第一章　线性空间与线性变换

题 1.1. （P98.3）在 $\mathbb{R}^3$ 中，取

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) 证明：$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

(2) 已知 $\mathbb{R}^3$ 中元素 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 下的坐标为 $(1,2,3)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

(3) 求 $\boldsymbol{B}=(1,2,3)^T$ 在基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 下的坐标。

解. (1) 令 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3)$，此时 $|\boldsymbol{F}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，这构成了 $\mathbb{R}^3$ 下的一组基。

(2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}=(6,5,3)^T$，其中 $\boldsymbol{x}=(1,2,3)^T$。

(3) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}=(-1,-1,3)^T$。

□

题 1.2. （p98.4）验证

$$\boldsymbol{\nu}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\nu}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\nu}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\10\end{pmatrix}$$

与

$$\boldsymbol{\omega}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\omega}_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\omega}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$$

都可作为 $\mathbb{R}^3$ 的基，并求 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 到 $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3$ 的过渡矩阵。

解. 令 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$, $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3)$, 此时有 $|\boldsymbol{V}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&10\end{vmatrix}\neq 0$, $|\boldsymbol{W}|=\begin{vmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{vmatrix}\neq 0$，这说明了 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 与 $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3$ 都可作为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

记过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}&-\frac{7}{2}&4\\\frac{9}{2}&\frac{13}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$。

□

题 1.3. （P99.10）设 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，且 $\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2\cap\boldsymbol{V}_3=\{\boldsymbol{0}\}$，试问 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3$ 是否为直和？

证明. **结论：**不构成直和。下面通过举反例给出证明：

取线性空间 $\boldsymbol{V}=\mathbb{R}^3$，并令 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 分别为 $\boldsymbol{V}$ 子空间 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3$ 上的一组基，其中 $\boldsymbol{V}_i=\{k\boldsymbol{e}_i|k\in\mathbb{R},i=1,2,3\}$，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$。考察 $\boldsymbol{V}_i$ 的几何意义，为同一二维平面的一条直线，则 $\dim(\boldsymbol{V}_i)=1$。

容易验证子空间满足 $\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2\cap\boldsymbol{V}_3=\{\boldsymbol{0}\}$，并且 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3=\{\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i|\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}_i\}=\{k_i\boldsymbol{e}_i|k_i\in\mathbb{R}\}=(k_1-k_2+k_3,k_1+k_2+2k_3,0)^T=\mathbb{R}^2$,所以 $\dim(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=2$。此时 $\dim(\boldsymbol{V}_1)+\dim(\boldsymbol{V}_2)+\dim(\boldsymbol{V}_3)=1+1+1=3\neq\dim(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3)$，这便说明了 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3$ 不构成直和。

□

题 1.4.（P99.12）设 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\ldots,\boldsymbol{V}_n$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，举例说明，即使 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\ldots,\boldsymbol{V}_n$ 两两的交空间均为零空间，其和 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\cdots+\boldsymbol{V}_n$ 也未必是直和。

证明. 与例1.3有类似的证明过程，不妨令 $\boldsymbol{V}=\mathbb{R}^n$，则 $\dim(\boldsymbol{V})=n$，取 n 个向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，令 $\boldsymbol{V}_i=\{k_i\boldsymbol{e}_i|k_i\in\mathbb{R},i=1,\ldots,n\}$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^T$，$\boldsymbol{e}_2=(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n},0,\ldots,0)^T$，$\boldsymbol{e}_k=(\cos\frac{k\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n},0,\ldots,0)^T$，$\boldsymbol{e}_n=(\cos\frac{(n-1)\pi}{n},\sin\frac{(n-1)\pi}{n},0,\ldots,0)^T$，并且 $||\boldsymbol{e}_i||_2^2=1$。考察 $\boldsymbol{V}_i$ 的几何意义，为同一二维平面上的一条直线，则 $\dim(\boldsymbol{V}_i)=1$。

于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i=\{\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i|\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}_i\}=\{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{e}_i|k_i\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$，所以 $\dim(\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i)=2$。而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dim(\boldsymbol{V}_i)=n\neq\dim(\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i)$，这便说明了不构成直和。

下面验证 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，…，$\boldsymbol{V}_n$ 两两的交空间均为零空间。任取 $\boldsymbol{V}_i=\{k_i\boldsymbol{e}_i\}$，$\boldsymbol{V}_j=\{k_j\boldsymbol{e}_j\}$，

