1. 5种基本初等函数

对数函数、幂函数、指数函数、三角函数、反三角函数

2. 函数零点怎么求

① 解方程：通过解方程 f(x)=0 得到零点。

② 数形结合：转化成两个函数图像的交点问题。

③ 利用零点存在定理和函数单调性。

> **零点存在定理**：如果函数y= f(x) 在区间 [a,b] 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 f(a)·f(b) <0，那么，函数 y= f(x) 在区间 (a,b) 内有零点，即至少存在一个 c∈(a,b)， 使得 f(c)=0， 这个 c 也就是方程 f(x)= 0 的根。

④ 二分法

给定精确度ξ，用二分法求函数$f(x)$零点近似值的步骤如下:

1. 确定区间$[a,b]$,验证$f(a)\cdot f(b)<0$,给定精确度ξ。
2. 求区间(a,b)的中点c。
3. 计算$f(mid)$。
   (1) 若$f(mid)=0$,则mid就是函数的零点;
   (2) 若$f(a)\cdot f(mid)<0$,则令$b=mid$;
   (3) 若$f(mid)\cdot f(b)<0$,则令$a=mid$。
   (4) 判断是否达到精确度ξ:即若$|a-b|<\xi$,则得到零点近似值a(或b),否则重复(2)-(4).

> eg:已知 f(1.5) > 0 , f(2.4) < 0 且方程 f(x) = 0 在区间 [1.5,2.4] 有且只有一个根

⑤ 牛顿迭代法

> 牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程 f(x)=0 的单根附近具有平方收敛，而且该法还可以用来求方程的重根、复根，此时线性收敛，但是可通过一些方法变成超线性收敛。

$$x=x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

设r是$f(x)=0$的根，选取x_0作为r的初始近似值，过点$(x_0,f(x_0))$做曲线$y=f(x)$的切线L，$L:y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，则$L$与$x$轴交点的横坐标$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，称$x_1$为$r$的一次近似值。过点$(x_1,f(x_1))$做曲线$y=f(x)$的切线，并求该切线与$x$轴交点的横坐标$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，称$x_2$为$r$的二次近似值。重复以上过程，得$r$的近似值序列，其中$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，称为$r$的$n+1$次近似值，上式称为牛顿迭代公式。

3. 函数极限和数列极限

1) 函数极限

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式：

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

2) 数列极限

定义设为数列$\{a_n\}$，a为定数。若对任给的正数ε，总存在正整数N，使得当$n > N$时有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于a，定数a称为数列$\{a_n\}$的极限，并记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$不收敛，或称$\{a_n\}$发散。[1]

等价定义任给$\varepsilon > 0$，若在(a-ε,a+ε)之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个，则称数列$\{a_n\}$收敛于极限a。

4-1. 连续、可（偏）导、可微

1) 连续与可导

a) 连续：

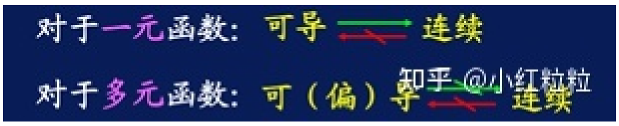
左极限等于右极限等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$。

其定义如下：设函数 y=f(x) 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数 f(x) 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称函数 y=f(x) 在点 x_0 处连续。

b) 可导：

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\triangle\ x}$ 存在，则 y = f(x) 在点 x_0 处可导。

函数在一点的导数是因变量在点 x_0 处的**变化率**，它反映了**因变量随自变量的变化而变化的快慢程度。**



c) 关系：

可导 必定 连续，(对于多元，可偏导不一定连续)

