通信原理

第3章 随机过程

Random Process

本章内容

- 随机过程的基本概念
- 平稳、高斯、窄带过程的统计特性
- 正弦波加窄带高斯过程的统计特性
- 随机过程通过线性系统
- 高斯白噪声和带限白噪声

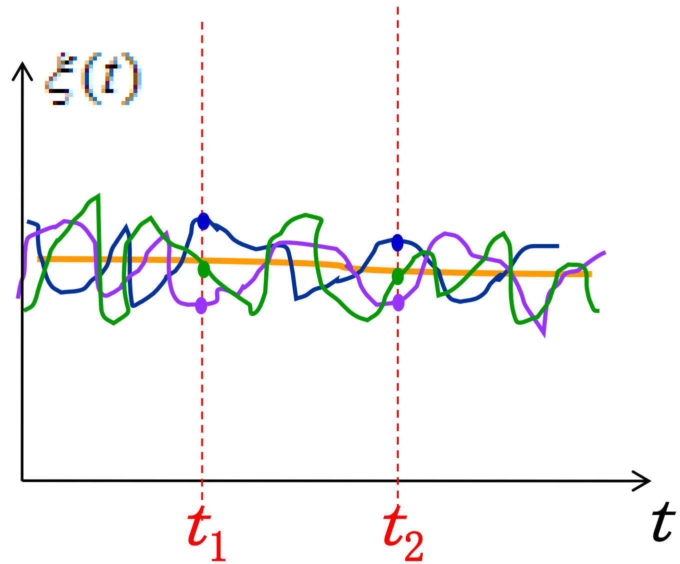
3.1 随机过程de基本概念

--- 何调随机过程？

- **定义：**

① 所有样本函数 $\xi_i(t)$ 的集合

② 随机变量 $\xi(t_i)$ 的集合



- **属性：**

兼有 $\left\{ \begin{array}{l} \text{随机变量} \\ \text{时间函数} \end{array} \right.$ 的特点

- **特性描述：**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{分布函数} \\ \text{数字特征} \end{array} \right.$

3.1.1 随机过程的分布函数

Cumulative Distribution Function, CDF

- **一维分布函数** ---描述孤立时刻的统计特性

$$F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \le x_1]$$

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1)$$ 一维概率密度函数

Probability density function, PDF

- **二维分布函数**

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\left\{ \xi(t_1) \le x_1, \ \xi(t_2) \le x_2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

二维概率密度函数

3.1.1 随机过程的分布函数

- n 维分布函数

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P\left\{\ \xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2,\cdots,\xi(t_n)\le x_n\right\}$$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdots\cdots\partial x_n}$$

n 维概率密度函数

维数 n 越大，对随机过程统计特性的描述就越充分！

3.1.2 随机过程的数字特征

---描述随机过程的主要特性

- **均值(Mean value)** ---摆动中心
  [数学期望]

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx = a(t) \quad \text{--- } t\text{的确定函数}$$

- **方差(Variance)** ---偏离程度

$$D[\xi(t)] = E\left\{ [\xi(t) - a(t)]^2 \right\}$$

$$= \underbrace{E[\xi^2(t)]}_{\text{均方值}} - \underbrace{[a(t)]^2}_{\text{均值平方}} = \sigma^2(t)$$

当 $a(t)=0$ 时：

$$\boxed{\sigma^2(t) = E[\xi^2(t)]}$$

单选题 1分

设置

设相位随机的正弦波为 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$

其中，**A**和 ω_c均为常数；**θ**是在**(0,2π)**内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$的均值。

A 0

B 1

C 不会求

D 会求，但未算出来

提交

3.1.2 随机过程的数字特征

- **自相关函数 (Autocorrelation function)** ---同一过程的关联程度

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\,\xi(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

令$\tau=t_2-t_1$，则有：

$$R(t_1,t_2)=R(t_1,t_1+\tau)$$

- **互相关函数** ---两个过程的关联程度

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

单选题 1分

设置

设相位随机的正弦波为 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$
其中，**A**和 ω_c均为常数；**θ是在(0,2π)**内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$的自相关函数 $R_\xi(t_1,t_2)$ 。