其中 $i<j$。要验证其交空间为零空间，只需验证前两个维度的交为 0。即满足如下等式：

$$k_i\cos\frac{(i-1)\pi}{n}=k_j\cos\frac{(j-1)\pi}{n} \tag{1.1}$$

$$k_i\sin\frac{(i-1)\pi}{n}=k_j\sin\frac{(j-1)\pi}{n} \tag{1.2}$$

- 若 $i=1$，根据式(1.2)得 $k_j=0$，根据式(1.1)得 $k_i=0$。
- 若 $i>1$，$k_i=0$，由于 $\frac{(i-1)\pi}{n}\in(0,\pi)$，则 $\sin x\in(0,\pi)$，根据式(1.2)得 $k_j=0$。同理：若 $k_j=0$，则 $k_i=0$。
- 若 $i>1$，$i=1+\frac{n}{2}$，根据式(1.1)得 $k_j=0$，根据式(1.2)得 $k_i=0$。同理：若 $j=1+\frac{n}{2}$，则 $k_i=k_j=0$。
- 若 $i>1$，且 $k_i\neq 0$，$k_j\neq 0$，$i\neq 1+\frac{n}{2}$，$j\neq 1+\frac{n}{2}$，此时 $k_i\cos\frac{(i-1)\pi}{n}\neq 0$，$k_j\cos\frac{(i-1)\pi}{n}\neq 0$，用式(1.2)除以式(1.1)，得 $\tan\frac{(i-1)\pi}{n}=\tan\frac{(i-1)\pi}{n}$，此时 $i=j$，这与 $i\neq j$ 矛盾。

综上 $k_1=k_2=0$，$\boldsymbol{V}_i\cap\boldsymbol{V}_j=\{\mathbf{0}\}$，这便完成了证明。

□

题 1.5. （P100.14）考虑关于函数的集合 $\boldsymbol{V}=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x:a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$。

(1) 证明该集合关于函数的线性运算构成 3 维实线性空间。

(2) 证明求导算子 $\mathcal{D}:f\to f'$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，并给出 $\mathcal{D}$ 在基 $\alpha_1=x^2e^x$，$\alpha_2=xe^x$，$\alpha_3=e^x$ 下的矩阵。

解. (1) 由于函数的本质是 $\mathbb{R}^3\to\boldsymbol{V}$ 的映射，其中 $\boldsymbol{V}\subset\mathbb{R}$。所以 $\boldsymbol{V}$ 显然满足加法和乘法的八条运算法则。接下来一一验证八条法则：

任取 $a,b,c\in\boldsymbol{V}$，$k,l\in\mathbb{R}$，令 $a=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x$，$a=(b_2x^2+b_1x+b_0)e^x$，$c=(c_2x^2+c_1x+c_0)e^x$。

加法：

$a+b=b+a$；$(a+b)+c=a+(b+c)$；$a+0=a\Leftrightarrow 0=(0x^2+0x+0)e^x$；$a+b=0\Leftrightarrow b=(-a_2x^2-a_1x-a_0)e^x$。

乘法：

$k(a+b)=ka+kb$；$(k+l)a=ka+la$；$(kl)a=k(la)$；$1a=a$。

(2) 只需验证其对加法和乘法封闭，任取 $a,b\in\boldsymbol{V}$，$k\in\mathbb{R}$，$\mathcal{D}(a)=(a_2x^2+(2a_2+a_1)x+a_1+a_0)e^x$，$\mathcal{D}(b)=(b_2x^2+(2b_2+b_1)x+b_1+b_0)e^x$。则 $\mathcal{D}(a)+\mathcal{D}(b)=((a_2+b_2)x^2+(2a_2+a_1+2b_2+b_1)x+a_1+a_0+b_1+b_0)e^x=\mathcal{D}(a+b)$，$\mathcal{D}(ka)=k(a_2x^2+(2a_2+a_1)x+a_1+a_0)e^x=k\mathcal{D}(a)$。

接下来计算基经过线性变换后的结果，即 $\mathcal{D}(\alpha_1) = (x^2+2x)e^x$，$\mathcal{D}(\alpha_2) = (x+1)e^x$，$\mathcal{D}(\alpha_3) = e^x$。所以 $\mathcal{D}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$。

□

题 1.6. （p100.17）设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 是否成立？说明理由。

解. **结论：**不一定成立。下面通过举反例说明，即若 $\mathcal{A}^2 = n\mathcal{A}$，$\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$ 仍然成立。

先证 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，有 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，即 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \boldsymbol{V}$，于是有 $\mathcal{A}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ 即 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$；再证 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，若存在 $\boldsymbol{\beta}$，使 $\mathcal{A}^2(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})$，则 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$。因为 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{n}\mathcal{A}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}^2(\frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha})$，令 $\frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ 便说明了 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$。

