同济大学矩阵论课程模拟卷习题与讲解

宁之恒

前言

此为同济大学 2023 年春季学期研究生课程《矩阵论》的四张模拟卷的题目和答案。题目来源于授课老师。

限于编者的水平，本书中错误与疏漏在所难免，恳请读者不吝指正，希望能和大家一起完成习题答案的编写。

2024 年 2 月 2 日

目录

第一章　模拟卷一

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求不相容方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的最优最小二乘解。

解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix}$$

□

题 1.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9&-4&-7\\-1&0&1\\10&-4&-8\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

解. 特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$。其对应的特征向量分别是 $(1,0,1)^T,(1,-1,2)^T,(2,1,2)^T$。于是：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&-3\\-1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\\
&=-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 1.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9&-6&-7\\-1&-1&1\\10&-6&-8\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

解. 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\Rightarrow\boldsymbol{PJ}=\boldsymbol{AP}$，不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ap}_1=2\boldsymbol{p}_1\\\boldsymbol{Ap}_2=-\boldsymbol{p}_2\\\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^T\\\boldsymbol{p}_2=(2,1,2)^T\\\boldsymbol{p}_3=(1,-1,2)^T\end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-2&-3\\-1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
e^{2\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & & \\ & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ & & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4e^{4t}-(2t+3)e^{-2t} & -2e^{4t}+2e^{-2t} & -3e^{4t}+(2t+3)e^{-2t} \\ -te^{-2t} & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 4e^{4t}-(2t+4)e^{-2t} & -2e^{4t}+2e^{-2t} & -3e^{4t}+(2t+4)e^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.4. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$
\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 + 1 \end{cases} \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}
$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = (0,1)^T$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda+1)^2$ 不妨设 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$，则

$$
\begin{cases} P(\lambda) = P(-1) = a_0 - a_1 = e^{-t} \\ P'(\lambda) = P'(-1) = a_1 = te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+t)e^{-t} \\ a_1 = te^{-t} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} = P(\boldsymbol{A}) &= (1+t)e^{-t}\boldsymbol{E} + te^{-t}\boldsymbol{A} \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} (2u+1)e^{u} & -4ue^{u} \\ ue^{u} & (-2u+1)e^{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} (-6t-3)e^{-t}+4 \\ (-3t-3)e^{-t}+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.5. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{CA}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

解. (1)

$$\mathcal{T}\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\begin{pmatrix}0&-2&-1&-2\\1&3&1&\frac{3}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2,\lambda_4=0$。

(3) 可对角化，这是由于 $\lambda=1$ 的特征值有至少两个线性无关的特征向量。

□

题 1.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换且 $\mathcal{T}^2=3\mathcal{T}$，证明：$\boldsymbol{V}=\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

证明. 由于 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T}\subset\boldsymbol{V}$。任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，使得 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$，于是 $3\boldsymbol{\alpha}=3\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}=\mathcal{T}(\mathcal{T}\boldsymbol{\beta})=\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，此时 $\mathrm{Im}\mathcal{T}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\{\boldsymbol{0}\}$，这说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 构成直和。又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T})=\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})+\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T})=n$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\boldsymbol{V}$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\boldsymbol{V}$。

□

第二章　模拟卷二

题 2.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-1&1&1\\4&3&-3&7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$。

解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}21&12\\12&14\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{C}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T})^{-1}(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}21&12\\12&14\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{150}\begin{pmatrix}-12&33&9\\-14&-26&2\\14&26&-2\\2&7&11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 2.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-7&-2&9\\-2&-1&4\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

解. 特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\Rightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=2\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1=(0,3,1)^T\\ \boldsymbol{p}_2=(1,-4,-1)^T\\ \boldsymbol{p}_3=(-1,5,1)^T\end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&-4&5\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-3\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

