专业课问答版复习笔记

数字信号处理

知乎/小红书/CSDN@小吴学长 er

小吴学长er

扫一扫上面的二维码图案，加我为朋友

微信号：xwxzer

数字信号处理

标黄题目为建议重点记忆的面试高频问题

1. 冲激函数特点

高度无穷大，宽度无穷小，面积为 1 的对称窄脉冲。

2. 信号、信息与消息的差别?

- 人们常常把来自外界的各种报道统称为消息。
- 通常把消息中有意义的内容称为信息
- 信号是信息的载体。通过信号传递信息。

3. 模拟信号和数字信号，离散信号和连续信号分别是什么?

- 模拟信号是在时间和幅度上均具有连续性
- 数字信号是在时间和数值上均具有离散性
- 离散信号时间离散，幅度连续
- 连续信号时间连续，幅度可以离散可以连续

4. 傅里叶变换与傅里叶级数的联系与区别?（2022 年学长面浙大真题）

联系：

- 傅里叶变换是从傅里叶级数推演而来的。
- 傅里叶级数是以三角函数或者是指数函数为基对周期信号的无穷级数展开，如果把周期函数的周期取作无穷大，频率取作无穷小，对傅里叶级数取极限即得到傅里叶变换。

区别：

- 傅里叶级数是周期变换，傅里叶变换是一种非周期变换。

- 傅里叶级数是周期信号的另一种时域的表达方式，也就是正交级数，它不同频率的波形的叠加，而傅里叶变换就是完全的频域分析。

5. 信号

- 确定信号（重点讨论）与随机信号
- 连续（时间）信号与离散（时间）信号
- 周期信号与非周期信号：周期信号之和不一定是周期信号
- 实信号和复信号：桥梁——欧拉公式
- 能量（有限）信号和功率（有限）信号

6. LSI 系统中卷积和运算的结合律和分配律的物理意义？

- 结合律：级联后的单位抽样响应等于两个系统的各自的单位抽样响应的卷积。
- 分配律：并联系统的单位抽样响应等于各自的单位抽样响应之和。

7. 系统的分类？

- 系统即将一种输入信号转换为输出信号的运算。
- 线性与非线性；时变与时不变；因果与非因果；稳定与不稳定

线性性质包括两方面：齐次性和可加性。

若系统的激励$f(\cdot)$增大a倍时，其响应$y(\cdot)$也增大a倍，即

$$T[af(\cdot)] = a\,T[f(\cdot)]$$

则称该系统是齐次的。

若系统对于激励$f_1(\cdot)$与$f_2(\cdot)$之和的响应等于各个激励所引起的响应之和，即

$T[f_1(\cdot)+f_2(\cdot)] = T[f_1(\cdot)]+T[f_2(\cdot)]$ 则称该系统是可加的。

若系统既是齐次的又是可加的，则称该系统是线性的，即 $T[a f_1(\cdot) + b f_2(\cdot)] = a\,T[f_1(\cdot)] + b\,T[f_2(\cdot)]$