□

题 1.7. （p100.18）设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且 $\boldsymbol{V} = \ker\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}$，证明 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$。举例说明一般情况下 $\ker\mathcal{A}$ 和 $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ 不构成直和关系？

证明. 给出如下两种解法：

(1) 直接利用题目条件证明

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}) = \mathrm{Im}(\ker\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\ker\mathcal{A}) + \mathrm{Im}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathbf{0} + \mathrm{Im}^2\mathcal{A} = \mathrm{Im}^2\mathcal{A}$$

(2) 先证 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，有 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，即 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \boldsymbol{V}$，于是有 $\mathcal{A}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ 即 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$；再证 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，一定存在 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$，使 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$，其中 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma} = \mathcal{A}(\eta) \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$，

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})) = \mathcal{A}^2(\eta)$$

则 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$。综上，$\mathrm{Im}(\mathcal{A}^2) = \mathrm{Im}(\mathcal{A})$。

□

题 1.8. （p100.19）定义映射 $\mathcal{T}: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 为

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$$

(1) 证明：$\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 在基

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

下的矩阵。

(3) 已知 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中元素 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为 $(1,2,3,4)^T$，求 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$。

(4) 求 $\ker\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$。

(5) 求 $\mathcal{T}$ 的不变因子和最小多项式。

(6) 是否存在一组基，使得 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵？如存在，求出这组基和相应的对角阵。

解. (1) 任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，$k\in\mathbb{R}$，显然 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathcal{T}(\boldsymbol{A})+\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$，$k\mathcal{T}(\boldsymbol{A})=\mathcal{T}(k\boldsymbol{A})$，这便说明了 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换。

(2) 计算基经过线性变换后的结果，即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_2)=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_3)=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_4)=\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{E}_1$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_3)=2\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_4$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_4)=-2\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_4$，于是

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 为所求。

(3)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) =&\mathcal{T}[(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{x}]\\ =&\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{x}\\ =&\boldsymbol{E}_1 + \frac{11}{2}\boldsymbol{E}_3 + \frac{11}{2}\boldsymbol{E}_4\\ =&\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3, 4)^T$。

(4) 将 $\boldsymbol{C}$ 化为行阶梯形式矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C}) = 2$，则选取第一和第二列作为极大无关组，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T} = (\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E}_3 + \boldsymbol{E}_4)$；由于 $\ker(\mathcal{T})$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的化零空间，则 $\ker(\mathcal{T}) = (-3\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_3, 5\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_4)$。

(5) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$；
行列式因子为 $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = \lambda(\lambda - 1), D_4 = \lambda^2(\lambda - 1)^2$；
则不变因子为 $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = \lambda(\lambda - 1), d_3 = \lambda(\lambda - 1)$；
最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$。

(6) 一定存在，这是由于最小多项式不同项的最高系数为 1。
则其若当标准型 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。
求出属于 $\lambda = 0$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1 = (-3, -1, 2, 0)^T$，$\boldsymbol{p}_2 = (5, -1, 0, 2)^T$。
求出属于 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_3 = (1, 0, 0, 0)^T$，$\boldsymbol{p}_4 = (0, 0, 1, 1)^T$。
接着设新基底为 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4)$，令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$，则 $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4) = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{P} = (-3\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_3, 5\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_4, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_3 + \boldsymbol{E}_4)$。

□

题 1.9. （p100.21）复数集 $\mathbb{C}$ 上的共轭变换 $\boldsymbol{z} \to \bar{\boldsymbol{z}}$ 是否是 $\mathbb{C}$ 作为复线性空间上的线性变换？是否是 $\mathbb{C}$ 作为实线性空间上的线性变换？

解. 定义变换 $\mathcal{T}(z)=\bar{z}$。任取 $z_1=a+bi, z_2=c+di\in\mathbb{C}$，$k=k_1+k_2i\in\mathbb{C}$，其中 $a,b,c,d,k_1,k_2\in\mathbb{R}$。

若选取的是复线性空间。$\mathcal{T}(z_1+z_2)=\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a-bi)+(c-di)=\bar{z}_1+\bar{z}_2=\mathcal{T}(z_1)+\mathcal{T}(z_2)$，对加法封闭；$\mathcal{T}(kz_1)=(k_1a-k_2b)+(-k_1b-k_2a)i$，$k\mathcal{T}(z_1)=(k_1+k_2i)(a-bi)=(k_1a+k_2b)+(-k_1b+k_2a)i$，$\mathcal{T}(kz_1)\neq k\mathcal{T}(z_1)$，对数乘不封闭。于是在复线性空间上不构成线性变换。

