

第一章 内积空间

题 1.1. (p119.1) 证明内积的平行四边形恒等式和极化恒等式 (定理 6.3)。

设 (\cdot, \cdot) 为实线性空间 V 上的内积, $\|\cdot\|$ 为由内积定义的范数, 则

(1) 平行四边形恒等式: 对任意 $x, y \in V$, $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$

(2) 极化恒等式: 对任意 $x, y \in V$, $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

证明.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2) = 4(x, y)$$

□

题 1.2. (p119.2) 求 \mathbb{R}^3 上的一组标准正交基 ν_1, ν_2, ν_3 , 其中 ν_1 与向量 $(1, 1, 1)^T$ 线性相关。

解. 由题意得, 设 $\nu_1 = k(1, 1, 1)^T$, 则 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 易知 $\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \nu_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T$

与 ν_1 正交, 且 ν_2 与 ν_3 正交。则标准正交基为 $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 。

□

题 1.3. (p119.3) 已知 \mathbb{R}^3 上的向量 $\nu = (1, 2, -1)^T, \omega = (1, 1, 0)^T$, 求一个与 ν, ω 都正交的单位向量。

解. 构造 $A = \begin{pmatrix} \nu^T \\ \omega^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 即求 $Ax = 0$ 的一个单位长度解 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

□

题 1.4. (p119.6) 在一元多项式函数构成的线性空间 $\mathbf{R}[x]$ 上定义内积为

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

试求 $1, x, x^2, x^3$ 的 Schmidt 正交化。

解.

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)}1 = x$$

$$e_3 = x^2 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)}x - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)}1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$e_4 = x^3 - \frac{(x^3, x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})}(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{(x^3, x)}{(x, x)}x - \frac{(x^3, 1)}{(1, 1)}1 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$e = (e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x)。$$

□

题 1.5. (p120.11) 设 $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T$, 求 \mathbf{A} 的正交对角化。

证明. 令 $\boldsymbol{\nu} = (a_1, \dots, a_n)^T$, 显然 $(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T)^T = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T$, $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^n$ 必可相似对角化。 $r(\mathbf{A}) = r(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T) \leq \min(r(\boldsymbol{\nu}), r(\boldsymbol{\nu}^T)) = 1$, 所以 $r(\mathbf{A}) = 0, 1$ 。

若 $r(\mathbf{A}) = 0$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{O} \Rightarrow \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, 此时 \mathbf{A} 相似于 $\text{diag}\{0, \dots, 0\}$ 。取 \mathbb{R}^n 上的一组标准正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 组成矩阵 \mathbf{Q} , 使得 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{O}$, 其中 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 1)$ 。

$$\text{若 } r(\mathbf{A}) = 1, \text{ 则 } a_1, \dots, a_n \text{ 不全为 } 0, \text{ 不妨令 } a_1 \neq 0, \text{ 所以 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = \text{tr}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu}$ 。

$$\text{当 } \lambda = 0 \text{ 时, 计算其特征向量, 对 } \mathbf{A} \text{ 进行行变换, 得 } \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则特征向量为}$$

$$\mathbf{e}_1 = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (-a_3, 0, a_1, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_k = (-a_k, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_{n-1} =$$

$(-a_{n-1}, 0, \dots, 0, a_1)^T$, 将 e_1, \dots, e_n 进行施密特正交并单位化, 得

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{1}{\|\eta_1\|} e_1 \\ \eta_2 &= \frac{1}{\|\eta_2\|} (e_2 - \frac{(e_2, \eta_1)}{\eta_1, \eta_1} \eta_1) \\ &\vdots \\ \eta_{n-1} &= \frac{1}{\|\eta_{n-1}\|} (e_{n-1} - \frac{(e_{n-1}, \eta_{n-2})}{\eta_{n-2}, \eta_{n-2}} \eta_{n-2} - \dots - \frac{(e_{n-1}, \eta_1)}{\eta_1, \eta_1} \eta_1)\end{aligned}$$

则 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 是 $\lambda = 0$ 的 $n-1$ 个正交的单位特征向量。

当 $\lambda = 1$ 时, 其单位特征向量为 $\eta_n = \frac{1}{\nu^T \nu} (a_1, \dots, a_n)^T$, 且与 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 正交。

综上, 令 $Q = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, 则 $Q^T A Q = \Lambda = \text{diag}\{0, \dots, 0, \nu^T \nu\}$ 。