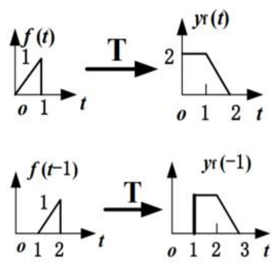
若系统满足输入延迟多少时间，其零状态响应也延迟多少时间，即若

$$T[\{0\},\ f(t)] = y_f(t)$$

则有

$$T[\{0\},\ f(t-t_d)] = y_f(t-t_d)$$

系统的这种性质称为时不变性（或移位不变性）。



- 因果性

零状态响应不会出现在激励之前的系统，称为因果系统。

即对因果系统，当$t < t_0$，$f(t) = 0$时，有$t < t_0$，$y_f(t) = 0$。

- 稳定性

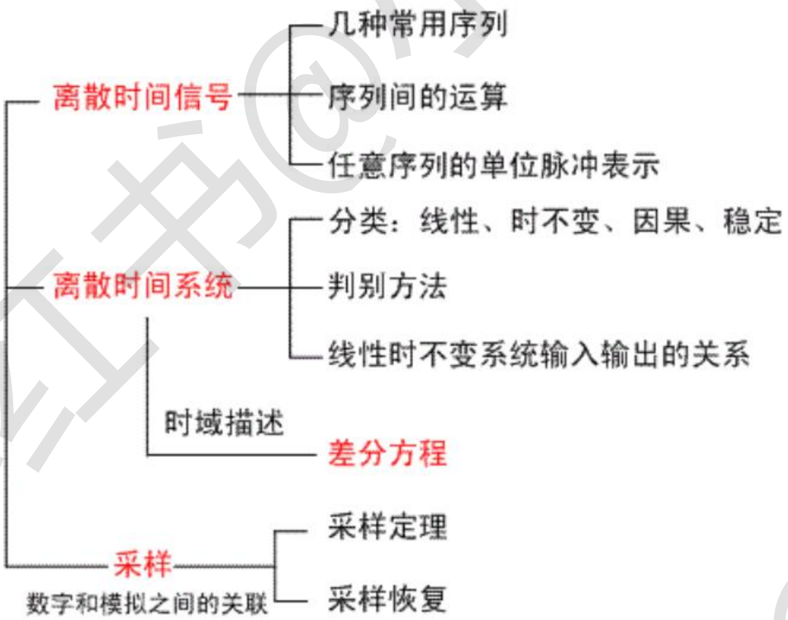
一个系统，若对有界的激励f(.)所产生的零状态响应$y_f(.)$也是有界时，则称该系统为有界输入有界输出稳定，简称稳定。即 若 $|f(.)| < \infty$，其 $|y_f(.)| < \infty$ 则称系统是稳定的。

8. 离散傅里叶变换 DFT 有什么意义？

- 离散傅里叶变换实现了信号首次在频域表示的离散化，使得频域也能够用计算机进行处理。
- 并且这种 DFT 变换可以有多种实用的快速算法。使信号处理在时、频域的处理和转换均可离散化和快速化

9. 数字信号处理这门课讲了什么？（2022 年学长面山大真题，并且是英语提问）

- 数字信号处理是利用计算机或专用处理设备，以数字形式对信号进行采集、变换、滤波、估值、增强、压缩、识别等处理，以得到符合人们需要的信号形式。



10. DFT\FFT\DTFT\FT\FS 的区别、联系？（2022 学长面中科大先研院真题）

类型	时间函数	频率函数	关　系
傅立叶变换	连续 非周期	连续 非周期	
傅立叶级数	连续 周期(T_0)	离散(Ω_0) 非周期	$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$
序列傅立叶变换	离散(T_s) 非周期	连续 周期(Ω_s)	$\Omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$
离散傅立叶变换	离散(T_s) 周期(T_0)	离散(Ω_0) 周期(Ω_s)	$\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\quad\Omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$

时间函数 ⟷ 频率函数

连续周期时间 、离散非周期频率—傅里叶级数(FS)

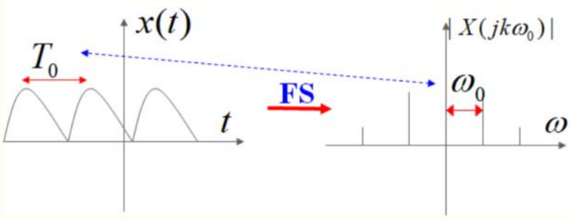
连续非周期时间、连续非周期频率—傅里叶变换(FT)

离散非周期时间、连续周期频率 —序列的傅里叶变换(DTFT)

离散周期时间 、离散周期频率 —离散傅里叶变换(DFT)

离散周期时间 、离散周期频率 —离散傅里叶级数(DFS)

FS（Fourier Series）傅里叶级数展开，它用于分析连续周期信号，时域上任意连续的周期信号可以分解为无限多个正弦信号之和，在频域上就表示为离散非周期的信号，即时域连续周期，对应频域离散非周期的特点



