第一章　模拟卷二

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-1&1&1\\4&3&-3&7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$。

解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T}=\begin{pmatrix}6&1\\1&2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}21&12\\12&14\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{C}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T})^{-1}(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 1.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-7&-2&9\\-2&-1&4\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

题 1.3. 用矩阵函数求解下常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 + 1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 \end{cases} \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

题 1.4. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体,，对任意 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{A}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

题 1.5. 设 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基和维数。

题 1.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\mathrm{rank}(\mathcal{T}) = r$ 且 $\mathcal{T}^2 = 3\mathcal{T}$，证明：存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，使 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{E}_r \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位阵。