

# 第一章 理论部分

## 1.1 微分方程

**Example 1.1.1.** 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$  的一个特解.

**Solution.** 这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 且函数  $f(x)$  是  $e^{\lambda x} P_m(x)$  型, 其中

$$\lambda = 0, P_m(x) = 3x + 1$$

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

其特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

由于  $\lambda = 0$  不是特征方程的根, 所以设特解

$$y^* = b_0x + b_1$$

带入所给方程, 得

$$-3b_0x - 2b_0 - 3b_1 = 3x + 1$$

比较等式两端  $x$  同次幂的系数, 易得  $b_0 = -1$ ,  $b_1 = \frac{1}{3}$ , 于是求得一个特解为

$$y^* = -x + \frac{1}{3}$$

□

## 1.2 多元函数

**Definition 1.2.1.** 设二元函数  $f(P) = f(x, y)$  的定义域为  $D$ , 点  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点, 如果存在常数  $A$ , 对于任意给定正数  $\varepsilon$ , 总存在正整数  $\delta$ , 使得当点  $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$  时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 那么就称常数  $A$  为函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限 (二重极限), 记作

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad \vee \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

任意一点  $P \in \mathbb{R}^2$  与任意一个点集  $E \subset \mathbb{R}^2$  之间有以下三种关系的一种:

- **内点:** 如果存在点  $P$  的某个邻域  $U(P)$ , 使得  $U(P) \subset E$ , 那么称  $P$  为  $E$  的内点.
- **外点:** 如果存在点  $P$  的某个邻域  $U(P)$ , 使得  $U(P) \cap E = \emptyset$ , 那么称  $P$  为  $E$  的外点.
- **边界点:** 如果点  $P$  在任意邻域内既含有属于  $E$  的点, 又含有不属于  $E$  的点, 那么称  $P$  为  $E$  的边界点.

**题目 1.1** 这是一道简单的题目

**题目 1.2** 这是一道简单的题目 2

**解答** 这是一个解答