第一章　矩阵函数

题 1.1. （p79.1）设函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\sin t & -e^t & t\\ \cos t & e^t & t^2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，试求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t), |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)|, \lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{A}(t)$。

解. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -e^t & 1\\ -\sin t & e^t & 2t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)|=0$，$\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ □

题 1.2. （p79.2）设函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^t & 1\\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0\\ 3t & 0 & 0\end{pmatrix}$，试求 $\int \boldsymbol{A}(t)dt, \int_0^u \boldsymbol{A}(t)dt$。

解. $\int \boldsymbol{A}(t)dt=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^t & t\\ -e^{-t} & e^{2t} & 0\\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\int_0^u \boldsymbol{A}(t)dt=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2u} & (u-1)e^u & u\\ -e^{-u} & e^{2u} & 0\\ \frac{3}{2}u^2 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2u}-\frac{1}{2} & (u-1)e^u+1 & u\\ -e^{-u}+1 & e^{2u}-1 & 0\\ \frac{3}{2}u^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

□

题 1.3. （p79.3）判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}^n$ 是否收敛，如果收敛，计算出结果。

解. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$，特征值 $\lambda_1=-3, \lambda_2=5$。

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$，于是：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}1&2\\8&1\end{pmatrix}^n&=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\begin{pmatrix}\frac{10}{13}&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{18}{13}&\frac{4}{13}\\\frac{16}{13}&\frac{18}{13}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

计算出级数的值恰恰说明了其收敛。

□

题 1.4. （p79.4）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1\\4&4\end{pmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}}, e^{\boldsymbol{B}}$。

解. (1) $\lambda_1=1,\lambda_2=2,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases}P(\lambda_1)=P(1)=a_0+a_1=e\\P(\lambda_1)=P(2)=a_0+2a_1=e^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=a_0=2e-e^2\\a_1=e^2-e\end{cases}$$

$$e^{\boldsymbol{A}}=P(\boldsymbol{A})=(2e-e^2)\boldsymbol{E}+(e^2-e)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2e-e^2&e^2-e\\-2e^2+2e&2e^2-e\end{pmatrix}$$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=2,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-2)^2$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases}P(\lambda)=P(2)=a_0+2a_1=e^2\\P'(\lambda)=P'(2)=a_1=e^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=-e^2\\a_1=e^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{B}}&=P(\boldsymbol{B})=e^2\boldsymbol{E}+e^2\boldsymbol{B}\\&=\begin{pmatrix}-e^2&-e^2\\4e^2&3e^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

题 1.5. （p79.5）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-\theta\\\theta&0\end{pmatrix}$，试证 $e^{\boldsymbol{A}t}=\begin{pmatrix}\cos\theta t&-\sin\theta t\\\sin\theta t&\cos\theta t\end{pmatrix}$。

证明. $\lambda_1=\theta\mathrm{i},\lambda_2=-\theta\mathrm{i},m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-\theta\mathrm{i})(\lambda+\theta\mathrm{i})$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(\theta\mathrm{i})=a_0+a_1\theta\mathrm{i}=e^{\theta t\mathrm{i}} \\ P(\lambda_2)=P(-\theta\mathrm{i})=a_0-a_1\theta\mathrm{i}=e^{-\theta t\mathrm{i}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\cos\theta t \\ a_1=\frac{\sin\theta t}{\theta} \end{cases}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=P(\boldsymbol{A})=\cos\theta t\boldsymbol{E}+\frac{\sin\theta t}{\theta}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\theta t & -\sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$$

□

题 1.6. （p79.6）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$，利用上题1.5结果求 $e^{\boldsymbol{A}}$。

解. 令 $\boldsymbol{A}=\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ 由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，并且根据题1.5可得：

$$e^{\boldsymbol{A}}=e^{\sigma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}}=e^{\sigma\boldsymbol{E}}e^{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix} e^{\sigma} & 0 \\ 0 & e^{\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\sigma}\cos\theta & -e^{\sigma}\sin\theta \\ -e^{\sigma}\sin\theta & e^{\sigma}\cos\theta \end{pmatrix}$$

□

题 1.7. （p80.7）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 9 & -6 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & -6 & -8 \end{pmatrix}$，求 $e^{2\boldsymbol{A}t}$。

解. $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，显然 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。

并且有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^T \\ \boldsymbol{p}_2=(2,1,2)^T \\ \boldsymbol{p}_3=(5,1,2)^T \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$
\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{2\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&1\\1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4t}&0&0\\0&e^{-2t}&2te^{-2t}\\0&0&e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&-3\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}4e^{4t}+(-4t-3)e^{-2t}&-2e^{4t}+2e^{-2t}&-3e^{4t}+(4t+3)e^{-2t}\\-2te^{-2t}&e^{-2t}&2te^{-2t}\\4e^{4t}+(-4t-4)e^{-2t}&-2e^{4t}+2e^{-2t}&-3e^{4t}+(4t+4)e^{-2t}\end{pmatrix}
$$

