

同济大学矩阵论课程习题答案与详解

副标题

宁之恒

2024 年 1 月 25 日

前言

此为 2023 年春季学期同济大学研究生课程《矩阵论》的六次作业和四张试卷的题目和答案。题目来源于《矩阵分析（第二版）》，由于网络上和课本均未提及答案，笔者根据自己写的答案及老师批改的结果编写了部分试题集的答案，希望能帮助到想要学习此书的读者。并且会在每题的前面标注该题的题源，部分题目与题源不符，请以本书上的题目为准。

限于编者的水平，本书中错误与疏漏在所难免，恳请读者不吝指正，希望能和大家一起完成习题答案的编写。

2024 年 1 月 25 日

目录

第一章 线性空间与线性变换	1
第二章 内积空间	9
第三章 多项式	15
第四章 矩阵的 Jordan 标准形	17
第五章 矩阵函数	23
第六章 矩阵分解	33
第七章 广义逆矩阵	46

第一章 线性空间与线性变换

题 1.1. (P98.3) 在 \mathbb{R}^3 中, 取

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 构成 \mathbb{R}^3 的一组基。

(2) 已知 \mathbb{R}^3 中元素 \mathbf{A} 在基 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 下的坐标为 $(1, 2, 3)^T$, 求 \mathbf{A} 。

(3) 求 $\mathbf{B} = (1, 2, 3)^T$ 在基 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ 下的坐标。

解. (1) 令 $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)$, 此时 $|\mathbf{F}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 这构成了 \mathbb{R}^3 下的一组基。

(2) $\mathbf{A} = \mathbf{F}\mathbf{x} = (6, 5, 3)^T$, 其中 $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$ 。

(3) $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{x}$, 则 $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} = (-1, -1, 3)^T$ 。

□

题 1.2. (p98.4) 验证

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\nu}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\nu}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

与

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

都可作为 \mathbb{R}^3 的基, 并求 $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$ 到 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ 的过渡矩阵。

解. 令 $V = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $W = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, 此时有 $|V| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} \neq 0$, $|W| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$, 这说明了 ν_1, ν_2, ν_3 与 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 都可作为 \mathbb{R}^3 的一组基。

记过渡矩阵为 A , 则 $W = VA$, 则 $A = V^{-1}W$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & 4 \\ \frac{9}{2} & \frac{13}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$ □

题 1.3. (P99.10) 设 V_1, V_2, V_3 为线性空间 V 的子空间, 且 $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$, 试问 $V_1 + V_2 + V_3$ 是否为直和?

证明. 结论: 不构成直和。下面通过举反例给出证明:

取线性空间 $V = \mathbb{R}^3$, 并令 e_1, e_2, e_3 分别为 V 子空间 V_1, V_2, V_3 上的一组基, 其中 $V_i = \{ke_i | k \in \mathbb{R}\} i = 1, 2, 3$ (此时 V_i 为三维空间中的一条直线), 则 $\dim(V_i) = 1$ 。

容易验证子空间 V_i 满足题设要求, 并且 $A = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$,

$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = 2$, 所以 $V_1 + V_2 + V_3$ 构成了 \mathbb{R}^2 。此时 $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq \dim(V_1 + V_2 + V_3)$, 这便说明了 $V_1 + V_2 + V_3$ 不构成直和。 □

题 1.4. (P99.12) 设 V_1, V_2, \dots, V_n 为线性空间 V 的子空间, 举例说明, 即使 V_1, V_2, \dots, V_n 两两的交空间均为零空间, 其和 $V_1 + V_2 + \dots + V_n$ 也未必是直和。

证明. 与例1.3有类似的证明过程, 不妨令 $V = \mathbb{R}^n$, 则 $\dim(V) = n$, 取 n 个向量 e_1, \dots, e_n , 其中 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n}, 0, \dots, 0)^T$, $e_k = (\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n}, 0, \dots, 0)^T$, $e_n = (\cos \frac{(n-1)\pi}{n}, \sin \frac{(n-1)\pi}{n}, 0, \dots, 0)^T$, 并且 $\|e_i\|_2^2 = 1$ 。

令 $V_i = \{ke_i | k \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$, 则 $\dim(V_i) = 1$, $\sum_{i=1}^n V_i = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i | \alpha_i \in V_i\}$ 构成了 \mathbb{R}^2 , 所以 $\dim(\sum_{i=1}^n V_i) = 2$ 。而 $\sum_{i=1}^n \dim(V_i) = n \neq \dim(\sum_{i=1}^n V_i)$, 这便说明了不构成直和。

下面验证 V_1, V_2, \dots, V_n 两两的交空间均为零空间。任取 $V_i = \{k_i e_i\}$, $V_j = \{k_j e_j\}$, 其中 $i < j$ 。要验证其交空间为零空间, 只需验证前两个维度的交为 0。即满足如下等式:

$$k_i \cos \frac{(i-1)\pi}{n} = k_j \cos \frac{(j-1)\pi}{n} \quad (1.1)$$

$$k_i \sin \frac{(i-1)\pi}{n} = k_j \sin \frac{(j-1)\pi}{n} \quad (1.2)$$

- 若 $i = 1$, $k_i = k_j = 0$ 。

- 若 $i, j > 1$, $k_i = 0$, 由于 $\frac{(i-1)\pi}{n} \in (0, \pi)$, 则 $\sin x \in (0, \pi)$, 则 $k_j = 0$ 。同理: 若 $k_j = 0$, 则 $k_i = 0$ 。
- 若 $i, j > 1$, $i = 1 + \frac{n}{2}$, 根据式 1.1 得 $k_j = 0$, 根据式 1.2 得 $k_i = 0$ 。同理: 若 $j = 1 + \frac{n}{2}$, 则 $k_i = k_j = 0$ 。
- 若 $i, j > 1$, 且 $k_i \neq 0, k_j \neq 0, i \neq 1 + \frac{n}{2}, j \neq 1 + \frac{n}{2}$ 。此时 $k_i \cos \frac{(i-1)\pi}{n} \neq 0, k_j \cos \frac{(j-1)\pi}{n} \neq 0$, 用式 1.2 除以式 1.1, 得 $\tan \frac{(i-1)\pi}{n} = \tan \frac{(j-1)\pi}{n}$, 此时 $i = j$, 这与 $i \neq j$ 矛盾。

则 $k_1 = k_2 = 0$, $V_i \cap V_j = \{0\}$, 这便完成了证明。 \square

题 1.5. (P100.14) 考虑关于函数的集合 $V = \{(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ 。

- (1) 证明该集合关于函数的线性运算构成 3 维实线性空间。
- (2) 证明求导算子 $\mathcal{D} : f \rightarrow f'$ 为 V 上的线性变换, 并给出 \mathcal{D} 在基 $\alpha_1 = x^2e^x, \alpha_2 = xe^x, \alpha_3 = e^x$ 下的矩阵。

解. (1) 由于函数的本质是 $\mathbb{R}^3 \rightarrow V$ 的映射, 其中 $V \subset \mathbb{R}$ 。所以 V 显然满足加法和乘法的八条运算法则。接下来一一验证八条法则:

任取 $a, b, c \in V, k, l \in \mathbb{R}$, 则 $a = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x, b = (b_2x^2 + b_1x + b_0)e^x, c = (c_2x^2 + c_1x + c_0)e^x$

加法:

$$a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c), a + 0 = a \Leftrightarrow 0 = (0x^2 + 0x + 0)e^x, a + b = 0 \Leftrightarrow b = (-a_2x^2 - a_1x - a_0)e^x$$

乘法:

$$k(a + b) = ka + kb, (k + l)a = ka + la, (kl)a = k(la), 1a = a$$

- (2) 只需验证其对加法和乘法封闭, 任取 $a, b \in V, k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(a) = (a_2x^2 + (2a_2 + a_1)x + a_1 + a_0)e^x, \mathcal{D}(b) = (b_2x^2 + (2b_2 + b_1)x + b_1 + b_0)e^x$ 。则 $\mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b) = ((a_2 + b_2)x^2 + (2a_2 + a_1 + 2b_2 + b_1)x + a_1 + a_0 + b_1 + b_0)e^x = \mathcal{D}(a + b)$, $\mathcal{D}(ka) = k(a_2x^2 + (2a_2 + a_1)x + a_1 + a_0)e^x = k\mathcal{D}(a)$ 。又由于 $\mathcal{D}(\alpha_1) = (x^2 + 2x)e^x, \mathcal{D}(\alpha_2) = (x + 1)e^x, \mathcal{D}(\alpha_3) = e^x$ 。所以 $\mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

\square

题 1.6. (p100.17) 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\text{Im}\mathcal{A}^2 = \text{Im}\mathcal{A}$, 则 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 是否成立? 说明理由。

解. 结论: 不一定成立。下面通过举反例说明, 即若 $\mathcal{A}^2 = n\mathcal{A}$, $\text{Im}\mathcal{A}^2 = \text{Im}\mathcal{A}$ 仍然成立。

先证 $\text{Im}\mathcal{A}^2 \subset \text{Im}\mathcal{A}$, 显然 $\text{Im}\mathcal{A} \subset V$, 所以 $\text{Im}\mathcal{A}^2 \subset \text{Im}\mathcal{A}$; 再证 $\text{Im}\mathcal{A} \subset \text{Im}\mathcal{A}^2$, 任取 $\alpha \in V$, 若存在 β , 使 $\mathcal{A}^2(\beta) = \mathcal{A}(\alpha)$, 则 $\text{Im}\mathcal{A} \subset \text{Im}\mathcal{A}^2$ 。因为 $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{n}\mathcal{A}^2(\alpha) = \mathcal{A}^2(\frac{1}{n}\alpha)$, 而线性空间数乘封闭, 令 $\frac{1}{n}\alpha = \beta$ 便说明了 $\text{Im}\mathcal{A} \subset \text{Im}\mathcal{A}^2$ 。综上, $\text{Im}\mathcal{A}^2 = \text{Im}\mathcal{A}$ 。 \square

题 1.7. (p100.18) 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的线性变换, 且 $V = \ker\mathcal{A} \oplus \text{Im}\mathcal{A}$, 证明 $\text{Im}\mathcal{A}^2 = \text{Im}\mathcal{A}$ 。举例说明一般情况下 $\ker\mathcal{A}$ 和 $\text{Im}\mathcal{A}$ 不构成直和关系?

