同济大学矩阵论课程习题答案与详解

前言

此为同济大学 2023 年春季学期研究生课程《矩阵论》的六次作业的题目和答案。题目来源于《矩阵分析（第二版）》，由于网络上和课本均未提及答案，笔者根据自己写的答案及老师批改的结果编写了部分试题集的答案，希望能帮助到想要学习此书的读者。并且会在每题的前面标注该题的题源，部分题目与题源不符，请以**本书**上的题目为准。

限于编者的水平，本书中错误与疏漏在所难免，恳请读者不吝指正，希望能和大家一起完成习题答案的编写。

2024 年 1 月 26 日

目录

第一章　线性空间与线性变换

题 1.1. （P98.3）在 $\mathbb{R}^3$ 中，取

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(1) 证明：$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

(2) 已知 $\mathbb{R}^3$ 中元素 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 下的坐标为 $(1,2,3)^T$，求 $\boldsymbol{A}$。

(3) 求 $\boldsymbol{B}=(1,2,3)^T$ 在基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 下的坐标。

解. (1) 令 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3)$，此时 $|\boldsymbol{F}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，这构成了 $\mathbb{R}^3$ 下的一组基。

(2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}=(6,5,3)^T$，其中 $\boldsymbol{x}=(1,2,3)^T$。

(3) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}=(-1,-1,3)^T$。

□

题 1.2. （p98.4）验证

$$\boldsymbol{\nu}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\nu}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\nu}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\10\end{pmatrix}$$

与

$$\boldsymbol{\omega}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\omega}_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\omega}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$$

都可作为 $\mathbb{R}^3$ 的基，并求 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 到 $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3$ 的过渡矩阵。

解. 令 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$，$\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3)$，此时有 $|\boldsymbol{V}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&10\end{vmatrix}\neq 0$，$|\boldsymbol{W}|=\begin{vmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{vmatrix}\neq 0$，这说明了 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 与 $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{\omega}_3$ 都可作为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。

记过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}&-\frac{7}{2}&4\\\frac{9}{2}&\frac{13}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$。

□

题 1.3. （P99.10）设 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，且 $\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2\cap\boldsymbol{V}_3=\{\boldsymbol{0}\}$，试问 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3$ 是否为直和？

证明. **结论：**不构成直和。下面通过举反例给出证明：

取线性空间 $\boldsymbol{V}=\mathbb{R}^3$，并令 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 分别为 $\boldsymbol{V}$ 子空间 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\boldsymbol{V}_3$ 上的一组基，其中 $\boldsymbol{V}_i=\{k\boldsymbol{e}_i|k\in\mathbb{R},i=1,2,3\}$，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$。考察 $\boldsymbol{V}_i$ 的几何意义，为同一二维平面的一条直线，则 $\dim(\boldsymbol{V}_i)=1$。

容易验证子空间满足 $\boldsymbol{V}_1\cap\boldsymbol{V}_2\cap\boldsymbol{V}_3=\{\boldsymbol{0}\}$，并且 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3=\{\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i|\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}_i\}=\{k_i\boldsymbol{e}_i|k_i\in\mathbb{R}\}=(k_1-k_2+k_3,k_1+k_2+2k_3,0)^T=\mathbb{R}^2$，所以 $\dim(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=2$。此时 $\dim(\boldsymbol{V}_1)+\dim(\boldsymbol{V}_2)+\dim(\boldsymbol{V}_3)=1+1+1=3\neq\dim(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3)$，这便说明了 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{V}_3$ 不构成直和。

□

题 1.4. （P99.12）设 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\ldots,\boldsymbol{V}_n$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，举例说明，即使 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\ldots,\boldsymbol{V}_n$ 两两的交空间均为零空间，其和 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2+\cdots+\boldsymbol{V}_n$ 也未必是直和。

证明. 与例1.3有类似的证明过程，不妨令 $\boldsymbol{V}=\mathbb{R}^n$，则 $\dim(\boldsymbol{V})=n$，取 n 个向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，令 $\boldsymbol{V}_i=\{k_i\boldsymbol{e}_i|k_i\in\mathbb{R},i=1,\ldots,n\}$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^T$，$\boldsymbol{e}_2=(\cos\frac{\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n},0,\ldots,0)^T$，$\boldsymbol{e}_k=(\cos\frac{k\pi}{n},\sin\frac{\pi}{n},0,\ldots,0)^T$，$\boldsymbol{e}_n=(\cos\frac{(n-1)\pi}{n},\sin\frac{(n-1)\pi}{n},0,\ldots,0)^T$，并且 $||\boldsymbol{e}_i||_2^2=1$。考察 $\boldsymbol{V}_i$ 的几何意义，为同一二维平面上的一条直线，则 $\dim(\boldsymbol{V}_i)=1$。

于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i=\{\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i|\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}_i\}=\{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{e}_i|k_i\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$，所以 $\dim(\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i)=2$。而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dim(\boldsymbol{V}_i)=n\neq\dim(\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}_i)$，这便说明了不构成直和。

下面验证 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，…，$\boldsymbol{V}_n$ 两两的交空间均为零空间。任取 $\boldsymbol{V}_i=\{k_i\boldsymbol{e}_i\}$，$\boldsymbol{V}_j=\{k_j\boldsymbol{e}_j\}$，

其中 $i<j$。要验证其交空间为零空间，只需验证前两个维度的交为 0。即满足如下等式：

$$k_i\cos\frac{(i-1)\pi}{n}=k_j\cos\frac{(j-1)\pi}{n} \tag{1.1}$$

$$k_i\sin\frac{(i-1)\pi}{n}=k_j\sin\frac{(j-1)\pi}{n} \tag{1.2}$$

- 若 $i=1$，根据式(1.2)得 $k_j=0$，根据式(1.1)得 $k_i=0$。
- 若 $i>1$，$k_i=0$，由于 $\frac{(i-1)\pi}{n}\in(0,\pi)$，则 $\sin x\in(0,\pi)$，根据式(1.2)得 $k_j=0$。同理：若 $k_j=0$，则 $k_i=0$。
- 若 $i>1$，$i=1+\frac{n}{2}$，根据式(1.1)得 $k_j=0$，根据式(1.2)得 $k_i=0$。同理：若 $j=1+\frac{n}{2}$，则 $k_i=k_j=0$。
- 若 $i>1$，且 $k_i\neq 0$，$k_j\neq 0$，$i\neq 1+\frac{n}{2}$，$j\neq 1+\frac{n}{2}$，此时 $k_i\cos\frac{(i-1)\pi}{n}\neq 0$，$k_j\cos\frac{(i-1)\pi}{n}\neq 0$，用式(1.2)除以式(1.1)，得 $\tan\frac{(i-1)\pi}{n}=\tan\frac{(i-1)\pi}{n}$，此时 $i=j$，这与 $i\neq j$ 矛盾。

综上 $k_1=k_2=0$，$\boldsymbol{V}_i\cap\boldsymbol{V}_j=\{\mathbf{0}\}$，这便完成了证明。

□

题 1.5. （P100.14）考虑关于函数的集合 $\boldsymbol{V}=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x:a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$。

(1) 证明该集合关于函数的线性运算构成 3 维实线性空间。

(2) 证明求导算子 $\mathcal{D}:f\to f'$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，并给出 $\mathcal{D}$ 在基 $\alpha_1=x^2e^x$，$\alpha_2=xe^x$，$\alpha_3=e^x$ 下的矩阵。

解. (1) 由于函数的本质是 $\mathbb{R}^3\to\boldsymbol{V}$ 的映射，其中 $\boldsymbol{V}\subset\mathbb{R}$。所以 $\boldsymbol{V}$ 显然满足加法和乘法的八条运算法则。接下来一一验证八条法则：

任取 $a,b,c\in\boldsymbol{V}$，$k,l\in\mathbb{R}$，令 $a=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x$，$a=(b_2x^2+b_1x+b_0)e^x$，$c=(c_2x^2+c_1x+c_0)e^x$。

加法：

$a+b=b+a$；$(a+b)+c=a+(b+c)$；$a+0=a\Leftrightarrow 0=(0x^2+0x+0)e^x$；$a+b=0\Leftrightarrow b=(-a_2x^2-a_1x-a_0)e^x$。

乘法：

$k(a+b)=ka+kb$；$(k+l)a=ka+la$；$(kl)a=k(la)$；$1a=a$。

(2) 只需验证其对加法和乘法封闭，任取 $a,b\in\boldsymbol{V}$，$k\in\mathbb{R}$，$\mathcal{D}(a)=(a_2x^2+(2a_2+a_1)x+a_1+a_0)e^x$，$\mathcal{D}(b)=(b_2x^2+(2b_2+b_1)x+b_1+b_0)e^x$。则 $\mathcal{D}(a)+\mathcal{D}(b)=((a_2+b_2)x^2+(2a_2+a_1+2b_2+b_1)x+a_1+a_0+b_1+b_0)e^x=\mathcal{D}(a+b)$，$\mathcal{D}(ka)=k(a_2x^2+(2a_2+a_1)x+a_1+a_0)e^x=k\mathcal{D}(a)$。