于是：

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&-4&5\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&&\\&e^{2t}&te^{2t}\\&&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-3\\1&1&-3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(t+1)e^{2t}&te^{2t}&-3te^{2t}\\3e^t-(4t+3)e^{2t}&(-4t+1)e^{2t}&3e^t+(12t-3)e^{2t}\\e^t-(t+1)e^{2t}&-te^{2t}&e^t+3te^{2t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 2.3. 用矩阵函数求解下常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-3x_1+4x_2+1\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1(0)=2\\x_2(0)=1\end{cases}$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&4\\-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=(1,0)^T$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)^2$ 不妨设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则

$$\begin{cases}P(\lambda)=P(-1)=a_0-a_1=e^{-t}\\P'(\lambda)=P'(-1)=a_1=te^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=(1+t)e^{-t}\\a_1=te^{-t}\end{cases}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = P(\boldsymbol{A}) = (1+t)e^{-t}\boldsymbol{E} + te^{-t}\boldsymbol{A}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} (2u+1)e^{u} & -4ue^{u} \\ ue^{u} & (-2u+1)e^{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} (2t+3)e^{-t} - 1 \\ (t+2)e^{-t} - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 2.4. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体,，对任意 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{A}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

解. (1)

$$\mathcal{T}\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4) = (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4)\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=-1,\lambda_4=-4$。

(3) 可对角化，这是由于 $\lambda=-1$ 的特征值有至少两个线性无关的特征向量。

□

题 2.5. 设 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基和维数。

解. 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\-1&0&-2\end{pmatrix}$。

$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2,\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T})=3-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$。

$\mathrm{Im}\mathcal{T}=<\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2>,\mathrm{Ker}\mathcal{T}=<2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3>$。

□

题 2.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\mathrm{rank}(\mathcal{T})=r$ 且 $\mathcal{T}^2=3\mathcal{T}$，证明：存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，使 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda=3$ 或 0。取 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 下的一组标准正交基，并记线性变换 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$。

(1) 若 $r=n$，则 $\lambda=3$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda-3$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{3,\dots,3\}=3\boldsymbol{E}$，满足题意。

(2) 若 $r=0$，则 $\lambda=0$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{0,\dots,0\}=\boldsymbol{O}$，满足题意。

(3) 若 $0<r<n$，则 $\lambda=3$ 或 0，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-3)$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{0,\dots,0,\underbrace{3,\dots,3}_{r个3}\}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$，满足题意。

□

第三章 模拟卷三

题 3.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\0&4&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LR 分解。

解.

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\0&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

上面矩阵即为所求矩阵 $\boldsymbol{R}$。则 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}$，于是：

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

□

题 3.2. 设线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=1\\3x_1-6x_2=1\\-x_1+2x_2=-6\end{cases}$，用广义逆验证它是矛盾方程，并求它的最小二乘解的通解。

解. 由题意得：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-6\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T,\boldsymbol{b}=(1,1,-6)^T$。下面计算 $\boldsymbol{A}^+$：

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$，于是：

$$\boldsymbol{CC}^T=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}11\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{CC}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}11\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{55}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\-2 & -6 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}=\frac{10}{11}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$，最小二乘解的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{2}{11}+\frac{4}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2\\-\frac{4}{11}+\frac{2}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$。

□

题 3.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\-4 & 3 & 4\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$。

解. 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\Rightarrow\boldsymbol{PJ}=\boldsymbol{AP}$，不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ap}_1=2\boldsymbol{p}_1\\\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_2\\\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^T\\\boldsymbol{p}_2=(0,2,-1)^T\\\boldsymbol{p}_3=(-1,-1,0)^T\end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\-1 & 1 & 1\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\square$

题 3.4. 设 $\mathcal{T}$ 为线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的变换，$\mathcal{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 下的矩阵, 并求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

解.

$$\mathcal{T}\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad \mathcal{T}\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\quad \mathcal{T}\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad \mathcal{T}\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$。 $\square$

题 3.5. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(t)|_{t=0}=(1,0)^T\end{cases}$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-4$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+4)^2$ 不妨设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则

$$\begin{cases}P(\lambda)=P(-4)=a_0-4a_1=e^{-4t}\\ P'(\lambda)=P'(-4)=a_1=te^{-4t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=(1+4t)e^{-4t}\\ a_1=te^{-4t}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}=P(\boldsymbol{A})&=(1+4t)e^{-4t}\boldsymbol{E}+te^{-4t}\boldsymbol{A}\\ &=\begin{pmatrix}(-t+1)e^{-4t} & te^{-4t}\\ -te^{-4t} & (t+1)e^{-4t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & (t+1)e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-4t} \\ -te^{-4t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 3.6. 在线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，对于任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2},\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0\}$ 为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子集，其中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}$ 的迹。

(1) 证明：$\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 求 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基，及 $\boldsymbol{V}$ 的正交补 $\boldsymbol{V}^{\perp}$。