A 0

B $\dfrac{A^2}{2}\cos\omega_c(t_2 - t_1)$

C $A^2\cos\omega_c(t_2 - t_1)$

D 不会

提交

填空题 2分

设置

设随机过程$\xi(t)$可表示为$\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$，式中$\theta$是一个离散随机变量，且$P(\theta=0)=0.5$，$P(\theta=0.5\pi)=0.5$，试求$E_{\xi}[\xi(1)]=$ [填空1] ，$R_{\xi}(0,1)=$ [填空2]。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

3.2 平稳随机过程(stationary random process)

3.2.1 定义

- **狭义平稳/严平稳(Strictly-sense random process)**
  - 随机过程的统计特性与时间起点无关。

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1+\Delta,t_2+\Delta,\ldots,t_n+\Delta)$$

  - 一维分布与时间t 无关： $f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$
  - 二维分布只与间隔τ有关： $f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$

注意： 狭义平稳 $\underset{\text{未必}}{\overset{\text{必}}{\rightleftarrows}}$ 广义平稳

- **广义平稳/宽平稳(Wide-sense station, WSS)**
  - 均值与时间 t 无关： $a(t)=a$
  - 相关函数仅与 τ有关： $R(t_1,t_1+\tau)=R(\tau)$

3.2.2 各态历经性（遍历性）

设$x(t)$ 是平稳过程的任一个实现，它的时间平均值为：

$$\overline{a}=\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt$$

$$\overline{R(\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt$$

遍历

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \overline{a} \\ R(\tau) &= \overline{R(\tau)} \end{aligned}}$$

意义：

统计平均值=时间平均值

替代

使计算大为简化

注意：

$$\text{遍历过程}\ \underset{\text{未必}}{\overset{\text{必是}}{\rightleftarrows}}\ \text{平稳过程}$$

含义： 任一样本经历了平稳过程的所有可能状态。

例3-1

3.2.3 平稳过程的自相关函数

■ **重要性质：**

$$\boxed{R(\tau)=E[(\xi(t)\xi(t+\tau)]}$$

（1）	$R(0)=E[\xi^2(t)]=S$	---平均功率
（2）	$R(\infty)=E^2[\xi(t)]=a^2$	---直流功率
（3）	$R(0)-R(\infty)=\sigma^2$	---交流功率（方差）
（4）	$R(\tau)=R(-\tau)$	---偶函数
（5）	$\lvert R(\tau)\rvert\le R(0)$	---上　界

$$R(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=E[\xi(t)]E[\xi(t+\tau)]=E^2[\xi(t)]$$

$$E\{[\xi(t)\pm\xi(t+\tau)]^2\}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad 2R(0)\pm 2R(\tau)\ge 0$$

3.2.4 平稳过程的功率谱密度(PSD)

随机过程的频谱特性—功率谱密度

--Power spectral density

- **样本的功率谱：**

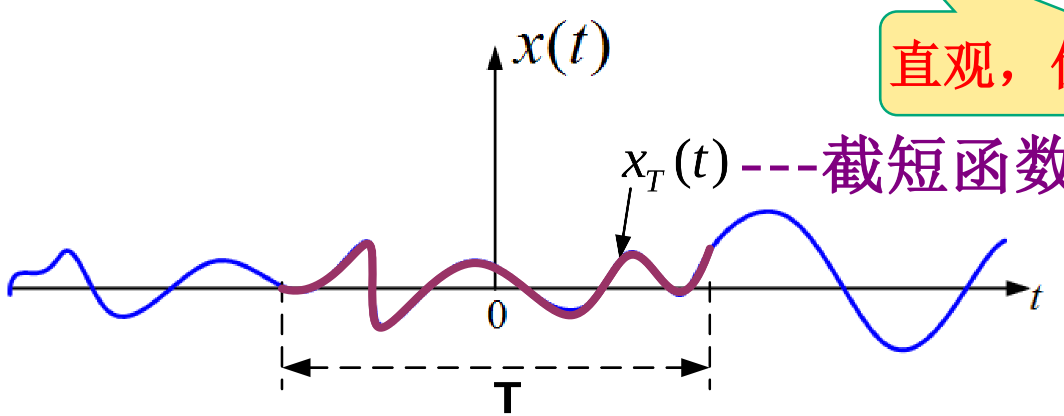
$$P_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

