

《算法设计与分析》第四次手写作业

2024.12.25 唐治江

《算法设计与分析》第四次手写作业

2024.12.25 唐治江

1. Maximize profit
2. Shipping goods
3. Production
4. Ex. Wakeup as billionaire

1. Maximize profit

设 x_1 为生产 Product 1 的数量, x_2 为生产 Product 2 的数量。目标函数和约束条件如下:

目标函数 (最大化利润):

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

2. Shipping goods

定义 x_{ij} 为从仓库 i 向零售店 j 运输的商品数量, 其中 $i = 1, 2, 3$ (代表仓库 1, 2, 3), 而 $j = A, B, C, D$ (代表零售店 A, B, C, D)。

目标是最小化运输成本。根据运输成本表, 每个单位商品从仓库 i 运输到零售店 j 的成本为 c_{ij} 。因此, 目标函数为:

$$\text{Minimize } 8x_{1A} + 6x_{1B} + 10x_{1C} + 9x_{1D} + 7x_{2A} + 5x_{2B} + 8x_{2C} + 7x_{2D} + 6x_{3A} + 7x_{3B} + 7x_{3C} + 8x_{3D}$$

每个仓库的运输量不能超过其库存量。例如, 仓库 1 的供应量为 50 单位, 所以:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 50$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 60$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 40$$

每个零售店的需求量必须得到满足。例如, 零售店 A 的需求量为 40 单位, 所以:

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 40$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 50$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 40$$

$$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} = 20$$

每个运输量不能为负, 即:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ 对于所有 } i \text{ 和 } j$$

最终的线性规划模型:

$$\text{Minimize } 8x_{1A} + 6x_{1B} + 10x_{1C} + 9x_{1D} + 7x_{2A} + 5x_{2B} + 8x_{2C} + 7x_{2D} + 6x_{3A} + 7x_{3B} + 7x_{3C} + 8x_{3D}$$

s.t.

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 50$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 60$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 40$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 40$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 50$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 40$$

$$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} = 20$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ 对于所有 } i \text{ 和 } j$$

3. Production

设 x_1, x_2, x_3 分别表示生产产品 A1、A2 和 A3 的数量（单位：件）。这些是我们要确定的决策变量。

目标是最大化公司的总利润。每种产品的单件利润分别为 40000 元、50000 元和 60000 元，此外每种产品还有相应的固定成本。总利润可以表示为：

$$\text{Maximize } 40,000x_1 + 50,000x_2 + 60,000x_3 - 1,000,000y_1 - 1,500,000y_2 - 2,000,000y_3$$

其中， y_1, y_2, y_3 是二进制变量，表示是否生产该产品：如果 $y_i = 1$ ，则生产 Ai 产品；如果 $y_i = 0$ ，则不生产 Ai，固定成本为 0。

每种资源的使用量必须小于或等于其可用量。因此约束为：

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 500$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 300$$

所有的生产数量必须是非负整数，因此：

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

每种产品的生产决策变量 y_1, y_2, y_3 只能取 0 或 1，即：

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

为了确保如果某个产品生产，则其生产数量必须大于零，必须引入如下约束：

$$x_1 \leq My_1, \quad x_2 \leq My_2, \quad x_3 \leq My_3$$

其中， M 是一个足够大的常数，确保当 $y_i = 1$ 时， x_i 的生产数量可以大于零；当 $y_i = 0$ 时， $x_i = 0$ ，以此类推。

最终的线性规划模型

$$\text{Maximize } 40,000x_1 + 50,000x_2 + 60,000x_3 - 1,000,000y_1 - 1,500,000y_2 - 2,000,000y_3$$

s.t.

