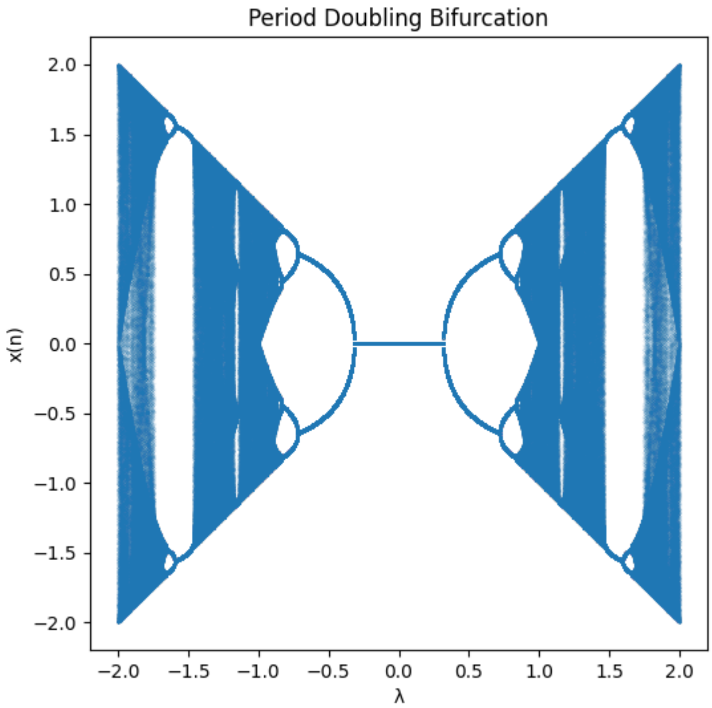


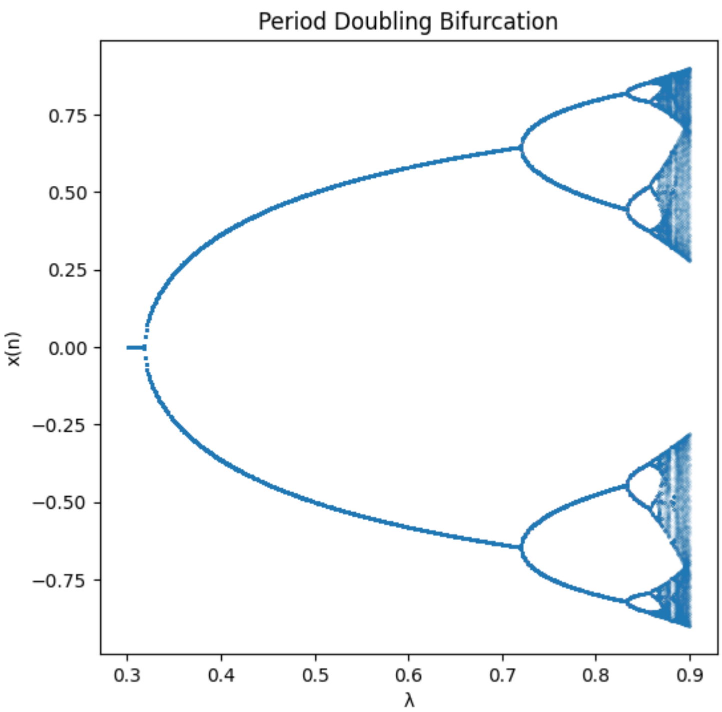
这张图是在我们选定初值时的结果，可以很明显地看到系统状态随λ的变化， 经历了定态， 倍周期分岔以及混沌及周期窗口四种状态。

同时我们注意到图形存在一定的破缺，在$\lambda > 0$的一段区间内，周期数为2的状态缺失了一半，经过分析，此原因的产生是由于我们每次设定的初值都是固定的，所以由于混沌模型的初值敏感性，在该初值下可能会出现一定的偶然情况，初值敏感性导致过程的不可预测性。

故而，我们在实验代码中设置了多个随机数进行初值的迭代过程，从而在一定程度上消减初值敏感性的问题，这对之后我们计算Feigenbaum 常数也起到了很大的作用。

更改后的结果如下:





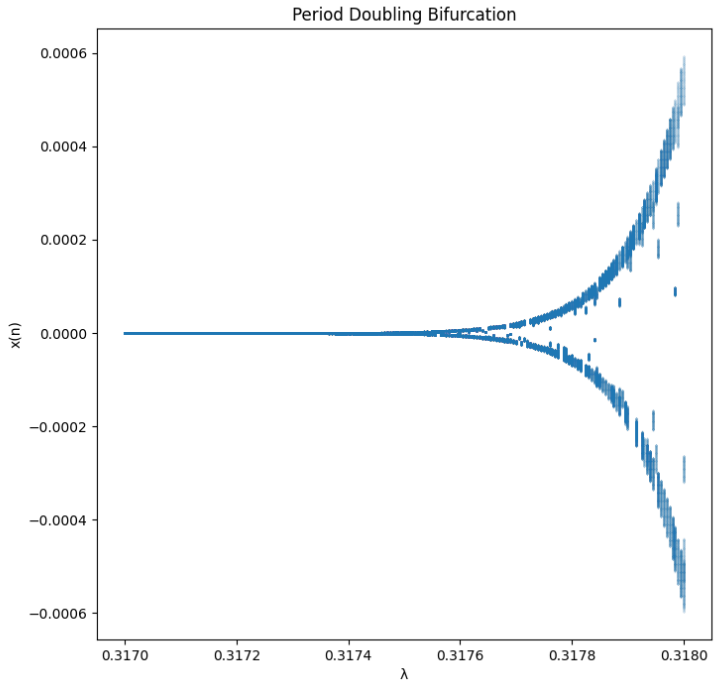
定态， 倍周期分岔以及混沌及周期窗口，一目了然

4　横轴方向倍周期分叉点与Feigenbaum常数计算

按照上面的思路，我们从周期为2开始，依次寻找到周期更大：

4.1 周期为2

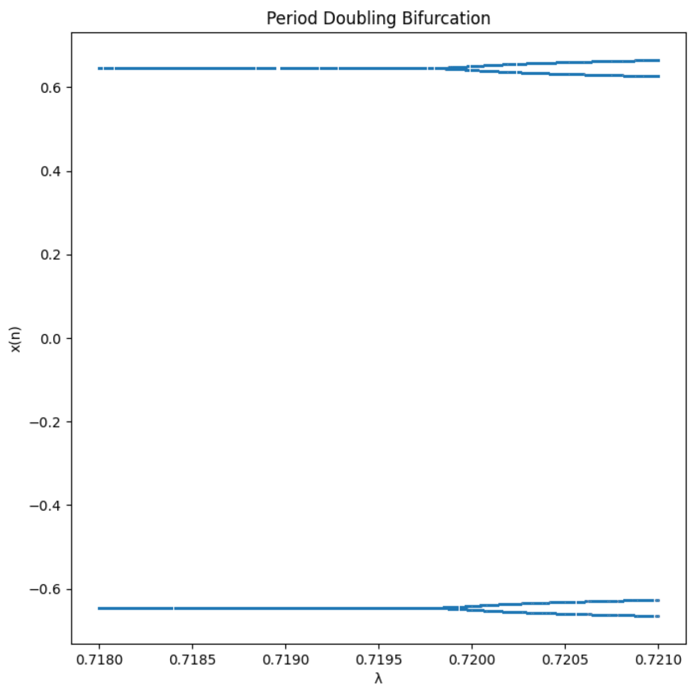
我们选择0.3到0.4的区间，步长为0.00001，迭代后画出图像如下：



最终通过$python$处理数据我们选择$\lambda = 0.31752$，作为$1 \rightarrow 2$周期的分岔点；

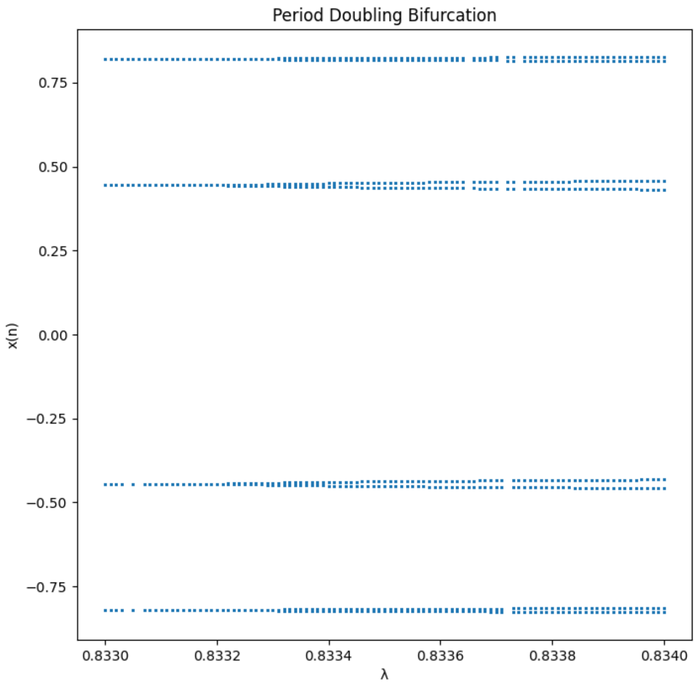
4.2 周期为4

同样的我们选择0.718到0.721的区间范围，步长不变，迭代后画图如下：



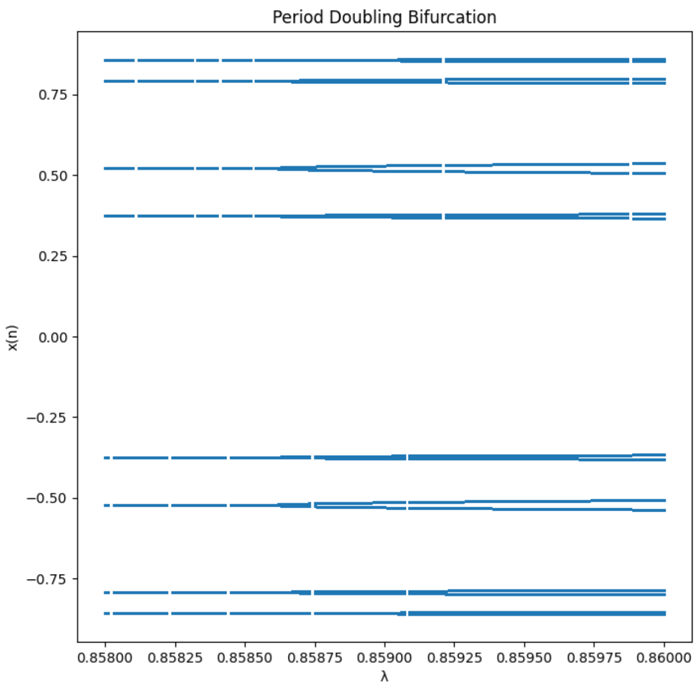
最终通过$python$处理数据我们选择$\lambda = 0.71975$，作为$2 \rightarrow 4$周期的分岔点；