□

题 1.6. (p120.12) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, 已知 A 正交相似于 $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$ 型矩阵,

求出 ω 的值。

解. 由于 A 与 W 相似, 所以两者的行列式因子相同。

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda E - W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \omega \\ 0 & -\omega & \lambda \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的行列式因子为 $D_1 = D_1 = 1, D_3 = \lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2)$; 矩阵 W 的行列式因子为 $D_1 = D_1 = 1, D_3 = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)$ 。所以 $a^2 + b^2 + c^2 = \omega^2 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

□

题 1.7. (p120.13) 证明: 实反对称矩阵 ($A^T = -A$) 于反 Hermite 矩阵 ($A^H = -A$) 的特征值为纯虚数或 0。

证明. 不妨设矩阵 A 的特征值为 $\lambda = a + bi$, 特征向量为 $x = u + vi$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}, \mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ 。

下面提供两种方法来解决这个问题:

- (1) $Ax = \lambda x \Rightarrow A(u + vi) = (a + bi)(u + vi) \Rightarrow A\mu = a\mu - b\nu, A\nu = a\nu + \mu$, 且 $\mu^H A\mu = (\mu^H A\mu)^H = \mu^H A^H \mu = -\mu^H A\mu$, 所以 $\mu^H A\mu = 0$; 同理, $\nu^H A\nu = 0$ 。又因为 $\mu^H A\mu = a\mu^H \mu - b\mu^H \nu, \nu^H A\nu = a\nu^H \nu + b\nu^H \mu, \mu^H A\mu + \nu^H A\nu = a(\|\mu\|^2 + \|\nu\|^2) = 0$, 而 μ, ν 不能同时为 0, 所以 $a = 0$, 这说明了 $\lambda = bi$ 为纯虚数或 0。

- (2) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, 两边同时与 \mathbf{x} 做内积 $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 。又因为 $(\mathbf{Ax})^H = \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H, (\lambda\mathbf{x})^H = \bar{\lambda}\mathbf{x}^H$, 于是 $\mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^H \mathbf{x} \Rightarrow -\mathbf{x}^H \mathbf{Ax} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^H \mathbf{x} \Rightarrow -\lambda\mathbf{x}^H \mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^H \mathbf{x}$, 此时有 $-(a+bi) = a-bi \Rightarrow a=0$, 这说了 $\lambda = bi$ 为纯虚数或 0。

ps: 两种方法都不需要针对矩阵类型分类讨论, 原因在于共轭转置 H 包含转置 T 。

□

题 1.8. (p121.15) 设 V 为 Euclid 空间, \mathcal{A} 为 V 上的对称变换, 若对一切非零向量 $\nu \in V$, 均有 $(\mathcal{A}\nu, \nu) > 0$, 这样的对称变换称为**正定的**, 求证: 正定的对称变换在标准正交基下的矩阵为正定矩阵。

证明. 取标准正交基 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, 设 \mathbf{v} 在基下的坐标为 \mathbf{x} , 对称变换 \mathcal{A} 在基下的变换矩阵为 \mathbf{A} , 则 $\mathcal{A}\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}$ 。由 $(\mathcal{A}\nu, \nu) > 0$ 与 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 得 $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0$, 即 \mathbf{A} 是正定矩阵。

□

题 1.9. (p121.16) 试给出一个既不是对称变换, 也不是正交变换的正规变换。

解. 不妨设矩阵 \mathbf{A} 为在标准正交基 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ 下满足上述变换的变换矩阵。对称变换即 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$; 正交变换即 $\mathbf{AA}^T = \mathbf{E}$; 正规变换为 $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{AA}^H$ 。由于对称变换与正交变换定义

在欧式空间, 矩阵需要满足的条件变为 $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \neq \mathbf{E}$ 。显然, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

为所求, 其中 $\mathbf{A}^T \neq \mathbf{A}, \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = 4\mathbf{E}$ 。

□

题 1.10. (p121.21) 设 V 为 Euclid 空间, T 为 V 上的线性变换, 且对任何 $\nu \in V$, 均有 $\nu - T\nu \in (\text{Im}T)^\perp$, 这样的线性变换 V 上的**投影变换**。

