第一章　模拟卷二

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-1&1&1\\4&3&-3&7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$。

解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}21&12\\12&14\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{C}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T})^{-1}(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}21&12\\12&14\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{150}\begin{pmatrix}-12&33&9\\-14&-26&2\\14&26&-2\\2&7&11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 1.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-7&-2&9\\-2&-1&4\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

解. 特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，不妨令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1 = (0, 3, 1)^T \\ \boldsymbol{p}_2 = (1, -4, -1)^T \\ \boldsymbol{p}_3 = (-1, 5, 1)^T \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

于是：

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & -3te^{2t} \\ 3e^t - (4t+3)e^{2t} & (-4t+1)e^{2t} & 3e^t + (12t-3)e^{2t} \\ e^t - (t+1)e^{2t} & -te^{2t} & e^t + 3te^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 1.3. 用矩阵函数求解下常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 + 1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 \end{cases} \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = (1, 0)^T$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda+1)^2$ 不妨设 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$，则

$$\begin{cases} P(\lambda) = P(-1) = a_0 - a_1 = e^{-t} \\ P'(\lambda) = P'(-1) = a_1 = te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+t)e^{-t} \\ a_1 = te^{-t} \end{cases}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = P(\boldsymbol{A}) = (1+t)e^{-t}\boldsymbol{E} + te^{-t}\boldsymbol{A}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} (2u+1)e^{u} & -4ue^{u} \\ ue^{u} & (-2u+1)e^{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} (2t+3)e^{-t}-1 \\ (t+2)e^{-t}-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 1.4. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体,，对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{A}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

解. (1)

$$\mathcal{T}\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4) = (\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=-1,\lambda_4=-4$。

(3) 可对角化，这是由于 $\lambda=-1$ 的特征值有至少两个线性无关的特征向量。

□

题 1.5. 设 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基和维数。

解. 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\-1&0&-2\end{pmatrix}$。

$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2,\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T})=3-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$。

$\mathrm{Im}\mathcal{T}=<\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2>,\mathrm{Ker}\mathcal{T}=<2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3>$。

□

题 1.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\mathrm{rank}(\mathcal{T})=r$ 且 $\mathcal{T}^2=3\mathcal{T}$，证明：存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，使 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda=3$ 或 0。取 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 下的一组标准正交基，并记线性变换 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$。

(1) 若 $r=n$，则 $\lambda=3$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda-3$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{3,\dots,3\}=3\boldsymbol{E}$，满足题意。

(2) 若 $r=0$，则 $\lambda=0$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{0,\dots,0\}=\boldsymbol{O}$，满足题意。

(3) 若 $0<r<n$，则 $\lambda=3$ 或 0，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-3)$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{0,\dots,0,\underbrace{3,\dots,3}_{r\text{个}3}\}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$，满足题意。

□