证明. 给出如下两种解法:

(1) 直接利用题目条件证明

$$\text{Im}(\mathcal{A}) = \text{Im}(V) = \text{Im}(\ker\mathcal{A} \oplus \text{Im}\mathcal{A}) = \text{Im}(\ker\mathcal{A}) + \text{Im}(\text{Im}\mathcal{A}) = \mathbf{0} + \text{Im}^2\mathcal{A} = \text{Im}^2\mathcal{A}$$

(2) 先证 $\text{Im}\mathcal{A}^2 \subset \text{Im}\mathcal{A}$, 显然 $\text{Im}\mathcal{A} \subset V$, 所以 $\text{Im}\mathcal{A}^2 \subset \text{Im}\mathcal{A}$; 再证 $\text{Im}\mathcal{A} \subset \text{Im}\mathcal{A}^2$, 任取 $\alpha \in V$, 一定存在 β, γ , 使 $\alpha = \beta + \gamma$, 其中 $\mathcal{A}(\beta) = 0, \gamma = \mathcal{A}(\eta) \in \text{Im}(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\beta + \gamma) = \mathcal{A}(\beta) + \mathcal{A}(\gamma) = \mathcal{A}(\gamma) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\eta)) = \mathcal{A}^2(\eta)$$

则 $\text{Im}\mathcal{A} \subset \text{Im}\mathcal{A}^2$ 。综上, $\text{Im}(\mathcal{A}^2) = \text{Im}(\mathcal{A})$

\square

题 1.8. (p100.19) 定义映射 $\mathcal{T}: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为

$$\mathcal{T}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

(1) 证明: \mathcal{T} 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换。

(2) 求 \mathcal{T} 在基

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

下的矩阵。

(3) 已知 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中元素 A 在基 E_1, E_2, E_3, E_4 下的坐标为 $(1, 2, 3, 4)^T$, 求 $\mathcal{T}(A)$ 。

(4) 求 $\ker \mathcal{T}$ 和 $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ 。

(5) 求 \mathcal{T} 的不变因子和最小多项式。

(6) 是否存在一组基, 使得 \mathcal{T} 在这组基下的矩阵为对角矩阵? 如存在, 求出这组基和相应的对角阵。

解. (1) 任取 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$, $k \in \mathbb{R}$, 显然 $\mathcal{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathcal{T}(\mathbf{A}) + \mathcal{T}(\mathbf{B})$, $k\mathcal{T}(\mathbf{A}) = \mathcal{T}(k\mathbf{A})$, 这便说明了 \mathcal{T} 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换。

(2)

$$\mathcal{T}(\mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{T}(\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{T}(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{T}(\mathbf{E}_4) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\mathcal{T}(\mathbf{E}_1) = \mathbf{E}_1$, $\mathcal{T}(\mathbf{E}_2) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4$, $\mathcal{T}(\mathbf{E}_3) = 2\mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_4$, $\mathcal{T}(\mathbf{E}_4) = -2\mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_4$ 所以

$$\mathcal{T}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4) = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{记 } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{C} \text{ 为所求。}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{A}) &= \mathcal{T}[(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4)\mathbf{x}] \\ &= \mathcal{T}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{E}_1 + \frac{11}{2}\mathbf{E}_3 + \frac{11}{2}\mathbf{E}_4 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$

(4) 将 C 化为行阶梯形式矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可知 $r(C) = 2$, 则选取第一和第二列作

为极大无关组, 则 $\text{Im}\mathcal{T} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4)$; $\ker(\mathcal{T})$ 则为矩阵 C 的化零空间, 即 $\ker(\mathcal{T}) = (-3\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_3, 5\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4)$

(5) 矩阵 C 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$,

行列式因子为 $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = \lambda(\lambda - 1), D_4 = \lambda^2(\lambda - 1)^2$,

则不变因子为 $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = \lambda(\lambda - 1), d_4 = \lambda(\lambda - 1)$,

最小多项式为 $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ 。

(6) 一定存在, 这是由于最小多项式不同项的最高系数为 1。

则其若当标准型 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

求出属于 $\lambda = 0$ 的特征向量 $\mathbf{p}_1 = (-3, -1, 2, 0)^T$, $\mathbf{p}_2 = (5, -1, 0, 2)^T$ 。

求出属于 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\mathbf{p}_3 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{p}_4 = (0, 0, 1, 1)^T$ 。

接着设新基底为 $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4)$, 令 $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$, 则 $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4) = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4)\mathbf{P} = (-3\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_3, 5\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4)$

□

题 1.9. (p100.21) 复数集 \mathbb{C} 上的共轭变换 $z \rightarrow \bar{z}$ 是否是 \mathbb{C} 作为复线性空间上的线性变换? 是否是 \mathbb{C} 作为实线性空间上的线性变换?

解. 定义变换 $\mathcal{T}(z) = \bar{z}$ 。任取 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$, $k = k_1 + k_2i \in \mathbb{C}$, 其中 $a, b, c, d, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 。

若选取的是复线性空间。 $\mathcal{T}(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \mathcal{T}(z_1) + \mathcal{T}(z_2)$, 对加法封闭; $\mathcal{T}(kz_1) = (k_1a - k_2b) + (-k_1b - k_2a)i$, $k\mathcal{T}(z_1) = (k_1 + k_2i)(a - bi) = (k_1a + k_2b) + (-k_1b + k_2a)i$, $\mathcal{T}(kz_1) \neq k\mathcal{T}(z_1)$, 对数乘不封闭, 不构成线性变换。

若选取的是实线性空间。加法封闭同上, 下面验证数乘封闭, 此时 $k_2 = 0$, $\mathcal{T}(kz_1) = ka - k_1b = k\mathcal{T}(z_1)$, 则构成线性变换。 □

题 1.10. (p100.22) 设矩阵 A 可以相似对角化, 证明: A 可以表示为矩阵 P_1, \dots, P_n 的线性组合, 其中 P_1, \dots, P_n 满足

$$(1) \text{ 对一切 } i, \text{ 有 } P_i^2 = P_i;$$

$$(2) \text{ 对一切 } i \neq j, \text{ 有 } P_i P_j = O;$$

$$(3) E = P_1 + \dots + P_n$$

给出具体的构造方法, 并讨论该分解的唯一性。

解. 由于矩阵 A 可相似对角化, 则存在 Q 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 不妨令

$E_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 这表明了矩阵第 i 行第 i 列为 1, 其他元素全为 0。则 $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$, $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q E_{ii} Q^{-1}$, 令 $P_i = Q E_{ii} Q^{-1}$, 便满足了线性组合的要求, 并且容易验证 P_i, \dots, P_n 满足三个约束条件。

下面验证该分解的唯一性, 假设存在其他符合题意的分解, 记 $A = \sum_{i=1}^n \nu_i H_i$ 。则 $AH_j = \sum_{i=1}^n \nu_i H_i H_j = \nu_j H_j$ 。

$$\text{若 } H_j = O,$$

□

题 1.11. (p100.23) 已知 \mathcal{A} 为线性空间 V 上的线性变换, $\nu \in V$, $k \geq 1$ 为正整数, 满足 $\mathcal{A}^k \nu = 0$, 且 $\mathcal{A}^{k-1} \nu \neq 0$ 。

(1) 证明: $\nu, \mathcal{A}\nu, \dots, \mathcal{A}^{k-1}\nu$ 线性无关, 特别 $k \leq \dim V$ 。

(2) 证明: $W = \text{span}\{\nu, \mathcal{A}\nu, \dots, \mathcal{A}^{k-1}\nu\}$ 为 \mathcal{A} 的不变子空间。

(3) 求 \mathcal{A} 在 W 上的限制 $\mathcal{A}|_W$ 在基 $\nu, \mathcal{A}\nu, \dots, \mathcal{A}^{k-1}\nu$ 下的矩阵。

解. (1) 只需验证对于实数 l_1, \dots, l_k , 当 $l_1 \nu + l_2 \mathcal{A}\nu + \dots + l_k \mathcal{A}^{k-1} \nu = 0$ 时, 有 $l_1 = \dots = l_k = 0$ 对等式两边进行 $\mathcal{A}^m, m = k-1, \dots, 1$ 的线性变换, 由于 $\mathcal{A}^k \nu = 0$, 则 $\mathcal{A}^{k+d} \nu = 0$, 其中 $d \geq 0$ 。

$$l_1 \mathcal{A}^{k-1} \nu + l_2 \mathcal{A}^k \nu + \dots + l_k \mathcal{A}^{2k-2} \nu = 0 \quad (1)$$

$$l_1 \mathcal{A}^{k-2} \nu + l_2 \mathcal{A}^{k-1} \nu + \dots + l_k \mathcal{A}^{2k-1} \nu = 0 \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$l_1 \mathcal{A} \nu + l_2 \mathcal{A}^2 \nu + \dots + l_k \mathcal{A}^k \nu = 0 \quad (n)$$

由式(1)可知, $l_1 \mathcal{A}^{k-1} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, 而 $\mathcal{A}^{k-1} \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, 所以 $l_1 = 0$ 。同理, 观察式(2) 到式(n), 可得 $l_1 = \cdots = l_n = 0$ 。

