第一章　模拟卷一

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求不相容方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的最优最小二乘解。

解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{CC}^T=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{CC}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix}$$

□

题 1.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9&-4&-7\\-1&0&1\\10&-4&-8\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

解. 特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$。其对应的特征向量分别是 $(1,0,1)^T,(1,-1,2)^T,(2,1,2)^T$。于是：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 1.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 9 & -6 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & -6 & -8 \end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

解. 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^T \\ \boldsymbol{p}_2=(2,1,2)^T \\ \boldsymbol{p}_3=(1,-1,2)^T \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是：

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & & \\ & e^{-2t} & e^{2t} \\ & & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4e^{4t}-2e^{2t}-3e^{-2t} & -2e^{4t}+2e^{-2t} & 3e^{4t}+2e^{2t}+3e^{-2t} \\ -e^{2t} & e^{-2t} & e^{2t} \\ 4e^{4t}-2e^{2t}-4e^{-2t} & -2e^{4t}+2e^{-2t} & 3e^{4t}+2e^{2t}+4e^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 1.4. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = (0,1)^T$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda+1)^2$ 不妨设 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$，则

$$\begin{cases} P(\lambda) = P(-1) = a_0 - a_1 = e^{-t} \\ P'(\lambda) = P'(-1) = a_1 = te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+t)e^{-t} \\ a_1 = te^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} = P(\boldsymbol{A}) &= (1+t)e^{-t}\boldsymbol{E} + te^{-t}\boldsymbol{A} \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} (2u+1)e^{u} & -4ue^{u} \\ ue^{u} & (-2u+1)e^{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} -(4t+4)e^{-t}+4 \\ -(2t+3)e^{-t}+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 1.5. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{CA}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

解. (1)

$$\mathcal{T}\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\begin{pmatrix}0&-2&-1&-2\\1&3&1&\frac{3}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2,\lambda_4=0$。

(3) 可对角化，这是由于 $\lambda=1$ 的特征值有至少两个线性无关的特征向量。

□

题 1.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换且 $\mathcal{T}^2=3\mathcal{T}$，证明：$\boldsymbol{V}=\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

解. 由于 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T}\subset\boldsymbol{V}$。任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，使得 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$，于是 $3\boldsymbol{\alpha}=3\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}=\mathcal{T}(\mathcal{T}\boldsymbol{\beta})=\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，此时 $\mathrm{Im}\mathcal{T}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\{\mathbf{0}\}$，这说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 构成直和。又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T})=\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})+\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T})=n$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\boldsymbol{V}$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\boldsymbol{V}$。

□