第一章　多项式

题 1.1. （p44.1）计算 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$。

(1) $f(x)=x^4-4x+5$，$g(x)=x^2-x+2$

解. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中 $q(x)=x^2+x-1$，$r(x)=-7x+7$。

□

题 1.2. （p44.2）求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式和最小公倍式。

(1) $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$，$g(x)=x^3+2x^2+2x+1$

解. $f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$，其中 $q_1(x)=x-1$，$r_1(x)=2x^2+2x+2$

$g(x)=q_2(x)r_1(x)$，其中 $q_2(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

于是

$$
\begin{aligned}
\gcd(f(x),g(x)) =& \frac{1}{2}r_1(x)=x^2+x+1 \\
\operatorname{lcm}(f(x),g(x)) =& \frac{f(x)g(x)}{\gcd(f(x),g(x))} \\
=& \frac{(x^4+x^3+2x^2+x+1)(x^3+2x^2+2x+1)}{x^2+x+1} \\
=& (x^2+1)(x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}
$$

注：以上计算最大公因式乘的系数为凑首 1 多项式。

□

题 1.3. （p44.3）求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $\gcd(f(x),g(x))$，以及满足等式 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=\gcd(f(x),g(x))$ 的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$。

(1) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$，$g(x)=x^2-x-1$

解. $f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$，其中 $q_1(x)=x^2-3$，$r_1(x)=x-2$

$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$，其中 $q_2(x) = x$，$r_2(x) = x - 1$

$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x)$，其中 $q_3(x) = 1$，$r_3(x) = -1$

$r_2(x) = q_4(x)r_3(x)$，其中 $q_4(x) = -x + 1$

$\gcd(f(x), g(x)) = -r_3(x) = 1$，于是 $1 = u(x)f(x) + v(x)g(x)$，其中 $u(x) = -1 - x$，$v(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$

注：以上计算最大公因式乘的系数为凑首 1 多项式。

□

题 1.4. （p45.6）若多项式 $f(x), g(x), u(x), v(x)$ 满足 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$，证明 $u(x), v(x)$ 互素。

证明. 令 $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$，则 $f(x) = d(x)p(x)$，$g(x) = d(x)q(x)$，

$u(x)f(x)+v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x)) \Rightarrow u(x)d(x)p(x)+v(x)d(x)q(x) = d(x) \Rightarrow u(x)p(x)+v(x)q(x) = 1$，这便说明了 $u(x), v(x)$ 互素。

□