第 6 章 矩阵分解

矩阵分解

1. LR (LU) 分解

定理：若非奇异阵 ***A*** 满足以下二者之一

（1）***A***的各阶顺序主子式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

（2）A的元素满足

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{ii}| \geq |a_{i1}| + \cdots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| \cdots + |a_{in}| \end{cases}$$

$$(i = 2, 3, \cdots, n)$$

则 A有三角分解：$A = LR$ 且分解是唯一的，
其中 L 为单位下三角形，R 为可逆上三角形.

证明思路:用数学归纳法找单位下三角矩阵L使得:$L^{-1}A=R$.

设 $A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A_{n-1}=L_{n-1}R_{n-1}$

$$\because \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ -CA_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ O & a_{nn}-CA_{n-1}^{-1}B \end{bmatrix}$$

（记 $d=a_{nn}-CA_{n-1}^{-1}B$）

$$=\begin{bmatrix} L_{n-1}R_{n-1} & B \\ O & d \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{n-1} & L_{n-1}^{-1}B \\ O & d \end{bmatrix}$$

$$
\therefore A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & B \\ C & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ CA_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} & L_{n-1}^{-1}B \\ O & d \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} L_{n-1} & O \\ CA_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} & L_{n-1}^{-1}B \\ O & d \end{bmatrix}
$$

例：设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&1\\3&2&5\end{bmatrix},$$ 求A的三角分解 $A=LR$.

解法1：

$$A\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&-4&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+4r_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&-24\end{bmatrix}$$

$$\therefore E_3E_2E_1A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&-24\end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1^{-1}\boldsymbol{E}_2^{-1}\boldsymbol{E}_3^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{LR}$$

解法2:

$$(A,E)=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&5&1&0&1&0\\3&2&5&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&-4&-4&-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-5&-2&1&0\\0&0&-24&-11&4&1\end{array}\right]$$

$$\therefore\ R=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&-24\end{bmatrix}\qquad L^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-11&4&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{LR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

例2：设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&1\\3&2&5\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$，用三角分解求解$Ax=b$.

解：对A做三角分解：$A=LR$，则

$$LRx=b,\ 令Rx=y,\ 则\begin{cases}Rx=y\\Ly=b\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&-24\end{bmatrix}=LR$$

$$\therefore Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 - 5x_3 \\ -24x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 - 5x_3 = y_2 \\ -24x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\therefore y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其他的三角分解：

(1) Crout分解

$A=LU$，其中L为下三角矩阵，U是单位上三角矩阵；

(2) LDU分解

$A=LDU$，其中L为单位下三角矩阵，D为对角矩阵，

U是单位上三角矩阵.

定理(Cholesky分解)

设A为n阶正定矩阵，则存在唯一的对角元素均为正数的下三角矩阵G，使得$A = GG^T$.

证明：1) A有LDU分解：$A = LDU$；

2) 由A对称知：$A = U^T DL^T$；

3) 再由A的LDU分解的唯一性知：$L=U^T$. 故$A = LDL^T$.

4) 证明D中对角线上的元素均正数；

5) $G = LD^{1/2}$即为所求；

6) 分解唯一.

例

求$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$的Cholesky分解.

解(待定系数法)：设$G=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$,

利用$A = GG^T$求出g_{ij}即可.

满秩分解

2. 满秩分解

设 $rank(A)=r$, 若 $A_{m\times n}=B_{m\times r}C_{r\times n}$，其中 B 列满秩, C 行满秩，则称其为对A的满秩分解.

对A进行初等行变换可化为行阶梯型矩阵,

即存在可逆矩阵P使得PA为行阶梯型矩阵.

对PA进行分块：$PA=\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}$，其中$C$为矩阵$PA$的全部非零的$r$行

对P^{-1}进行相应的分块：$P^{-1}=\begin{pmatrix} B & D \end{pmatrix}$, 则有$A=\begin{pmatrix} B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}=BC$.

例4. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$，求A的满秩分解.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ A=BC$$

例5. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$，求A的满秩分解.

解:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A=BC$$

正交满秩分解定理

设 $rank(A)=r$, 则有分解：$A_{m\times n}=Q_{m\times r}R_{r\times n}$,

其中Q为列满秩且$Q^TQ=E$, R 行满秩.

证明：设$A=BC$为A的满秩分解, 对B列向量组进行

Schmidt正交单位化则有: $B_{m\times r}=Q_{m\times r}T_{r\times r}$,

其中Q为列满秩且$Q^TQ=E$, T可逆.

令$R=TC$, 则$A=QR$.

