# 4th: Linear Programming

## 手写题

### Maximize profit

设产品1为x1，产品2为x2，根据题意可知：

$$F = 3x_1 + 5x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

### Shipping goods

1. 决策变量：$x_{ij}$表示从仓库 $i$ ( $i = 1, 2, 3$ )向零售店 $j (j = A, B, C, D)$运输的货物数量。
2. 目标函数：目标是最小化总运输成本。总运输成本是每个运输路径的货物数量与运输成本的乘积之和。

   $\text{Minimize } Z = 8x_{1A} + 6x_{1B} + 10x_{1C} + 9x_{1D} + 7x_{2A} + 5x_{2B} + 8x_{2C} + 7x_{2D} + 6x_{3A} + 7x_{3B} + 7x_{3C} + 8x_{3D}$
3. 约束条件：

   (1) 供给限制：每个仓库的供应量不能超过库存量

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 50$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 60$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 40$$

   (2) 需求限制：每个零售店的需求必须得到满足

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 40$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 50$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 40$$
$$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} = 20$$

(3) 非负约束：运输的数量不能为负

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

# Production

记$a_1, a_2, a_3$表示$A_1, A_2, A_3$数量，$b_1, b_2, b_3$表示$A_1, A_2, A_3$是否出现，$b_1, b_2, b_3$均为0/1变量，则：

$$max \quad 10000 * (4a_1 - 100b_1 + 5a_2 - 150b_2 + 6a_3 - 200b_3)$$

$$s.t. \begin{cases} 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \leq 500 \\ 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 \leq 100 \\ 3a_1 + 6a_2 + 9a_3 \leq 300 \end{cases}$$

# Ex. Wakeup as billionaire

已知

| 变量 | 含义 | 范围 |
| --- | --- | --- |
| $P_k$ | 单位产品$k$的价格 (USD/unit) | $k \in \{A, B, C\}$ |
| $R_{k1}$ | 单位产品$k$所需的资源$R_1$ (kg/unit) | $k \in \{A, B, C\}$ |
| $R_{k2}$ | 单位产品$k$所需的资源$R_2$ (kg/unit) | $k \in \{A, B, C\}$ |
| $R_{i1}$ | 工厂$F_i$拥有资源$R_1$的数量 (kg) | $i \in \{1, 2\}$ |
| $R_{i2}$ | 工厂$F_i$拥有资源$R_2$的数量 (kg) | $i \in \{1, 2\}$ |
| $D_{jk}$ | 市场$M_j$需求产品$k$的数量 (unit) | $j \in \{1, 2, 3\}, k \in \{A, B, C\}$ |
| $C_{ij}$ | 从工厂$F_i$向市场$M_j$运输单位产品的花费 (USD/unit) | $i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3\}$ |

则该题的建模过程如下

1. 决策变量

- $x_{ijk}$：从工厂$F_i$向市场$M_j$运输产品$k$的数量（单位：unit）。

- $y_{ik}$：工厂$F_i$生产产品$k$的总数量（单位：unit）。
- $z_{ik}$：工厂$F_i$使用的产品$A$作为$B$和$C$的原材料数量（单位：unit）。

2. 目标函数：最大化总利润（产品销售利润减去运输成本）

   $\max Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k \in \{A,B,C\}} (P_k \cdot x_{ijk} - C_{ij} \cdot x_{ijk})$

3. 约束条件

   a. 资源限制，每个工厂的资源使用量不能超过其供应量：

   $\sum_{k \in \{A,B,C\}} (R_{k1} \cdot y_{ik}) \leq R_{i1}, \quad \forall i \in \{1,2\}$

   $\sum_{k \in \{A,B,C\}} (R_{k2} \cdot y_{ik}) \leq R_{i2}, \quad \forall i \in \{1,2\}$

   b. 产品依赖约束，产品$B$和$C$的生产需要消耗$A$：

   $z_{iB} = 0.5 \cdot y_{iB}, \quad z_{iC} = 0.8 \cdot y_{iC}, \quad \forall i \in \{1,2\}$

   $\sum_{k \in \{B,C\}} z_{ik} \leq y_{iA}, \quad \forall i \in \{1,2\}$

   c. 生产运输平衡，每个工厂生产的产品数量必须大于或等于其向市场运输的总量：

   $\sum_{j=1}^{3} x_{ijk} \leq y_{ik}, \quad \forall i \in \{1,2\}, k \in \{A,B,C\}$

   d. 市场需求限制，每个市场的需求必须被完全满足：

   $\sum_{i=1}^{2} x_{ijk} = D_{jk}, \quad \forall j \in \{1,2,3\}, k \in \{A,B,C\}$

