一．设$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求不相容方程组$Ax=\beta$的最优最小二乘解.

三．设$A=\begin{pmatrix}9&-4&-7\\-1&0&1\\10&-4&-8\end{pmatrix}$，求 A 的谱分解.

四. 设$A=\begin{pmatrix}9&-6&-7\\-1&-1&1\\10&-6&-8\end{pmatrix}$, 求可逆阵$P$和若当（Jordan）标准形$J$，使$P^{-1}AP=J$，

并求e^{2At}

五．用矩阵函数求解下常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-3x_1+4x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1+x_2+1\end{cases},\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=0\end{cases}.$$

六．设V是二阶实方阵全体，$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$.　对任意$A\in V$，令$T(A)=AC+CA$

证明T是V的线性变换；

1） 求T在V的基$B_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, B_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$下的矩阵表示；

2） 求T的特征值；　4）判别T是否可对角化.

七．设 T是 n 维线性空间V的线性变换且 $T^2=3T$.

证明：$V=\mathrm{Im}T\oplus KerT$ 其中$\mathrm{Im}T$是T的像空间， $KerT$是T的核空间.

一．设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -3 & 7\end{pmatrix}$，求$A$的广义逆$A^{+}$。

二．设$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$。求$A$相对于 B的广义特征值和广义特征向量。

三． 设$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ -7 & -2 & 9\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$。求可逆阵$P$和若当（Jordan）标准形$J$，使$P^{-1}AP=J$，

并求e^{At}

四．用矩阵函数求解下常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-3x_1+4x_2+1\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1+x_2+0\end{cases},\begin{cases}x_1(0)=2\\ x_2(0)=1\end{cases}。$$

五．设V是二阶实方阵全体， 对任意$A\in V$，令$T(A)=\ 2A^{T}-3A$（18 分）

3） 证明T是V的线性变换；

4） 求T在V的基$B_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},B_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$下的矩阵表示；

5） 求T的特征值； 4）判别T是否可对角化。

六．设$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 5\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，求$\mathrm{Im}T$和$KerT$的基和维数。

七．设 T是n维线性空间V的线性变换，$rank(T)=r$且 $T^{2}=3T$。证明：存在V的一组基，使T在这组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3E_r\end{pmatrix}$，其中$E_r$为$r$阶单位阵。

一、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的 LR 分解.

二、设线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2=1\\ 3x_1-6x_2=1\\ -x_1+2x_2=-6\end{cases}$，用广义逆验证它是矛盾方程，并求它的最小二乘解的通解.

三、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 A 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$.

四、设 T 为线性空间 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 上的变换，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXA},\ \boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

求线性变换 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 下的矩阵，

并求 $\boldsymbol{T}$ 的特征值.

五、用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(t)\,|_{t=0}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\end{cases}.$$

六、在线性空间 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中，$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$，定义 A 与 B 的内积为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$，

$\boldsymbol{V}=\{\ \boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{2\times 2},\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}\ \}$ 为 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的子集，其中 $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})_{2\times 2}$ 的迹.

（1）证明：V 是 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的子空间；

（2）求 V 的一组标准正交基，及 V 的正交补.

七、设 $\boldsymbol{T}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\boldsymbol{rank}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{r}>0$，$\boldsymbol{T}^2=\boldsymbol{T}$，证明：

(1) 存在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，满足 $\boldsymbol{T}(\alpha_i)=\begin{cases}\alpha_i\ ,\boldsymbol{1}\le \boldsymbol{i}\le \boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{0}\ ,\boldsymbol{r}<\boldsymbol{i}\le \boldsymbol{n}\end{cases}$，其中 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 $\ker\boldsymbol{T}$ 的基；

(2) 写出 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵，以及 $\boldsymbol{T}$ 的最小多项式；

(3) $\boldsymbol{V}=\mathrm{Im}\boldsymbol{T}\oplus\ker\boldsymbol{T}$，其中 $\mathrm{Im}\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的像空间，$\ker\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的核空间.

一、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解.

二、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准形 $\boldsymbol{J}$.

三、1、设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为内积空间 V 的一个标准正交基，

$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$. $S=\langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\rangle$ 为由 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 生成的子空间.

(1) 求 S 的维数;

(2) 求 S 的一个标准正交基,（用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 表示）.

2、设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, 求 R^3 中的初等反射矩阵 $\boldsymbol{H}$, 使 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ 与 $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 同方向.

四、设方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

1、 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解(记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$）;
2、 说明方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为矛盾方程;
3、 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的长度最小最小二乘解和最小二乘解通解.

五、(18 分）用矩阵函数求解下面常微分方程组初值问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}_1(t)}{dt}=\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_2(t)+0\\[2mm] \dfrac{d\boldsymbol{x}_2(t)}{dt}=4\boldsymbol{x}_1(t)-3\boldsymbol{x}_2(t)+1\end{cases},\qquad \begin{cases}\boldsymbol{x}_1(0)=1\\ \boldsymbol{x}_2(0)=2\end{cases}$$

六、1、 设 D 是三维线性空间 $V=\left\{\left(a_2t^2+a_1t+a_0\right)e^t \middle| a_2,a_1,a_0\in R\right\}$ 中的微分线性变换， $\boldsymbol{f}_1=t^2e^t,\boldsymbol{f}_2=te^t,\boldsymbol{f}_3=e^t$ 为 V 的一个基,

(1) 求 D 在该基下的矩阵;(2) 求 ImD 和 $KerD$, 其中 $Im\,D$ 是 D 的像空间，$KerD$ 是 D 的核空间.

2、 设 $R^{2\times2}$ 是二阶实方阵在方阵运算下构成的线性空间， 对任意 $\boldsymbol{A}\in R^{2\times2}$，令

$T(A)=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{A}$,

(1) 证明 T 是 $R^{2\times2}$ 的线性变换；(2) 判别 T 是否可对角化, 并说明理由.

七、设 T 是线性空间 V 的线性变换, 且 $T^2=T$. 证明: $V=\mathrm{Ker}T\oplus\mathrm{Im}T$.