接下来计算基经过线性变换后的结果，即 $\mathcal{D}(\alpha_1) = (x^2+2x)e^x$，$\mathcal{D}(\alpha_2) = (x+1)e^x$，$\mathcal{D}(\alpha_3) = e^x$。所以 $\mathcal{D}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

□

题 1.6. （p100.17）设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 是否成立？说明理由。

解. **结论：**不一定成立。下面通过举反例说明，即若 $\mathcal{A}^2 = n\mathcal{A}$，$\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$ 仍然成立。

先证 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，有 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，即 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \boldsymbol{V}$，于是有 $\mathcal{A}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ 即 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$；再证 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，若存在 $\boldsymbol{\beta}$，使 $\mathcal{A}^2(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})$，则 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$。因为 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{n}\mathcal{A}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}^2(\frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha})$，令 $\frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ 便说明了 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$。

□

题 1.7. （p100.18）设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且 $\boldsymbol{V} = \ker\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}$，证明 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 = \mathrm{Im}\mathcal{A}$。举例说明一般情况下 $\ker\mathcal{A}$ 和 $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ 不构成直和关系？

证明. 给出如下两种解法：

(1) 直接利用题目条件证明

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}) = \mathrm{Im}(\ker\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\ker\mathcal{A}) + \mathrm{Im}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \boldsymbol{0} + \mathrm{Im}^2\mathcal{A} = \mathrm{Im}^2\mathcal{A}$$

(2) 先证 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，有 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，即 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \boldsymbol{V}$，于是有 $\mathcal{A}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ 即 $\mathrm{Im}\mathcal{A}^2 \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}$；再证 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，一定存在 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$，使 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$，其中 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma} = \mathcal{A}(\eta) \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$，

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})) = \mathcal{A}^2(\eta)$$

则 $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$。综上，$\mathrm{Im}(\mathcal{A}^2) = \mathrm{Im}(\mathcal{A})$。

□

题 1.8. （p100.19）定义映射 $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ 为

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}$$

(1) 证明：$\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 在基

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

下的矩阵。

(3) 已知 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中元素 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 下的坐标为 $(1,2,3,4)^T$，求 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$。

(4) 求 $\ker\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$。

(5) 求 $\mathcal{T}$ 的不变因子和最小多项式。

(6) 是否存在一组基，使得 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵？如存在，求出这组基和相应的对角阵。

解. (1) 任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，$k\in\mathbb{R}$，显然 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathcal{T}(\boldsymbol{A})+\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$，$k\mathcal{T}(\boldsymbol{A})=\mathcal{T}(k\boldsymbol{A})$，这便说明了 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换。

(2) 计算基经过线性变换后的结果，即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_2)=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_3)=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_4)=\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{E}_1$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_3)=2\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_4$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_4)=-2\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_4$，于是

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 为所求。

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) =&\mathcal{T}[(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{x}]\\
=&\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{x}\\
=&\boldsymbol{E}_1+\frac{11}{2}\boldsymbol{E}_3+\frac{11}{2}\boldsymbol{E}_4\\
=&\begin{pmatrix}1 & 11\\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{x}=(1,2,3,4)^T$。

(4) 将 $\boldsymbol{C}$ 化为行阶梯形式矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=2$，则选取第一和第二列作为极大无关组，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T}=(\boldsymbol{E_1},\boldsymbol{E_1}+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4)$；由于 $\ker(\mathcal{T})$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的化零空间，则 $\ker(\mathcal{T})=(-3\boldsymbol{E_1}-\boldsymbol{E}_2+2\boldsymbol{E}_3,5\boldsymbol{E_1}-\boldsymbol{E}_2+2\boldsymbol{E}_4)$。

(5) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=1$；

行列式因子为 $D_1=1,D_2=1,D_3=\lambda(\lambda-1),D_4=\lambda^2(\lambda-1)^2$；

则不变因子为 $d_1=1,d_2=1,d_3=\lambda(\lambda-1),d_3=\lambda(\lambda-1)$；

最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$。

(6) 一定存在，这是由于最小多项式不同项的最高系数为 1。

则其若当标准型 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

求出属于 $\lambda=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-3,-1,2,0)^T$，$\boldsymbol{p}_2=(5,-1,0,2)^T$。

求出属于 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1,0,0,0)^T$，$\boldsymbol{p}_4=(0,0,1,1)^T$。

接着设新基底为 $(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4)$，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$，则 $(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{P}=(-3\boldsymbol{E_1}-\boldsymbol{E}_2+2\boldsymbol{E}_3,5\boldsymbol{E_1}-\boldsymbol{E}_2+2\boldsymbol{E}_4,\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4)$。

□

题 1.9.（p100.21）复数集 $\mathbb{C}$ 上的共轭变换 $\boldsymbol{z}\to\bar{\boldsymbol{z}}$ 是否是 $\mathbb{C}$ 作为复线性空间上的线性变换？是否是 $\mathbb{C}$ 作为实线性空间上的线性变换？

解. 定义变换 $\mathcal{T}(z)=\bar{z}$。任取 $z_1=a+bi, z_2=c+di\in\mathbb{C}$，$k=k_1+k_2i\in\mathbb{C}$，其中 $a,b,c,d,k_1,k_2\in\mathbb{R}$。

若选取的是复线性空间。$\mathcal{T}(z_1+z_2)=\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a-bi)+(c-di)=\bar{z}_1+\bar{z}_2=\mathcal{T}(z_1)+\mathcal{T}(z_2)$，对加法封闭；$\mathcal{T}(kz_1)=(k_1a-k_2b)+(-k_1b-k_2a)i$，$k\mathcal{T}(z_1)=(k_1+k_2i)(a-bi)=(k_1a+k_2b)+(-k_1b+k_2a)i$，$\mathcal{T}(kz_1)\neq k\mathcal{T}(z_1)$，对数乘不封闭。于是在复线性空间上不构成线性变换。

若选取的是实线性空间。加法封闭同上，下面验证数乘封闭，此时 $k_2=0$，$\mathcal{T}(kz_1)=ka-k_1b=k\mathcal{T}(z_1)$。于是在实线性空间上构成线性变换。 □

题 1.10. （p100.22）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以表示为矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 的线性组合，其中 $\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 满足

(1) 对一切 i，有 $\boldsymbol{P}_i^2=\boldsymbol{P}_i$

(2) 对一切 $i\neq j$，有 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{O}$

(3) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}_1+\cdots+\boldsymbol{P}_n$

给出具体的构造方法，并讨论该分解的唯一性。

解. 不妨令 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，则存在 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$。设 $\boldsymbol{E}_{ii}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&1&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$，这表明了矩阵第 i 行第 i 列为 1，其他元素全为 0。则 $\boldsymbol{\Lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{E}_{ii}$，$\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{Q}^{-1}$，令 $\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{Q}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 的线性组合，并且容易验证 $\boldsymbol{P}_i,\dots,\boldsymbol{P}_n$ 满足三个约束条件。

唯一性的证明不会。

□

题 1.11. （p100.23）已知 $\mathcal{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，$k\geq 1$ 为正整数，满足 $\mathcal{A}^k\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$，且 $\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}\neq\boldsymbol{0}$。

(1) 证明：$\boldsymbol{\nu},\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}$ 线性无关，特别 $k\leq\dim\boldsymbol{V}$。

(2) 证明：$\boldsymbol{W}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\nu},\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

(3) 求 $\mathcal{A}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的限制 $\mathcal{A}|_{\boldsymbol{W}}$ 在基 $\boldsymbol{\nu},\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}$ 下的矩阵。

解. (1) 只需验证对于实数 $l_1,\dots,l_k$，当 $l_1\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$ 时，有 $l_1=\cdots=l_k=0$。对等式两边进行 $\mathcal{A}^m$ $(m=k-1,\dots,1)$ 的线性变换，由于 $\mathcal{A}^k\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，则 $\mathcal{A}^{k+d}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，其中 $d\geq 0$。

$$l_1\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}^{k}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{2k-2}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0} \tag{1}$$

$$l_1\mathcal{A}^{k-2}\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{2k-1}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0} \tag{2}$$

$$\vdots$$

$$l_1\mathcal{A}\boldsymbol{\nu}+l_2\mathcal{A}^{2}\boldsymbol{\nu}+\cdots+l_k\mathcal{A}^{k}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0} \tag{n}$$

由式(1)可知，$l_1\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，而 $\mathcal{A}^{k-1}\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}$，所以 $l_1=0$。同理，观察式(2) 到式(n)，可得 $l_2=0,\dots,l_n=0$，于是 $l_1=\cdots=l_n=0$。

(2) 验证 $\boldsymbol{W}$ 的基 $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k)$ 经过线性变换后仍在 $\boldsymbol{W}$ 中即可。$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)=\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\dots,\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_k)=\mathcal{A}^k\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，这表明了 $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_{i+1}\in\boldsymbol{W}$ $(i=1,\dots,k-1)$，$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_k)=\mathbf{0}\in\boldsymbol{W}$。