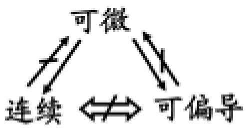
连续不一定可导 （如：f(x)=|x| ）

> 连续 描述的是 向左向右趋于这个点，得到的值就是这个值的点
>
> 可导 描述的是 在某个点附近的变化趋势。
>
> （可导极限的分母其实描述的就是连续）

2) 可导与可微

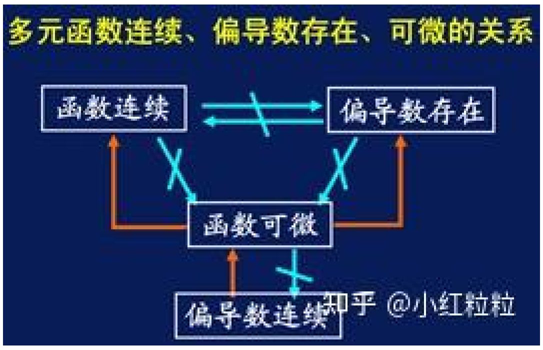
设函数$y = f(x)$在某区间$[x_0, x_0+\Delta x]$内有定义，如果函数的增量$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$,其中A是不依赖于Δx的常数，那么称函数$y = f(x)$ 在点x_0是可微的，而$A\Delta x$叫做函数$y = f(x)$在点x_0相对于自变量增量Δx的微分，记做dy。

- **一元函数中可导与可微等价。** $dy = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$
- 对于多元函数，$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$



> - 导数的几何意义——**切线的斜率**，描述函数**变化快慢**
> - 微分的几何意义——**切线纵坐标的增量**，描述函数**变化程度**

3) 多元函数连续、可（偏）导、可微的关系



4-2、间断点

- 第一类间断点：左右极限都存在
  - 左右极限相等：**可去间断点**
  - 左右极限不等：**跳跃间断点**
- 第二类间断点：左右极限至少有一个不存在
  - **无穷间断点**
    - y=tan(x)在pi/2处无定义
  - **振荡间断点**
    - y=sin(1/x)在x趋于0时，不断振荡

4-3、几类特殊的求导

（1）反函数求导P87

（2）隐函数求导P101

（3）参数方程确定的函数求导P104

5. 什么是解析？什么是奇点？

1) 解析

如果一个函数 f(x) 不仅**在某点 x_0 处可导，而且在 x_0 点的某个邻域内的任一点都可导**，则称函数 f(x) 在 x_0 点解析。

如果函数 f(x) 在**区域 D 内任一点解析，则称函数 f(x) 在区域 D 内解析**，用 X 来表示 Y 的某种函数关系，称为该函数的解析式。

- 函数的解析

> 注意：

1. 函数 f(x) 在区域 D 内解析与在区域 D 内可导是**等价**的。
2. 函数 f(x) 在某一点处解析与在该点处可导是**不等价**的。函数在某点解析意味着函数在该点及其某个邻域内处处可导；而函数在某点可导，在该点邻域内函数可能解析，也可能不解析。
3. 解析函数的导数仍然是解析的。

2) 奇点

未定义的点。 如函数 $f(x) = 1/x$ 在 $x = 0$ 的点，是一个奇点。

6、微分中值定理

1) 罗尔中值定理(零点定理)

若函数f(x)在闭区间[a,b]上连续，在开区间(a,b)可导，且f(a) = f(b)，

则存在x0∈(a,b)，使得 f'(x0) = 0

2) 拉格朗日中值定理

若函数f(x)在闭区间[a,b]连续，开区间(a,b)可导，则(a,b)内至少存在一点 ξ ，

使得：$f(\xi)' = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

是罗尔中值定理的更一般的形式，同时也是柯西中值定理的特殊情形。

3) 柯西中值定理

若f(x)及F(x)满足： 在闭区间[a,b]连续，在开区间(a,b)可导，在开区间(a,b)内F'(x)≠0，

则(a,b)内至少存在一点 ξ ，使：$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

4) 三个微分中值定理的关系

拉格朗日中值定理是罗尔中值定理的推广、柯西中值定理是拉格尔朗日中值定理的推广。

- 柯西中值定理可以看做是参数方程形式下的拉格朗日中值定理的表达形式。这里 $x = f(x), y = F(y)$

7、洛必达法则

对于 分子分母都为0或者都为无穷大 的未定式，

通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的方法称为洛必达法则

7、泰勒公式

1) 概述

- 泰勒公式的初衷是**用多项式来近似表示函数在某点周围的情况。**

> 构造多项式，使**函数的0到n阶导数** 都和 **多项式的0到n阶导数** 相等。

- **泰勒公式，是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式。** 如果函数满足一定的条件，泰勒公式可以用函数在某一点的**各阶导数值做系数**构建一个**多项式**来**近似**表达这个函数。

2）泰勒中值定理1：

如果函数$f(x)$在x_0处有n阶导数，那么存在x_0的一个邻域，对于该邻域内的任一x，有

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (1\text{-}1)$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n) \quad (1\text{-}2)$$

公式（1-1）称为函数$f(x)$在x_0处（或按$(x-x_0)$的幂展开）的带有佩亚诺余项的n阶泰勒公式, $R_n(x)$的表达式（1-2）称为佩亚诺余项.

