第一章　模拟卷四

题 1.1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

题 1.2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的若当（Jordan）标准型 $\boldsymbol{J}$。

题 1.3. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为内积空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个标准正交基，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{S}=<\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3>$ 为由 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 生成的子空间。

(1) 求 $\boldsymbol{S}$ 的维数。

(2) 求 $\boldsymbol{S}$ 的一个标准正交基（用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 表示）。

题 1.4. 设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，求 $\mathbb{R}^3$ 中的初等反射矩阵 $\boldsymbol{H}$，使 $\boldsymbol{Hx}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 同方向。

题 1.5. 设方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解（记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$）。

(2) 说明方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为矛盾方程。

(3) 求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的长度最小的最小二乘解和最小二乘解通解。

题 1.6. 用矩阵函数求解常微分方程组初值问题的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1-x_2\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=4x_1-3x_2+1\end{cases}\quad\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=2\end{cases}$$

题 1.7. 设 $\mathcal{D}$ 是三维线性空间 $\boldsymbol{V} = \{(a_2t^2 + a_1t + a_0)e^t | a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ 中的微分线性变换，$f_1 = t^2e^t, f_2 = te^t, f_3 = e^t$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一个基。

(1) 求 $\mathcal{D}$ 在该基下的矩阵。

(2) 求 $\mathrm{Im}\mathcal{D}$ 和 $\mathrm{Ker}\mathcal{D}$，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的核空间。

题 1.8. 设 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 是二阶实方阵在方阵运算下构成的线性空间，对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times2}$，令 $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}$，

(1) 证明 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的线性变换。

(2) 判断 $\mathcal{T}$ 是否可对角化，并说明理由。

题 1.9. 设 $\mathcal{T}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换且，$\mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$，证明：$\boldsymbol{V} = \mathrm{Im}\mathcal{T} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{T}$ ，其中 $\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的像空间，$\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的核空间。