- (2) 验证 \mathbf{W} 的基 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ 经过线性变换后仍在 \mathbf{W} 中即可。 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathcal{A}\boldsymbol{\nu}, \dots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_k) = \mathcal{A}^k \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, 这表明了经过线性变换后 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i+1} \in \mathbf{W}$ ($i = 1, \dots, k-1$), 而 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0} \in \mathbf{W}$ 。

(3) 根据第 (2) 问, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□

题 1.12. (p100.24) 已知 \mathcal{A} 为线性空间 V 上的线性变换, $\boldsymbol{\alpha}_i \in V$, $k_i \geq 1$ 为正整数, 其中 $i = 1, 2, \dots, s$, 满足 $(\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i} \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{0}$ 且 $(\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i-1} \boldsymbol{\nu}_i \neq \mathbf{0}$, 并记

$$\mathbf{W}_i = \text{span}\{\boldsymbol{\nu}_i, (\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})\boldsymbol{\nu}_i, \dots, (\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i-1} \boldsymbol{\nu}_i\}$$

证明: 若 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则 $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}_j = \{\mathbf{0}\}$

证明. 由 $(x - \lambda_i)^{k_i}$ 与 $(x - \lambda_j)^{k_j}$ 互素, 则存在 $f(x), g(x)$, 使 $f(x)(x - \lambda_i)^{k_i} + g(x)(x - \lambda_j)^{k_j} = 1$, 对应到线性变换 \mathcal{A} 上即为 $f(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i} + g(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_j \text{id})^{k_j} = \text{id}$ 。

令 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_j$, 则 $\boldsymbol{\alpha} = l_1 \boldsymbol{\nu}_i + \cdots + l_{k_i} (\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i-1} \boldsymbol{\nu}_i$, $(\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i} \boldsymbol{\alpha} = l_1 (\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i} \boldsymbol{\nu}_i + \cdots + l_{k_i} (\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{2k_i-1} \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{0}$; 同理, $(\mathcal{A} - \lambda_j \text{id})^{k_j} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 。又因为 $\boldsymbol{\alpha} = \text{id}(\boldsymbol{\alpha}) = f(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \text{id})^{k_i} \boldsymbol{\alpha} + g(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_j \text{id})^{k_j} \boldsymbol{\alpha}$ 。所以 $\boldsymbol{\alpha} = \text{id}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}_j = \{\mathbf{0}\}$ 。 □

第二章 内积空间

题 2.1. (p119.1) 证明内积的平行四边形恒等式和极化恒等式 (定理 6.3)。

设 (\cdot, \cdot) 为实线性空间 V 上的内积, $\|\cdot\|$ 为由内积定义的范数, 则

(1) 平行四边形恒等式: 对任意 $x, y \in V$, $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$

(2) 极化恒等式: 对任意 $x, y \in V$, $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

证明.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2) = 4(x, y)$$

□

题 2.2. (p119.2) 求 \mathbb{R}^3 上的一组标准正交基 ν_1, ν_2, ν_3 , 其中 ν_1 与向量 $(1, 1, 1)^T$ 线性相关。

解. 由题意得, 设 $\nu_1 = k(1, 1, 1)^T$, 则 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 易知 $\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \nu_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)^T$ 与 ν_1 正交, 且 ν_2 与 ν_3 正交。则标准正交基为 $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ □

题 2.3. (p119.3) 已知 \mathbb{R}^3 上的向量 $\nu = (1, 2, -1)^T, \omega = (1, 1, 0)^T$, 求一个与 ν, ω 都正交的单位向量。

解. 构造 $A = \begin{pmatrix} \nu^T \\ \omega^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 即求 $Ax = 0$ 的一个单位长度解 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

题 2.4. (p119.6) 在一元多项式函数构成的线性空间 $\mathbf{R}[x]$ 上定义内积为

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

试求 $1, x, x^2, x^3$ 的 Schmidt 正交化。

解.

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} 1 = x$$

$$e_3 = x^2 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} x - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$e_4 = x^3 - \frac{(x^3, x^2 - \frac{1}{3})}{(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})} (x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{(x^3, x)}{(x, x)} x - \frac{(x^3, 1)}{(1, 1)} 1 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$e = (e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x)$$

□

题 2.5. (p120.11) 设 $\nu \in \mathbb{R}^n$, $A = \nu\nu^T$, 求 A 的正交对角化。

证明. 令 $\nu = (a_1, \dots, a_n)^T$, 显然 $(\nu\nu^T)^T = \nu\nu^T$, $A \in \mathcal{S}^n$ 必可相似对角化。 $r(A) = r(\nu\nu^T) \leq \min(\nu, \nu^T) = 1$, 所以 $r(A) = 0, 1$,

若 $r(A) = 0$, 则 $A = O \Rightarrow \nu = 0$, 此时 A 相似于 $\text{diag}\{0, \dots, 0\}$ 。取 \mathbb{R}^n 上的一组标准正交基 e_1, \dots, e_n 组成矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda = O$ 其中 $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)$ 。

$$\text{若 } r(A) = 1, \text{ 则 } a_1, \dots, a_n \text{ 不全为 } 0, \text{ 不妨令 } a_1 \neq 0, \text{ 所以 } A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = \text{tr}(A) = \nu^T \nu$ 。

当 $\lambda = 0$ 时, 计算其特征向量, 对 A 进行行变换, 得 $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 则特征向量为

$e_1 = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (-a_3, 0, a_1, 0, \dots, 0)^T, e_k = (-a_k, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots, 0)^T, e_{n-1} = (-a_{n-1}, 0, \dots, 0, a_1)^T$, 将 e_1, \dots, e_n 进行施密特正交并单位化, 得

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{\|\eta_1\|} e_1 \\ \eta_2 &= \frac{1}{\|\eta_2\|} (e_2 - \frac{(e_2, \eta_1)}{\eta_1, \eta_1} \eta_1) \\ &\vdots \\ \eta_{n-1} &= \frac{1}{\|\eta_{n-1}\|} (e_{n-1} - \frac{(e_{n-1}, \eta_{n-2})}{\eta_{n-2}, \eta_{n-2}} \eta_{n-2} - \dots - \frac{(e_{n-1}, \eta_1)}{\eta_1, \eta_1} \eta_1) \end{aligned}$$

则 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 是 $\lambda = 0$ 的 $n-1$ 个正交的单位特征向量。

当 $\lambda = 1$ 时, 其单位特征向量为 $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{1^T 1}}(a_1, \dots, a_n)^T$, 且与 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 正交。

令 $Q = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, 则 $Q^T A Q = \Lambda = \text{diag}\{0, \dots, 0, \nu^T \nu\}$ 。 \square

题 2.6. (p120.12) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, 已知 A 正交相似于 $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}$ 型矩阵,

求出 ω 的值。

解. 由于 A 与 W 相似, 所以两者的行列式因子相同。

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda E - W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \omega \\ 0 & -\omega & \lambda \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的行列式因子为 $D_1 = D_2 = 1, D_3 = \lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2)$; 矩阵 W 的行列式因子为 $D_1 = D_2 = 1, D_3 = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)$ 。所以 $a^2 + b^2 + c^2 = \omega^2 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。 \square

题 2.7. (p120.13) 证明: 实反对称矩阵 ($A^T = -A$) 于反 Hermite 矩阵 ($A^H = -A$) 的特征值为纯虚数或 0。

证明. 不妨设矩阵 A 的特征值为 $\lambda = a + bi$, 特征向量为 $x = u + vi$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}, \mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ 。

下面提供两种方法来解决这个问题:

(1) $Ax = \lambda x \Rightarrow A(u + vi) = (a + bi)(u + vi) \Rightarrow A\mu = a\mu - b\nu, A\nu = a\nu + \mu$, 且 $\mu^H A\mu = (\mu^H A\mu)^H = \mu^H A^H \mu = -\mu^H A\mu$, 所以 $\mu^H A\mu = 0$; 同理, $\nu^H A\nu = 0$ 。又因为 $\mu^H A\mu = a\mu^H \mu - b\mu^H \nu, \nu^H A\nu = a\nu^H \nu + b\nu^H \mu, \mu^H A\mu + \nu^H A\nu = a(\|\mu\|^2 + \|\nu\|^2) = 0$, 而 μ, ν 不能同时为 0, 所以 $a = 0$, 这说明了 $\lambda = bi$ 为纯虚数或 0。

(2) $Ax = \lambda x \Rightarrow (Ax)^H = (\lambda x)^H \Rightarrow x^H A^H = \bar{\lambda} x^H$, 两边同时与 x 做内积, 得 $x^H A^H x = \bar{\lambda} x^H x \Rightarrow -x^H A x = \bar{\lambda} x^H x \Rightarrow -\lambda x^H x = \bar{\lambda} x^H x$, 此时有 $-(a + bi) = a - bi \Rightarrow a = 0$, 这说了 $\lambda = bi$ 为纯虚数或 0。

ps: 两种方法都不需要针对矩阵类型分类讨论, 原因在于共轭转置 H 包含转置 T 。

\square

题 2.8. (p121.15) 设 V 为 Euclid 空间, A 为 V 上的对称变换, 若对一切非零向量 $\nu \in V$, 均有 $(A\nu, \nu) > 0$, 这样的对称变换称为正定的, 求证: 正定的对称变换在标准正交基下的矩阵为正定矩阵。

证明. 取标准正交基 (e_1, \dots, e_n) , 设 v 在基下的坐标为 x , 对称变换 \mathcal{A} 在基下的变换矩阵为 A 则 $\mathcal{A}v = Ax$. 由 $(\mathcal{A}v, v) > 0$ 与 $A^T = A$, 得 $x^T A^T x > 0 \Rightarrow x^T A x > 0$, 即 A 是正定矩阵. \square