3）泰勒中值定理2：

如果函数$f(x)$在x_0的某个邻域$U(x_0)$内有（$n+1$）阶导数，那么对任一$x\in U(x_0)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (2\text{-}1)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (2\text{-}2)$$
$$(\xi\text{介于}x,x_0\text{之间})$$

公式（2-1）称为函数$f(x)$在x_0处（或按$(x-x_0)$的幂展开）的带有拉格朗日余项的n阶泰勒公式,$R_n(x)$的表达式（2-2)称为拉格朗日余项.

- 当$n=0$时，公式（2-1）变为拉格朗日中值定理公式：

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(\xi)(x-x_0)$$
$$(\xi\text{介于}x,x_0\text{之间})$$

4) 麦克劳林公式

麦克劳林公式是泰勒公式（在$x_0=0$,记$\xi=\theta x\,(0<\theta<1)$ ）的一种特殊形式。

在不需要余项的精确表达式时，n阶泰勒公式也可写成

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\;(0<\theta<1)$$

由此得近似公式 $f(x)\sim f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

5) 几何意义

泰勒公式的几何意义是**利用多项式函数来逼近原函数**，由于多项式函数可以任意次求导，易于计算，且便于求解极值或者判断函数的性质，因此可以通过泰勒公式获取函数的信息，同时，对于这种近似，必须提供误差分析，来提供近似的可靠性。

8、函数的凹凸性

1) 单调性

定理：

设函数$y=f(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)可导，

① 如果在(a,b)内$f'(x)\geq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数$y=f(x)$在[a,b]上单调递增。

② 如果在(a,b)内$f'(x)\leq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数$y=f(x)$在[a,b]上单调递减。

驻点：

- 一阶导数$f'(x)=0$的点。
- 曲线在经历 驻点后（$f(x)$变号），单调性发生改变。
- 如果f(x)在定义区间上连续，除去优先个导数不存在的点外，导数存在且在区间内只有有限个驻点，那么只要用驻点及导数不存在的点来划分函数f(x)的定义区间，就能保证$f'(x)$在各个部分区间内保持固定符号（单调）。

2）凹凸性

定义：

设$f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点x_1,x_2，恒有：

① $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则$f(x)$ 在区间I上的图形上**凹**的。

② $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则$f(x)$ 在区间I上的图形上**凸**的。

定理：

设$f(x)$在区间[a,b]上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么：

① 若在(a,b)内，$f''(x)>0$，则$f(x)$在[a,b]上的图像是**凹**的。

② 若在(a,b)内，$f''(x)<0$，则$f(x)$在[a,b]上的图像是**凸**的。

拐点：

- 二阶导$f''(x)=0$的点
- 曲线在经历 拐点后（$f'(x)$变号），凹凸性发生改变。

9、积分

（1）原函数存在定理

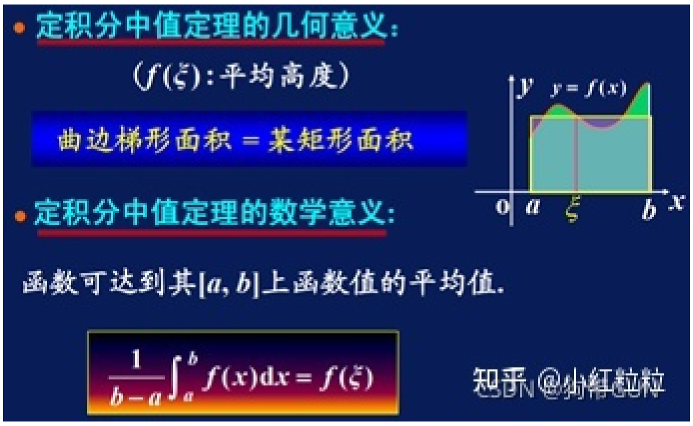
连续函数一定有原函数

（2）可积充分条件

- 设$f(x)$在区间[a,b]上连续，则$f(x)$在[a,b]上可积
- 设$f(x)$在区间[a,b]上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在[a,b]上可积

