# 第一章　矩阵的 Jordan 标准形

**题 1.1.** （p63.1）利用初等变换把下列 $\lambda$ 矩阵化为等价标准形。

$$(1)\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2\\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda\\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda\end{pmatrix}$$

解.

$$\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2\\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda\\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2\\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda\\ 2\lambda-2 & 2\lambda^2-2 & 2\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2\\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(r_1-r_2)\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda)\\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2-c_1]{r_2-(\lambda-1)r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda)\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)^2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(\lambda^2-\lambda)c_1]{c_3\times 2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\lambda(\lambda+1)^2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+\lambda c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda & -3\lambda^2-\lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3\times-\frac{1}{4}]{(c_3+3\lambda c_2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(\lambda-1)c_2]{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

□

**题 1.2.** （p64.2）求下列 $\lambda$ 矩阵的行列式因子、不变因子和初等因子。

$$(1)\begin{pmatrix}\lambda+1 & -2 & 2\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\qquad (2)\begin{pmatrix}\lambda+1 & -3 & -6\\ 0 & \lambda-3 & 8\\ 0 & 2 & \lambda+5\end{pmatrix}$$

解. (1) $D_1=1, D_2=\lambda-1, D_3=(\lambda-1)^3$；$d_1=1, d_2=\lambda-1, d_3=(\lambda-1)^2$；初等因子组：$(\lambda-1)^2, \lambda-1$

(2) $D_1=1, D_2=1, D_3=(\lambda+1)(\lambda-4\sqrt{2}+1)(\lambda+4\sqrt{2}+1)$；$d_1=1, d_2=1, d_3=(\lambda+1)(\lambda-4\sqrt{2}+1)(\lambda+4\sqrt{2}+1)$；初等因子组：$\lambda+1, \lambda-4\sqrt{2}+1, \lambda+4\sqrt{2}+1$

□

题 1.3.（p64.3）设 6 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 5，其初等因子是 $\lambda-1, \lambda-1, (\lambda-2)^3, \lambda+2, (\lambda+2)^2$，求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子、不变因子，以及 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的等价标准形。

解. $d_5=(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda+2)^2, d_4=(\lambda-1)(\lambda+2), d_3=d_2=d_1=1$；$D_1=D_2=D_3=1, D_4=(\lambda-1)(\lambda+2), D_5=(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda+2)^3$；等价标准型为：

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& (\lambda-1)(\lambda+2) && \\ &&&& (\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda+2)^2 & \\ &&&&& 0\end{pmatrix}$$

其中，空白的位置全为 0。 □

题 1.4. （p64.5）证明：两个等价的 $n$ 阶 $\lambda$ 矩阵的行列式只相差一个常数因子。

证明. 不妨令题中所说的两个矩阵为 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$。

若非满秩矩阵，则 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|=|\boldsymbol{B}(\lambda)|=0$，显然符合题意。

若为满秩矩阵，则 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|\neq 0, |\boldsymbol{B}(\lambda)|\neq 0$ 由于等价的 $\lambda$ 矩阵具有相同的行列式因子和不变因子，则 $|\boldsymbol{A}|=k_1D_n(\boldsymbol{A}(\lambda))=k_1D_n, |\boldsymbol{B}|=k_2D_n(\boldsymbol{B}(\lambda))=k_2D_n$，其中 $k_1, k_2\neq 0$。于是 $\frac{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}{|\boldsymbol{B}(\lambda)|}=\frac{k_1}{k_2}$ □

题 1.5. （p64.6）求下列矩阵的 Jordan 标准形。

(1) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$

**解.** (1) $D_1=1,D_2=\lambda+1,D_3=(\lambda+1)^2$；$d_1=1,d_2=\lambda+1,d_3=(\lambda+1)^2$；初等因子组为 $(\lambda+1)^2,\lambda+1$；Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(2) $D_1=1,D_2=1,D_3=(\lambda-1)^3$；$d_1=1,d_2=1,d_3=(\lambda-1)^3$；初等因子组为 $(\lambda-1)^3$；Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

□

**题 1.6.** （p64.7）证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵（即存在正整数 $k$，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$）当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都等于零。

**证明.** 先证必要性。若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，由 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda^k=0$，则 $\lambda=0$。

再证充分性。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必定相似于矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1&&&\\&\boldsymbol{J}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{J}_m\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}_i$ 为 Jordan 标准型，$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}$，空白位置全是 0。

由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$，若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{O}$，于是有 $\boldsymbol{J}_1,\ldots,\boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{O}$。令 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶数为 $\mathcal{N}_i$，容易证明 $J_i^{\mathcal{N}_i}=\boldsymbol{O}$。只需取 $k=\max\limits_i\{\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_m\}$，则 $\boldsymbol{J}_i^k=\boldsymbol{O},i=1,\ldots,m$，于是 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{J}^k=\boldsymbol{O}$，这便完成了证明。 □

**题 1.7.** （p64.8）设非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角阵。

**证明.** 由 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$。若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，此时有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$，与 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵矛盾，所以 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵。 □