(3) 根据第(2)问，$\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k)=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$。

□

题 1.12. （p100.24）已知 $\mathcal{A}$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}$，$k_i\geq 1$ 为正整数，其中 $i=1,2,\dots,s$，满足 $(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\nu}_i=\mathbf{0}$ 且 $(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i-1}\boldsymbol{\nu}_i\neq\mathbf{0}$，并记

$$\boldsymbol{W}_i=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\nu}_i,(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})\boldsymbol{\nu}_i,\dots,(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i-1}\boldsymbol{\nu}_i\}$$

证明：若 $\lambda_i\neq\lambda_j$，则 $\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{W}_j=\{\mathbf{0}\}$。

证明. 由 $(x-\lambda_i)^{k_i}$ 与 $(x-\lambda_j)^{k_j}$ 互素，则存在 $f(x),g(x)$，使 $f(x)(x-\lambda_i)^{k_i}+g(x)(x-\lambda_j)^{k_j}=1$，对应到线性变换 $\mathcal{A}$ 上即为 $f(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}+g(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}=\mathrm{id}$。

令 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}_i\cap\boldsymbol{W}_j$，则 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}_i$，于是 $\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\nu}_i+\cdots+l_{k_i}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i-1}\boldsymbol{\nu}_i$，$(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\alpha}=l_1(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\nu}_i+\cdots+l_{k_i}(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{2k_i-1}=\mathbf{0}$；同理，$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{W}_j$，$(\mathcal{A}-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。又因为 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{id}(\boldsymbol{\alpha})=f(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}\boldsymbol{\alpha}+g(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_j\mathrm{id})^{k_j}\boldsymbol{\alpha}$。所以 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{id}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{W}_j=\{\mathbf{0}\}$。

□

第二章　内积空间

题 2.1. （p119.1）证明内积的平行四边形恒等式和极化恒等式（定理 6.3）。

设 $(\cdot,\cdot)$ 为实线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的内积，$||\cdot||$ 为由内积定义的范数，则

(1) 平行四边形恒等式：对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)=||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2$

(2) 极化恒等式：对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2$

证明.

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &=||\boldsymbol{x}||^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}||^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2=2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)\\ ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &=(||\boldsymbol{x}||^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2)-(||\boldsymbol{x}||^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2)=4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

□

题 2.2. （p119.2）求 $\mathbb{R}^3$ 上的一组标准正交基 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$，其中 $\boldsymbol{\nu}_1$ 与向量 $(1,1,1)^T$ 线性相关。

解. 由题意得，设 $\boldsymbol{\nu}_1=k(1,1,1)^T$，则 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，易知 $\boldsymbol{\nu}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\boldsymbol{\nu}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T$ 与 $\boldsymbol{\nu}_1$ 正交，且 $\boldsymbol{\nu}_2$ 与 $\boldsymbol{\nu}_3$ 正交。则标准正交基为 $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$。

□

题 2.3. （p119.3）已知 $\mathbb{R}^3$ 上的向量 $\boldsymbol{\nu}=(1,2,-1)^T,\boldsymbol{\omega}=(1,1,0)^T$，求一个与 $\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega}$ 都正交的单位向量。

解. 构造 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}^T\\ \boldsymbol{\omega}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，即求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个单位长度解 $\boldsymbol{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$。

□

题 2.4. （p119.6）在一元多项式函数构成的线性空间 $\boldsymbol{R}[x]$ 上定义内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

试求 $1,x,x^2,x^3$ 的 Schmidt 正交化。

解.

$$\begin{aligned}
e_1 &= 1\\
e_2 &= x-\frac{(x,1)}{(1,1)}1=x\\
e_3 &= x^2-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}x-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}1=x^2-\frac{1}{3}\\
e_4 &= x^3-\frac{(x^3,x^2-\frac{1}{3})}{(x^2-\frac{1}{3},x^2-\frac{1}{3})}(x^2-\frac{1}{3})-\frac{(x^3,x)}{(x,x)}x-\frac{(x^3,x)}{(1,1)}1=x^3-\frac{3}{5}x
\end{aligned}$$

$e=(e_1,e_2,e_3,e_4)=(1,x,x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x)$。

□

题 2.5. （p120.11）设 $\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T$，求 $\boldsymbol{A}$ 的正交对角化。

证明. 令 $\boldsymbol{\nu}=(a_1,\ldots,a_n)^T$，显然 $(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T)^T=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T$，$\boldsymbol{A}\in\mathcal{S}^n$ 必可相似对角化。$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T)\le\min(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}})=1$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0,1$。

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$，此时 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathrm{diag}\{0,\ldots,0\}$。取 $\mathbb{R}^n$ 上的一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 组成矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0),\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,\ldots,1)$。

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，则 $a_1,\ldots,a_n$ 不全为 0，不妨令 $a_1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}$。

当 $\lambda=0$ 时，计算其特征向量，对 $\boldsymbol{A}$ 进行行变换，得 $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，则特征向量为 $\boldsymbol{e}_1=(-a_2,a_1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(-a_3,0,a_1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{e}_k=(-a_k,0,\ldots,0,a_1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{e}_{n-1}=$

$(-a_{n-1},0,\dots,0,a_1)^T$，将 $e_1,\dots,e_n$ 进行施密特正交并单位化，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1 =&\frac{1}{||\boldsymbol{\eta}_1||}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{\eta}_2 =&\frac{1}{||\boldsymbol{\eta}_2||}(\boldsymbol{e}_2-\frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1)\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\eta}_{n-1} =&\frac{1}{||\boldsymbol{\eta}_{n-1}||}(\boldsymbol{e}_{n-1}-\frac{(\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_{n-2})}{\boldsymbol{\eta}_{n-2},\boldsymbol{\eta}_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}-\cdots\frac{(\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_1)}{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1)\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}$ 是 $\lambda=0$ 的 $n-1$ 个正交的单位特征向量。

当 $\lambda=1$ 时，其单位特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_n=\frac{1}{\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}}(a_1,\dots,a_n)^T$，且与 $\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}$ 正交。

综上，令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\dots,\boldsymbol{\eta}_n)$，则 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{0,\dots,0,\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}\}$。

□

题 2.6.（p120.12）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于 $\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\omega\\0&\omega&0\end{pmatrix}$ 型矩阵，求出 ω 的值。

解. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 相似，所以两者的行列式因子相同。

$$\boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&-a&-b\\a&\lambda&-c\\b&c&\lambda\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&\omega\\0&-\omega&\lambda\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子为 $D_1=D_1=1,D_3=\lambda(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)$；矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的行列式因子为 $D_1=D_1=1,D_3=\lambda(\lambda^2+\omega^2)$。所以 $a^2+b^2+c^2=\omega^2\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

□

题 2.7.（p120.13）证明：实反对称矩阵（$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$）于反 Hermite 矩阵（$\boldsymbol{A}^H=-\boldsymbol{A}$）的特征值为纯虚数或 0。

证明. 不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=a+bi$，特征向量为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}i$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^n$。下面提供两种方法来解决这个问题：

(1) $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}i)=(a+bi)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}i)\Rightarrow\boldsymbol{A\mu}=a\boldsymbol{\mu}-b\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{A\nu}=a\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\mu}$，且 $\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}=(\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu})^H=\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{\mu}=-\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}$，所以 $\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}=0$；同理，$\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{A\nu}=0$。又因为 $\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}=a\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{\mu}-b\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{A\nu}=a\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{\nu}+b\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}+\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{A\nu}=a(||\boldsymbol{\mu}||^2+||\boldsymbol{\nu}||^2)=0$，而 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}$ 不能同时为 $\boldsymbol{0}$，所以 $a=0$，这说明了 $\lambda=bi$ 为纯虚数或 0。

(2) $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，两边同时与 $\boldsymbol{x}$ 做内积 $(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$。又因为 $(\boldsymbol{Ax})^H=\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H,(\lambda\boldsymbol{x})^H=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H$ ，于是 $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{x}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}\Rightarrow-\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{Ax}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}\Rightarrow-\lambda\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}$，此时有 $-(a+bi)=a-bi\Rightarrow a=0$，这说了 $\lambda=bi$ 为纯虚数或 0。

ps：两种方法都不需要针对矩阵类型分类讨论，原因在于共轭转置 H 包含转置 T。

□

题 2.8. （p121.15）设 $\boldsymbol{V}$ 为 Euclid 空间，$\mathcal{A}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的对称变换，若对一切非零向量 $\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，均有 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})>0$，这样的对称变换称为**正定**的，求证：正定的对称变换在标准正交基下的矩阵为正定矩阵。

证明. 取标准正交基 $(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$，设 $\boldsymbol{v}$ 在基下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，对称变换 $\mathcal{A}$ 在基下的变换矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\mathcal{A}\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Ax}$。由 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})>0$ 与 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}>0$，即 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

□

题 2.9. （p121.16）试给出一个既不是对称变换，也不是正交变换的正规变换。

解. 不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为在标准正交基 $(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ 下满足上述变换的变换矩阵。对称变换即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$；正交变换即 $\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{E}$；正规变换为 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^H$。由于对称变换与正交变换定义在欧式空间，矩阵需要满足的条件变为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$。显然，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ 为所求，其中 $\boldsymbol{A}^T\neq\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$。

