第一章　理论部分

1.1　微分方程

Example 1.1.1. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

Solution. 这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f(x)$ 是 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中

$$\lambda = 0,\ P_m(x) = 3x + 1$$

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

其特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

由于 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根，所以设特解

$$y* = b_0 x + b_1$$

带入所给方程，得

$$-3b_0 x - 2b_0 - 3b_1 = 3x + 1$$

比较等式两端 x 同次幂的系数，易得 $b_0 = -1,\ b_1 = \frac{1}{3}$，于是求得一个特解为

$$y* = -x + \frac{1}{3}$$

□

1.2　多元

Definition 1.2.1. 设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A，对于任意给定正数 ε，总存在正整数 δ，使得当点 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限（二重极限），记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \vee \quad \lim_{P\to P_0} f(P) = A$$

任意一点 $P \in \mathbb{R}^2$ 与任意一个点集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 之间有以下三种关系的一种：

- **内点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P) \subset E$，那么称 P 为 E 的内点.
- **外点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P) \cap E = \varnothing$，那么称 P 为 E 的外点.
- **边界点**：如果点 P 在任意邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，那么称 P 为 E 的边界点.