- (1) 证明: 对任何 V 上的投影变换 T , 有 $\ker T = (\text{Im}T)^\perp$, 该命题的逆命题是否成立?
- (2) 证明: 线性变换 T 为 V 上的投影变换的充分必要条件是 T 是对称变换且满足 $T^2 = T$ 。
- (3) 设 T_1, T_2 均为 V 上的投影变换, 求证: $T_1 + T_2$ 为投影变换当且仅当 $T_1 T_2 = \mathcal{O}$, 当且仅当 $T_1 \perp T_2$ 。
- (4) 设 T_1, T_2 均为 V 上的投影变换, 求证: $T_1 - T_2$ 为投影变换当且仅当 $\text{Im}T_1 \supset \text{Im}T_2$ 。

- (5) 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 均为 V 上的投影变换, 求证: $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, 且此时有 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ 。
- (6) 设 \mathcal{A} 为 V 上的对称变换, 证明 \mathcal{A} 可表示为一组投影变换的线性组合, 且该组投影变换的像空间的直和恰为 V 。

证明. 由于线性变换和线性变换下对应的矩阵是基本等价的, 在后续的证明过程中, 不再对两者进行区分。

定理 1.1. 若对于任意的 $\alpha \in V$, 有 $(\alpha, A\alpha) = \alpha^T A \alpha = 0$ 恒成立, 当且仅当 A 为反对称矩阵 (即 $A^T = -A$)。

- (1) 先证 $\ker \mathcal{T} \subset (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$, 只需证明任取 $\alpha \in \ker \mathcal{T}$ 有 $\alpha \in (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$, 即任取 $\alpha \in V, \beta \in \text{Im} \mathcal{T}$ 有 $(\alpha, \mathcal{T}\gamma) = 0$, 其中 $\mathcal{T}\alpha = 0, \mathcal{T}\gamma = \beta$ 。根据投影变换的定义, 有 $0 = (\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\gamma) = (\alpha, \mathcal{T}\gamma)$, 于是 $\ker \mathcal{T} \subset (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$;

下证 $\ker \mathcal{T} = (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$, 由于 $\dim(\ker \mathcal{T}) + \dim(\text{Im} \mathcal{T}) = n$, 则 $\dim(\ker \mathcal{T}) = \dim(\text{Im} \mathcal{T})^\perp$, 于是 $\ker \mathcal{T} = (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$ 。

逆命题不一定成立。 令 \mathcal{T} 在标准正交基下的矩阵为 $2E$, 此时 $\ker(\mathcal{T}) = \{0\}, \text{Im} \mathcal{T} = \mathbb{R}^n, (\text{Im} \mathcal{T})^\perp = \{0\}$, 这满足了 $\ker \mathcal{T} = (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$, 但 $\nu - \mathcal{T}\nu = \nu - 2E\nu = -\nu \notin (\text{Im} \mathcal{T})^\perp$ 。

- (2) 先证必要性: 由(1)得, 任取 $\alpha \in V$ 有 $\alpha - \mathcal{T}\alpha \in \ker \mathcal{T}$, 因此 $\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha) = 0 \Rightarrow \mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}^2\alpha = 0$, 这说明了 $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$ 。又由于 $(\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\alpha) = 0$, 而 $(\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha), \alpha) = (\mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}^2\alpha, \alpha) = (0, \alpha) = 0$, 这说明了 $(\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\alpha) = (\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha), \alpha)$, 即 \mathcal{T} 是对称变换。

再证充分性: 即任取 $\alpha, \beta \in V, (\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta) = (\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha), \beta) = (\mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}^2\alpha, \beta) = ((\mathcal{T} - \mathcal{T}^2)\alpha, \beta) = (0, \beta) = 0$ 。

- (3) (a) 先证充分性: 显然 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是对称变换, 只需证明 $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, 即证 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$, 而 $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = 0$, 所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$ 。

再证必要性: 若 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是投影变换, 则 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$ 。又因为 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2^2 = -\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2^2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, 所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$ 。

- (b) 先证充分性, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = 0$, 不妨令 $\alpha = \beta$, 则 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = (\alpha, \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\alpha) = 0$, 根据定理1.1有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = -(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$, 即 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$, 所以

$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是投影变换。

再证必要性，任取 $\alpha, \beta \in V$ ，欲证 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = 0$ ，只需注意到 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = (\alpha, \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\beta) = (\alpha, \mathbf{0}) = 0$ 。