□

题 2.10. (p121.21) 设 $\boldsymbol{V}$ 为 Euclid 空间，$\boldsymbol{T}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且对任何 $\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，均有 $\boldsymbol{\nu}-\mathcal{T}\boldsymbol{\nu}\in(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，这样的线性变换 $\boldsymbol{V}$ 上的**投影变换**。

(1) 证明：对任何 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换 $\mathcal{T}$，有 $\ker\mathcal{T}=(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，该命题的逆命题是否成立？

(2) 证明：线性变换 $\mathcal{T}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换的充分必要条件是 $\mathcal{T}$ 是对称变换且满足 $\mathcal{T}^2=\mathcal{T}$。

(3) 设 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换，求证：$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{O}$，当且仅当 $\mathcal{T}_1\perp\mathcal{T}_2$。

(4) 设 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换，求证：$\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\supset\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

(5) 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换，求证：$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，且此时有 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathrm{Im}\mathcal{T}_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

(6) 设 $\mathcal{A}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的对称变换，证明 $\mathcal{A}$ 可表示为一组投影变换的线性组合，且该组投影变换的像空间的直和恰为 $\boldsymbol{V}$。

证明. 由于线性变换和线性变换下对应的矩阵是基本等价的，在后续的证明过程中，不再对两者进行区分。

定理 2.1. 若对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha} = 0$ 恒成立，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵（即 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$）。

(1) 先证 $\ker\mathcal{T} \subset (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$，只需证明任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \ker\mathcal{T}$ 有 $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$，即任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Im}\mathcal{T}$ 有 $(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}\boldsymbol{\gamma}) = 0$，其中 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \mathcal{T}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}$。根据投影变换的定义，有 $0 = (\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}\boldsymbol{\gamma})$，于是 $\ker\mathcal{T} \subset (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$；

下证 $\ker\mathcal{T} = (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$，由于 $\dim(\ker\mathcal{T}) + \dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}) = n$，则 $\dim(\ker\mathcal{T}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$，于是 $\ker\mathcal{T} = (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$。

逆命题不一定成立。令 $\mathcal{T}$ 在标准正交基下的矩阵为 $2\boldsymbol{E}$，此时 $\ker(\mathcal{T}) = \{\mathbf{0}\}, \mathrm{Im}\mathcal{T} = \mathbb{R}^n, (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp = \{\mathbf{0}\}$，这满足了 $\ker\mathcal{T} = (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$，但 $\boldsymbol{\nu} - \mathcal{T}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{E\nu} = -\boldsymbol{\nu} \notin (\mathrm{Im}\mathcal{T})^\perp$。

(2) 先证必要性：由(1)得，任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$ 有 $\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} \in \ker\mathcal{T}$，因此 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}^2\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，这说明了 $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$。又由于 $(\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}) = 0$，而 $(\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}^2\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$，这说明了 $(\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$，即 $\mathcal{T}$ 是对称变换。

再证充分性：即任取 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}, (\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}\boldsymbol{\beta}) = (\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} - \mathcal{T}^2\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = ((\mathcal{T} - \mathcal{T}^2)\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = 0$。

(3) (a) 先证充分性：显然 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是对称变换，只需证明 $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$，即证 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$，而 $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = \mathcal{O}$，所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$。

再证必要性：若 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是投影变换，则 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$。又因为 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2^2 = -\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2^2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$。

(b) 先证充分性，任取 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，有 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta}) = 0$，不妨令 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$，则 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}) = 0$，根据定理2.1有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = -(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$，即 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$，所以

$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 是投影变换。

再证必要性，任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，欲证 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=0$，只需注意到 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})=0$。

(4) 先证充分性，显然 $\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$ 是对称变换，只需证明 $(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2)^2=\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$，即证 $2\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{O}$。由于 $\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}\in(\mathrm{Im}\mathcal{T}_1)^\perp\subset(\mathrm{Im}\mathcal{T}_2)^\perp$，则 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=0$。

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})\\
=&(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})-(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})\\
=&(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}
$$

根据定理2.1，$(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=-(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$，于是 $2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。

再证必要性，若 $\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$ 是投影变换，则 $2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。只需证明任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，存在 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，有 $\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\beta}$。由于任取 $\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，有 $2\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\nu})=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\nu})\Rightarrow\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\boldsymbol{\nu}=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\boldsymbol{\nu}$，所以 $\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}=2\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_1+\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_1+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\beta}$。

(5) (a) 先证充分性，$(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=\mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$，则其为对称变换；接着有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^2=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$，说明为投影变换。

再证必要性，若 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 是投影变换，则其也是对称变换，于是 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=\mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。

(b) 先证 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\subset\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$，则 $\alpha\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1$，又由于 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathrm{Im}\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

再证 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\supset\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_1^2\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\alpha}_2$，说明了 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$。

综上 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

(6) 只需证明 $\mathcal{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{T}_i$，其中

(a) $\mathcal{T}_i$ 为对称变换

(b) $\mathcal{T}_i^2=\mathcal{T}_i$

(c) $\mathcal{T}_i\mathcal{T}_j=\mathcal{O}(i\neq j)$

(d) $\mathcal{I}=\mathcal{T}_1+\cdots+\mathcal{T}_n$

下面讨论其构造方法。

由于是对称变换，则必可相似对角化，于是有 $\mathcal{Q}\mathcal{Z}\mathcal{Q}^T=\mathcal{A}$。令 $\mathcal{Z}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{T}_{ii}$，其中 $\mathcal{Q}$ 为正交变换；$\mathcal{T}_{ii}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，即第 i 行 i 列的元素为 1，其他元素全是 0。于是 $\mathcal{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{T}_i$，接下来验证四个条件

(a) $(\mathcal{T}_i)^T=(\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T)^T=\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T=\mathcal{T}_i$

(b) $\mathcal{T}_i^2=(\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T)^2=\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T=\mathcal{T}_i$

(c) $\mathcal{T}_i\mathcal{T}_j=\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T\mathcal{Q}\mathcal{T}_{jj}\mathcal{Q}^T=\mathcal{O}$

(d) $\mathcal{T}_1+\cdots+\mathcal{T}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T=\mathcal{Q}(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{T}_{ii})\mathcal{Q}^T=\mathcal{Q}\mathcal{I}\mathcal{Q}^T=\mathcal{Q}\mathcal{Q}^T=\mathcal{I}$

下面说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\mathcal{T}_n=\boldsymbol{V}$。

显然 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_i\subset\boldsymbol{V}$，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1+\cdots+\mathrm{Im}\mathcal{T}_n\subset\boldsymbol{V}$，由于 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}_1+\cdots+\mathrm{Im}\mathcal{T}_n)=\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{T}_1+\cdots+\mathcal{T}_n))=\dim(\mathrm{Im}\mathcal{I})=n$，这说明了 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1+\cdots+\mathrm{Im}\mathcal{T}_n=\boldsymbol{V}$；又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}_i)=\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{ii}\boldsymbol{Q}^T)=\mathrm{r}(\boldsymbol{T}_{ii})=1$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}_i)=1+\cdots+1=n=\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}_1+\cdots+\mathrm{Im}\mathcal{T}_n)$，说明了和为直和。

$\square$

第三章　多项式

题 3.1. （p44.1）计算 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$。

(1) $f(x) = x^4 - 4x + 5$，$g(x) = x^2 - x + 2$

解. $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$，其中 $q(x) = x^2 + x - 1$，$r(x) = -7x + 7$。

□

题 3.2. （p44.2）求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式和最小公倍式。

(1) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$，$g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

解. $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$，其中 $q_1(x) = x - 1$，$r_1(x) = 2x^2 + 2x + 2$

$g(x) = q_2(x)r_1(x)$，其中 $q_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

于是

$$\begin{aligned}
\gcd(f(x), g(x)) =& \frac{1}{2}r_1(x) = x^2 + x + 1 \\
\operatorname{lcm}(f(x), g(x)) =& \frac{f(x)g(x)}{\gcd(f(x), g(x))} \\
=& \frac{(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)}{x^2 + x + 1} \\
=& (x^2 + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

注：以上计算最大公因式乘的系数为凑首 1 多项式。

□

题 3.3.（p44.3）求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $\gcd(f(x), g(x))$，以及满足等式 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$ 的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$。

(1) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$，$g(x) = x^2 - x - 1$

解. $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$，其中 $q_1(x) = x^2 - 3$，$r_1(x) = x - 2$

$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$，其中 $q_2(x)=x$，$r_2(x)=x-1$

$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$，其中 $q_3(x)=1$，$r_3(x)=-1$

$r_2(x)=q_4(x)r_3(x)$，其中 $q_4(x)=-x+1$

$\gcd(f(x),g(x))=-r_3(x)=1$，于是 $1=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，其中 $u(x)=-1-x$，$v(x)=x^3+x^2-3x-2$

注：以上计算最大公因式乘的系数为凑首 1 多项式。

□

题 3.4. （p45.6）若多项式 $f(x),g(x),u(x),v(x)$ 满足 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x))$，证明 $u(x),v(x)$ 互素。

证明. 令 $d(x)=\gcd(f(x),g(x))$，则 $f(x)=d(x)p(x)$，$g(x)=d(x)q(x)$，

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x))\Rightarrow u(x)d(x)p(x)+v(x)d(x)q(x)=d(x)\Rightarrow u(x)p(x)+v(x)q(x)=1$，这便说明了 $u(x),v(x)$ 互素。

□

第四章 矩阵的 Jordan 标准形

题 4.1. （p63.1）利用初等变换把下列 λ 矩阵化为等价标准形。

$$(1)\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}$$

解.

