第一章　内积空间

题 1.1. （p119.1）证明内积的平行四边形恒等式和极化恒等式（定理 6.3）。

设 $(\cdot,\cdot)$ 为实线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上的内积，$||\cdot||$ 为由内积定义的范数，则

(1) 平行四边形恒等式：对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)=||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2$

(2) 极化恒等式：对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{V}$，$4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2$

证明.

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &=||\boldsymbol{x}||^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}||^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2=2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)\\
||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &=(||\boldsymbol{x}||^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2)-(||\boldsymbol{x}||^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+||\boldsymbol{y}||^2)=4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

□

题 1.2. （p119.2）求 $\mathbb{R}^3$ 上的一组标准正交基 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$，其中 $\boldsymbol{\nu}_1$ 与向量 $(1,1,1)^T$ 线性相关。

解. 由题意得，设 $\boldsymbol{\nu}_1=k(1,1,1)^T$，则 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，易知 $\boldsymbol{\nu}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\boldsymbol{\nu}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^T$ 与 $\boldsymbol{\nu}_1$ 正交，且 $\boldsymbol{\nu}_2$ 与 $\boldsymbol{\nu}_3$ 正交。则标准正交基为 $(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ □

题 1.3. （p119.3）已知 $\mathbb{R}^3$ 上的向量 $\boldsymbol{\nu}=(1,2,-1)^T,\boldsymbol{\omega}=(1,1,0)^T$，求一个与 $\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega}$ 都正交的单位向量。

解. 构造 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}^T\\ \boldsymbol{\omega}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，即求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个单位长度解 $\boldsymbol{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ □

题 1.4. （p119.6）在一元多项式函数构成的线性空间 $\boldsymbol{R}[x]$ 上定义内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

试求 $1,x,x^2,x^3$ 的 Schmidt 正交化。

解.

$$
\begin{aligned}
e_1 =&1\\
e_2 =&x-\frac{(x,1)}{(1,1)}1=x\\
e_3 =&x^2-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}x-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}1=x^2-\frac{1}{3}\\
e_4 =&x^3-\frac{(x^3,x^2-\frac{1}{3})}{(x^2-\frac{1}{3},x^2-\frac{1}{3})}(x^2-\frac{1}{3})-\frac{(x^3,x)}{(x,x)}x-\frac{(x^3,x)}{(1,1)}1=x^3-\frac{3}{5}x
\end{aligned}
$$

$e=(e_1,e_2,e_3,e_4)=(1,x,x^2-\frac{1}{3},x^2-\frac{3}{5}x)$ □

题 1.5. （p120.11）设 $\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T$，求 $\boldsymbol{A}$ 的正交对角化。

证明. 令 $\boldsymbol{\nu}=(a_1,\ldots,a_n)^T$，显然 $(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T)^T=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T$，$\boldsymbol{A}\in\mathcal{S}^n$ 必可相似对角化。$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T)\le\min(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}})=1$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0,1$，

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$，此时 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\mathrm{diag}\{0,\ldots,0\}$。取 $\mathbb{R}^n$ 上的一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 组成矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{O}$ 其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0),\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,\ldots,1)$。

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，则 $a_1,\ldots,a_n$ 不全为 0，不妨令 $a_1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}$。

当 $\lambda=0$ 时，计算其特征向量，对 $\boldsymbol{A}$ 进行行变换，得 $\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，则特征向量为 $\boldsymbol{e}_1=(-a_2,a_1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(-a_3,0,a_1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{e}_k=(-a_k,0,\ldots,0,a_1,0,\ldots,0)^T,\boldsymbol{e}_{n-1}=(-a_{n-1},0,\ldots,0,a_1)^T$，将 $e_1,\ldots,e_n$ 进行施密特正交并单位化，得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 =&\frac{1}{||\boldsymbol{\eta}_1||}\boldsymbol{e}_1\\
\boldsymbol{\eta}_2 =&\frac{1}{||\boldsymbol{\eta}_2||}(\boldsymbol{e}_2-\frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1)\\
&\vdots\\
\boldsymbol{\eta}_{n-1} =&\frac{1}{||\boldsymbol{\eta}_{n-1}||}(\boldsymbol{e}_{n-1}-\frac{(\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_{n-2})}{\boldsymbol{\eta}_{n-2},\boldsymbol{\eta}_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}-\cdots\frac{(\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_1)}{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1)
\end{aligned}
$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\ldots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}$ 是 $\lambda=0$ 的 $n-1$ 个正交的单位特征向量。

当 $\lambda=1$ 时，其单位特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_n=\frac{1}{\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}}(a_1,\ldots,a_n)^T$，且与 $\boldsymbol{\eta}_1,\ldots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}$ 正交。