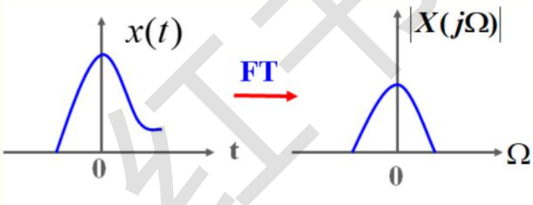
$$X(jk\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

域	连续性	周期性
时域	连续	周期
频域	离散	非周期

- 时域连续函数造成频域是非周期的谱，
- 频域的离散对应时域是周期函数。
- 时域周期为T_0，频域谱线间隔为$2\omega_0/T_0$

FT（Fourier Transform）是傅里叶变换，它主要用于分析连续非周期信号，由于信号是非周期的，它必包含了各种频率的信号，所以具有时域连续非周期，对应频域连续非周期的特点



$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

域	连续性	周期性
时域	连续	非周期
频域	连续	非周期

- 时域连续函数造成频域是非周期的谱，
- 而时域的非周期造成频域是连续的谱密度函数。

DTFT（Discrete Time Fourier Transform）是离散时间傅里叶变换，它用于离散非周期序列分析，根据连续傅里叶变换要求连续信号在时间上必须可积这一充分必要条件，那么对于离散时间傅里叶变换，用于它之上的离散序列也必须满足在时间轴上级数求和收敛的条件；由于信号是非周期序列，它必包含了各种频率的信号，所以 DTFT 对离散非周期信号变换后的频谱为连续的，即有时域离散非周期，对应频域连续周期的特点。

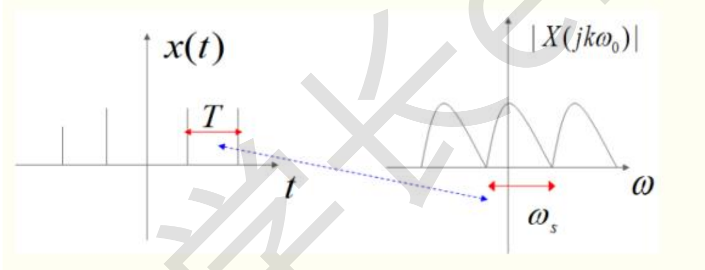
- 对离散序列$x(n)$，其傅立叶变换为：

$$\boxed{\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \end{aligned}}$$

- 若$x(n)$是信号$x(t)$的采样序列，采样间隔为T,则有：

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\omega T}$$

$$x(n) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} X(e^{j\omega T})e^{jn\omega T}d\omega$$



DFT（Discrete Fourier Transform）离散傅里叶变换，用于离散周期信号分析。由于 DFT 借用了 DFS，这样就假设了序列的周期无限性，但在处理时又对区间作出限定（主值区间），以符合有限长的特点，这就使 DFT 带有了周期性。另外，DFT 只是对一周期内的有限个离散频率的表示，所以它在频率上是离散的，就相当于 DTFT 变换成连续频谱后再对其采样，此时采样频率等于序列延拓后的周期 N，即主值序列的个数。

DFS 是在时域上先采样后做 FS 变换，DFT 是先在时域上采样，再 FT 变换，即 DTFT 变换，然后时域截断，最后再将 DTFT 变换后的连续频域上采样，即 DFT 对连续时间信号有三个过程：时域采样>时域截断>频域采样

11. DTFT 与 DFT 关系？（2022 年哈工深真题）

- 一个 N 点离散时间序列的傅里叶变换（DTFT）所的频谱是以（2*pi）为周期进行延拓的连续函数，由采样定理我们知道，时域进行采样，则频域周期延拓；同理，如果在频域进行采样，则时域也会周期延拓。
- 离散傅里叶变换（DFT）就是基于这个理论，在频域进行采样，一个周期内采 N 个点（与序列点数相同），从而将信号的频谱离散化，得到一个的重要的对应关系：一个 N 点离散时间信号可以用频域内一个 N 点序列来唯一确定，这就是 DFT 表达式所揭示的内容

12. 序列傅里叶变换存在的充分条件？

序列傅里叶变换存在的充分条件有两个，一个是序列绝对可和，另一个是序列能量有限，也即序列平方可和。

13. 终值定理的使用条件是什么？

终值定理只适用于因果序列，且必须 X(Z)的极点在单位圆内，最多在 z=1 处只能有一阶极点。

14. 逆系统的定义?