**题 1.8.** （p64.9）求 3 阶幂零阵的全部可能的 Jordan 标准形。

*解*. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda^k=0\Rightarrow\lambda=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&*&&\\&0&*&\\&&\ddots&*\\&&&0\end{pmatrix}$ 相似，其中 $*$ 为 0 或 1，空白处全为 0，则：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ 或 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ 或 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

□

**题 1.9.** （p64.10）求 3 阶幂等阵（即满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$）的全部可能的 Jordan 标准形。

*解*. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^2-\lambda$，且 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化。

(1) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda$，此时初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(2) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda-1$，此时初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(3) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$，此时初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda-1$ 或 $\lambda,\lambda-1,\lambda-1$。$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 或

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

□

**题 1.10.** （p64.11）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部可能的 Jordan 标准形。

解. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^2-1$，且 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化。

(1) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda+1$，此时初等因子为 $\lambda+1,\lambda+1,\lambda+1$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(2) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda-1$，此时初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(3) 若 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)$，此时初等因子为 $\lambda+1,\lambda+1,\lambda-1$ 或 $\lambda+1,\lambda-1,\lambda-1$。

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\text{ 或 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

□

**题 1.11.** （p64.12）设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^2-1$，$\lambda-1,\lambda+1$ 两个多项式的次数均为 1，所以一定可以相似于对角阵。 □

**题 1.12.** （p64.13）设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵。

证明. 由题意与 Hamilton-Cayley 定理可知，$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{E}\Rightarrow m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)|\lambda^3-\lambda-10$，下面探究 $g(\lambda)=\lambda^3-\lambda-10$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 上根的分布。

$g'(\lambda)=3\lambda^2-1$，$g(\lambda)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 单调递减，在 $(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 上单调递增。且 $g(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}-10<0,g(\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{2}{3\sqrt{3}}-10<0$，$\lim_{\lambda\to+\infty}=+\infty$，即存在 $\lambda_0\in(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 使 $g(\lambda_0)=0$，这表明了 $g(\lambda)$ 可以被分解为 $(\lambda-\lambda_0)(\lambda^2+a\lambda+b)$ 的形式，其中 $a^2-4b<0$。

进一步的，我们可以在复数域上将其分解为 $(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$ 的形式，并且由于 $\lambda_1,\lambda_2$ 共轭，所以 $\lambda_0\neq\lambda_1\neq\lambda_2$。$\lambda-\lambda_0,\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2$ 三个多项式的次数均为 1，所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵。 □

**题 1.13.** （p65.19）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零复方阵，$d=\mathrm{deg}m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$。

(1) 证明：对一切 $n\times1$ 的列矩阵 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ldots,\boldsymbol{A}^d\boldsymbol{x}$ 线性相关。

(2) 证明：对一切正整数 $k<d$，都存在列矩阵 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关。

(3) 当 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵时，是否存在实的列矩阵 $\boldsymbol{x}$，使得(2)成立？

证明. (1) 由 $\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=d$，则 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=a_1\lambda^d+a_2\lambda^{d-1}+\cdots+a_d\lambda+a_{d+1}$，其中 $a_1\neq 0$。由 Hamilton-Cayley 定理，有 $a_1\boldsymbol{A}^d+a_2\boldsymbol{A}^{d-1}+\cdots+a_d\boldsymbol{A}+a_{d+1}=\boldsymbol{O}$，等式两边同乘列向量 $\boldsymbol{x}$，$a_1(\boldsymbol{A}^d\boldsymbol{x})+a_2(\boldsymbol{A}^{d-1}\boldsymbol{x})+\cdots+a_d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})+a_{d+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，且 $a_1, a_2, \ldots, a_{d+1}$ 不全为 0，这是线性相关的定义，由此便完成了证明。

(2) 使用反证法。若对一切正整数 $k<d$，任取列矩阵 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性相关，即若 $a_0\boldsymbol{x}+a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 成立，则 $a_0, \ldots, a_{k-1}$ 不能全为 0。

由于 $\deg m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=d$，则 $\boldsymbol{A}$ 在复数域上至少有 $d$ 个特征值（$\lambda_i, \ldots, \lambda_d$）。

不妨设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量（$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$），于是 $\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{x}=\lambda_i^j\boldsymbol{x}$，其中 $\lambda_i\in\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$。

此时 $a_0\boldsymbol{x}+a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}=(a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_{k-1}\lambda_i^{k-1})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow h(\lambda_i)=a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_{k-1}\lambda_i^{k-1}=0$（以上的等式对于所有的 $\lambda_i$ 都是成立的）。

由于 $h(\lambda)$ 在复数域上有且只有 $k-1$ 个根，则一定存在某些 $\lambda_i\in\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ 使得 $h(\lambda_i)\neq 0$，与 $h(\lambda_i)=0$ 矛盾。所以只有当 $a_0=\ldots=a_{k-1}=0$ 才能保证全部的 $\lambda_i$ 有 $h(\lambda_i)=0$ 成立，这说明了 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{x}$ 线性无关，反证法推出矛盾，所以原命题成立。

(3) **结论**：不一定存在。

□