第一章　多项式

题 1.1. （p44.1）计算 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$。

(1) $f(x) = x^4 - 4x + 5$，$g(x) = x^2 - x + 2$

解. $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$，其中 $q(x) = x^2 + x - 1$，$r(x) = -7x + 7$。

□

题 1.2. （p44.2）求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式和最小公倍式。

(1) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$，$g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

解. $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$，其中 $q_1(x) = x - 1$，$r_1(x) = 2x^2 + 2x + 2$

$g(x) = q_2(x)r_1(x)$，其中 $q_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

于是

$$\begin{aligned}
\gcd(f(x), g(x)) =& \frac{1}{2}r_1(x) = x^2 + x + 1 \\
\mathrm{lcm}(f(x), g(x)) =& 4\frac{f(x)g(x)}{\gcd(f(x), g(x))} \\
=& \frac{(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)}{x^2 + x + 1} \\
=& (x^2 + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

注：以上计算最大公因式和最小公倍式乘的系数均为凑首 1 多项式。

□

题 1.3. （p44.3）求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $\gcd(f(x), g(x))$，以及满足等式 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$ 的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$。

(1) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$，$g(x) = x^2 - x - 1$

解. $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$，其中 $q_1(x) = x^2 - 3$，$r_1(x) = x - 2$

$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$，其中 $q_2(x) = x$，$r_2(x) = x - 1$

$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x)$，其中 $q_3(x) = 1$，$r_3(x) = -1$

$r_2(x) = q_4(x)r_3(x)$，其中 $q_4(x) = -x + 1$

$\gcd(f(x), g(x)) = -r_3(x) = 1$，于是 $1 = u(x)f(x) + v(x)g(x)$，其中 $u(x) = -1 - x$，$v(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$

注：以上计算最大公因式乘的系数为凑首 1 多项式。

□

题 1.4. （p45.6）若多项式 $f(x), g(x), u(x), v(x)$ 满足 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$，证明 $u(x), v(x)$ 互素。

证明. 令 $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$，则 $f(x) = d(x)p(x)$，$g(x) = d(x)q(x)$，

$u(x)f(x)+v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x)) \Rightarrow u(x)d(x)p(x)+v(x)d(x)q(x) = d(x) \Rightarrow u(x)p(x)+v(x)q(x) = 1$，这便说明了 $u(x), v(x)$ 互素。

□