解. (1) 证明其满足加法封闭及数乘封闭即可。

任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2},k\in\mathbb{R}$。$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=0+0=0$，这说明了对加法封闭；$\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$，这说明了对数乘封闭。即 $\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 显然，$\dim(\boldsymbol{V})=3,\dim(\boldsymbol{V}^{\perp})=4-3=1$。

$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 构成了 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基。

$\boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 构成了 $\boldsymbol{V}^{\perp}$ 的一组标准正交基。

□

题 3.7. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\mathrm{rank}(\mathcal{T})=r>0$，$\mathcal{T}^2=\mathcal{T}$，证明：

(1) 存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$，满足 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_i, 1\le i\le r \\ \boldsymbol{0}, r\le i\le n \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基。

(2) 写出 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵，以及 $\mathcal{T}$ 的最小多项式。

(3) $\boldsymbol{V}=\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

证明. (1) 即证存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$,使得 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda = 1$ 或 0。

取 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 下的一组标准正交基，并记线性变换 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$。

(1) 若 $r = n$，则 $\lambda = 1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda - 1$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{1, \ldots, 1\} = \boldsymbol{E}$。此时 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = 0$，即 $\mathbf{0}$ 为 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基，满足题意。

(2) 若 $r = 0$，则 $\lambda = 0$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{0, \ldots, 0\} = \boldsymbol{O}$。此时 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n$，即 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 为 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基，满足题意。

(3) 若 $0 < r < n$，$\lambda = 1$ 或 0，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$，说明 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\text{个}1}, 0, \ldots, 0\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。此时 $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n - r$，即 $\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 为 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基，满足题意。

(2) $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

(1) 若 $r = n$，则 $\lambda = 1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda - 1$。

(2) 若 $r = 0$，则 $\lambda = 0$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda$。

(3) 若 $0 < r < n$，则 $\lambda = 1$ 或 0，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$。

(3) 由于 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T} \subset \boldsymbol{V}$。任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，使得 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$，于是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = \mathcal{T}(\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，此时 $\mathrm{Im}\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \{\mathbf{0}\}$，这说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 构成直和。又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \boldsymbol{V}$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \boldsymbol{V}$。

□

第四章　模拟卷四

题 4.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

解. 特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$。其对应的特征向量分别是 $(2,-1)^T,(1,1)^T$。于是：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 4.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$。

解. 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，对应的若当标准型 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。

□

题 4.3. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为内积空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个标准正交基，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{S}=<\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3>$ 为由 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 生成的子空间。

(1) 求 $\boldsymbol{S}$ 的维数。

(2) 求 $\boldsymbol{S}$ 的一个标准正交基（用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 表示）。

解. (1) 由题意得，$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$。由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则

$\dim(\boldsymbol{S})=\mathrm{r}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=2$。

(2) 显然，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 构成了 $\boldsymbol{S}$ 的一组基，对其进行施密特正交并单位化得，

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{b}_1}{||\boldsymbol{b}_1||}=\frac{\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{2}}$$
$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{||\boldsymbol{e}_2||}(\boldsymbol{b}_2-\frac{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1)=\frac{\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{6}}$$

□

题 4.4. 设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，求 $\mathbb{R}^3$ 中的初等反射矩阵 $\boldsymbol{H}$，使 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 同方向。

解. 不妨令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\omega\omega^T$，其中 $||\omega||=1$。由于 $||\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}||=||\boldsymbol{x}||=3$，所以 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$。

于是：

$$3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{H}(k\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{H}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\alpha}$$

又因为 $\mathbb{R}^3=<\boldsymbol{\omega}>\oplus<\boldsymbol{\omega}>^{\perp}$，所以设 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $k\in\mathbb{R},\boldsymbol{\alpha}\in<\boldsymbol{\omega}>^{\perp}$。

联立两个式子解得，$\boldsymbol{\omega}=\frac{\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{\beta}}{2k}$。又因为 $||\boldsymbol{\omega}||=1$，所以 $\boldsymbol{\omega}=\frac{\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{\beta}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$。

□

题 4.5. 设方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&2&1\\0&3&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解（记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$）。

(2) 说明方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为矛盾方程。

(3) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的长度最小的最小二乘解和最小二乘解通解。

解. (1) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

(2)