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\ldots,\boldsymbol{\eta}_n)$，则 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}\{0,\ldots,0,\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}\}$。 □

题 1.6. （p120.12）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于 $\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\omega\\0&\omega&0\end{pmatrix}$ 型矩阵，求出 ω 的值。

解. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 相似，所以两者的行列式因子相同。

$$\boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&-a&-b\\a&\lambda&-c\\b&c&\lambda\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&\omega\\0&-\omega&\lambda\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子为 $D_1=D_1=1,D_3=\lambda(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)$；矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的行列式因子为 $D_1=D_1=1,D_3=\lambda(\lambda^2+\omega^2)$。所以 $a^2+b^2+c^2=\omega^2\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。 □

题 1.7. （p120.13）证明：实反对称矩阵（$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$）于反 Hermite 矩阵（$\boldsymbol{A}^H=-\boldsymbol{A}$）的特征值为纯虚数或 0。

证明. 不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=a+bi$，特征向量为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}i$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^n$。下面提供两种方法来解决这个问题：

(1) $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}i)=(a+bi)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}i)\Rightarrow\boldsymbol{A\mu}=a\boldsymbol{\mu}-b\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{A\nu}=a\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\mu}$，且 $\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}=(\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu})^H=\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{\mu}=-\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}$，所以 $\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}=0$；同理，$\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{A\nu}=0$。又因为 $\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}=a\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{\mu}-b\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{A\nu}=a\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{\nu}+b\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A\mu}+\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{A\nu}=a(||\boldsymbol{\mu}||^2+||\boldsymbol{\nu}||^2)=0$，而 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}$ 不能同时为 $\mathbf{0}$，所以 $a=0$，这说明了 $\lambda=bi$ 为纯虚数或 0。

(2) $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow(\boldsymbol{Ax})^H=(\lambda\boldsymbol{x})^H\Rightarrow\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H$，两边同时与 $\boldsymbol{x}$ 做内积，得 $\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{x}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}\Rightarrow-\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{Ax}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}\Rightarrow-\lambda\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}=\bar{\lambda}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}$，此时有 $-(a+bi)=a-bi\Rightarrow a=0$，这说了 $\lambda=bi$ 为纯虚数或 0。

ps：两种方法都不需要针对矩阵类型分类讨论，原因在于共轭转置 H 包含转置 T。

□

题 1.8. （p121.15）设 $\boldsymbol{V}$ 为 Euclid 空间，$\mathcal{A}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的对称变换，若对一切非零向量 $\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，均有 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})>0$，这样的对称变换称为**正定**的，求证：正定的对称变换在标准正交基下的矩阵为正定矩阵。

证明. 取标准正交基 $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$，设 $\boldsymbol{v}$ 在基下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，对称变换 $\mathcal{A}$ 在基下的变换矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 则 $\mathcal{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。由 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})>0$ 与 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T>0\Rightarrow \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，即 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。 □

题 1.9. （p121.16）试给出一个既不是对称变换，也不是正交变换的正规变换。

解. 不妨设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为满足这些变换，在标准正交基 $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ 下的变换矩阵。对称变换即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$；正交变换即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$；正规变换为 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$。由于对称变换与正交变换定义在欧式空间，矩阵需要满足的条件变为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$。显然，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ 为所求，其中 $\boldsymbol{A}^T\neq\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$。 □

题 1.10. (p121.21) 设 $\boldsymbol{V}$ 为 Euclid 空间，$\boldsymbol{T}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的线性变换，且对任何 $\boldsymbol{\nu}\in\boldsymbol{V}$，均有 $\boldsymbol{\nu}-\mathcal{T}\boldsymbol{\nu}\in(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，这样的线性变换 $\boldsymbol{V}$ 上的**投影变换**。

(1) 证明：对任何 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换 $\mathcal{T}$，有 $\ker\mathcal{T}=(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，该命题的逆命题是否成立？

(2) 证明：线性变换 $\mathcal{T}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换的充分必要条件是 $\mathcal{T}$ 是对称变换且满足 $\mathcal{T}^2=\mathcal{T}$。

(3) 设 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换，求证：$\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{O}$，当且仅当 $\mathcal{T}_1\perp\mathcal{T}_2$。

(4) 设 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换，求证：$\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\supset\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$

(5) 设 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 均为 $\boldsymbol{V}$ 上的投影变换，求证：$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 为投影变换当且仅当 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，且此时有 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

(6) 设 $\mathcal{A}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 上的对称变换，证明 $\mathcal{A}$ 可表示为一组投影变换的线性组合，且该组投影变换的像空间的直和恰为 $\boldsymbol{V}$。

