第一章　模拟卷三

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LR 分解。

解.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

上面矩阵即为所求矩阵 $\boldsymbol{R}$。则 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}$，于是：

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

□

题 1.2. 设线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=1\\ 3x_1-6x_2=1\\ -x_1+2x_2=-6\end{cases}$，用广义逆验证它是矛盾方程，并求它的最小二乘解的通解。

解. 由题意得：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T,\boldsymbol{b}=(1,1,-6)^T$。下面计算 $\boldsymbol{A}^+$：

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$，于是：

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}11\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}11\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{55}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\-2 & -6 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}=\frac{10}{11}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$，最小二乘解的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{2}{11}+\frac{4}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2\\-\frac{4}{11}+\frac{2}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$。

□

题 1.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\-4 & 3 & 4\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$。

解. 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\Rightarrow\boldsymbol{PJ}=\boldsymbol{AP}$，不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ap}_1=2\boldsymbol{p}_1\\\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_2\\\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^T\\\boldsymbol{p}_2=(0,2,-1)^T\\\boldsymbol{p}_3=(-1,-1,0)^T\end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\-1 & 1 & 1\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

□

题 1.4. 设 $\mathcal{T}$ 为线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的变换，$\mathcal{T}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AXA}, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 下的矩阵, 并求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

解.

$$\mathcal{T}\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4) = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$。 □

题 1.5. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t)|_{t=0} = (1, 0)^T \end{cases}$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{Ax}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda+4)^2$ 不妨设 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$，则

$$\begin{cases} P(\lambda) = P(-4) = a_0 - 4a_1 = e^{-4t} \\ P'(\lambda) = P'(-4) = a_1 = te^{-4t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+4t)e^{-4t} \\ a_1 = te^{-4t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} = P(\boldsymbol{A}) &= (1+4t)e^{-4t}\boldsymbol{E} + te^{-4t}\boldsymbol{A} \\ &= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & (t+1)e^{-4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & (t+1)e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-4t} \\ -te^{-4t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.6. 在线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，对于任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}, \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0\}$ 为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子集，其中 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11}+a_{22}$ 为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{2\times 2}$ 的迹。

(1) 证明：$\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 求 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基，及 $\boldsymbol{V}$ 的正交补 $\boldsymbol{V}^{\perp}$。

解. (1) 证明其满足加法封闭及数乘封闭即可。

任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}, k\in\mathbb{R}$。$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = 0+0 = 0$，这说明了对加法封闭；$\operatorname{tr}(k\boldsymbol{A}) = k\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$，这说明了对数乘封闭。即 $\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 显然，$\dim(\boldsymbol{V}) = 3, \dim(\boldsymbol{V}^{\perp}) = 4-3 = 1$。

$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 构成了 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基。

$\boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 构成了 $\boldsymbol{V}^{\perp}$ 的一组标准正交基。

□

题 1.7. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\operatorname{rank}(\mathcal{T}) = r > 0$，$\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$，证明：

(1) 存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$，满足 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i, 1\le i\le r \\ \boldsymbol{0}, r\le i\le n \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ 的基。

(2) 写出 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵，以及 $\mathcal{T}$ 的最小多项式。

(3) $\boldsymbol{V} = \operatorname{Im}\mathcal{T}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{T}$，其中 $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

证明. (1) 即证存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$,使得 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda = 1$ 或 0。

取 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 下的一组标准正交基，并记线性变换 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$。

(1) 若 $r = n$，则 $\lambda = 1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda - 1$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{1, \ldots, 1\} = \boldsymbol{E}$。此时 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = 0$，即 $\mathbf{0}$ 为 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基，满足题意。

(2) 若 $r = 0$，则 $\lambda = 0$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{0, \ldots, 0\} = \boldsymbol{O}$。此时 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n$，即 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 为 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基，满足题意。

(3) 若 $0 < r < n$，$\lambda = 1$ 或 0，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\text{个}1}, 0, \ldots, 0\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。此时 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n - r$，即 $\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 为 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基，满足题意。

(2) $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

(1) 若 $r = n$，则 $\lambda = 1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda - 1$。

(2) 若 $r = 0$，则 $\lambda = 0$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda$。

(3) 若 $0 < r < n$，则 $\lambda = 1$ 或 0，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$。

(3) 由于 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T} \subset \boldsymbol{V}$。任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，使得 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$，于是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = \mathcal{T}(\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，此时 $\mathrm{Im}\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \{\mathbf{0}\}$，这说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 构成直和。又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \boldsymbol{V}$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \boldsymbol{V}$。

□