（3） （定）积分中值定理

若$f(x)\in[a,b]$，则至少存在一点ξ，使$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

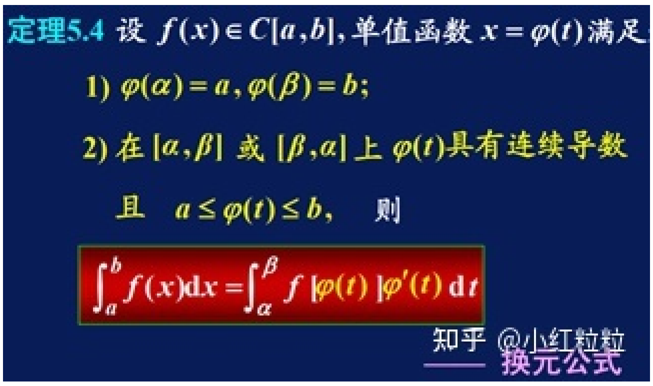


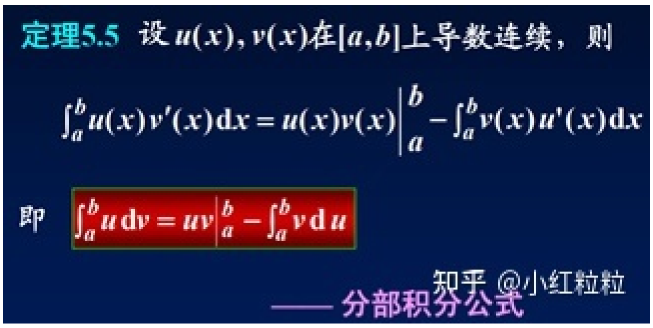
（4）微积分基本定理（牛顿——莱布尼茨公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间[a,b]上的一个原函数，那么$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

> 表明：一个函数在区间[a,b]上的定积分等于，它的任意一个原函数在区间[a,b]上的增量，
>
> 故求定积分问题转化为求原函数问题

5) 定积分如何求（换元积分法、分部积分法）





6) 不定积分的几何意义

$f(x)$原函数的图形 $y=F(x)$: $f(x)$的积分曲线.

$y=F(x)+C$的图形: $f(x)$的积分曲线族.

7) 定积分的几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$ （曲边梯形面积）

$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$ （曲边梯形面积的负值）

8) 二重积分的几何意义

若 $f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$, 则

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$: 以曲面 $z=f(x,y)$为顶,以D为底的曲顶柱体的体积 .

一般地, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$: 曲顶柱体体积的代数和 .

10、向量的内积、外积、混合积

1）内积（数量积/点乘/点积）

对于向量a和向量b：

$$a=[a_1,a_2,\ldots a_n]$$
$$b=[b_1,b_2,\ldots b_n]$$

1、a和b的内积公式为：

$$a\bullet b=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

要求一维向量a和向量b的行列数相同。

2、内积的几何意义

几何意义：b向量在a向量方向上的**投影**。

内积除以两向量的模，可求出两向量的夹角

2）外积（向量积/叉积）

对于向量a和向量b：

$$a=(x_1,y_1,z_1)$$
$$b=(x_2,y_2,z_2)$$

1、a和b的外积公式为：

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)i-(x_1z_2-x_2z_1)j+(x_1y_2-x_2y_1)k$$

其中：

$$i=(1,0,0)\qquad j=(0,1,0)\qquad k=(0,0,1)$$

根据i、j、k间关系，有：

$$a\times b=(y_1z_2-y_2z_1,\ -(x_1z_2-x_2z_1),\ x_1y_2-x_2y_1)$$

2、叉乘几何意义

在三维几何中，向量a和向量b的叉乘结果是一个向量，更为熟知的叫法是**法向量**，该向量垂直于a和b向量构成的平面（右手定则）。

模：以两向量为邻边的平行四边形的面积

方向：（根据右手定则确定的）垂直于两向量构成平面的法向量

[保研面试/考研复试高等数学问题整理 - 知乎 (zhihu.com)]

[(7条消息) 保研数学知识复习总结*zhangjc_1999*的博客*-CSDN*博客保研数学复习]