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 2\lambda-2 & 2\lambda^2-2 & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(r_1-r_2)\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda) \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2-c_1]{r_2-(\lambda-1)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda) \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(\lambda^2-\lambda)c_1]{c_3\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda(\lambda+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+\lambda c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -3\lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3\times-\frac{1}{4}]{(c_3+3\lambda c_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(\lambda-1)c_2]{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

题 4.2. （p64.2）求下列 λ 矩阵的行列式因子、不变因子和初等因子。

$$(1)\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 & -6 \\ 0 & \lambda-3 & 8 \\ 0 & 2 & \lambda+5 \end{pmatrix}$$

解. (1) $D_1 = 1, D_2 = \lambda - 1, D_3 = (\lambda - 1)^3$；$d_1 = 1, d_2 = \lambda - 1, d_3 = (\lambda - 1)^2$；初等因子组：$(\lambda - 1)^2, \lambda - 1$。

(2) $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = (\lambda + 1)(\lambda - 4\sqrt{2} + 1)(\lambda + 4\sqrt{2} + 1)$；$d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = (\lambda + 1)(\lambda - 4\sqrt{2} + 1)(\lambda + 4\sqrt{2} + 1)$；初等因子组：$\lambda + 1, \lambda - 4\sqrt{2} + 1, \lambda + 4\sqrt{2} + 1$。

□

题 4.3.（p64.3）设 6 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 5，其初等因子是 $\lambda - 1, \lambda - 1, (\lambda - 2)^3, \lambda + 2, (\lambda + 2)^2$，求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子、不变因子，以及 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的等价标准形。

解. $d_5 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^2, d_4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2), d_3 = d_2 = d_1 = 1$；$D_1 = D_2 = D_3 = 1, D_4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2), D_5 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^3$；等价标准型为：

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & (\lambda - 1)(\lambda + 2) & & \\ & & & & (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^2 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中，空白的位置全为 0。 □

题 4.4. （p64.5）证明：两个等价的 n 阶 λ 矩阵的行列式只相差一个常数因子。

证明. 不妨令题中所说的两个矩阵为 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$。

若非满秩矩阵，则 $|\boldsymbol{A}(\lambda)| = |\boldsymbol{B}(\lambda)| = 0$，显然符合题意。

若为满秩矩阵，则 $|\boldsymbol{A}(\lambda)| \neq 0, |\boldsymbol{B}(\lambda)| \neq 0$。由于等价的 λ 矩阵具有相同的行列式因子和不变因子，则 $|\boldsymbol{A}| = k_1 D_n(\boldsymbol{A}(\lambda)) = k_1 D_n, |\boldsymbol{B}| = k_2 D_n(\boldsymbol{B}(\lambda)) = k_2 D_n$，其中 $k_1, k_2 \neq 0$。于是 $\frac{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}{|\boldsymbol{B}(\lambda)|} = \frac{k_1}{k_2}$。 □

题 4.5. （p64.6）求下列矩阵的 Jordan 标准形。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

解. (1) $D_1=1, D_2=\lambda+1, D_3=(\lambda+1)^2$；$d_1=1, d_2=\lambda+1, d_3=(\lambda+1)^2$；初等因子组为 $(\lambda+1)^2, \lambda+1$；Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$。

(2) $D_1=1, D_2=1, D_3=(\lambda-1)^3$；$d_1=1, d_2=1, d_3=(\lambda-1)^3$；初等因子组为 $(\lambda-1)^3$；Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

□

题 4.6. （p64.7）证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵（即存在正整数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$）当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都等于零。

证明. 先证必要性。若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，由 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda^k=0$，则 $\lambda=0$。

再证充分性。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必定相似于矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_m\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}_i$ 为 Jordan 标准型，$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}$，空白位置全是 0。

由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$，若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{O}$，于是有 $\boldsymbol{J}_1,\dots,\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{O}$。令 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶数为 $\mathcal{N}_i$，容易证明 $J_i^{\mathcal{N}_i}=\boldsymbol{O}$。只需取 $k=\max\limits_i\{\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_m\}$，则 $\boldsymbol{J}_i^k=\boldsymbol{O}, i=1,\dots,m$，于是 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{O}$，这便完成了证明。

□

题 4.7. （p64.8）设非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角阵。

证明. 由 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$。若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，此时有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$，与 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵矛盾，所以 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵。

□

题 4.8. （p64.9）求 3 阶幂零阵的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&*&&\\&0&*&\\&&\ddots&*\\&&&0\end{pmatrix}$ 相似，其中 $*$ 为 0 或 1，空白处全为 0，则：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{或 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{或 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

□

题 4.9. （p64.10）求 3 阶幂等阵（即满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$）的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^2-\lambda$，且 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化。

(1) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda$，此时初等因子为 λ,λ,λ，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

(2) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda-1$，此时初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(3) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$，此时初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda-1$ 或 $\lambda,\lambda-1,\lambda-1$。$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

□

题 4.10. （p64.11）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^2-1$，且 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化。

(1) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda+1$，此时初等因子为 $\lambda+1,\lambda+1,\lambda+1$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$。

(2) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda-1$，此时初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(3) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)$，此时初等因子为 $\lambda+1,\lambda+1,\lambda-1$ 或 $\lambda+1,\lambda-1,\lambda-1$。

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\text{ 或 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

□

题 4.11. （p64.12）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^2-1$，$\lambda-1,\lambda+1$ 两个多项式的次数均为 1，所以一定可以相似于对角阵。 □

题 4.12. （p64.13）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{E}\Rightarrow m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^3-\lambda-10$，下面探究 $g(\lambda)=\lambda^3-\lambda-10$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上根的分布。

$g'(\lambda)=3\lambda^2-1$，所以 $g(\lambda)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 单调递减，在 $(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 上单调递增。且 $g(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}-10<0,g(\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{2}{3\sqrt{3}}-10<0$，$\lim_{\lambda\to+\infty}=+\infty$，由零点定理，存在 $\lambda_0\in(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 使 $g(\lambda_0)=0$。这表明了 $g(\lambda)$ 可以被分解为 $(\lambda-\lambda_0)(\lambda^2+a\lambda+b)$ 的形式，其中 $a^2-4b<0$。

进一步的，我们可以在复数域上将其分解为 $(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ 的形式，并且由于 λ_1,λ_2 共轭，所以 $\lambda_0\neq\lambda_1\neq\lambda_2$。$\lambda-\lambda_0,\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2$ 三个多项式的次数均为 1，所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵。

□

题 4.13. （p65.19）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零复方阵，$d=\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$。

(1) 证明：对一切 $n \times 1$ 的列矩阵 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{A}^d\boldsymbol{x}$ 线性相关。

(2) 证明：对一切正整数 $k < d$，都存在列矩阵 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关。

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵时，是否存在实的列矩阵 $\boldsymbol{x}$，使得(2)成立？

证明. (1) 由 $\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = d$，则 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = a_1\lambda^d + a_2\lambda^{d-1} + \cdots + a_d\lambda + a_{d+1}$，其中 $a_1 \neq 0$。由 Hamilton-Cayley 定理，有 $a_1\boldsymbol{A}^d + a_2\boldsymbol{A}^{d-1} + \cdots + a_d\boldsymbol{A} + a_{d+1} = \boldsymbol{O}$，等式两边同乘列向量 $\boldsymbol{x}$，则 $a_1(\boldsymbol{A}^d\boldsymbol{x}) + a_2(\boldsymbol{A}^{d-1}\boldsymbol{x}) + \cdots + a_d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + a_{d+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，且 $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$ 不全为 0，这是线性相关的定义，由此便完成了证明。

(2) 使用反证法。若对一切正整数 $k < d$，任取列矩阵 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性相关，即若 $a_0\boldsymbol{x} + a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 成立，则 $a_0, \dots, a_{k-1}$ 不能全为 0。

由于 $\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = d$，则 $\boldsymbol{A}$ 在复数域上至少有 d 个特征值 $\lambda_i, \dots, \lambda_d$。不妨设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量（$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$），于是 $\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{x} = \lambda_i^j\boldsymbol{x}$，其中 $\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$。此时 $a_0\boldsymbol{x} + a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x} = (a_0 + a_1\lambda_i + \cdots + a_{k-1}\lambda_i^{k-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow h(\lambda_i) = a_0 + a_1\lambda_i + \cdots + a_{k-1}\lambda_i^{k-1} = 0$（注：以上的等式对于所有的 λ_i 都是成立的）。