- z 变换域上表示为两个系统的系统函数相乘等于 1
- 时域上表示为两个系统的单位抽样响应的卷积为单位抽样序列。·

15. 序列 z 变换与连续信号的拉普拉斯变换，傅里叶变换的关系

- 抽样序列的 z 变换就是理想抽样信号的拉普拉斯变换
- 抽样序列在单位圆上的 z 变换就是理想抽样信号的傅里叶变换

16. 如何求解 z 反变换?

留数法，部分分式法，长除法

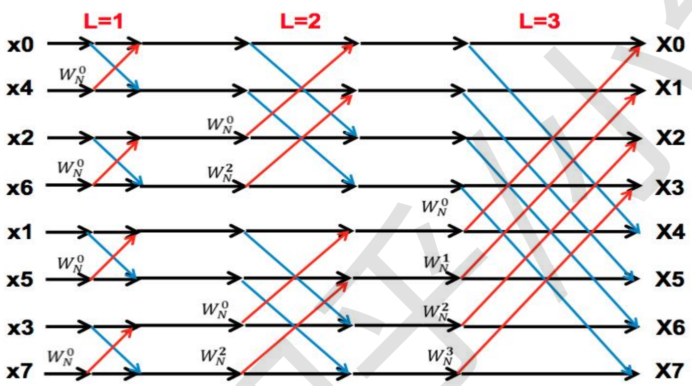
17. 如何使用留数法，部分分式展开法和长除法

- 根据留数定理，序列等于 X(Z)z 的 n-1 次方在围线 c 内极点的留数之和，或者围线外的极点的留数之和再取负。其中围线是 X(Z)的收敛域绕原点的一条逆时针旋转的闭合曲线。根据极点的不同要划分成不同的区域来求解。
- 部分分式展开法是将原来的 X（Z）展开成几个分式，并且使分式各项的形式能比较容易从已知的 z 变换中反变换出来，反变换时需注意收敛域。

18. 离散傅里叶变换?

有限长序列的离散频域表示。是对周期序列得到的周期的离散频谱取主值区间

19. FFT 快速傅里叶变换? （2021 川大真题）



$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{\substack{n=0\\ n\text{为偶数}}}^{N-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{\substack{n=0\\ n\text{ 为奇数}}}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)(W_N^2)^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)(W_N^2)^{rk}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_{N/2}^{rk}$$

$$=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$$

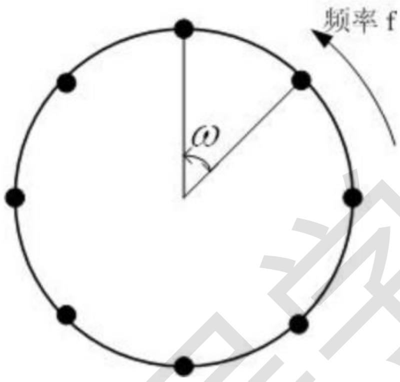
- N 点 DFT 共需要 N2 次复数乘法和 N(N-1)次复数加法，当 N 很大时，计算量很大
- 利用 FFT 算法之后，任何一个 N 为 2 的整数幂（即 N= 2M）的 DFT，都可以通过 M 次分解，最后成为 2 点的 DFT 来计算。M 次分解构成了从 x(n)到 X(k)的 M 级迭代计算，每级由 N/2 个蝶形运算组成。完成一个蝶形计算需一次乘法和两次复数加法。因此，完成 N 点的时间抽选 FFT 计算的总运算量为：（面试时红字一定要答出来）
- 复数乘法次数：M*N/2=log2N*N/2
- 复数加法次数：M*2*N/2= log2N*N

20. 如何利用 DFT 进行线性卷积?