   e. 非负性约束：

   $x_{ijk}, y_{ik}, z_{ik} \geq 0, \quad \forall i,j,k$

综上，该题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k\in\{A,B,C\}}(P_k \cdot x_{ijk} - C_{ij}\cdot x_{ijk}) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k\in\{A,B,C\}} R_{k1}\cdot y_{ik} \le R_{i1}, \quad \forall i\in\{1,2\} \\
& \sum_{k\in\{A,B,C\}} R_{k2}\cdot y_{ik} \le R_{i2}, \quad \forall i\in\{1,2\} \\
& z_{iB} = 0.5\cdot y_{iB}, \quad z_{iC} = 0.8\cdot y_{iC}, \quad \forall i\in\{1,2\} \\
& \sum_{k\in\{B,C\}} z_{ik} \le y_{iA}, \quad \forall i\in\{1,2\} \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{ijk} \le y_{ik}, \quad \forall i\in\{1,2\}, k\in\{A,B,C\} \\
& \sum_{i=1}^{2} x_{ijk} = D_{jk}, \quad \forall j\in\{1,2,3\}, k\in\{A,B,C\} \\
& x_{ijk}, y_{ik}, z_{ik} \ge 0, \quad \forall i,j,k
\end{aligned}
$$

# OJ题

## Card Selection

1. 决策变量

   $x_1$：从$A$张 $+1$卡片中选出的卡片数量。

   $x_2$：从$B$张 $0$卡片中选出的卡片数量。

   $x_3$：从$C$张 $-1$ 卡片中选出的卡片数量。

2. 目标函数

   要最大化的是所选卡片的总和。每张卡片的数值为：

   选择一张 $+1$卡片，得到1的贡献；

   选择一张 $0$卡片，得到0的贡献；

   选择一张$-1$卡片，得到 $-1$的贡献。

因此，目标函数可以表示为：$\text{Maximize } Z = x_1 - x_3$

即在满足卡片总数的情况下，最大化 $x_1$（$+1$ 卡片的数量）并最小化$x_3$（$-1$ 卡片的数量）。

3. 约束条件

   a. 选卡片总数的约束

   $$x_1 + x_2 + x_3 = K$$

   这保证总共选择了$K$张卡片。

   b. 每种卡片的选择限制

   从 $+1$ 卡片中最多选 $A$ 张：

   $$0 \leq x_1 \leq A$$

   从 0 卡片中最多选 $B$张：

   $$0 \leq x_2 \leq B$$

   从$-1$ 卡片中最多选 $C$ 张：

   $$0 \leq x_3 \leq C$$

4. 线性规划模型

   最大化目标函数：

   $$\text{Maximize } Z = x_1 - x_3$$

   subject to:

   $$x_1 + x_2 + x_3 = K$$

   $$0 \leq x_1 \leq A$$

   $$0 \leq x_2 \leq B$$

   $$0 \leq x_3 \leq C$$

可以按照上述的线性规划建模，编程实现求解最大值问题。在输入数据满足输入要求的情况下，可以求解得到满足题目要求的变量值。

## ILP Feasibility

决策变量：$x_1, x_2, \ldots, x_N$，其中每个$x_i$都是非负整数。

约束条件：$\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot x_i = V$。

目标函数：$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i$，所有变量之和最小化。

其中，$N$为变量的个数，满足$1 \le N \le 3$；$c_i$和$V$都是正整数，且$1 \le c_i, V \le 10^6$。

## Production Line Optimization

已知制造厂共有$p$条生产线，每条生产线的启用成本为$c_j$，每天的最大产能为$t_j$，题目要求制造厂在$n$天内以最小成本完成$m$件货物的生产任务，规定每天最多启用一条生产线。

1. 决策变量：

   $x_{ij}$：表示是否在第$i$天启用生产线$j$，满足：

   $$\forall x_{ij} \in \{0, 1\}$$

2. 目标函数：目标是最小化总生产成本$Z$。

   $\min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_{ij}$

3. 约束条件：

   1. 每天最多开启一条生产线：$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} \le 1, \quad \forall i$
   2. 需要在规定时间内完成生产任务：
   $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} t_j \cdot x_{ij} \ge m$

## Extra Problem

设第 $i$ 天需要 $a_i$ 个志愿者，记 $m_{ij}$ 表示第 $i$ 天第 $j$ 个志愿者是否能工作，则它们需要满足如下条件：

$$
\begin{aligned}
m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \cdots + m_{1m}x_m &\geq A_1 \\
m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots + m_{2m}x_m &\geq A_2 \\
&\vdots \\
m_{n1}x_1 + m_{n2}x_2 + \cdots + m_{nm}x_m &\geq A_n \\
x_1, x_2, ..., x_m &\geq 0
\end{aligned}
$$

于是所需费用用 $C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_mx_m$，需要令它最小化。

可以看出，这就是一个线性规划问题。

由于它是最小化型线性规划，不是标准形式，因此，可以利用线性规划对偶定理（证明可以百度等) 将其转化为一个最大化型线性规划：

$$
\begin{gathered}
\max \sum_{i=1}^{n} A_i y_i, \\
\max \sum_{i=1}^{n} m_{ij} y_i \leq C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\
y_i \geq 0.
\end{gathered}
$$

由于 $C_i$ 都是正整数，于是回到的线性规划就有基本解（零解）。于是写个最单纯的单纯形法就可以了。

具体地说，就是寻找其大于 0 的非基（自由）变量转化成优化的基变量，然后转轴，最后得到的就是最小花费。