- **过程的功率谱**

统计平均

$$P_\xi(f) = E[P_x(f)] = \lim_{T\to\infty} \frac{E|X_T(f)|^2}{T}$$

直观，但难求，？



3.2.4 平稳过程的功率谱密度(PSD)

平稳过程的功率谱密度与自相关函数是一对傅里叶变换：

维纳-辛钦定理

$$R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

$$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$P_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

当 $\tau = 0$ 时，有

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(f) df = E\left[\xi^2(t)\right]$$

PSD 性质：

- 遍历过程任一样本的PSD = 过程的PSD；
- 非负性：$P_\xi(\omega) \geq 0$
- 偶函数：$P_\xi(-\omega) = P_\xi(\omega)$

3.2.4 平稳过程的功率谱密度(PSD)

Q&A

- 自相关函数的意义？作用？
- 功率谱密度的意义？作用？

例

设相位随机的正弦波为 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$

其中，**A**和 ω_c均为常数；**θ**是在**(0,2π)**内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$是否具有各态历经性。

解题思路：

第**1**步：判断$\xi(t)$ 是否平稳，即求其统计平均值

若均值为常数，且自相关函数只与时间间隔τ 有关，则$\xi(t)$ 是广义平稳的。

第**2**步：求$\xi(t)$ 的时间平均值

第**3**步：比较 统计平均值 和 时间平均值

若两者相等: $a = \overline{a}$

$R(\tau) = \overline{R(\tau)}$ 则各态历经。

解题过程：参见教材41页

问题：此题涉及到：如何求随机变量函数的数学期望？

解惑：大家熟知，随机变量X的数学期望为：

$$\boxed{E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$$

设g(X)是随机变量X的函数，则g(X)的数学期望为：

$$\boxed{E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx}$$

可见：该式是随机变量X的数学期望的推广。

表明：若求函数g(X)的数字特征，不必知g(X)的分布，只需知随机变量X的概率密度f(x)就足以。

多选题 1分

设置

设相位随机的正弦波为 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$

其中，**A**和 ω_c均为常数；**θ**是在**(0,2π)**内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$ 的功率谱密度。

A $\dfrac{\pi A^2}{2}\left[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right]$

B $\dfrac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$

C 不会

D 会，但未求出来

提交

填空题 2分

设置

设相位随机的正弦波为 $\xi(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)$ 其中，$\boldsymbol{A}$和 ω_c均为常数；$\boldsymbol{\theta}$是在$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量。

试求：（1）$\xi(t)$的方差= [填空1] ；

（2）$\xi(t)$的平均功率= [填空2] 。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

3.3 高斯随机过程(Gaussian random process)