若选取的是实线性空间。加法封闭同上，下面验证数乘封闭，此时 $k_2=0$，$\mathcal{T}(kz_1)=ka-k_1b=k\mathcal{T}(z_1)$。于是在实线性空间上构成线性变换。 □

题 1.10. （p100.22）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以表示为矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 的线性组合，其中 $\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 满足

(1) 对一切 i，有 $\boldsymbol{P}_i^2=\boldsymbol{P}_i$

(2) 对一切 $i\neq j$，有 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{O}$

(3) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P_1}+\cdots+\boldsymbol{P}_n$

给出具体的构造方法，并讨论该分解的唯一性。

解. 不妨令 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，则存在 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$。设 $\boldsymbol{E}_{ii}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&1&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$，这表明了矩阵第 i 行第 i 列为 1，其他元素全为 0。则 $\boldsymbol{\Lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{E}_{ii}$，$\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{Q}^{-1}$，令 $\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{Q}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 的线性组合，并且容易验证 $\boldsymbol{P}_i,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 满足三个约束条件。

唯一性的证明不会。

□

题 1.11. （p100.23）已知 $\mathcal{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，$k\geq 1$ 为正整数，满足 $\mathcal{A}^k\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$，且 $\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}\neq\boldsymbol{0}$。

(1) 证明：$\boldsymbol{\nu},\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}$ 线性无关，特别 $k\leq\dim\boldsymbol{V}$。

(2) 证明：$\boldsymbol{W}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\nu},\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

(3) 求 $\mathcal{A}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的限制 $\mathcal{A}|_{\boldsymbol{W}}$ 在基 $\boldsymbol{\nu},\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}$ 下的矩阵。

解. (1) 只需验证对于实数 $l_1,\dots,l_k$，当 $l_1\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$ 时，有 $l_1=\cdots=l_k=0$。对等式两边进行 $\mathcal{A}^m$ $(m=k-1,\dots,1)$ 的线性变换，由于 $\mathcal{A}^k\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，则 $\mathcal{A}^{k+d}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，其中 $d\geq 0$。

$$l_1\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}^{k}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{2k-2}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0} \tag{1}$$

$$l_1\mathcal{A}^{k-2}\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{2k-1}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0} \tag{2}$$

$$\vdots$$

$$l_1\mathcal{A}\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}^{2}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{k}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0} \tag{n}$$

由式(1)可知，$l_1\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，而 $\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}$，所以 $l_1=0$。同理，观察式(2) 到式(n)，可得 $l_2=0,\dots,l_n=0$，于是 $l_1=\cdots=l_n=0$。

(2) 验证 $\boldsymbol{W}$ 的基 $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k)$ 经过线性变换后仍在 $\boldsymbol{W}$ 中即可。$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)=\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_k)=\mathcal{A}^k\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，这表明了 $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_{i+1}\in\boldsymbol{W}$ $(i=1,\dots,k-1)$，$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_k)=\mathbf{0}\in\boldsymbol{W}$。

(3) 根据第(2)问，$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k)=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$。

□

题 1.12. （p100.24）已知 $\mathcal{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}$，$k_i\geq 1$ 为正整数，其中 $i=1,2,\dots,s$，满足 $(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\nu}_i=\mathbf{0}$ 且 $(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i-1}\boldsymbol{\nu}_i\neq\mathbf{0}$，并记

$$\boldsymbol{W}_i=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\nu}_i,(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})\boldsymbol{\nu}_i,\dots,(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i-1}\boldsymbol{\nu}_i\}$$

证明：若 $\lambda_i\neq\lambda_j$，则 $\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{W}_j=\{\mathbf{0}\}$。

证明. 由 $(x-\lambda_i)^{k_i}$ 与 $(x-\lambda_j)^{k_j}$ 互素，则存在 $f(x),g(x)$，使 $f(x)(x-\lambda_i)^{k_i}+g(x)(x-\lambda_j)^{k_j}=1$，对应到线性变换 $\mathcal{A}$ 上即为 $f(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}+g(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}=\mathrm{id}$。

令 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}_i\cap\boldsymbol{W}_j$，则 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}_i$，于是 $\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\nu}_i+\cdots+l_{k_i}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i-1}\boldsymbol{\nu}_i$，$(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\alpha}=l_1(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\nu}_i+\cdots+l_{k_i}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{2k_i-1}=\mathbf{0}$；同理，$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}_j$，$(\mathcal{A}-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。又因为 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{id}(\boldsymbol{\alpha})=f(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\alpha}+g(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\boldsymbol{\alpha}$。所以 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{id}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{W}_j=\{\mathbf{0}\}$。

□