第一章　模拟卷三

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LR 分解。

题 1.2. 设线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=1\\ 3x_1-6x_2=1\\ -x_1+2x_2=-6\end{cases}$，用广义逆验证它是矛盾方程，并求它的最小二乘解的通解。

题 1.3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，并求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

题 1.4. 设 $\mathcal{T}$ 为线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的变换，$\mathcal{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 下的矩阵, 并求 $\mathcal{T}$ 的特征值。

题 1.5. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(t)|_{t=0}=(1,0)^T\end{cases}$$

题 1.6. 在线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中，对于任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2},\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0\}$ 为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子集，其中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}$ 的迹。

(1) 证明：$\boldsymbol{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间。

(2) 求 $\boldsymbol{V}$ 的一组标准正交基，及 $\boldsymbol{V}$ 的正交补 $\boldsymbol{V}^{\perp}$。

题 1.7. 设 $\mathcal{T}$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换，$\operatorname{rank}(\mathcal{T})=r>0$，$\mathcal{T}^2=\mathcal{T}$，证明：

(1) 存在 $\boldsymbol{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$，满足 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_i, 1\le i\le r\\ \boldsymbol{0}, r\le i\le n\end{cases}$ ，其中 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ 的基。

(2) 写出 $\mathcal{T}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵，以及 $\mathcal{T}$ 的最小多项式。

(3) $\boldsymbol{V}=\operatorname{Im}\mathcal{T}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ ，其中 $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。