由于 $h(\lambda)$ 在复数域上有且只有 $k-1$ 个根，则一定存在某些 $\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ 使得 $h(\lambda_i) \neq 0$，与 $h(\lambda_i) = 0$ 矛盾。所以只有当 $a_0 = \ldots = a_{k-1} = 0$ 才能保证全部的 λ_i 有 $h(\lambda_i) = 0$ 成立，这说明了 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关，反证法推出矛盾，所以原命题成立。

(3) **结论**：不一定存在。（具体证明过程暂时不会）。

□

第五章　矩阵函数

题 5.1. （p79.1）设函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\sin t & -e^t & t\\ \cos t & e^t & t^2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，试求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t), |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)|, \lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{A}(t)$。

解. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -e^t & 1\\ -\sin t & e^t & 2t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)|=0$，$\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$。 □

题 5.2. （p79.2）设函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^t & 1\\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0\\ 3t & 0 & 0\end{pmatrix}$，试求 $\int\boldsymbol{A}(t)dt, \int_0^u\boldsymbol{A}(t)dt$。

解. $\int\boldsymbol{A}(t)dt=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^t & t\\ -e^{-t} & e^{2t} & 0\\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\int_0^u\boldsymbol{A}(t)dt=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2u} & (u-1)e^u & u\\ -e^{-u} & e^{2u} & 0\\ \frac{3}{2}u^2 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2u}-\frac{1}{2} & (u-1)e^u+1 & u\\ -e^{-u}+1 & e^{2u}-1 & 0\\ \frac{3}{2}u^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

□

题 5.3. （p79.3）判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}^n$ 是否收敛，如果收敛，计算出结果。

解. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$，特征值 $\lambda_1=-3, \lambda_2=5$。

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$，于是:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}1&2\\8&1\end{pmatrix}^n&=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}\frac{10}{13}&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{18}{13}&\frac{4}{13}\\\frac{16}{13}&\frac{18}{13}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

计算出级数的值恰恰说明了其收敛。

□

题 5.4. （p79.4）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1\\4&4\end{pmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}},e^{\boldsymbol{B}}$。

解. (1) $\lambda_1=1,\lambda_2=2,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则:

$$\begin{cases}P(\lambda_1)=P(1)=a_0+a_1=e\\P(\lambda_1)=P(2)=a_0+2a_1=e^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=a_0=2e-e^2\\a_1=e^2-e\end{cases}$$

$$e^{\boldsymbol{A}}=P(\boldsymbol{A})=(2e-e^2)\boldsymbol{E}+(e^2-e)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2e-e^2&e^2-e\\-2e^2+2e&2e^2-e\end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=2,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-2)^2$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则:

$$\begin{cases}P(\lambda)=P(2)=a_0+2a_1=e^2\\P'(\lambda)=P'(2)=a_1=e^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=-e^2\\a_1=e^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{B}}=P(\boldsymbol{B})&=e^2\boldsymbol{E}+e^2\boldsymbol{B}\\&=\begin{pmatrix}-e^2&-e^2\\4e^2&3e^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 5.5. （p79.5）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-\theta\\\theta&0\end{pmatrix}$，试证 $e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix}\cos\theta t&-\sin\theta t\\\sin\theta t&\cos\theta t\end{pmatrix}$。

证明. $\lambda_1=\theta\mathrm{i},\lambda_2=-\theta\mathrm{i},m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-\theta\mathrm{i})(\lambda+\theta\mathrm{i})$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(\theta\mathrm{i})=a_0+a_1\theta\mathrm{i}=e^{\theta t\mathrm{i}} \\ P(\lambda_2)=P(-\theta\mathrm{i})=a_0-a_1\theta\mathrm{i}=e^{-\theta t\mathrm{i}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\cos\theta t \\ a_1=\frac{\sin\theta t}{\theta} \end{cases}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=P(\boldsymbol{A})=\cos\theta t\boldsymbol{E}+\frac{\sin\theta t}{\theta}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta t & -\sin\theta t\\ -\sin\theta t & \cos\theta t\end{pmatrix}$$

□

题 5.6. （p79.6）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{pmatrix}$，利用上题5.5结果求 $e^{\boldsymbol{A}}$。

解. 令 $\boldsymbol{A}=\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{pmatrix}$ 由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，并且根据题5.5可得：

$$e^{\boldsymbol{A}}=e^{\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}}=e^{\sigma\boldsymbol{E}}e^{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}e^\sigma & 0\\ 0 & e^\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^\sigma\cos\theta & -e^\sigma\sin\theta\\ -e^\sigma\sin\theta & e^\sigma\cos\theta\end{pmatrix}$$

□

题 5.7. （p80.7）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9 & -6 & -7\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & -6 & -8\end{pmatrix}$，求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

解. $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，显然 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & 1\\ & & -1\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。

并且有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^T\\ \boldsymbol{p}_2=(2,1,2)^T\\ \boldsymbol{p}_3=(5,1,2)^T\end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

于是

$$e^{2At} = Pe^{2Jt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{4t} + (-4t-3)e^{-2t} & -2e^{4t} + 2e^{-2t} & -3e^{4t} + (4t+3)e^{-2t} \\ -2te^{-2t} & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 4e^{4t} + (-4t-4)e^{-2t} & -2e^{4t} + 2e^{-2t} & -3e^{4t} + (4t+4)e^{-2t} \end{pmatrix}$$

□

题 5.8. （p80.8）设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 8 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 e^{At}。

解. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$，显然 A 的若当标准形 $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。并且有 $J = P^{-1}AP \Rightarrow PJ = AP$。不妨令 $P = (p_1, p_2, p_3)$，其中 P 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases} Ap_1 = 2p_1 \\ Ap_2 = p_1 + 2p_2 \\ Ap_3 = p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = (-1, 4, 1)^T \\ p_2 = (-1, 3, 1)^T \\ p_3 = (0, 3, 1)^T \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & -3te^{2t} \\ (-4t-3)e^{2t} + 3e^{t} & (-4t+1)e^{2t} & (12t-3)e^{2t} + 3e^{t} \\ (-t-1)e^{2t} + e^{t} & -te^{2t} & 3te^{2t} + e^{t} \end{pmatrix}$$

□

题 5.9. （p80.9）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$，试求 $\cos\boldsymbol{A},\sin\boldsymbol{B},e^{\boldsymbol{B}t}$。

解. $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases}P(\lambda_1)=P(1)=a_0+a_1=\cos 1\\P(\lambda_2)=P(5)=a_0+5a_1=\cos 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=\frac{-\cos 5+5\cos 1}{4}\\a_1=\frac{\cos 5-\cos 1}{4}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos\boldsymbol{A}=P(\boldsymbol{A})&=\frac{-\cos 5+5\cos 1}{4}\boldsymbol{E}+\frac{\cos 5-cos 1}{4}\boldsymbol{A}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\cos 5+3\cos 1&2\cos 5-2\cos 1&\cos 5-\cos 1\\\cos 5-\cos 1&2\cos 5+2\cos 1&\cos 5-\cos 1\\\cos 5-\cos 1&2\cos 5-2\cos 1&\cos 5+3\cos 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:ccc}3&0&0&0\\\hdashline 0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1&\\&\boldsymbol{J}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2$ 为若当块，空白位置全是 0。

则 $\sin\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sin\boldsymbol{J}_1&\\&\sin\boldsymbol{J}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 3&0&0&0\\0&-\sin 2&\cos 2&\frac{\sin 2}{2}\\0&0&-\sin 2&\cos 2\\0&0&0&-\sin 2\end{pmatrix}$

则 $e^{\boldsymbol{B}t}=\begin{pmatrix}e^{\boldsymbol{J}_1t}&\\&e^{\boldsymbol{J}_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&0&0&0\\0&e^{-2t}&te^{-2t}&\frac{t^2e^{-2t}}{2}\\0&0&e^{-2t}&te^{-2t}\\0&0&0&e^{-2t}\end{pmatrix}$

□

题 5.10. （p80.10）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}t},e^{\boldsymbol{B}t},\sin\boldsymbol{B}t$。

解. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda+2)$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(0)=a_0=1 \\ P(\lambda_2)=P(-2)=a_0-2a_1=e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=1 \\ a_1=\frac{1-e^{-2t}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t}=P(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{E}+\frac{1-e^{-2t}}{2}\boldsymbol{A} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2,m_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$。