题 2.9. (p121.16) 试给出一个既不是对称变换, 也不是正交变换的正规变换。

解. 不妨设矩阵 A 为满足这些变换, 在标准正交基 (e_1, \dots, e_n) 下的变换矩阵。对称变换即 $A^T = A$; 正交变换即 $AA^T = E$; 正规变换为 $A^H A = AA^H$ 。由于对称变换与正交变换定义

在欧式空间, 矩阵需要满足的条件变为 $A \neq A^T, A^T A = A^T A \neq E$ 。显然, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

为所求, 其中 $A^T \neq A, A^T A = A^T A = 4E$. \square

题 2.10. (p121.21) 设 V 为 Euclid 空间, T 为 V 上的线性变换, 且对任何 $v \in V$, 均有 $v - Tv \in (\text{Im} T)^\perp$, 这样的线性变换 V 上的投影变换。

- (1) 证明: 对任何 V 上的投影变换 T , 有 $\ker T = (\text{Im} T)^\perp$, 该命题的逆命题是否成立?
- (2) 证明: 线性变换 T 为 V 上的投影变换的充分必要条件是 T 是对称变换且满足 $T^2 = T$ 。
- (3) 设 T_1, T_2 均为 V 上的投影变换, 求证: $T_1 + T_2$ 为投影变换当且仅当 $T_1 T_2 = \mathcal{O}$, 当且仅当 $T_1 \perp T_2$ 。
- (4) 设 T_1, T_2 均为 V 上的投影变换, 求证: $T_1 - T_2$ 为投影变换当且仅当 $\text{Im} T_1 \supset \text{Im} T_2$
- (5) 设 T_1, T_2 均为 V 上的投影变换, 求证: $T_1 T_2$ 为投影变换当且仅当 $T_1 T_2 = T_2 T_1$, 且此时有 $\text{Im} T_1 T_2 = \text{Im} T_1 \cap \text{Im} T_2$ 。
- (6) 设 \mathcal{A} 为 V 上的对称变换, 证明 \mathcal{A} 可表示为一组投影变换的线性组合, 且该组投影变换的像空间的直和恰为 V 。

证明. 由于线性变换和线性变换下对应的矩阵是基本等价的, 在后续的证明过程中, 不再对两者进行区分。

定理 2.1. 若对于任意的 $\alpha \in V$, 有 $(\alpha, A\alpha) = \alpha^T A \alpha = 0$ 恒成立, 则 A 为反对称矩阵 (即 $A^T = -A$)。

- (1) 先证 $\ker \mathcal{T} \subset (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$, 只需证明任取 $\alpha \in \ker \mathcal{T}$ 有 $\alpha \in (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$, 即任取 $\alpha \in V, \beta \in \operatorname{Im} \mathcal{T}$ 有 $(\alpha, \mathcal{T}\gamma) = 0$, 其中 $\mathcal{T}\alpha = 0, \mathcal{T}\gamma = \beta$. 根据投影变换的定义, 有 $0 = (\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\gamma) = (\alpha, \mathcal{T}\gamma)$, 于是 $\ker \mathcal{T} \subset (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$;

下证 $\ker \mathcal{T} = (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$, 由于 $\dim(\ker \mathcal{T}) + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{T}) = n$, 则 $\dim(\ker \mathcal{T}) = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$, 于是 $\ker \mathcal{T} = (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$.

逆命题不一定成立。令 \mathcal{T} 在标准正交基下的矩阵为 $2E$, 此时 $\ker(\mathcal{T}) = \{0\}, \operatorname{Im} \mathcal{T} = \mathbb{R}^n, (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp = \{0\}$, 这满足了 $\ker \mathcal{T} = (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$, 但 $\nu - \mathcal{T}\nu = \nu - 2E\nu = -\nu \notin (\operatorname{Im} \mathcal{T})^\perp$.

- (2) 先证必要性: 由 (1) 可得, 任取 $\alpha \in V$ 有 $\alpha - \mathcal{T}\alpha \in \ker \mathcal{T}$, 因此 $\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha) = 0 \Rightarrow \mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}^2\alpha = 0$, 这说明了 $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$. 又由于 $(\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\alpha) = 0$, 而 $(\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha), \alpha) = (\mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}^2\alpha, \alpha) = (0, \alpha) = 0$, 这说明了 $(\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\alpha) = (\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha), \alpha)$, 即 \mathcal{T} 是对称变换。

再证充分性: 即任取 $\alpha, \beta \in V, (\alpha - \mathcal{T}\alpha, \mathcal{T}\beta) = (\mathcal{T}(\alpha - \mathcal{T}\alpha), \beta) = (\mathcal{T}\alpha - \mathcal{T}^2\alpha, \beta) = ((\mathcal{T} - \mathcal{T}^2)\alpha, \beta) = (0, \beta) = 0$.

- (3) (a) 先证充分性: 显然 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是对称变换, 只需证明 $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, 即证 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$, 而 $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = 0$, 所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$.

再证必要性: 若 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是投影变换, 则 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$. 又因为 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2^2 = -\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_2^2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, 所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$.

- (b) 先证充分性, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = 0$, 不妨令 $\alpha = \beta$, 则 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = (\alpha, \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\alpha) = 0$, 根据定理2.1有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = -(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$, 即 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = 0$, 所以 $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ 是投影变换。

再证必要性, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 欲证 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = 0$, 只需注意到 $(\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = (\alpha, \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\beta) = (\alpha, 0) = 0$.

- (4) 先证充分性, 显然 $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ 是对称变换, 只需证明 $(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$, 即证 $2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$. 任取 $\alpha \in V$, 由于 $\alpha - \mathcal{T}_1\alpha \in (\operatorname{Im} \mathcal{T}_1)^\perp \subset (\operatorname{Im} \mathcal{T}_2)^\perp$, 则 $(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} & (\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) \\ &= (\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) - (\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) \\ &= (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha) \end{aligned}$$

根据定理2.1, $(\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = -(\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$, 于是 $2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.

再证必要性, 若 $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ 是投影变换, 则 $2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ 。只需证明任取 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$, 有 $\mathcal{T}_2\alpha = \mathcal{T}_1\beta$ 。由于 $\mathcal{T}_2\alpha = 2\mathcal{T}_2\alpha_1 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\alpha_1 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\alpha_1 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\alpha_1 = \mathcal{T}_1\beta + \mathcal{T}_2\gamma \Rightarrow \mathcal{T}_2(\alpha - \gamma) = \mathcal{T}_1\beta$

只需证明任取 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = 0$, 不妨令 $\alpha = \beta$

$$(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = (\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) - (\mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha) \quad (1)$$

$$(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = (\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) - (\mathcal{T}_2\alpha, \mathcal{T}_1\alpha) = (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\alpha) \quad (2)$$

(1)式加(2)式得:

$$\begin{aligned} 2(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) &= (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha) + (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\alpha) \\ &= (\alpha, (2\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\alpha) \\ &= (\alpha, \mathbf{0}) = 0 \end{aligned}$$

即 $(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\alpha) = 0$ 恒成立。根据定理2.1有 $(\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = -(\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$, 即即 $(\alpha - \mathcal{T}_1\alpha, \mathcal{T}_2\beta) = (\alpha, (\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\beta) = 0$ 。

(5) 先证充分性, $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = \mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$, 则其为对称变换; 接着有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$, 说明为投影变换。

再证必要性, 若 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 是投影变换, 则其也是对称变换, 于是 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T = \mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ 。

先证 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 \subset \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$, 若 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$, 则 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1$, 又由于 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, 所以 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \text{Im}\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$, 即 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_2$, 所以 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ 。

再证 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 \supset \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$, 任取 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$, 其中 $\alpha = \mathcal{T}_1\alpha_1 = \mathcal{T}_2\alpha_2$, 则 $\alpha = \mathcal{T}_1\alpha = \mathcal{T}_1^2\alpha = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\alpha_2$, 说明了 $\alpha \in \text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 。

综上 $\text{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \text{Im}\mathcal{T}_1 \cap \text{Im}\mathcal{T}_2$ 。

□

第三章 多项式

题 3.1. (p44.1) 计算 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 。

$$(1) f(x) = x^4 - 4x + 5, \quad g(x) = x^2 - x + 2$$

解. $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 其中 $q(x) = x^2 + x - 1$, $r(x) = -7x + 7$ 。

□

题 3.2. (p44.2) 求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式和最小公倍式。

$$(1) f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

解. $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$, 其中 $q_1(x) = x - 1$, $r_1(x) = 2x^2 + 2x + 2$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x), \quad \text{其中 } q_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \gcd(f(x), g(x)) &= \frac{1}{2}r_1(x) = x^2 + x + 1 \\ \text{lcm}(f(x), g(x)) &= 4 \frac{f(x)g(x)}{\gcd(f(x), g(x))} \\ &= \frac{(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)}{x^2 + x + 1} \\ &= (x^2 + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

注：以上计算最大公因式和最小公倍式乘的系数均为凑首 1 多项式。

□

题 3.3. (p44.3) 求多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $\gcd(f(x), g(x))$, 以及满足等式 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$ 的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$ 。

$$(1) f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x - 1$$

解. $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$, 其中 $q_1(x) = x^2 - 3$, $r_1(x) = x - 2$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x), \text{ 其中 } q_2(x) = x, r_2(x) = x - 1$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x), \text{ 其中 } q_3(x) = 1, r_3(x) = -1$$

$$r_2(x) = q_4(x)r_3(x), \text{ 其中 } q_4(x) = -x + 1$$

$$\gcd(f(x), g(x)) = -r_3(x) = 1, \text{ 于是 } 1 = u(x)f(x) + v(x)g(x), \text{ 其中 } u(x) = -1 - x, \\ v(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$$

