武汉理工大学研究生考试试卷（A 卷）

2022 ~2023 学年 1 学期 矩阵论(学硕) 课程

（请在答题本上作答，不必抄题，但须标明题目序号）

一．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）已知 n 阶矩阵 A 的秩为 r，n 维行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换 $T(\alpha)=\alpha A$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$，则 T 在基 $\varepsilon_1=(1,0,\ldots,0),\varepsilon_2=(0,1,\ldots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,\ldots,0,1)$ 下的矩阵为_________；T 的核空间 $\ker T$ 的维数为_____.

（2）在 $\mathbb{R}^4$ 中，设 V_1,V_2 分别为线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2-x_4=0\end{cases}$ 和 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 的解空间，则 $\dim(V_1+V_2)=$_________.

（3）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，则 A 的 QR 分解为_______.

（4）已知矩阵 A 如第（3）题，则 A 的范数

$$\|A\|_{m_1}=\_\_\_\_\_\_\_;\quad \|A\|_{m_\infty}=\_\_\_\_\_\_\_;\quad \|A\|_F=\_\_\_\_\_\_\_.$$

（5）若矩阵 A 的初等因子为 $\lambda-2,(\lambda-2)^2,(\lambda-2)^3$，则 A 的最小多项式为

________.

二．（15 分） 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$

（1）求 A 的行列式因子，不变因子，初等因子；

（2）求 A 的 Jordan 标准形和 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形；

（3）求 A 的最小多项式。

三．（15 分） 设 $F[t]_3=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$，对任意的 $f(t)\in F[t]_3$，定义映射 $T[f(t)]=f'(t)+2f(t)$，其中 $f'(t)$ 表示 $f(t)$ 的导数.

（1）证明 T 是 $F[t]_3$ 上的线性变换;

（2）求 $F[t]_3$ 的一组基，并求 T 在这组基下的矩阵;

（3）求 T 的核空间 $\ker T$ 和像空间 $\operatorname{Im}T$ 的一组基和维数.

四．（15 分）已知微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}，\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},\quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求 e^{At}，并求微分方程组的解.

五．（15 分）设 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$，对于任意的 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in W$，定义内积

$$(A,B) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4 .$$

（1）证明 W 为子空间；

（2）求 W 和其正交补 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

六．（25 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$。

（1）求 A 的满秩分解；

（2）求 A 的广义逆 A^{+}；

（3）利用广义逆判断方程组 $Ax = b$ 的相容性；

（4）求 $Ax = b$ 的最小二乘解；

（5）求 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解.