4.3 周期为8



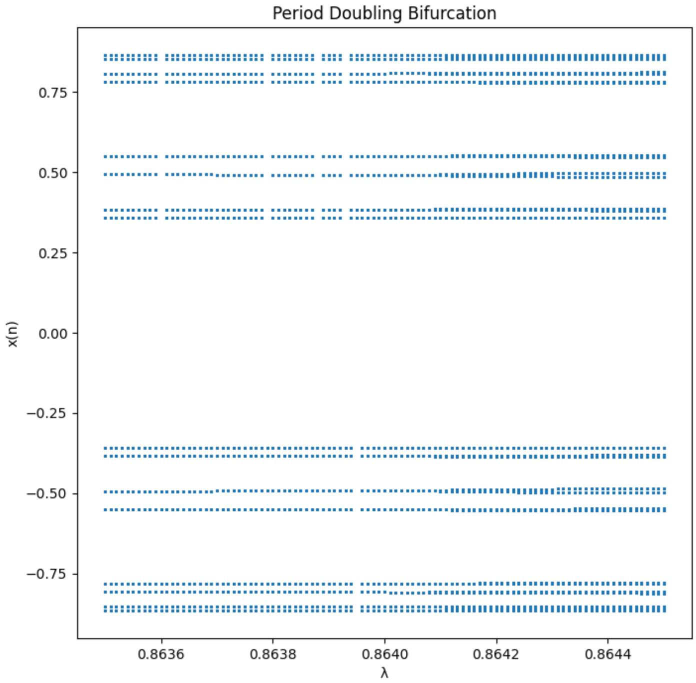
最终通过$python$处理数据我们选择$\lambda = 0.83301$，作为$4 \rightarrow 8$周期的分岔点；

4.4 周期为16



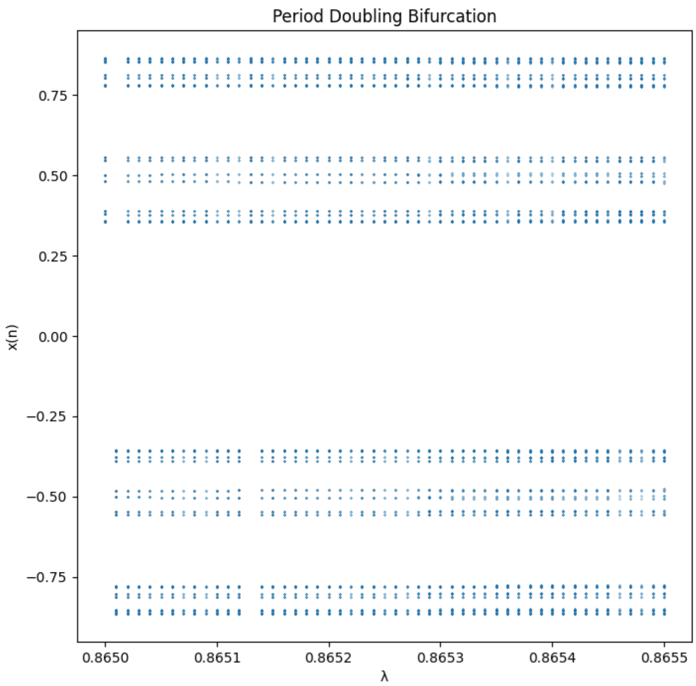
最终通过$python$处理数据我们选择$\lambda = 0.85861$，作为$8 \rightarrow 16$周期的分岔点；

4.5 周期为32



最终通过$python$处理数据我们选择$\lambda = 0.86408$，作为$16 \to 32$周期的分岔点;

4.6 周期为64



最终通过$python$处理数据我们选择$\lambda = 0.86525$，作为$32 \to 64$周期的分岔点;

再继续往后我们很难分辨出来分岔点了，所以程序到此为止.

