同济大学矩阵论课程模拟卷习题与讲解

前言

此为同济大学 2023 年春季学期研究生课程《矩阵论》的四张模拟卷的题目和答案。题目来源于授课老师，限于编者的水平，本书中错误与疏漏在所难免，恳请读者不吝指正，希望能和大家一起完成习题答案的编写。

2024 年 1 月 29 日

目录

第一章　模拟卷一

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\1&1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求不相容方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的最优最小二乘解。

解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行满秩分解，得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^+&=\boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T)^{-1}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-5&8&-1\\3&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix}$$

□

题 1.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9&-4&-7\\-1&0&1\\10&-4&-8\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

解. 特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$。其对应的特征向量分别是 $(1,0,1)^T, (1,-1,2)^T, (2,1,2)^T$。于是：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 1.3. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & -6 & -8 \end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$，并求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

解. 特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$，对应的若当标准型为 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。由于 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，不妨令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1 = (1,0,1)^T \\ \boldsymbol{p}_2 = (2,1,2)^T \\ \boldsymbol{p}_3 = (1,-1,2)^T \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & & \\ & e^{-2t} & e^{2t} \\ & & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4e^{4t}-2e^{2t}-3e^{-2t} & -2e^{4t}+2e^{-2t} & 3e^{4t}+2e^{2t}+3e^{-2t} \\ -e^{2t} & e^{-2t} & e^{2t} \\ 4e^{4t}-2e^{2t}-4e^{-2t} & -2e^{4t}+2e^{-2t} & 3e^{4t}+2e^{2t}+4e^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.4. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$
\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}
$$

解. 由题意得：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = (0,1)^T$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda+1)^2$ 不妨设 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$，则

$$
\begin{cases} P(\lambda) = P(-1) = a_0 - a_1 = e^{-t} \\ P'(\lambda) = P'(-1) = a_1 = te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+t)e^{-t} \\ a_1 = te^{-t} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} = P(\boldsymbol{A}) &= (1+t)e^{-t}\boldsymbol{E} + te^{-t}\boldsymbol{A} \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} (2u+1)e^{u} & -4ue^{u} \\ ue^{u} & (-2u+1)e^{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} -(4t+4)e^{-t}+4 \\ -(2t+3)e^{-t}+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.5. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{CA}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

解. (1)

$$\mathcal{T}\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\mathcal{T}\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

即

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\begin{pmatrix}0&-2&-1&-2\\1&3&1&\frac{3}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2,\lambda_4=0$。

(3) 可对角化，这是由于 $\lambda=1$ 的特征值有至少两个线性无关的特征向量。

□

题 1.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换且 $\mathcal{T}^2=3\mathcal{T}$，证明：$\boldsymbol{V}=\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

解. 由于 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，则 $\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T}\subset\boldsymbol{V}$。任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{T}$，则存在 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，使得 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$，于是 $3\boldsymbol{\alpha}=3\mathcal{T}\boldsymbol{\beta}=\mathcal{T}(\mathcal{T}\boldsymbol{\beta})=\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，此时 $\mathrm{Im}\mathcal{T}\cap\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\{\mathbf{0}\}$，这说明 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 构成直和。又因为 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T})=\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})+\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{T})=n$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T}+\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\boldsymbol{V}$。综上，$\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}=\boldsymbol{V}$。

□

第二章　模拟卷二

题 2.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\2&-1&1&1\\4&3&-3&7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$。

题 2.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-7&-2&9\\-2&-1&4\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

题 2.3. 用矩阵函数求解下常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-3x_1+4x_2+1\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1(0)=2\\ x_2(0)=1\end{cases}$$

题 2.4. 设 $\boldsymbol{V}$ 是二阶实方阵全体,，对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{V}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{A}^{T}-3\boldsymbol{A}$，证明 $\mathcal{T}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换。

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ 下的矩阵表示。

(2) 求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

(3) 判别 $\mathcal{T}$ 是否可对角化。

题 2.5. 设 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基和维数。

题 2.6. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\mathrm{rank}(\mathcal{T})=r$ 且 $\mathcal{T}^2=3\mathcal{T}$，证明：存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，使 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位阵。

第三章　模拟卷三

题 3.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\0&4&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LR 分解。

题 3.2. 设线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=1\\3x_1-6x_2=1\\-x_1+2x_2=-6\end{cases}$，用广义逆验证它是矛盾方程，并求它的最小二乘解的通解。

题 3.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\-4&3&4\\1&0&1\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

题 3.4. 设 $\mathcal{T}$ 为线性空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上的变换，$\mathcal{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXA},\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，求线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 下的矩阵, 并求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

题 3.5. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-5&1\\-1&-3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(t)|_{t=0}=(1,0)^T\end{cases}$$

题 3.6. 在线性空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中，对于任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times2},\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0\}$ 为 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的子集，其中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}$ 的迹。

(1) 证明：$\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 求 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基，及 $\boldsymbol{V}$ 的正交补 $\boldsymbol{V}^{\perp}$。

题 3.7. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\operatorname{rank}(\mathcal{T})=r>0$，$\mathcal{T}^2=\mathcal{T}$，证明：

(1) 存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$，满足 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_i, 1\le i\le r\\ \boldsymbol{0}, r\le i\le n\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 的基。

(2) 写出 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵，以及 $\mathcal{T}$ 的最小多项式。

(3) $\boldsymbol{V}=\mathrm{Im}\mathcal{T}\oplus\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ ，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。

第四章　模拟卷四

题 4.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

题 4.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$。

题 4.3. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为内积空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个标准正交基，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{S}=<\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3>$ 为由 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 生成的子空间。

(1) 求 $\boldsymbol{S}$ 的维数。

(2) 求 $\boldsymbol{S}$ 的一个标准正交基（用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 表示）。

题 4.4. 设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，求 $\mathbb{R}^3$ 中的初等反射矩阵 $\boldsymbol{H}$，使 $\boldsymbol{Hx}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 同方向。

题 4.5. 设方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解（记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$）。

(2) 说明方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为矛盾方程。

(3) 求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的长度最小的最小二乘解和最小二乘解通解。

题 4.6. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1-x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=4x_1-3x_2+1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=2\end{cases}$$

题 4.7. 设 $\mathcal{D}$ 是三维线性空间 $\boldsymbol{V} = \{(a_2t^2 + a_1t + a_0)e^t | a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ 中的微分线性变换，$f_1 = t^2e^t, f_2 = te^t, f_3 = e^t$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一个基。

(1) 求 $\mathcal{D}$ 在该基下的矩阵。

(2) 求 $\mathrm{Im}\mathcal{D}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{D}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的核空间。

题 4.8. 设 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是二阶实方阵在方阵运算下构成的线性空间，对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}$，

(1) 证明 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的线性变换。

(2) 判断 $\mathcal{T}$ 是否可对角化，并说明理由。

题 4.9. 设 $\mathcal{T}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换且，$\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$，证明：$\boldsymbol{V} = \mathrm{Im}\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{T}$ ，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。