证明. 由于线性变换和线性变换下对应的矩阵是基本等价的，在后续的证明过程中，不再对两者进行区分。

定理 1.1. 若对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$ ，有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$ 恒成立，则 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵（即 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$）。

(1) 先证 $\ker\mathcal{T}\subset(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，只需证明任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\ker\mathcal{T}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}\in(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，即任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V},\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}$ 有 $(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}\boldsymbol{\gamma})=0$，其中 $\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}=0,\mathcal{T}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$。根据投影变换的定义，有 $0=(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}\boldsymbol{\gamma})$，于是 $\ker\mathcal{T}\subset(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$；

下证 $\ker\mathcal{T}=(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，由于 $\dim(\ker\mathcal{T})+\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})=n$，则 $\dim(\ker\mathcal{T})=\dim(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，于是 $\ker\mathcal{T}=(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$。

逆命题不一定成立。令 $\mathcal{T}$ 在标准正交基下的矩阵为 $2\boldsymbol{E}$，此时 $\ker(\mathcal{T})=\{\mathbf{0}\},\mathrm{Im}\mathcal{T}=\mathbb{R}^n,(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$，这满足了 $\ker\mathcal{T}=(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$，但 $\boldsymbol{\nu}-\mathcal{T}\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}-2\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nu}=-\boldsymbol{\nu}\notin(\mathrm{Im}\mathcal{T})^{\perp}$。

(2) 先证必要性：由（1）可得，任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}\in\ker\mathcal{T}$，因此 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\Rightarrow\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，这说明了 $\mathcal{T}^2=\mathcal{T}$。又由于 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha})=0$，而 $(\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})=(\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha})=0$，这说明了 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha})=(\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})$，即 $\mathcal{T}$ 是对称变换。

再证充分性：即任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V},(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}\boldsymbol{\beta})=(\mathcal{T}(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\mathcal{T}\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=((\mathcal{T}-\mathcal{T}^2)\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\mathbf{0},\boldsymbol{\beta})=0$。

(3) (a) 先证充分性：显然 $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 是对称变换，只需证明 $(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)^2=\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$，即证 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{O}$，而 $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=\mathcal{O}$，所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{O}$。

再证必要性：若 $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 是投影变换，则 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{O}$。又因为 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2^2=-\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)=\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)=\mathcal{T}_2^2\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，所以 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{O}$。

(b) 先证充分性，任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，有 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=0$ ，不妨令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，则 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=0$，根据定理1.1有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=-(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$，即 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{O}$，所以 $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ 是投影变换。

再证必要性，任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，欲证 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=0$，只需注意到 $(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})=0$。

(4) 先证充分性，显然 $\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$ 是对称变换，只需证明 $(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2)^2=\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$，即证 $2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}\in(\mathrm{Im}\mathcal{T}_1)^{\perp}\subset(\mathrm{Im}\mathcal{T}_2)^{\perp}$，则 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$。

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})\\
=&(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})-(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})\\
=&(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}
$$

根据定理1.1，$(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=-(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$，于是 $2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。

再证必要性，若 $\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_2$ 是投影变换，则 $2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。只需证明任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，存在 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，有 $\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\beta}$。由于 $\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}=2\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_1+\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\beta}+\mathcal{T}_2\boldsymbol{\gamma}\Rightarrow\mathcal{T}_2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma})=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\beta}$

只需证明任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，有 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=0$，不妨令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$

$$(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})-(\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\alpha}) \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})-(\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\boldsymbol{\alpha}) \tag{2}$$

(1)式加(2)式得：

$$\begin{aligned}2(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=&(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\boldsymbol{\alpha})\\=&(\boldsymbol{\alpha},(2\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\alpha})\\=&(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0})=0\end{aligned}$$

即 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha})=0$ 恒成立。根据定理1.1有 $(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=-(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)$，即即 $(\boldsymbol{\alpha}-\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha},\mathcal{T}_2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},(\mathcal{T}_2-\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$。

(5) 先证充分性，$(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=\mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$，则其为对称变换；接着有 $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^2=\mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$，说明为投影变换。

再证必要性，若 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ 是投影变换，则其也是对称变换，于是 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)^T=\mathcal{T}_2^T\mathcal{T}_1^T=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$。

先证 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\subset\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$，则 $\alpha\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1$，又由于 $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，所以 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathrm{Im}\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$，即 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

再证 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\supset\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1^2\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\boldsymbol{\alpha}_2$，说明了 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$。

综上 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathrm{Im}\mathcal{T}_1\cap\mathrm{Im}\mathcal{T}_2$。

$\square$