首先对两序列补零，补至序列长度大于或等于两序列长度之和再减一，分别对补零后的序列作 DFT 变换得到两个序列的频谱 X1(M)和 X2(M)，再将两个序列相乘得到一个新的频谱 Y(M)，再对 Y(M)做反傅里叶变换即可得到原序列线性卷积后的序列。

21. 模拟频率、数字频率、模拟角频率定义？区别？联系？

- 在没有特别指明的情况下，指的是模拟频率，其单位为赫兹(Hz)，或者为 1/秒(1/s)，数学符号用 f 来表示。以 Hz 表示的模拟频率表示的是每秒时间内信号变化的周期数。如果用单位圆表示的话，如图 1 所示，旋转一圈表示信号变化一个周期，则模拟频率则指的是每秒时间内信号旋转的圈数
- 模拟角频率，数学符号常用Ω来表示，其单位为弧度/秒(rad/s)。从单位圆的角度看，模拟频率是每秒时间内信号旋转的圈数，每一圈的角度变化数为 2pi。很显然，旋转 f 圈对应着 2pi*f 的弧度。
- 数字信号大多是从模拟信号采样而得，采样频率通常用 fs 表示。数字频率更准确的叫法应该是归一化数字角频率，其单位为弧度(rad)，数学符号常用ω表示，其物理意义是相邻两个采样点之间所变化的弧度数



22. 什么是全通滤波器?

全通滤波器是幅度响应为常熟，相位响应为单调减且非正的函数。全通滤波器的极点一定是成对出现的。零极点是共轭倒数对称。

23. 什么是最小相位系统?

系统函数的零点和极点都在 z 平面的单位圆内的因果系统。在具有相同的幅频特性的同阶系统中，最小相位系统具最大的相位和最小的延时。

24. 稳定系统?

- 定义：当输入序列是有界的，则输出序列也有界，称系统是稳定的。
- 通过零极点的分布来判断：（对于因果系统）
- 稳定：H(z)的全部极点都落在单位圆内，即收敛域应该包含单位圆在内
- 临界稳定：一阶极点位于单位圆上（若有其他阶的，都在单位圆内），圆外无极点
- 不稳定：有极点落在单位圆外，或者单位圆上有重极点

25. 有限长序列的 m 点圆周移位对频率响应的影响?

只引入一个和频率成正比的线性相移，对幅度没有影响。（时域时移，频域相移）

26. L 点圆周卷积的步骤?

先将两个序列补零至 L 点序列，然后作 L 点周期延拓，再对周期延拓后的两个序列的周期卷积和得到 y(n),取 y（n）的主值区间。

27. 圆周卷积与线性卷积和的关系?

- 由线性卷积求 L 点圆周卷积和:两序列的线性卷积和以 L 为周期的周期延拓后混叠相加序列的主值序列即为两序列的 L 点圆周卷积和
- 由圆周卷积和求线性卷积和：当 L>N1+N2-1 时，两序列的 L 点圆周卷积和就能代表两个序列的线性卷积和。

28. 利用 DFT 进行谱分析会产生哪些误差? （2020 北邮真题）

- 混叠现象：由于 DFT 是针对离散时间信号进行谱分析的，因此要先对连续信号进行采样，采样频率若不满足奈奎斯特采样定理，发生混叠。
- 栅栏效应：由于 N 点 DFT 是在数字频率[0,2π]上对信号的频谱进行 N 点等间隔采样，而采样点之间的频谱函数是不知道的，像是通过 N 个栅栏缝隙中去观察频谱函数值一样。
- 截断效应（吉布斯效应）：实际中遇到的信号可能是无限长的，用 DFT 对其进行谱分析时，需要用矩形窗函数(n)截断成有限长序列
- 由于时域和矩形窗函数乘积，对应于频域和 Sa 函数卷积，因此截断后序列的频谱与原序列的频谱必然有区别，主要表现在以下两个方面：
- 原来的离散谱线会向附近展宽，形成频谱泄露（信号频谱中各谱线之间相互影响 ,使测量结果偏离实际值 ,同时在谱线两侧其他频率点上出现一些幅值较小的假谱）；
- 另一方面是主谱线两侧形成许多旁瓣，引起不同频率分量间的干扰，形成谱间干扰

29. 有什么改善方法?