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T=\begin{pmatrix}\frac{10}{9}&-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{10}{9}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-4\\-4&17\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{10}{9}&-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{10}{9}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-4\\-4&17\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&2&3\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-10&-10&14\\-1&-1&8\\3&3&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$，

(3) 最小二乘解的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7+y_1-y_2+3y_3\\4-y_1+y_2+3y_3\\-1+3y_1-3y_2+9y_3\end{pmatrix}$，其中

$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^T\in\mathbb{R}^2$。最小长度的最小二乘解为 $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7\\4\\-1\end{pmatrix}$。

□

题 4.6. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1-x_2\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=4x_1-3x_2+1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1(0)=1\\x_2(0)=2\end{cases}$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=(0,1)^T$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)^2$ 不妨设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则

$$\begin{cases} P(\lambda)=P(-1)=a_0-a_1=e^{-t} \\ P'(\lambda)=P'(-1)=a_1=te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=(1+t)e^{-t} \\ a_1=te^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t}&=P(\boldsymbol{A})=(1+t)e^{-t}\boldsymbol{E}+te^{-t}\boldsymbol{A}\\ &=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{-t} & -te^{-t}\\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t)&=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du\\ &=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{-t} & -te^{-t}\\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}(2t+1)e^{-t} & -te^{-t}\\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t}\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}(-2u+1)e^{u} & ue^{u}\\ -4ue^{u} & (2u+1)e^{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}du\\ &=\begin{pmatrix}(t+2)e^{-t}-1\\ (2t+3)e^{-t}-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 4.7. 设 $\mathcal{D}$ 是三维线性空间 $\boldsymbol{V}=\{(a_2t^2+a_1t+a_0)e^t|a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$ 中的微分线性变换，$f_1=t^2e^t,f_2=te^t,f_3=e^t$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一个基。

(1) 求 $\mathcal{D}$ 在该基下的矩阵。

(2) 求 $\mathrm{Im}\mathcal{D}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{D}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的核空间。

解. (1)

$$\mathcal{D}f_1=(t^2+2t)e^t\quad \mathcal{D}f_2=(t+1)e^t\quad \mathcal{D}f_3=e^t$$

即 $\mathcal{D}(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$。

(2) $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{D}) = 3, \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{D}) = 3 - 3 = 0$。

于是 $\mathrm{Im}\mathcal{D} =< f_1 + 2f_2, f_2 + f_3, f_3 >=< (t^2 + 2t)e^t, (t+1)e^t, e^t >; \mathrm{Ker}\mathcal{D} =< \mathbf{0} >$。

□

题 4.8. 设 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是二阶实方阵在方阵运算下构成的线性空间，对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}$，

(1) 证明 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性变换。

(2) 判断 $\mathcal{T}$ 是否可对角化，并说明理由。

解. (1) 任取 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, k \in \mathbb{R}$，$\mathcal{T}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T + (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X}^T + \boldsymbol{X}) + ((\boldsymbol{X}^T + \boldsymbol{X})) = \mathcal{T}(\boldsymbol{X}) + \mathcal{T}(\boldsymbol{Y})$，这说明了对加法封闭；$\mathcal{T}(k\boldsymbol{X}) = (k\boldsymbol{X})^T + k\boldsymbol{X} = k(\boldsymbol{X}^T + \boldsymbol{X}) = k\mathcal{T}(\boldsymbol{X})$，这说明了对数乘封闭。即 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性变换。

(2) 取 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4$，其中

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算它们在线性变换 $\mathcal{T}$ 下的矩阵：

$$\mathcal{T}\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}\boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathcal{T}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4) = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$。由于 $\lambda = 2$ 的特征值有至少三个线性无关的特征向量，所以 $\mathcal{T}$ 可对角化。

□

题 4.9. 设 $\mathcal{T}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换且，$\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$，证明：$\boldsymbol{V} = \mathrm{Im}\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{T}$ ，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

证明. 由于 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T} \subset \boldsymbol{V}$。任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{Im}\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，使得 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$，于是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{T}\boldsymbol{\beta} = \mathcal{T}(\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{T}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，

此时 $\mathrm{Im}\mathcal{T} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \{\mathbf{0}\}$，这说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 构成直和。又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}) + \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T}) = n$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T} + \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \boldsymbol{V}$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{T} = \boldsymbol{V}$。

□