注：以上计算最大公因式乘的系数为凑首 1 多项式。

□

题 3.4. (p45.6) 若多项式 $f(x), g(x), u(x), v(x)$ 满足 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x))$, 证明 $u(x), v(x)$ 互素。

证明. 令 $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$, 则 $f(x) = d(x)p(x)$, $g(x) = d(x)q(x)$,

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \gcd(f(x), g(x)) \Rightarrow u(x)d(x)p(x) + v(x)d(x)q(x) = d(x) \Rightarrow u(x)p(x) + v(x)q(x) = 1, \text{ 这便说明了 } u(x), v(x) \text{ 互素。}$$

□

第四章 矩阵的 Jordan 标准形

题 4.1. (p63.1) 利用初等变换把下列 λ 矩阵化为等价标准形。

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix}$$

解.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 2\lambda-2 & 2\lambda^2-2 & 2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{(r_1-r_2) \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda) \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2-c_1]{r_2-(\lambda-1)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda) \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[c_3-(\lambda^2-\lambda)c_1]{c_3 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda(\lambda+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+\lambda c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -3\lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \times -\frac{1}{4}]{(c_3+3\lambda c_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[c_3-(\lambda-1)c_2]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 4.2. (p64.2) 求下列 λ 矩阵的行列式因子、不变因子和初等因子。

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 & -6 \\ 0 & \lambda-3 & 8 \\ 0 & 2 & \lambda+5 \end{pmatrix}$$

解. (1) $D_1 = 1, D_2 = \lambda - 1, D_3 = (\lambda - 1)^3; d_1 = 1, d_2 = \lambda - 1, d_3 = (\lambda - 1)^2$; 初等因子组: $(\lambda - 1)^2, \lambda - 1$

(2) $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = (\lambda + 1)(\lambda - 4\sqrt{2} + 1)(\lambda + 4\sqrt{2} + 1); d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = (\lambda + 1)(\lambda - 4\sqrt{2} + 1)(\lambda + 4\sqrt{2} + 1)$; 初等因子组: $\lambda + 1, \lambda - 4\sqrt{2} + 1, \lambda + 4\sqrt{2} + 1$

□

题 4.3. (p64.3) 设 6 阶矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 5, 其初等因子是 $\lambda - 1, \lambda - 1, (\lambda - 2)^3, \lambda + 2, (\lambda + 2)^2$, 求 $A(\lambda)$ 的行列式因子、不变因子, 以及 $A(\lambda)$ 的等价标准形。

解. $d_5 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^2, d_4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2), d_3 = d_2 = d_1 = 1; D_1 = D_2 = D_3 = 1, D_4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2), D_5 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^3$; 等价标准型为:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & (\lambda - 1)(\lambda + 2) & & \\ & & & & (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^2 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中, 空白的位置全为 0。

□

题 4.4. (p64.5) 证明: 两个等价的 n 阶 λ 矩阵的行列式只相差一个常数因子。

证明. 不妨令题中所说的两个矩阵为 $A(\lambda), B(\lambda)$ 。

若非满秩矩阵, 则 $|A(\lambda)| = |B(\lambda)| = 0$, 显然符合题意。

若为满秩矩阵, 则 $|A(\lambda)| \neq 0, |B(\lambda)| \neq 0$ 由于等价的 λ 矩阵具有相同的行列式因子和不变因子, 则 $|A| = k_1 D_n(A(\lambda)) = k_1 D_n, |B| = k_2 D_n(B(\lambda)) = k_2 D_n$, 其中 $k_1, k_2 \neq 0$ 。于是 $\frac{|A(\lambda)|}{|B(\lambda)|} = \frac{k_1}{k_2}$

□

题 4.5. (p64.6) 求下列矩阵的 Jordan 标准形。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

解. (1) $D_1 = 1, D_2 = \lambda + 1, D_3 = (\lambda + 1)^2$; $d_1 = 1, d_2 = \lambda + 1, d_3 = (\lambda + 1)^2$; 初等因子组为

$$(\lambda + 1)^2, \lambda + 1; \text{ Jordan 标准型为 } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = (\lambda - 1)^3$; $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = (\lambda - 1)^3$; 初等因子组为 $(\lambda - 1)^3$;

$$\text{Jordan 标准型为 } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

题 4.6. (p64.7) 证明: 矩阵 \mathbf{A} 是幂零阵 (即存在正整数 k , 使得 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$) 当且仅当 \mathbf{A} 的特征值都等于零。

证明. 先证必要性。若 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, 由 Hamilton-Cayley 定理可知, $\lambda^k = 0$, 则 $\lambda = 0$ 。

再证充分性。矩阵 \mathbf{A} 必定相似于矩阵 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_m \end{pmatrix}$, 其中 \mathbf{J}_i 为 Jordan 标

准型, $\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, 空白位置全是 0。

由于 $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$, 若 $\mathbf{A}^k = \mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{O}$, 则 $\mathbf{J}^k = \mathbf{O}$, 于是有 $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k = \mathbf{O}$ 。令 \mathbf{J}_i 的阶数为 \mathcal{N}_i , 容易证明 $\mathbf{J}_i^{\mathcal{N}_i} = \mathbf{O}$ 。只需取 $k = \max_i \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_m\}$, 则 $\mathbf{J}_i^k = \mathbf{O}, i = 1, \dots, m$, 于是 $\mathbf{A}^k = \mathbf{J}^k = \mathbf{O}$, 这便完成了证明。 □

题 4.7. (p64.8) 设非零矩阵 \mathbf{A} 是幂零阵, 证明 \mathbf{A} 不相似于对角阵。

证明. 由 $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ 与 Hamilton-Cayley 定理可知, $\lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 。若 \mathbf{A} 相似于对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$,

则 $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$, 此时有 $\mathbf{A} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1} = \mathbf{O}$, 与 \mathbf{A} 是零矩阵矛盾, 所以 \mathbf{A} 不相似于对角矩阵。 □

题 4.8. (p64.9) 求 3 阶幂零阵的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知, $\mathbf{A}^k = \mathbf{O} \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, 则 \mathbf{A} 与 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & * & \\ & 0 & * \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 相似, 其中 $*$ 为 0 或 1, 空白处全为 0, 则:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

题 4.9. (p64.10) 求 3 阶幂等阵 (即满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 的矩阵 \mathbf{A}) 的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知, $\mathbf{A}^k = \mathbf{O} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, m_{\mathbf{A}}(\lambda) | \lambda^2 - \lambda$, 且 \mathbf{A} 一定可以相似对角化。

(1) 若 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda$, 此时初等因子为 $\lambda, \lambda, \lambda$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 若 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda - 1$, 此时初等因子为 $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 若 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$, 此时初等因子为 $\lambda, \lambda, \lambda - 1$ 或 $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 1$. $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

题 4.10. (p64.11) 设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, 求 \mathbf{A} 的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, m_{\mathbf{A}}(\lambda) | \lambda^2 - 1$, 且 \mathbf{A} 一定可以相似对角化。

(1) 若 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda + 1$, 此时初等因子为 $\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda + 1$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 若 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda - 1$, 此时初等因子为 $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 若 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$, 此时初等因子为 $\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda - 1$ 或 $\lambda + 1, \lambda - 1, \lambda - 1$ 。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 或 } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

题 4.11. (p64.12) 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, 证明: \mathbf{A} 相似于对角阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, m_{\mathbf{A}}(\lambda) | \lambda^2 - 1$, $\lambda - 1, \lambda + 1$ 两个多项式的次数均为 1, 所以一定可以相似于对角阵。 □

题 4.12. (p64.13) 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} = 10\mathbf{E}$, 证明: \mathbf{A} 相似于对角阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知, $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} = 10\mathbf{E} \Rightarrow m_{\mathbf{A}}(\lambda) | \lambda^3 - \lambda - 10$, 下面探究 $g(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 10$ 在复数域 \mathbb{C} 上根的分布。

$g'(\lambda) = 3\lambda^2 - 1$, $g(\lambda)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 上单调递增。且 $g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 10 < 0, g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} - 10 < 0, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} = +\infty$, 即存在 $\lambda_0 \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ 使 $g(\lambda_0) = 0$, 这表明了 $g(\lambda)$ 可以被分解为 $(\lambda - \lambda_0)(\lambda^2 + a\lambda + b)$ 的形式, 其中 $a^2 - 4b < 0$ 。

进一步的, 我们可以在复数域上将其分解为 $(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ 的形式, 并且由于 λ_1, λ_2 共轭, 所以 $\lambda_0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2$ 。 $\lambda - \lambda_0, \lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$ 三个多项式的次数均为 1, 所以 \mathbf{A} 相似于对角阵。 □

题 4.13. (p65.19) 设 \mathbf{A} 为 n 阶非零复方阵, $d = \deg m_{\mathbf{A}}(\lambda)$ 。

(1) 证明: 对一切 $n \times 1$ 的列矩阵 \mathbf{x} , 都有 $\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \dots, \mathbf{A}^d \mathbf{x}$ 线性相关。

(2) 证明: 对一切正整数 $k < d$, 都存在列矩阵 \mathbf{x} , 使得 $\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}$ 线性无关。

(3) 当 \mathbf{A} 为实方阵时, 是否存在实的列矩阵 \mathbf{x} , 使得(2)成立?