□

题 1.8. （p80.8）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-7&-2&8\\-2&-1&4\end{pmatrix}$，求 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

解. $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，显然 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&1&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$，其中空白位置全是 0。并且有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。不妨令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则：

$$
\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1+2\boldsymbol{p}_2\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_1=(-1,4,1)^T\\\boldsymbol{p}_2=(-1,3,1)^T\\\boldsymbol{p}_3=(0,3,1)^T\end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\4&3&3\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-1&-1&3\\1&0&1\end{pmatrix}
$$

于是

$$
\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\4&3&3\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&te^{2t}&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-3\\-1&-1&3\\1&0&1\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}(t+1)e^{2t}&te^{2t}&-3te^{2t}\\(-4t-3)e^{2t}+3e^t&(-4t+1)e^{2t}&(12t-3)e^{2t}+3e^t\\(-t-1)e^{2t}+e^t&-te^{2t}&3te^{2t}+e^t\end{pmatrix}
$$

□

题 1.9. （p80.9）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$，试求 $\cos\boldsymbol{A},\sin\boldsymbol{B},e^{\boldsymbol{B}t}$。

解. $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-5)$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases}P(\lambda_1)=P(1)=a_0+a_1=\cos 1\\P(\lambda_2)=P(5)=a_0+5a_1=\cos 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=\frac{-\cos 5+5\cos 1}{4}\\a_1=\frac{\cos 5-\cos 1}{4}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos\boldsymbol{A}=P(\boldsymbol{A})&=\frac{-\cos 5+5\cos 1}{4}\boldsymbol{E}+\frac{\cos 5-cos 1}{4}\boldsymbol{A}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\cos 5+3\cos 1&2\cos 5-2\cos 1&\cos 5-\cos 1\\\cos 5-\cos 1&2\cos 5+2\cos 1&\cos 5-\cos 1\\\cos 5-\cos 1&2\cos 5-2\cos 1&\cos 5+3\cos 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:ccc}3&0&0&0\\\hdashline 0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1&\\&\boldsymbol{J}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2$ 为若当块，空白位置全是 0。

则 $\sin\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sin\boldsymbol{J}_1&\\&\sin\boldsymbol{J}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 3&0&0&0\\0&-\sin 2&\cos 2&\frac{\sin 2}{2}\\0&0&-\sin 2&\cos 2\\0&0&0&-\sin 2\end{pmatrix}$

则 $e^{\boldsymbol{B}t}=\begin{pmatrix}e^{\boldsymbol{J}_1t}&\\&e^{\boldsymbol{J}_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&0&0&0\\0&e^{-2t}&te^{-2t}&\frac{t^2e^{-2t}}{2}\\0&0&e^{-2t}&te^{-2t}\\0&0&0&e^{-2t}\end{pmatrix}$

□

题 1.10. （p80.10）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}t},e^{\boldsymbol{B}t},\sin\boldsymbol{B}t$。

解. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda+2)$，令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(0)=a_0=1 \\ P(\lambda_2)=P(-2)=a_0-2a_1=e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=1 \\ a_1=\frac{1-e^{-2t}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t}&=P(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}+\frac{1-e^{-2t}}{2}\boldsymbol{A} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2,m_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$，

(1) 令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(-1)=a_0-a_1=e^{-t} \\ P(\lambda_2)=P(2)=a_0+2a_1=e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3} \\ a_1=\frac{-e^{-t}+e^{2t}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{B}t}=P(\boldsymbol{B})&=\frac{2e^{-t}+e^{2t}}{3}\boldsymbol{E}+\frac{-e^{-t}+e^{2t}}{3}\boldsymbol{B} \\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{2t}+4e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} \\ 0 & 3e^{2t} & 0 \\ -4e^{2t}+4e^{-t} & e^{2t}-e^{-t} & 4e^{2t}-e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，则：

$$\begin{cases} P(\lambda_1)=P(-1)=a_0-a_1=\sin t \\ P(\lambda_2)=P(2)=a_0+2a_1=\sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{\sin 2t+2\sin t}{3} \\ a_1=\frac{\sin 2t-\sin t}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin \boldsymbol{B}t=P(\boldsymbol{B})&=\frac{\sin 2t+2\sin t}{3}\boldsymbol{E}+\frac{\sin 2t-\sin t}{3}\boldsymbol{B} \\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sin 2t+4\sin t & \sin 2t-\sin t & \sin 2t-\sin t \\ 0 & 3\sin 2t & 0 \\ -4\sin 2t+4\sin t & \sin 2t-\sin t & 4\sin 2t-\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