- 增大 DFT 的采样点数 N；
- 时域序列末尾补 0，时域序列末尾补 0 至 L 点 DFT 后，计算出的频谱函数值实际上是原信号频谱在[0 , 2 π]上 L 点等间隔采样，从而增加了对真实频谱采样的点数，并改变了采样点的位置，这将会显示出原信号频谱更多的细节，故可以改善栅栏效应（像是增多了栅栏的缝隙）
- 由于存在截断效应，增加 N)的主瓣变窄（相应地减小过渡带带宽），提高频谱分辨率

- 旁瓣的个数和幅度不会减小（不改变肩峰值，最大肩峰值总是约为 8.95%，只能使起伏震荡变密），因此为了减小谱间干扰（改善截断效应），只能换窗。

30. 比较 IIR 和 FIR 滤波器在性能和结构上各有什么优缺点？（2021 华科预推免真题）

- FIR 滤波器是单位抽样响应为有限长序列的系统，FIR 可实现线性相位并保证系统的稳定性
- IIR 滤波器是单位抽样响应为无限长序列的系统。

30. FIR 滤波器的设计方法？

FIR 滤波器有两种设计方法。

- 一种是时域逼近的思想。根据给定的系统函数，利用反离散傅里叶变换来求解其单位脉冲响应。求解出来的单位脉冲响应一般是非因果的无限长序列，把他加窗截短，使之成为因果的有限长序列。
- 另一种则是频域逼近的思想，使所设计的 M 阶 FIR 滤波器的频率响应再 M+1 个取样点上和所给定的数字滤波器的频率响应相等。

31. IIR 滤波器的设计步骤？

- 1.将数字滤波器的设计指标转换成模拟滤波器的设计指标
- 2.设计出满足指标的模拟滤波器。首先进行频率转换，设计出原形低通滤波器，通过复频域的变换得出所需的模拟滤波器的系统函数
- 3.利用双线性变换法或者脉冲响应不变法将模拟滤波器转换成数字滤波器。

32. 双线性变换法和脉冲响应不变法的原理和优缺点？（2022 中山深圳电通院真题）

- 双线性变换法是将非带限的模拟滤波器通过非线性映射为最高角频率为π/T 的带限模拟滤波器。其优点是不会产生频谱混叠，缺点是由于非线性映射会导致幅度失真。
- 脉冲响应不变法是利用时域逼近的思想，利用数字滤波器的单位抽样响应去模仿模拟滤波器的单位抽样响应。其优点是设计出来的数字滤波器具有线性相位，不会产生失真。缺点是若模拟

滤波器的频率响应不是带限信号，则设计出来的数字滤波器的频率响应会有混叠，只能用于设计带限的模拟滤波器。

34. 什么是线性相位滤波器？线性相位滤波器有什么应用？其优点是什么？

- 线性相位滤波器是指移动相位和频率成正比的滤波器；
- 应用于雷达的脉冲信号传输和功放的预失真技术
- 线性相位滤波器保证了通过该滤波器的各频率成分的延迟一致，从而能保证信号不失真。

35. 为什么要进行多速率信号处理？

一是因为模数变换的采样速率和数模变换的重建速率要一样；二是因为当抽样后离散信号中有余量的时候，要降低采样速率。

36. 为什么要引入信号的时频分析？（2021 复旦信科真题）

由于频域分析当中没有时间信息，无法区分每个频率的加入时间段，不能区分不同时间段里频率分量的分布。频域分析不适合非平稳信号，无法区分在哪个窄区间上发生的突变。故要引入信号的时频分析。

37. 什么是信号的短时傅里叶变换？他的优缺点是什么？

对信号分段进行傅里叶变换，滑动窗的位置由 t 来决定，积分区间缩成窗的宽度，这样就可以知道是哪个窗发生突变。

- 优点：频率的定位很好，通过对信号的频率分辨率很好，可以清晰的得到信号所包含的频率成分，也就是频谱。
- 缺点：因为频谱是时间从负无穷到正无穷的叠加，所以，知道某一频率，不能判断，该频率的时间定位。不能判断某一时间段的频率成分。