证明. (1) 由 $\deg m_{\mathbf{A}}(\lambda) = d$, 则 $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = a_1\lambda^d + a_2\lambda^{d-1} + \dots + a_d\lambda + a_{d+1}$, 其中 $a_1 \neq 0$ 。由 Hamilton-Cayley 定理, 有 $a_1\mathbf{A}^d + a_2\mathbf{A}^{d-1} + \dots + a_d\mathbf{A} + a_{d+1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$, 等式两边同乘列向量 \mathbf{x} , $a_1(\mathbf{A}^d\mathbf{x}) + a_2(\mathbf{A}^{d-1}\mathbf{x}) + \dots + a_d(\mathbf{Ax}) + a_{d+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 且 a_1, a_2, \dots, a_{d+1} 不全为 0, 这是线性相关的定义, 由此便完成了证明。

(2) 使用反证法。若对一切正整数 $k < d$, 任取列矩阵 \mathbf{x} , 都有 $\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}$ 线性相关, 即若 $a_0\mathbf{x} + a_1\mathbf{Ax} + \dots + a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 成立, 则 a_0, \dots, a_{k-1} 不能全为 0。

由于 $\deg m_{\mathbf{A}}(\lambda) = d$, 则 \mathbf{A} 在复数域上至少有 d 个特征值 $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ 。

不妨设 \mathbf{x} 为 \mathbf{A} 的特征向量 ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), 于是 $\mathbf{A}^j\mathbf{x} = \lambda_i^j\mathbf{x}$, 其中 $\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ 。

此时 $a_0\mathbf{x} + a_1\mathbf{Ax} + \dots + a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x} = (a_0 + a_1\lambda_i + \dots + a_{k-1}\lambda_i^{k-1})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow h(\lambda_i) = a_0 + a_1\lambda_i + \dots + a_{k-1}\lambda_i^{k-1} = 0$ (以上的等式对于所有的 λ_i 都是成立的)。

由于 $h(\lambda)$ 在复数域上有且只有 $k-1$ 个根, 则一定存在某些 $\lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ 使得 $h(\lambda_i) \neq 0$, 与 $h(\lambda_i) = 0$ 矛盾。所以只有当 $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ 才能保证全部的 λ_i 有 $h(\lambda_i) = 0$ 成立, 这说明了 $\mathbf{x}, \mathbf{Ax}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}$ 线性无关, 反证法推出矛盾, 所以原命题成立。

(3) 结论: 不一定存在。

□

第五章 矩阵函数

题 5.1. (p79.1) 设函数矩阵 $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -e^t & t \\ \cos t & e^t & t^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 试求 $\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)$, $|\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)|$, $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{A}(t)$ 。

解. $\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -e^t & 1 \\ -\sin t & e^t & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)| = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

题 5.2. (p79.2) 设函数矩阵 $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^t & 1 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 试求 $\int \mathbf{A}(t)dt$, $\int_0^u \mathbf{A}(t)dt$ 。

解. $\int \mathbf{A}(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^t & t \\ -e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\int_0^u \mathbf{A}(t)dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2u} & (u-1)e^u & u \\ -e^{-u} & e^{2u} & 0 \\ \frac{3}{2}u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2} & (u-1)e^u + 1 & u \\ -e^{-u} + 1 & e^{2u} - 1 & 0 \\ \frac{3}{2}u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

题 5.3. (p79.3) 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}^n$ 是否收敛, 如果收敛, 计算出结果。

解. 令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, 特征值 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$ 。

则 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}$, 其中 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 于是:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \begin{pmatrix} \frac{10}{13} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{18}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{16}{13} & \frac{18}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

计算出级数的值恰恰说明了其收敛。

□

题 5.4. (p79.4) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, 试求 $e^{\mathbf{A}}, e^{\mathbf{B}}$ 。

解. (1) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, m_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(1) = a_0 + a_1 = e \\ P(\lambda_2) = P(2) = a_0 + 2a_1 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2e - e^2 \\ a_1 = e^2 - e \end{cases}$$

$$e^{\mathbf{A}} = P(\mathbf{A}) = (2e - e^2)\mathbf{E} + (e^2 - e)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2e - e^2 & e^2 - e \\ -2e^2 + 2e & 2e^2 - e \end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, m_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda) = P(2) = a_0 + 2a_1 = e^2 \\ P'(\lambda) = P'(2) = a_1 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -e^2 \\ a_1 = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}} &= P(\mathbf{B}) = e^2\mathbf{E} + e^2\mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} -e^2 & -e^2 \\ 4e^2 & 3e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.5. (p79.5) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, 试证 $e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} \cos \theta t & -\sin \theta t \\ \sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$ 。

证明. $\lambda_1 = \theta i, \lambda_2 = -\theta i, m_A(\lambda) = (\lambda - \theta i)(\lambda + \theta i)$, 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(\theta i) = a_0 + a_1\theta i = e^{\theta i} \\ P(\lambda_2) = P(-\theta i) = a_0 - a_1\theta i = e^{-\theta i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \cos \theta t \\ a_1 = \frac{\sin \theta t}{\theta} \end{cases}$$

$$e^{At} = P(A) = \cos \theta t E + \frac{\sin \theta t}{\theta} A = \begin{pmatrix} \cos \theta t & -\sin \theta t \\ -\sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$$

□

题 5.6. (p79.6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, 利用上题5.5结果求 e^A 。

解. 令 $A = \sigma E + B$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ 由于 E 与 B 可交换, 并且根据题5.5可得:

$$e^A = e^{\sigma E + B} = e^{\sigma E} e^B = \begin{pmatrix} e^\sigma & 0 \\ 0 & e^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\sigma \cos \theta & -e^\sigma \sin \theta \\ -e^\sigma \sin \theta & e^\sigma \cos \theta \end{pmatrix}$$

□

题 5.7. (p80.7) 设 $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & -6 & -8 \end{pmatrix}$, 求 e^{2At} 。

解. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 显然 A 的若当标准形 $J = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$, 其中空白位置全是 0。

并且有 $J = P^{-1}AP \Rightarrow PJ = AP$ 。不妨令 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 其中 P 为非奇异矩阵, 则:

$$\begin{cases} Ap_1 = 2p_1 \\ Ap_2 = -p_2 \\ Ap_3 = p_2 - p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = (1, 0, 1)^T \\ p_2 = (2, 1, 2)^T \\ p_3 = (5, 1, 2)^T \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} e^{2At} &= P e^{2Jt} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4e^{4t} + (-4t-3)e^{-2t} & -2e^{4t} + 2e^{-2t} & -3e^{4t} + (4t+3)e^{-2t} \\ -2te^{-2t} & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 4e^{4t} + (-4t-4)e^{-2t} & -2e^{4t} + 2e^{-2t} & -3e^{4t} + (4t+4)e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.8. (p80.8) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 8 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求 e^{At} 。

解. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$, 显然 A 的若当标准形 $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 其中空白位置全是 0。并且

有 $J = P^{-1}AP \Rightarrow PJ = AP$ 。不妨令 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 其中 P 为非奇异矩阵, 则:

$$\begin{cases} Ap_1 = 2p_1 \\ Ap_2 = p_1 + 2p_2 \\ Ap_3 = p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = (-1, 4, 1)^T \\ p_2 = (-1, 3, 1)^T \\ p_3 = (0, 3, 1)^T \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} e^{At} &= P e^{Jt} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & -3te^{2t} \\ (-4t-3)e^{2t} + 3e^t & (-4t+1)e^{2t} & (12t-3)e^{2t} + 3e^t \\ (-t-1)e^{2t} + e^t & -te^{2t} & 3te^{2t} + e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.9. (p80.9) 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 试求 $\cos \mathbf{A}$, $\sin \mathbf{B}$, $e^{\mathbf{B}t}$ 。

解. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5, m_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$, 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(1) = a_0 + a_1 = \cos 1 \\ P(\lambda_2) = P(5) = a_0 + 5a_1 = \cos 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{-\cos 5 + 5 \cos 1}{4} \\ a_1 = \frac{\cos 5 - \cos 1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos \mathbf{A} &= P(\mathbf{A}) = \frac{-\cos 5 + 5 \cos 1}{4} \mathbf{E} + \frac{\cos 5 - \cos 1}{4} \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos 5 + 3 \cos 1 & 2 \cos 5 - 2 \cos 1 & \cos 5 - \cos 1 \\ \cos 5 - \cos 1 & 2 \cos 5 + 2 \cos 1 & \cos 5 - \cos 1 \\ \cos 5 - \cos 1 & 2 \cos 5 - 2 \cos 1 & \cos 5 + 3 \cos 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \\ & \mathbf{J}_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ 为若当块, 空白位置全是 0。

$$\text{则 } \sin \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sin \mathbf{J}_1 & \\ & \sin \mathbf{J}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2 & \cos 2 & \frac{\sin 2}{2} \\ 0 & 0 & -\sin 2 & \cos 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } e^{\mathbf{B}t} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_1 t} & \\ & e^{\mathbf{J}_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2 e^{-2t}}{2} \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

□

题 5.10. (p80.10) 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 试求 $e^{\mathbf{A}t}, e^{\mathbf{B}t}, \sin \mathbf{B}t$ 。

解. \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, m_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda + 2)$, 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(0) = a_0 = 1 \\ P(\lambda_2) = P(-2) = a_0 - 2a_1 = e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{1-e^{-2t}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= P(\mathbf{A}) = \mathbf{E} + \frac{1-e^{-2t}}{2}\mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\mathbf{B} 的特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, m_{\mathbf{B}}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$,

(1) 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(-1) = a_0 - a_1 = e^{-t} \\ P(\lambda_2) = P(2) = a_0 + 2a_1 = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3} \\ a_1 = \frac{-e^{-t}+e^{2t}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}t} &= P(\mathbf{B}) = \frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3}\mathbf{E} + \frac{-e^{-t}+e^{2t}}{3}\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^{2t}+4e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ 0 & 3e^{2t} & 0 \\ -4e^{2t}+4e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} & 4e^{2t}-e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则:

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = P(-1) = a_0 - a_1 = \sin t \\ P(\lambda_2) = P(2) = a_0 + 2a_1 = \sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{\sin 2t+2\sin t}{3} \\ a_1 = \frac{\sin 2t-\sin t}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin \mathbf{B}t &= P(\mathbf{B}) = \frac{\sin 2t+2\sin t}{3}\mathbf{E} + \frac{\sin 2t-\sin t}{3}\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sin 2t+4\sin t & \sin 2t-\sin t & \sin 2t-\sin t \\ 0 & 3\sin 2t & 0 \\ -4\sin 2t+4\sin t & \sin 2t-\sin t & 4\sin 2t-\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.11. (p80.11) 求常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases} x'_1(t) = -7x_1 - 7x_2 + 5x_3 \\ x'_2(t) = -8x_1 - 8x_2 - 5x_3 \\ x'_3(t) = -5x_2 \end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(0) = 3, x_2(0) = -2, x_3(0) = 1$ 的解。

解. 由题意得: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & 5 \\ -8 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 矩阵 \mathbf{A} 的特征

值为 $\lambda_1 = -15, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 5$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } \mathbf{A} &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & & \\ & -5 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-15t} & & \\ & e^{-5t} & \\ & & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-15t} & e^{-5t} & e^{5t} \\ 3e^{-15t} & -e^{-5t} & -e^{5t} \\ e^{-15t} & -e^{-5t} & e^{5t} \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{-15t} + \frac{9}{10}e^{-5t} + \frac{17}{10}e^{5t} \\ \frac{3}{5}e^{-15t} - \frac{9}{10}e^{-5t} - \frac{17}{10}e^{5t} \\ \frac{1}{5}e^{-15t} - \frac{9}{10}e^{-5t} + \frac{17}{10}e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.12. (p80.12) 求常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t) + 1 \end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ 的解。

解. 由题意得: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{F}(t) = (0, 1)^T$, \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, m_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ 。令 $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$, 则

$$\begin{cases} P(\lambda) = P(-1) = a_0 - a_1 = e^{-t} \\ P'(\lambda) = P'(-1) = a_1 = te^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = (1+t)e^{-t} \\ a_1 = te^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= P(\mathbf{A}) = (1+t)e^{-t}\mathbf{E} + te^{-t}\mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-Au}\mathbf{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} (-2u+1)e^u & ue^u \\ -4ue^u & (2u+1)e^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} (t+2)e^{-t} - 1 \\ (2t+3)e^{-t} - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

题 5.13. (p80.13) 求微分方程组 $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ 的通解, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

解. 由题意得: $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 矩阵 \mathbf{A} 的特征值为

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 显然 \mathbf{A} 的若当标准型 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 并且有 $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{P}$ 。

不妨令 $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, 其中 \mathbf{P} 为非奇异矩阵, 则:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_2 = 2\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)^T \\ \mathbf{p}_2 = (2, 2, -2)^T \\ \mathbf{p}_3 = (0, 1, 1)^T \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

于是

$$e^{At} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ 0 & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

不妨设 $\mathbf{x}(0) = (k_1, k_2, k_3)^T$, 则 $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} + k_2 t e^{2t} + k_3 t e^{2t} \\ k_2(t+1)e^{2t} + k_3 t e^{2t} \\ -k_2 t e^{2t} + k_3(1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$

□

题 5.14. (p80.14) 求微分方程组 $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t)$ 的通解, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。

解. 由题意得: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } \mathbf{A} &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ e^{At} &= \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & \\ & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} + e^{4t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

不妨设 $\mathbf{x}(0) = (k_1, k_2)^T$, 则:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-Au} \mathbf{F}(u) du \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} + e^{4t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{4t} & -e^{2t} + e^{4t} \\ -e^{2t} + e^{4t} & e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2u} + e^{-4u} & -e^{-2u} + e^{-4u} \\ -e^{-2u} + e^{-4u} & e^{-2u} + e^{-4u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} du \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_1(e^{2t} + e^{4t}) + k_2(-e^{2t} + e^{4t}) + e^{2t} - 1 \\ k_1(-e^{2t} + e^{4t}) + k_2(e^{2t} + e^{4t}) + 1 - e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)e^{4t} + (k_1 - k_2 + 1)e^{2t} - 1 \\ (k_1 + k_2)e^{4t} + (k_2 - k_1 - 1)e^{2t} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 5.15. (p81.16) 设 \mathbf{A} 为方阵, $\mathbf{B}(t) = e^{At}$ 。若 $\text{tr}\mathbf{A} = 0$, 证明对一切 $t \in \mathbb{R}$, $\det\mathbf{B}(t) = 1$ 。

证明. 由题意得, 不妨设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, λ_i 为矩阵 \mathbf{A} 的特征值, 则 $\mathbf{B}(t)e^{\mathbf{A}t}$ 的特征值为 $e^{\lambda_i t}$, 则

$$\det \mathbf{B}(t) = \prod_i^n e^{\lambda_i t} = e^{\sum_i^n \lambda_i t} = e^{t \times \text{tr}(\mathbf{A})} = e^0 = 1$$

□

第六章 矩阵分解

题 6.1. (p140.1) 计算下列矩阵的 Doolittle 分解, Crout 三角分解和 LDU 三角分解。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \\ -2 & -10 & -13 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 4 & 11 & 6 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

解. (1) 先对矩阵进行初等行变换变成上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \\ -2 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & -10 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

则 \mathbf{R} 为上面所求, 将每一步变换用初等矩阵表示, 则 $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{R}$, 于是

$$\mathbf{L} = (\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解、Crout 分解、LDU 分解

$$\begin{aligned} \mathbf{LR} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{LDU} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{LU} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中空白位置全是 0。

(2) 先对矩阵进行初等行变换变成上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 4 & 11 & 6 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{3}{2}r_1} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

则 \mathbf{R} 为上面所求, 将每一步变换用初等矩阵表示, 则 $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{R}$, 于是

$$\mathbf{L} = (\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Doolittle 分解、Crout 分解、LDU 分解

$$\begin{aligned} \mathbf{LR} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ \mathbf{LDU} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 3 & \\ & & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{LU} &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中空白位置全是 0。

□

题 6.2. (p141.2) 计算下列矩阵的 Cholesky 分解。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & -6 \\ -6 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

解. (1) 设 $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{pmatrix}$, 其中空白位置全是 0。于是

有:

$$\begin{cases} g_{11}^2 = 1 \\ g_{11}g_{21} = 1 \\ g_{11}g_{31} = -1 \\ g_{21}g_{11} = 1 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 2 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = -3 \\ g_{31}g_{11} = -1 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = -3 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 1 \\ g_{21} = 1 \\ g_{31} = -1 \\ g_{22} = 1 \\ g_{32} = -2 \\ g_{33} = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 设 $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{pmatrix}$, 其中空白位置全是 0。于是有:

$$\begin{cases} g_{11}^2 = 4 \\ g_{11}g_{21} = 4 \\ g_{11}g_{31} = -6 \\ g_{21}g_{11} = 4 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 5 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = -6 \\ g_{31}g_{11} = -6 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = -6 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 2 \\ g_{21} = 2 \\ g_{31} = -3 \\ g_{22} = 1 \\ g_{32} = 0 \\ g_{33} = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

题 6.3. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 12 & 20 & 16 \\ 3 & 10 & 20 & 18 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix}$ 的 Doolittle 分解。

解. 先对矩阵进行初等行变换变成上三角矩阵

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 12 & 20 & 16 \\ 3 & 10 & 20 & 18 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 3 & 10 & 20 & 18 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 6 \\ 1 & -4 & -9 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+\frac{3}{2}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则 \mathbf{R} 为上面所求, 将每一步变换用初等矩阵表示, 则 $\mathbf{P}_5\mathbf{P}_4\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{R}$, 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{P}_5\mathbf{P}_4\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_4^{-1}\mathbf{P}_5^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

□

题 6.4. 计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 10 & 2 \\ 3 & 10 & 14 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 29 \end{pmatrix}$ 的 Cholesky 分解。

解. 设 $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ & & g_{33} & g_{43} \\ & & & g_{44} \end{pmatrix}$, 其中空白位置全是 0。

于是有:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11}^2 = 1 \\ g_{11}g_{21} = 2 \\ g_{11}g_{31} = 3 \\ g_{11}g_{41} = 4 \\ g_{21}g_{11} = 2 \\ g_{21}^2 + g_{22}^2 = 8 \\ g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} = 10 \\ g_{21}g_{41} + g_{22}g_{42} = 2 \\ g_{31}g_{11} = 3 \\ g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} = 10 \\ g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 14 \\ g_{31}g_{41} + g_{32}g_{42} + g_{33}g_{43} = 6 \\ g_{41}g_{11} = 4 \\ g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} = 2 \\ g_{41}g_{31} + g_{42}g_{32} + g_{43}g_{33} = 6 \\ g_{41}^2 + g_{42}^2 + g_{43}^2 + g_{44}^2 = 29 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_{11} = 1 \\ g_{21} = 2 \\ g_{31} = 3 \\ g_{41} = 4 \\ g_{22} = 2 \\ g_{32} = 2 \\ g_{42} = -3 \\ g_{33} = 1 \\ g_{43} = 0 \\ g_{44} = 2 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

题 6.5. 计算下列矩阵的满秩分解。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -5 & 8 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

解. (1) 先对矩阵进行初等行变换变成行阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是 } \mathbf{A} = \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 先对矩阵进行初等行变换变成行阶梯型矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & -5 & 8 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \\ 8 & -6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是 } \mathbf{A} = \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & -1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

题 6.6. 计算下列矩阵的谱分解。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

解. (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中空白位置全是 0。

(2) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$ 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中空白位置全是 0。

□

题 6.7. 计算下列矩阵的 QR 分解。

$$\begin{aligned} (1) & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (4) & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解. 把矩阵记作 $\mathbf{A}_{m \times n}$, 并进行列分块 $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ 。