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 500$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 100$$

$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 300$$

$$0 \leq x_1 \leq My_1, \quad 0 \leq x_2 \leq My_2, \quad 0 \leq x_3 \leq My_3$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

4. Ex. Wakeup as billionaire

设决策变量如下

- x_{Ai} = 从工厂 $F1$ 生产并运输到市场 M_i 的 A 产品数量。
- x_{Bi} = 从工厂 $F1$ 生产并运输到市场 M_i 的 B 产品数量。
- x_{Ci} = 从工厂 $F1$ 生产并运输到市场 M_i 的 C 产品数量。
- y_{Ai} = 从工厂 $F2$ 生产并运输到市场 M_i 的 A 产品数量。
- y_{Bi} = 从工厂 $F2$ 生产并运输到市场 M_i 的 B 产品数量。

- y_{Ci} = 从工厂 $F2$ 生产并运输到市场 M_i 的 C 产品数量。

目标是最大化总利润，利润等于各个产品的销售收入减去运输成本。

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & 50 \left(\sum_{i=1}^3 (x_{Ai} + y_{Ai} - 0.5(x_{Bi} + y_{Bi}) - 0.8(x_{Ci} + y_{Ci})) \right) + 60 \left(\sum_{i=1}^3 (x_{Bi} + y_{Bi}) \right) + 70 \left(\sum_{i=1}^3 (x_{Ci} + y_{Ci}) \right) \\ & - 5 \left(\sum_{i=1}^3 x_{Ai} \right) - 7 \left(\sum_{i=1}^3 x_{Bi} \right) - 8 \left(\sum_{i=1}^3 x_{Ci} \right) - 6 \left(\sum_{i=1}^3 y_{Ai} \right) - 6 \left(\sum_{i=1}^3 y_{Bi} \right) - 7 \left(\sum_{i=1}^3 y_{Ci} \right) \end{aligned}$$

资源约束

对于每个工厂，R1 和 R2 的总消耗不能超过工厂的可用资源。

- **工厂 F1 对资源 R1 的约束:** $3 \sum_{i=1}^3 x_{Ai} + 2 \sum_{i=1}^3 x_{Bi} + 4 \sum_{i=1}^3 x_{Ci} \leq 400$
- **工厂 F1 对资源 R2 的约束:** $2 \sum_{i=1}^3 x_{Ai} + 4 \sum_{i=1}^3 x_{Bi} + 3 \sum_{i=1}^3 x_{Ci} \leq 300$
- **工厂 F2 对资源 R1 的约束:** $3 \sum_{i=1}^3 y_{Ai} + 2 \sum_{i=1}^3 y_{Bi} + 4 \sum_{i=1}^3 y_{Ci} \leq 500$
- **工厂 F2 对资源 R2 的约束:** $2 \sum_{i=1}^3 y_{Ai} + 4 \sum_{i=1}^3 y_{Bi} + 3 \sum_{i=1}^3 y_{Ci} \leq 400$

市场需求约束

每个市场对产品的需求必须得到满足。

- **市场 M1 的需求:** $x_{A1} + y_{A1} \geq 40, \quad x_{B1} + y_{B1} \geq 50, \quad x_{C1} + y_{C1} \geq 60$
- **市场 M2 的需求:** $x_{A2} + y_{A2} \geq 50, \quad x_{B2} + y_{B2} \geq 60, \quad x_{C2} + y_{C2} \geq 70$
- **市场 M3 的需求:** $x_{A3} + y_{A3} \geq 60, \quad x_{B3} + y_{B3} \geq 70, \quad x_{C3} + y_{C3} \geq 80$

生产关系约束

B 和 C 的生产必须依赖于 A 的生产，且每单位 B 和 C 需要一定量的 A。特别需要确保，用于生产 B 和 C 的 A 不能被直接销售。

- **B 和 C 的生产与 A 的关系:**

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3})$$

$$x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} \leq 0.8(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3})$$

$$y_{B1} + y_{B2} + y_{B3} \leq 0.5(y_{A1} + y_{A2} + y_{A3})$$

$$y_{C1} + y_{C2} + y_{C3} \leq 0.8(y_{A1} + y_{A2} + y_{A3})$$

非负约束

所有的决策变量必须是非负的。

$$x_{Ai}, x_{Bi}, x_{Ci}, y_{Ai}, y_{Bi}, y_{Ci} \geq 0$$