矩阵的谱分解

3. 谱分解

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),\ P^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1\alpha_1\beta_1^T+\lambda_2\alpha_2\beta_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\beta_n^T$$

称为 A的谱分解，$\{\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n\}$ 称为A的谱.

注意到:$\beta_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\delta_{ij}$; $\alpha_1\beta_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\beta_n^T=E$.

设$A_i=\alpha_i\beta_i^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots n)$, 则 (1) $A=\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_nA_n$;

(2) $A_i^2=A_i \quad i=1,2,\cdots n$; (3) $A_iA_j=O \quad i\neq j$.

例4、求
$$A=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}$$ 的谱分解.

解:
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$$

对$\lambda_1=-1$ 解 $(-E-A)x=0$ 得$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

对$\lambda_2=\lambda_3=2$ 解$(2E-A)x=0$ 得$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 4/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \\ \boldsymbol{\beta}_3^T \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^T+2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^T+2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_3^T$$

矩阵的奇异值分解

4. 奇异值分解

设 $rank(A_{m\times n})=r$, 则半正定阵$A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值 $\lambda_i \geq 0$

称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$ >0为 A 的奇异值.

定理：设

$$\Sigma=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

其中 $D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2\cdots\sigma_r)$, $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$,

则存在正交阵 $U_{m\times m}, V_{n\times n}$ 使得 $A=U\Sigma V^T$

$$\because V^T(A^TA)V=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D^2 & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

其中 V 是正交阵. 令 $\quad V=(V_1,V_2)$

$$\therefore \begin{pmatrix}V_1^{\mathrm{T}}\\ V_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}A^{\mathrm{T}}A(V_1,V_2)=\begin{pmatrix}D^2 & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

由前式可知

$$\begin{cases} V_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A V_1 = D^2 \\ V_2^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A V_2 = O, \qquad A V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore A = AVV^T = A(V_1, V_2)\begin{pmatrix} V_1^{\mathrm{T}} \\ V_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$= AV_1V_1^{\mathrm{T}} + AV_2V_2^{\mathrm{T}}$$

$$= AV_1V_1^{\mathrm{T}}$$

$$= AV_1D^{-1}DV_1^{\mathrm{T}} = U_1DV_1^{\mathrm{T}}$$

其中 $U_1 = AV_1D^{-1}$

把 $\boldsymbol{U}_1$ 扩充成交阵 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)$

即求解方程 $\boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系，

再规范正交化即得 $\boldsymbol{U}_2$

$$\boldsymbol{U\Sigma V}^T=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D},\boldsymbol{O})\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

例5、求

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$ 的奇异值分解.

解:

$$A^T A=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix} \quad \left|\lambda E-A^T A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -1\\ -1 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-7)$$

$$\lambda_1=7,\ \lambda_2=5\ \ \sigma_1=\sqrt{7},\sigma_2=\sqrt{5},\ rank(A)=2$$

$$\therefore D=\begin{bmatrix}\sqrt{7} & \\ & \sqrt{5}\end{bmatrix},\ \Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{7} & 0\\ 0 & \sqrt{5}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 7, 7\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5, \ 5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

标准正交化: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}^T$$

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{7} & 0 \\ -1/\sqrt{7} & 3/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{7} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

解 $\boldsymbol{U}_1^T \boldsymbol{x} = 0$ 得 $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, 单位化 $\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

例6、求

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$ 的奇异值分解.

解:

$$A^TA=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -5 & 5\\ -5 & 5 & -5\\ 5 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda E-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 5 & -5\\ 5 & \lambda-5 & 5\\ -5 & 5 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-15),\ \lambda=0,15$$

$$\therefore \sigma_1=\sqrt{15},\ D=\sqrt{15},\ \Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda = 15,\ 15\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 5 & 10 & 5 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0,\ -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

标准正交化：

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$U_1=AV_1D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

扩充U_1,解$U_1^T x=0$得$\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$,单位化$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

$$\therefore U=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ \ A=U\Sigma V^T$$

广义特征值

n 阶阵A, B为实对称阵，且B为正定阵，若

$$Ax = \lambda Bx \qquad (x \neq 0)$$

则称 λ 为 A 相对与 B 的广义特征值，x为 A 相对与 B 的广义特征向量，

$$|A - \lambda B| = 0$$

称为A相对与B 的特征方程.

例7、设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

求$\boldsymbol{A}$相对与$\boldsymbol{B}$ 的广义特征值和特征向量。

解：

$$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}\right|=\begin{vmatrix}2-2\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+5$$

$\therefore \lambda=1,5$

$\lambda=1$，解$\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{X}=0$得$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=5$，解$\left(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{X}=0$得$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$