(1) 对 \mathbf{A} 进行 Schmidt 正交化

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (2, 1, 2)^T \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{5}{9} \boldsymbol{\beta}_1 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{1}{9}\right)^T \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{9} \\ 1 & \frac{4}{9} \\ 2 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \\ & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(2) 对 \mathbf{A} 进行 Schmidt 正交化

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1)^T \\
 \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(3) 对 \mathbf{A} 进行 Schmidt 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = (0, 1, 1)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2}\beta_1 = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_3 - \frac{2}{3}\beta_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \frac{\sqrt{6}}{2} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) 对 \mathbf{A} 进行 Schmidt 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = (2, 0, 2)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 - \frac{3}{4}\beta_1 = (\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2})^T$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_3 - \frac{7}{9}\beta_2 - \frac{3}{4}\beta_1 = (-\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})^T$$

于是

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 2 & \frac{4}{9} \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \frac{\sqrt{6}}{2} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

题 6.8. 计算下列矩阵的奇异值分解。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解. (1) 不妨令 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$, 其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$. 先计算 \mathbf{V}^T , 即利用相似对角化计算

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{此时 } \mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{A} \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

把 U_1 扩充成正交矩阵 $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 于是:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(2) 不妨令 $A = U\Sigma V^T$, 其中 $\Sigma = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 先计算 V^T , 即利用相似对角化计算

$$V^T A^T A V = \begin{pmatrix} D^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \text{ 此时 } V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$U_1 = A V_1 D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

由于 U_1 已经是正交矩阵, 无需扩充, 令 $U = U_1$, 于是:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

□

题 6.9. 证明: 对任意实(复)非退化方阵 A , 存在唯一的正交(酉)矩阵 Q 和正定矩阵 H_1 和 H_2 , 使得 $A = QH_1 = H_2Q$, 该分解称为矩阵的极分解, 若去掉矩阵的非退化条件, 结论改如何修正?

证明. 先给出需要用到的引理:

引理 6.1. 任意一个正定矩阵 A , 一定存在唯一的一个正定矩阵 S 使得 $A = S^2$

证明. 存在性: 由于 $H \succ 0$, 则存在正交矩阵 P , 使得 $H = P\Lambda P^T$, 其中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$. 令 $Z = \Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$, 则

$$H = P\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}P^T = (PZP^T)(PZP^T) = (PZP^T)^2 = S^2$$

而任取 $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T S x = x^T P Z P^T x = (P^T x)^T Z (P^T x) > 0$, 这说明了 S 是正定阵。

唯一性: 记矩阵 A 的特征值与对应的特征向量为 λ, ν . 若存在两个正定阵 S_0, S_1 , 使得 $H = S_0^2 = S_1^2$, 显然有 $S_0 \nu = S_1 \nu = \sqrt{\lambda} \nu$. 于是 $S_0 S_1 \nu = \sqrt{\lambda} S_0 \nu = \lambda \nu$, $S_0 S_1 \nu = \sqrt{\lambda} S_0 \nu = \lambda \nu$, $(S_0 S_1 - S_1 S_0) \nu = 0$, 由于 H 是对称的, 一定存在 n 个线性无关的特征向量, 即特征子空间的维数 $\dim(V) = n$, 则 $r(S_0 S_1 - S_1 S_0) = n - \dim(V) = 0$, 即 $S_0 S_1 - S_1 S_0 = O$. 此时 $(S_0 + S_1)(S_0 - S_1) = S_0^2 - S_0 S_1 + S_1 S_0 - S_1^2 = O$, 于是 $r(S_0 + S_1) + r(S_0 - S_1) = n$, 而 $S_0 + S_1$ 是正定矩阵, 即 $r(S_0 - S_1) = n$, 所以 $r(S_0 - S_1) = 0$, $S_0 = S_1$. \square

下面给出两种证明方法。

- (1) **存在性:** 由于 $A^T A$ 是一个正定矩阵, 由引理 6.1 可知, $A^T A = H_1^2$, 则有 $E = H_1^{-1} A^T A H_1^{-1} = (H_1^T)^{-1} A^T A H_1^{-1} = (A H_1^{-1})^T A H_1^{-1}$, 令 $Q_1 = A H_1^{-1}$, 有 $Q_1^T Q_1 = E$, 故 Q_1 是正交矩阵, 同时 $A = Q_1 H_1$.

同理: $A A^T = H_2^2$, 则有 $E = H_2^{-1} A A^T H_2^{-1} = H_2^{-1} A A^T (H_2^T)^{-1} = H_2^{-1} A (H_2^{-1} A)^T$, 令 $Q_2 = H_2^{-1} A$, 有 $Q_2 Q_2^T = E$, 故 Q_2 是正交矩阵, 同时 $A = H_2 Q_2$.

下面证明 $Q_1 = Q_2 = Q$, 即证 $A H_1^{-1} = H_2^{-1} A \Leftrightarrow H_2 A = A H_1$,

唯一性: 假设存在另外一个正交矩阵 U 与正定矩阵 W , 使得 $A = UW$ 由引理 6.1 唯一性可知, $W = H_1$; 而 $U = A W^{-1} = A H_1^{-1} = Q$, 同理可以说明 $A = H_2 Q$ 分解的唯一性。

- (2) **存在性:** 由 SVD 分解可知, $A = U \Sigma V^T$, 其中 U, V^T 是正交矩阵, $\Sigma = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, 其中 $\lambda_i > 0$. 又因为 $A = U \Sigma V^T = U (V^T V) \Sigma V^T = (U V^T) V \Sigma V^T$, 令 $Q = U V^T$, $H_1 = V \Sigma V^T$ 即可, 容易验证 Q 为正交矩阵, H_1 为正定矩阵。

同理: $A = U \Sigma V^T = U \Sigma (U^T U) V^T = U \Sigma U^T (U V^T)$, 令 $Q = U V^T$, $H_2 = U \Sigma U^T$.

唯一性: 假设存在另外一个正交矩阵 U 与正定矩阵 W , 使得 $A = UW$, $A^T A = (Q H_1)^T Q H_1 = H_1^2$, $A^T A = (UW)^T UW = W^2$, 由引理 6.1 唯一性可知, $W = H_1$,

而 $AH_1^{-1} = Q, AW^{-1} = U$, 于是 $U = Q$ 。同理可以说明 $A = H_2Q$ 分解的唯一性。

结论修正为: 存在唯一的酉矩阵 Q 与半正定矩阵 H_1 与 H_2 使得 $A = QH_1 = H_2Q$ 。

□

题 6.10. 证明: 对任何正定矩阵 H , 存在唯一的正定矩阵 S , 使得 $H = S^2$ 。若将正定矩阵改为半正定矩阵, 结论如何?

证明. 存在性: 由于 $H \succ 0$, 则存在正交矩阵 P , 使得 $H = P\Lambda P^T$, 其中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$ 。令 $Z = \Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$, 则

$$H = P\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}P^T = (PZP^T)(PZP^T) = (PZP^T)^2 = S^2$$

而任取 $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T Sx = x^T PZP^T x = (P^T x)^T Z(P^T x) > 0$, 这说明了 S 是正定阵。

唯一性: 记矩阵 A 的特征值与对应的特征向量为 λ, ν 。若存在两个正定阵 S_0, S_1 , 使得 $H = S_0^2 = S_1^2$, 显然有 $S_0\nu = S_1\nu = \sqrt{\lambda}\nu$ 。于是 $S_0S_1\nu = \sqrt{\lambda}S_0\nu = \lambda\nu, S_0S_1\nu = \sqrt{\lambda}S_0\nu = \lambda\nu, (S_0S_1 - S_1S_0)\nu = 0$, 由于 H 是对称的, 一定存在 n 个线性无关的特征向量, 即特征子空间的维数 $\dim(V) = n$, 则 $r(S_0S_1 - S_1S_0) = n - \dim(V) = 0$, 即 $S_0S_1 - S_1S_0 = O$ 。此时 $(S_0 + S_1)(S_0 - S_1) = S_0^2 - S_0S_1 + S_1S_0 - S_1^2 = O$, 于是 $r(S_0 + S_1) + r(S_0 - S_1) = n$, 而 $S_0 + S_1$ 是正定矩阵, 即 $r(S_0 + S_1) = n$, 所以 $r(S_0 - S_1) = 0, S_0 = S_1$ 。

结论修正为: 存在唯一的半正定矩阵 S , 使得 $H = S^2$ 。

□

第七章 广义逆矩阵

题 7.1. (P162.3) 求下列矩阵的广义逆 \mathbf{A}^+ 。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

解. (1)

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{99} \begin{pmatrix} -12 & 4 & 13 & -2 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ -4 & -6 & 8 & -8 \\ -10 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 7.2. 验证线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 并求其通解和最小长度解, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

解. $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r(\mathbf{A})$, 于是方程组有解。

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则通解为 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2 \\ -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ 。最小长度解为

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

□

题 7.3. 验证下列线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 为矛盾方程组, 并求其最小二乘解的通解和最小长度二乘解。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解. (1) 则 $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2, r(\mathbf{A}) = 1, r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, 于是为矛盾方程组。

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最小二乘解为 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2 \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ 。最小长度

二乘解为 $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ 。

(2) 则 $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2, r(\mathbf{A}) = 1, r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, 于是为矛盾方程组。

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (6)^{-1} (10)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

最小二乘解为 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} + \frac{5}{6}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{6}y_3 \\ -\frac{1}{15} - \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ \frac{1}{30} + \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{5}{6}y_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ 。最

小长度二乘解为 $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$ 。

(3) 则 $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3, r(\mathbf{A}) = 2, r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, 于是为矛盾方程组。

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^+ &= \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

最小二乘解为 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{10}{14} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ 。最小长度二乘解为

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{10}{14} \end{pmatrix}。$$

□