武汉理工大学研究生考试试卷（A 卷）

2024 年 1 月 4 日

1 填空题

1. $\boldsymbol{A}^T$，$n-r$

2. $\dim(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2)=\dim(\boldsymbol{V}_1)+\dim(\boldsymbol{V}_2)-\dim(\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2)=2+3-1=4$

3. 先对矩阵进行 LR 分解，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{LR}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

   接着对矩阵 $\boldsymbol{L}$ 进行列分块 $\boldsymbol{L}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha_3}]$，Schmidt 正交化，得：

   $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,1]^T,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1=[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}]^T,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1=[-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}]^T$

   对结果单位化，$[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]=[\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{||\boldsymbol{\beta}_1||},\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{||\boldsymbol{\beta}_2||},\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{||\boldsymbol{\beta}_3||}]=[\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\sqrt{3}},\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\sqrt{\frac{2}{3}}},\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}]=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

   于是，$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0\\0&0&\sqrt{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{LR}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0\\0&0&\sqrt{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&-\frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. 3 ，3 ，3

5. $(\lambda-2)^3$

2

1.

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -8 \\ -3 & 1+\lambda & -6 \\ 2 & 0 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3$$

所以特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

行列式因子为 $D_1 = 1, D_2 = 1+\lambda, D_3 = (1+\lambda)^3$

不变因子为 $d_1 = 1, d_2 = 1+\lambda, d_3 = (1+\lambda)^2$

初等因子为 $1+\lambda, (1+\lambda)^2$

2. Jordan 标准形 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，Smith 标准形 $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$

3. 最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda+1)^2$

3

1. 只需验证其满足乘法和加法的八条公理，并且对加法和数乘法封闭

2. 由于存在 a_0, a_1, a_3 三个变量，自由度为 3，则 $\dim(F[t]_3) = 3$，容易看出 $(e_1, e_2, e_3) = (1, t, t^2)$ 构成了 $F[t]_3$ 中的一组基。于是：

$$\mathcal{T}(e_1) = 2 = 2e_1$$

$$\mathcal{T}(e_2) = 1 + 2t = e_1 + 2e_2$$

$$\mathcal{T}(e_2) = 2t + 2t^2 = 2e_2 + 2e_3$$

即 $\mathcal{T}(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = 0$，所以其基为 $\mathbf{0}$

$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}) = 3$，所以其基为 $(2e_1, e_1 + 2e_2, 2e_2 + 2e_3)$

4

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & 8\\ 3 & -1-\lambda & 6\\ -2 & 0 & -5-\lambda\end{pmatrix}$$

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，由于其最小多项式 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)^2$，不妨设 $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，可得下列方程组：

$$p(-1)=a_0-a_1=e^{-t}$$
$$p'(-1)=a_1=te^{-t}$$

解得 $a_0=(t+1)e^{-t}, a_1=te^{-t}$。则：

$$e^{\boldsymbol{A}t}=p(\boldsymbol{A})=(t+1)e^{-t}\boldsymbol{E}+te^{-t}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(4t+1)e^{-t} & 0 & 8te^{-t}\\ 3te^{-t} & te^{-t} & 6te^{-t}\\ -2te^{-t} & 0 & (1-4t)e^{-t}\end{pmatrix}$$

微分方程的解为：

$$\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}(t)du=\begin{pmatrix}(4t+1)e^{-t} & 0 & 8te^{-t}\\ 3te^{-t} & te^{-t} & 6te^{-t}\\ -2te^{-t} & 0 & (1-4t)e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(4t+1)e^{-t}\\ 3te^{-t}\\ -2te^{-t}\end{pmatrix}$$

5

1. 只需验证子空间 $\boldsymbol{W}$ 对加法和数乘封闭。
2. 显然，$\dim(\boldsymbol{W})=2$，则 $\dim(\boldsymbol{W}^{\perp})=4-2=2$。
   取 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$，显然这构成了在 $\boldsymbol{W}$ 上的标准正交基。
   取 $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4=\frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & -5\end{pmatrix}$，显然这构成了在 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 上的标准正交基。

6

1.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{C}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T})^{-1}(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15}\\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{3} & \frac{2}{15}\\ \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. 若有解，则 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$ 显然是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，且必满足 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，经验证，$\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ 这样的等式不成立，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 不相容。

4.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15}\\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{3} & \frac{2}{15}\\ \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\frac{8}{15}+\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\\ \frac{19}{15}+\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3\\ \frac{11}{15}-\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,y_3]^T\in\mathbb{R}^3$。

5. 极小范数二乘解为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} \\ \frac{19}{15} \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$