题 1.11. （p80.11）求常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases} x_1'(t)=-7x_1-7x_2+5x_3 \\ x_2'(t)=-8x_1-8x_2-5x_3 \\ x_3'(t)=-5x_2 \end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(0)=3,x_2(0)=-2,x_3(0)=1$ 的解。

解. 由题意得：$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-7&-7&5\\-8&-8&-5\\0&-5&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-15,\lambda_2=-5,\lambda_3=5$。

$$\text{则 } \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15&&\\&-5&\\&&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-15t}&&\\&e^{-5t}&\\&&e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{10}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{10}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-15t}&e^{-5t}&e^{5t}\\3e^{-15t}&-e^{-5t}&-e^{5t}\\e^{-15t}&-e^{-5t}&e^{5t}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}e^{-15t}+\frac{9}{10}e^{-5t}+\frac{17}{10}e^{5t}\\\frac{3}{5}e^{-15t}-\frac{9}{10}e^{-5t}-\frac{17}{10}e^{5t}\\\frac{1}{5}e^{-15t}-\frac{9}{10}e^{-5t}+\frac{17}{10}e^{5t}\end{pmatrix}$$

□

题 1.12.（p80.12）求常系数线性齐次微分方程组

$$\begin{cases}x_1'(t)=x_1(t)-x_2(t)\\x_2'(t)=4x_1(t)-3x_2(t)+1\end{cases}$$

满足初始条件 $x_1(0)=1,x_2(0)=2$ 的解。

解. 由题意得：$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T,\boldsymbol{F}(t)=(0,1)^T$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda+1)^2$。令 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda$ ，则

$$\begin{cases}P(\lambda)=P(-1)=a_0-a_1=e^{-t}\\P'(\lambda)=P'(-1)=a_1=te^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=(1+t)e^{-t}\\a_1=te^{-t}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=P(\boldsymbol{A})=(1+t)e^{-t}\boldsymbol{E}+te^{-t}\boldsymbol{A}\\&=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{-t}&-te^{-t}\\4te^{-t}&(-2t+1)e^{-t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{b}du \\
&= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ 4te^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} (-2u+1)e^{u} & ue^{u} \\ -4ue^{u} & (2u+1)e^{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\
&= \begin{pmatrix} (t+2)e^{-t}-1 \\ (2t+3)e^{-t}-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.13. （p80.13）求微分方程组 $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

解. 由题意得: $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 显然 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准型 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 并且有 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。不妨令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为非奇异矩阵，则:

$$
\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 = 2\boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1 = (1,0,0)^T \\ \boldsymbol{p}_2 = (2,2,-2)^T \\ \boldsymbol{p}_3 = (0,1,1)^T \end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

于是

$$
e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ 0 & (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}
$$

不妨设 $\boldsymbol{x}(0)=(k_1,k_2,k_3)^T$，则 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix} k_1e^{2t}+k_2te^{2t}+k_3te^{2t} \\ k_2(t+1)e^{2t}+k_3te^{2t} \\ -k_2te^{2t}+k_3(1-t)e^{2t} \end{pmatrix}$

□

题 1.14. （p80.14）求微分方程组 $\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{F}(t)$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

解. 由题意得：$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=5$。

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \\ & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & \\ & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ -e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix}$

不妨设 $\boldsymbol{x}(0)=(k_1,k_2)^T$，则：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t)&=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}u}\boldsymbol{F}(t)du \\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ -e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\
&+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & -e^{2t}+e^{4t} \\ -e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix}\int_0^t \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-2u}+e^{-4u} & -e^{-2u}+e^{-4u} \\ -e^{-2u}+e^{-4u} & e^{-2u}+e^{-4u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}du \\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1(e^{2t}+e^{4t})+k_2(-e^{2t}+e^{4t})+e^{2t}-1 \\ k_1(-e^{2t}+e^{4t})+k_2(e^{2t}+e^{4t})+1-e^{2t} \end{pmatrix} \\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (k_1+k_2)e^{4t}+(k_1-k_2+1)e^{2t}-1 \\ (k_1+k_2)e^{4t}+(k_2-k_1-1)e^{2t}+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

题 1.15. （p81.16）设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，$\boldsymbol{B}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$。若 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=0$，证明对一切 $t\in\mathbb{R}$，$\det\boldsymbol{B}(t)=1$。

证明. 由题意得，不妨设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\lambda_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{B}(t)e^{\boldsymbol{A}t}$ 的特征值为 $e^{\lambda_i t}$，则

$$\det\boldsymbol{B}(t)=\prod_{i}^{n}e^{\lambda_i t}=e^{\sum\limits_{i}^{n}\lambda_i t}=e^{t\times\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}=e^0=1$$

$\square$