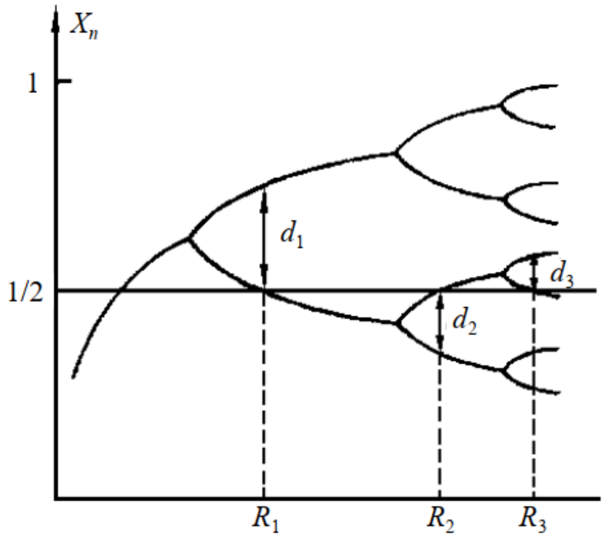
4.7 列表计算倍周期分岔点的Feigenbaum常数

m	分岔情况	λ	$\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}$	理论值
1	$1 \to 2$	**0.31752**	NULL	
2	$2 \to 4$	**0.71975**	**3.551386**	**4.669201**
3	$4 \to 8$	**0.83301**	**4.424218**	**4.669201**
4	$8 \to 16$	**0.85861**	**4.680073**	**4.669201**
5	$16 \to 32$	**0.86408**	**4.675213**	**4.669201**
6	$32 \to 64$	**0.86525**	**NULL**	

可以看到随着m的增大，我们的最终比值逐渐趋近于理论值4.669201，证明实验方法和结果较好。

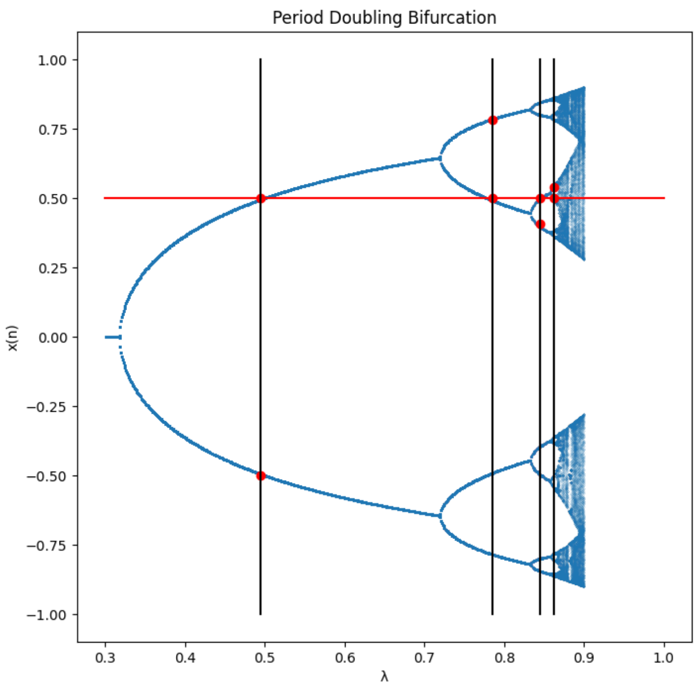
5 纵方向倍周期分岔点的Feigenbaum常数α

我试图去按照老师上课所讲去探究纵轴方向上的另一Feigenbaum常数α：



此过程利用txt文件搜索进行，搜索在此过程中在$x_n = 0.5\,or\ -0.5$附近的值，计算d_n：

在python中画出d的形状如下：



搜索到的点坐标计算间距有:

m	d	$\frac{d_m}{d_{m+1}}$	理论值
1	**1**	**NULL**	
2	**0.2330**	**4.2918**	**2.5029**
3	**0.0944**	**2.4682**	**2.5029**
4	**0.0378**	**2.4974**	**2.5029**

最终结果与理论值非常接近!

6 总结

在本次实验中, 我们对系统状态随参数λ的变化图进行计算分析,体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态;同时完成了在横坐标和纵坐标两个方向上的Feigenbaum常数计算,最终结果和理论值非常接近!