(1) 令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(-1)=a_0-a_1=e^{-t} \\ P(\lambda_2)=P(2)=a_0+2a_1=e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3} \\ a_1=\frac{-e^{-t}+e^{2t}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{B}t}=P(\boldsymbol{B})&=\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3}\boldsymbol{E}+\frac{-e^{-t}+e^{2t}}{3}\boldsymbol{B} \\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{2t}+4e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ 0 & 3e^{2t} & 0 \\ -4e^{2t}+4e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} & 4e^{2t}-e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(-1)=a_0-a_1=\sin t \\ P(\lambda_2)=P(2)=a_0+2a_1=\sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{\sin 2t+2\sin t}{3} \\ a_1=\frac{\sin 2t-\sin t}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin\boldsymbol{B}t=P(\boldsymbol{B})&=\frac{\sin 2t+2\sin t}{3}\boldsymbol{E}+\frac{\sin 2t-\sin t}{3}\boldsymbol{B} \\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sin 2t+4\sin t & \sin 2t-\sin t & \sin 2t-\sin t \\ 0 & 3\sin 2t & 0 \\ -4\sin 2t+4\sin t & \sin 2t-\sin t & 4\sin 2t-\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.11. （p80.11）求常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases} x_1'(t)=-7x_1-7x_2+5x_3 \\ x_2'(t)=-8x_1-8x_2-5x_3 \\ x_3'(t)=-5x_2 \end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(0)=3,x_2(0)=-2,x_3(0)=1$ 的解。

解. 由题意得：$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-7&-7&5\\-8&-8&-5\\0&-5&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-15,\lambda_2=-5,\lambda_3=5$。

$$\text{则 } \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15&&\\&-5&\\&&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-15t}&&\\&e^{-5t}&\\&&e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-15t}&e^{-5t}&e^{5t}\\3e^{-15t}&-e^{-5t}&-e^{5t}\\e^{-15t}&-e^{-5t}&e^{5t}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}e^{-15t}+\frac{9}{10}e^{-5t}+\frac{17}{10}e^{5t}\\\frac{3}{5}e^{-15t}-\frac{9}{10}e^{-5t}-\frac{17}{10}e^{5t}\\\frac{1}{5}e^{-15t}-\frac{9}{10}e^{-5t}+\frac{17}{10}e^{5t}\end{pmatrix}$$

□

题 5.12. （p80.12）求常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases}x_1'(t)=x_1(t)-x_2(t)\\x_2'(t)=4x_1(t)-3x_2(t)+1\end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(0)=1,x_2(0)=2$ 的解。

解. 由题意得：$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T,\boldsymbol{F}(t)=(0,1)^T$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)^2$。令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$ ，则

$$\begin{cases}P(\lambda)=P(-1)=a_0-a_1=e^{-t}\\P'(\lambda)=P'(-1)=a_1=te^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=(1+t)e^{-t}\\a_1=te^{-t}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=P(\boldsymbol{A})=(1+t)e^{-t}\boldsymbol{E}+te^{-t}\boldsymbol{A}\\&=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{-t}&-te^{-t}\\4te^{-t}&(-2t+1)e^{-t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} (-2u+1)e^{u} & ue^{u} \\ -4ue^{u} & (2u+1)e^{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} (t+2)e^{-t} - 1 \\ (2t+3)e^{-t} - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 5.13. （p80.13）求微分方程组 $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

解. 由题意得：$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，显然 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准型 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$，并且有 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。不妨令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1 = (1, 0, 0)^T \\ \boldsymbol{p}_2 = (2, 2, -2)^T \\ \boldsymbol{p}_3 = (0, 1, 1)^T \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ 0 & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

不妨设 $\boldsymbol{x}(0)=(k_1,k_2,k_3)^T$，则 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}(k_1+k_2t+k_3t)e^{2t}\\(k_2t+k_2+k_3t)e^{2t}\\(-k_2t-k_3t+k_3)e^{2t}\end{pmatrix}$。

□

题 5.14. （p80.14）求微分方程组 $\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{F}(t)$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。

解. 由题意得：$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=5$。

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\\&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&\\&e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{2t}+e^{4t}&-e^{2t}+e^{4t}\\-e^{2t}+e^{4t}&e^{2t}+e^{4t}\end{pmatrix}$

不妨设 $\boldsymbol{x}(0)=(k_1,k_2)^T$，则：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t)&=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{F}(u)du\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{2t}+e^{4t}&-e^{2t}+e^{4t}\\-e^{2t}+e^{4t}&e^{2t}+e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{2t}+e^{4t}&-e^{2t}+e^{4t}\\-e^{2t}+e^{4t}&e^{2t}+e^{4t}\end{pmatrix}\int_0^t\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-2u}+e^{-4u}&-e^{-2u}+e^{-4u}\\-e^{-2u}+e^{-4u}&e^{-2u}+e^{-4u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}du\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}k_1(e^{2t}+e^{4t})+k_2(-e^{2t}+e^{4t})+e^{2t}-1\\k_1(-e^{2t}+e^{4t})+k_2(e^{2t}+e^{4t})+1-e^{2t}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(k_1+k_2)e^{4t}+(k_1-k_2+1)e^{2t}-1\\(k_1+k_2)e^{4t}+(k_2-k_1-1)e^{2t}+1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 5.15. （p81.16）设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，$\boldsymbol{B}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$。若 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0$，证明对一切 $t\in\mathbb{R}$，$\det\boldsymbol{B}(t)=1$。

证明. 由题意得，不妨设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\lambda_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{B}(t)e^{\boldsymbol{A}t}$ 的特征值为 $e^{\lambda_i t}$，则

$$\det\boldsymbol{B}(t) = \prod_i^n e^{\lambda_i t} = e^{\sum\limits_i^n \lambda_i t} = e^{t\times \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})} = e^0 = 1$$

□

第六章　矩阵分解

题 6.1.（p140.1）计算下列矩阵的 Doolittle 分解，Crout 三角分解和 LDU 三角分解。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \\ -2 & -10 & -13 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 4 & 11 & 6 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix}$

解. (1) 先对矩阵进行初等行变换变成上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \\ -2 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 为上面所求，将每一步变换用初等矩阵表示，则 $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$，于是

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解、Crout 分解、LDU 分解

$$\boldsymbol{LR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{LDU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{LU} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中空白位置全是 0。

(2) 先对矩阵进行初等行变换变成上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 4 & 11 & 6 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{3}{2}r_1} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 为上面所求，将每一步变换用初等矩阵表示，则 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}$，于是

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解、Crout 分解、LDU 分解

$$\boldsymbol{LR}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{LDU}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 3 & \\ & & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{LU}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中空白位置全是 0。

□

题 6.2. （p141.2）计算下列矩阵的 Cholesky 分解。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & -6 \\ -6 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

解. (1) 设 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{G}^T=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。于是

有：

$$\begin{cases} g_{11}^2 = 1 \\ g_{11}g_{21} = 1 \\ g_{11}g_{31} = -1 \\ g_{21}g_{11} = 1 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 2 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = -3 \\ g_{31}g_{11} = -1 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = -3 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{21} = 1 \\ g_{31} = -1 \\ g_{22} = 1 \\ g_{32} = -2 \\ g_{33} = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 设 $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{G}^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。于是有：

$$\begin{cases} g_{11}^2 = 4 \\ g_{11}g_{21} = 4 \\ g_{11}g_{31} = -6 \\ g_{21}g_{11} = 4 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 5 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = -6 \\ g_{31}g_{11} = -6 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = -6 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 2 \\ g_{21} = 2 \\ g_{31} = -3 \\ g_{22} = 1 \\ g_{32} = 0 \\ g_{33} = 2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

题 6.3. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 12 & 20 & 16 \\ 3 & 10 & 20 & 18 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix}$ 的 Doolittle 分解。

解. 先对矩阵进行初等行变换变成上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 12 & 20 & 16 \\ 3 & 10 & 20 & 18 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 3 & 10 & 20 & 18 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 6 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+\frac{3}{2}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 为上面所求，将每一步变换用初等矩阵表示，则 $\boldsymbol{P}_5\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$，于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= (\boldsymbol{P}_5\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_4^{-1}\boldsymbol{P}_5^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

□

题 6.4. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 10 & 2 \\ 3 & 10 & 14 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 29 \end{pmatrix}$ 的 Cholesky 分解。

解. 设 $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{G}^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ & & g_{33} & g_{43} \\ & & & g_{44} \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。

于是有：

$$\begin{cases} g_{11}^2 = 1 \\ g_{11}g_{21} = 2 \\ g_{11}g_{31} = 3 \\ g_{11}g_{41} = 4 \\ g_{21}g_{11} = 2 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 8 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = 10 \\ g_{21}g_{41} + g_{22}g_{42} = 2 \\ g_{31}g_{11} = 3 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = 10 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 14 \\ g_{31}g_{41} + g_{32}g_{42} + g_{33}g_{43} = 6 \\ g_{41}g_{11} = 4 \\ g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} = 2 \\ g_{41}g_{31} + g_{42}g_{32} + g_{43}g_{33} = 6 \\ g_{41}^2 + g_{42}^2 + g_{43}^2 + g_{44}^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{21} = 2 \\ g_{31} = 3 \\ g_{41} = 4 \\ g_{22} = 2 \\ g_{32} = 2 \\ g_{42} = -3 \\ g_{33} = 1 \\ g_{43} = 0 \\ g_{44} = 2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

题 6.5. 计算下列矩阵的满秩分解。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -5 & 8 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

解. (1) 先对矩阵进行初等行变换变成行阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

(2) 先对矩阵进行初等行变换变成行阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -5 & 8 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & -6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & -1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