- (4) 先证充分性，显然 $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ 是对称变换，只需证明 $(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ ，即证 $2\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$ 。由于 $\alpha - \mathcal{T}_1\alpha \in (\text{Im}\mathcal{T}_1)^\perp \subset (\text{Im}\mathcal{T}_2)^\perp$ ，则 $(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = 0$ 。

$$\begin{aligned} & (\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) \\ &= (\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) - (\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) \\ &= (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha) \end{aligned}$$

根据定理1.1， $(\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = -(\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$ ，于是 $2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ 。

再证必要性，若 $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ 是投影变换，则 $2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ 。只需证明任取 $\alpha \in V$ ，存在 $\beta \in V$ ，有 $\mathcal{T}_2\alpha = \mathcal{T}_1\beta$ 。由于任取 $\nu \in V$ ，有 $2\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\nu) = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)(\mathcal{T}_1\nu) \Rightarrow \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\nu = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\nu$ ，所以 $\mathcal{T}_2\alpha = 2\mathcal{T}_2\alpha_1 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\alpha_1 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\alpha_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\alpha_1 = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\alpha_1 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\alpha_1) = \mathcal{T}_1\beta$ 。

- (5) (a) 先证充分性， $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = \mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ ，则其为对称变换；接着有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ ，说明为投影变换。

再证必要性，若 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 是投影变换，则其也是对称变换，于是 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = \mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ 。

- (b) 先证 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 \subset \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ ，若 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ ，则 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1$ ，又由于 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ ，所以 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \text{Im}\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ ，即 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_2$ ，所以 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ 。

再证 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 \supset \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ ，任取 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ ，其中 $\alpha = \mathcal{T}_1\alpha_1 = \mathcal{T}_2\alpha_2$ ，则 $\alpha = \mathcal{T}_1\alpha_1 = \mathcal{T}_1^2\alpha_1 = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\alpha_2) = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha_2$ ，说明了 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 。

综上 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ 。

- (6) 只需证明 $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}_i$ ，其中

(a) \mathcal{T}_i 为对称变换

(b) $\mathcal{T}_i^2 = \mathcal{T}_i$

(c) $\mathcal{T}_i\mathcal{T}_j = \mathcal{O} (i \neq j)$

(d) $\mathcal{I} = \mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$

下面讨论其构造方法。

由于是对称变换，则必可相似对角化，于是有 $\mathcal{Q}\mathcal{Z}\mathcal{Q}^T = \mathcal{A}$ ，令 $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}_{ii}$ ，其中 \mathcal{Q}

为正交变换； $\mathcal{T}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ，即第 i 行 i 列的元素为 1，其他元素全是 0。于是

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}_i, \text{ 接下来验证四个条件}$$

$$(a) \quad (\mathcal{T}_i)^T = (\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T)^T = \mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T = \mathcal{T}_i$$

$$(b) \quad \mathcal{T}_i^2 = (\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T)^2 = \mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T = \mathcal{T}_i$$

$$(c) \quad \mathcal{T}_i\mathcal{T}_j = \mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T\mathcal{Q}\mathcal{T}_{jj}\mathcal{Q}^T = \mathcal{O}$$

$$(d) \quad \mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}(\sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{ii})\mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}\mathcal{I}\mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}\mathcal{Q}^T = \mathcal{I}$$

下面说明 $\text{Im}\mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im}\mathcal{T}_n = \mathbf{V}$ 。

显然 $\text{Im}\mathcal{T}_i \subset \mathbf{V}$ ，则 $\text{Im}\mathcal{T}_1 + \cdots + \text{Im}\mathcal{T}_n \subset \mathbf{V}$ ，由于 $\dim(\text{Im}\mathcal{T}_1 + \cdots + \text{Im}\mathcal{T}_n) = \dim(\text{Im}(\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n)) = \dim(\text{Im}\mathcal{I}) = n$ ，这说明了 $\text{Im}\mathcal{T}_1 + \cdots + \text{Im}\mathcal{T}_n = \mathbf{V}$ ；又因为 $\dim(\text{Im}\mathcal{T}_i) = \text{r}(\mathcal{Q}\mathcal{T}_{ii}\mathcal{Q}^T) = \text{r}(\mathcal{T}_{ii}) = 1$ ，所以 $\sum_{i=1}^n \dim(\text{Im}\mathcal{T}_i) = 1 + \cdots + 1 = n = \dim(\text{Im}\mathcal{T}_1 + \cdots + \text{Im}\mathcal{T}_n)$ ，说明了和为直和。

□