□

题 6.6. 计算下列矩阵的谱分解。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

解. (1) $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=4$ 所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中空白位置全是 0。

(2) $\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9$ 所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= 3\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中空白位置全是 0。

□

题 6.7. 计算下列矩阵的 QR 分解。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

解. 把矩阵记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，并进行列分块 $(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$。

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Schmidt 正交化，得：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (2,1,2)^T \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{5}{9}\boldsymbol{\beta}_1 = (-\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{1}{9})^T
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) &\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \\ & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Schmidt 正交化，得：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1)^T \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_1 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})^T
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) &\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(3) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Schmidt 正交化，得：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (0,1,1)^T \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 = (1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_2 = (\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) &= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \frac{\sqrt{6}}{2} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(4) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Schmidt 正交化，得：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (2,0,2)^T \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{3}{4}\boldsymbol{\beta}_1 = (\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{7}{9}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{3}{4}\boldsymbol{\beta}_1 = (-\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9})^T
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)&\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{7}{9}\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&-\frac{8}{9}\\0&2&\frac{4}{9}\\2&-\frac{1}{2}&\frac{8}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{7}{9}\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&&\\&\frac{3}{\sqrt{2}}&\\&&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{7}{9}\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&\frac{3\sqrt{2}}{2}&\frac{3\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{7}{3\sqrt{2}}\\0&0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 6.8. 计算下列矩阵的奇异值分解。

(1) $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

解. (1) 不妨令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$。先计算 $\boldsymbol{V}^T$，即利用相似对角化计算

$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}^2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{V}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}2&0\\0&\sqrt{6}\\0&0\end{pmatrix}$，

此时 $\boldsymbol{V}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0\\0&\sqrt{6}\end{pmatrix}$。

$$
\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&\sqrt{6}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}
$$

把 $\boldsymbol{U}_1$ 扩充成正交矩阵 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，于是：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \sqrt{6}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(2) 不妨令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^T$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$。先计算 $\boldsymbol{V}^T$，即利用相似对角化计算 $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AV}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}^2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{V}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$，此时 $\boldsymbol{V}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$。

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{AV}_1\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{U}_1$ 已经是正交矩阵，无需扩充，令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1$，于是：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

□

题 6.9. 证明：对任意实（复）非退化方阵 $\boldsymbol{A}$，存在唯一的正交（酉）矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QH}_1=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}$，该分解称为矩阵的**极分解**，若去掉矩阵的非退化条件，结论改如何修正？

证明. 先给出需要用到的引理：

引理 6.1. 任意一个正定矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在唯一的一个正定矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^2$

证明. **存在性:** 由于 $\boldsymbol{H}\succ\mathbf{0}$,则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$，$\lambda_i>0$。令 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}\}$，则

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}^T=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T)(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T)^2=\boldsymbol{S}^2$$

而任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x})>0$，这说明了 $\boldsymbol{S}$ 是正定阵。

唯一性：记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与对应的特征向量为 $\lambda,\boldsymbol{\nu}$。若存在两个正定矩阵 $\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1$，使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}_0^2=\boldsymbol{S}_1^2$，显然有 $\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\nu}=\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu}$。于是 $\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\nu}=\sqrt{\lambda}\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\nu}=\lambda\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\nu}=\sqrt{\lambda}\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\nu}=\lambda\boldsymbol{\nu},(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0)\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{H}$ 是对称的，一定存在 n 个线性无关的特征向量，即特征子空间的维数 $\dim(\boldsymbol{V})=n$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0)=n-\dim(\boldsymbol{V})=0$，即 $\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{O}$。此时 $(\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=\boldsymbol{S}_0^2-\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1^2=\boldsymbol{O}$，于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=n$，而 $\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1$ 是正定矩阵，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=n$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=0$，$\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{S}_1$。

□

下面给出两种证明方法。

(1) **存在性:** 由于 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 是一个正定矩阵,由引理6.1可知,$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_1^2$,则有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}_1^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}=(\boldsymbol{H}_1^T)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}$，令 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}$，有 $\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{Q}_1$ 是正交矩阵，同时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{H}_1$。

同理：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{H}_2^2$，则有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{H}_2^{-1}=\boldsymbol{H}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{H}_2^T)^{-1}=\boldsymbol{H}_2^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H}_2^{-1}\boldsymbol{A})^T$，令 $\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{H}_2^{-1}\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_2^T=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{Q}_2$ 是正交矩阵，同时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}_2$。

下面证明 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{Q}$，即证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}=\boldsymbol{H}_2^{-1}\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1$，

唯一性：假设存在另外一个正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与正定矩阵 $\boldsymbol{W}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}$ 由引理6.1唯一性可知，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{H}_1$；而 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}=\boldsymbol{Q}$，同理可以说明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}$ 分解的唯一性。

(2) **存在性:** 由 SVD 分解可知,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$,其中 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}^T$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$，$\lambda_i>0$。又因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V})\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T)\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$，令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T,\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$，容易验证 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{H}_1$ 为正定矩阵。

同理：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U})\boldsymbol{V}^T=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T)$，令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T,\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^T$。

唯一性：假设存在另外一个正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与正定矩阵 $\boldsymbol{W}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}_1)^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_1^2, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{W})^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}^2$，由引理6.1唯一性可知，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{H}_1$，而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1^{-1}=\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}^{-1}=\boldsymbol{U}$，于是 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}$。同理可以说明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}$ 分解的唯一性。

结论修正为：存在唯一的酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与半正定矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 与 $\boldsymbol{H}_2$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Q}$。

□

题 6.10. 证明：对任何正定矩阵 $\boldsymbol{H}$，存在唯一的正定矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}^2$。若将正定矩阵改为半正定矩阵，结论如何？

证明. **存在性**:由于 $\boldsymbol{H}\succ\boldsymbol{0}$,则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^T$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$，$\lambda_i>0$。令 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}=\operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\}$，则

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}^T=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T)(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T)^2=\boldsymbol{S}^2$$

而任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{x})>0$，这说明了 $\boldsymbol{S}$ 是正定阵。

唯一性：记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与对应的特征向量为 $\lambda,\boldsymbol{\nu}$。若存在两个正定阵 $\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1$，使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}_0^2=\boldsymbol{S}_1^2$，显然有 $\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\nu}=\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu}$。于是 $\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\nu}=\sqrt{\lambda}\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\nu}=\lambda\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\nu}=\sqrt{\lambda}\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\nu}=\lambda\boldsymbol{\nu}, (\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0)\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{H}$ 是对称的，一定存在 n 个线性无关的特征向量，即特征子空间的维数 $\dim(\boldsymbol{V})=n$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0)=n-\dim(\boldsymbol{V})=0$，即 $\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{O}$。此时 $(\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=\boldsymbol{S}_0^2-\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1^2=\boldsymbol{O}$，于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1)+\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=n$，而 $\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1$ 是正定矩阵，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=n$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{S}_0-\boldsymbol{S}_1)=0$，$\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{S}_1$。

结论修正为：存在唯一的半正定矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}^2$。

□

第七章　广义逆矩阵

题 7.1. （P162.3）求下列矩阵的广义逆 $\boldsymbol{A}^+$。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

解. (1)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^+ &= \boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B^TB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^+ &= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3)

$$A = BC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CC^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, B^TB = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^+ &= C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{99} \begin{pmatrix} -12 & 4 & 13 & -2 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & -6 & 8 & -8 \\ -10 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

题 7.2. 验证线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，并求其通解和最小长度解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$

解. $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\2&4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，于是方程组有解。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CC}^T=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{CC}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

则通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}y_1-\frac{2}{5}y_2\\-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}y_1+\frac{1}{5}y_1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$。最小长度解为 $\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$。

□

题 7.3. 验证下列线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为矛盾方程组，并求其最小二乘解的通解和最小长度二乘解。

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&-6&3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

解. (1) 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=2,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$，于是为矛盾方程组。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CC}^T=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{CC}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

最小二乘解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}+\frac{4}{5}y_1-\frac{2}{5}y_2\\\frac{2}{5}-\frac{2}{5}y_1+\frac{1}{5}y_1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$。最小长度二乘解为 $\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}$。

(2) 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=2,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$，于是为矛盾方程组。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{CC}^T=\begin{pmatrix}6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+ &= \boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T \\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{60}\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & -6\\-1 & 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

最小二乘解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{30}+\frac{5}{6}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{6}y_3\\-\frac{1}{15}-\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3\\\frac{1}{30}+\frac{1}{6}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{5}{6}y_3\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$。最小长度二乘解为 $\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{30}\\-\frac{1}{15}\\\frac{1}{30}\end{pmatrix}$。

(3) 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=3,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2,\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$，于是为矛盾方程组。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6 & -2\\-2 & 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+ &= \boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6 & -2\\-2 & 10\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 3\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\2 & 1 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

最小二乘解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{14}\\\frac{10}{14}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$。最小长度二乘解为 $\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{14}\\\frac{10}{14}\end{pmatrix}$。

□