3.3.1 定义

若随机过程 $\xi(t)$ 的任意n维（n=1,2,...）分布都服从正态分布，则称它为高斯过程。

3.3.2 重要性质

（1）若广义平稳，则狭义平稳；

（2）若互不相关，则统计独立；

（3）若干个高斯过程的代数和仍是高斯型；

（4）高斯过程→线性变换→高斯过程。

3.3.3 高斯随机变量

■ 一维概率密度函数

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

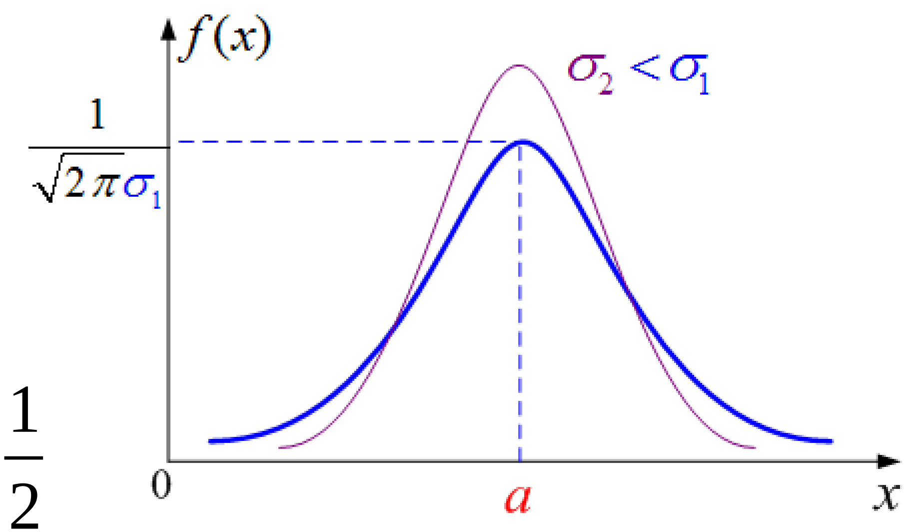
记为$\mathcal{N}(a，\sigma^2)$

a---分布中心

σ---集中程度，标准偏差

性质：

- 关于直线 ***x=a*** 对称
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
- $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\int_{a}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}$



3.3.3 高斯随机变量

正态分布函数

$$F(b)=P(x\le b)=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

查表

- **误差函数**

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

—自变量的 **递增** 函数

$$erf(0)=0 \qquad erf(\infty)=1$$

- **补误差函数**

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

—x的 **递减** 函数

$$erfc(0)=1$$

$$erfc(\infty)=0$$

$$\approx\frac{1}{x\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \quad x\gg 1$$

- **$Q(x)$函数**

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \quad x\ge 0$$

3.3.3 高斯随机变量

$$\boxed{erfc(x) = 1 - erf(x)}$$

$$erf(-x) = -erf(x)$$

$$erfc(-x) = 2 - erfc(x)$$

利用误差函数，可将$F(x)$表示为：

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} erf\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x \ge a \\ 1 - \dfrac{1}{2} erfc\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x < a \end{cases}$$

意义：

误差函数的简明特性有助于分析通信系统的抗噪声性能。

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$Q(x)$可查表

3.4 平稳随机过程通过线性系统

设

$$\xi_i(t) \longrightarrow \boxed{\text{线性系统}} \longrightarrow \xi_o(t)$$

$$h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$$

则

$$\boxed{\xi_0(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

若输入有界且系统是物理可实现的，则有

$$\boxed{\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau} \quad \text{或} \quad \boxed{\xi_0(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \xi_i(t-\tau) d\tau}$$

若给定 $\xi_i(t)$ 的统计特性，则可求得 $\xi_o(t)$ 的统计特性：

3.4 平稳随机过程通过线性系统

$$\xi_o(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau$$

$$E[\xi_o(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[\xi_i(t-\tau)]d\tau$$

交换运算顺序

$$\because \quad E[\xi_i(t-\tau)] = E[\xi_i(t)] = a$$

$$\therefore \quad E[\xi_o(t)] = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \Big|_{\omega=0} = a \cdot H(0)$$

$H(0)$--线性系统在 $\omega = 0$ 处的频率响应

注意

输出过程的均值是一个常数

3.4 平稳随机过程通过线性系统

输出过程 $\xi_o(t)$ 的自相关函数 $R_o(t_1, t_1+\tau)$

$\because$ $R_o(t_1, t_1+\tau) = E[\xi_o(t_1)\xi_o(t_1+\tau)]$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\xi_i(t_1-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\xi_i(t_1+\tau-\beta)d\beta\right]$$

交换运算顺序

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)E[\xi_i(t_1-\alpha)\xi_i(t_1+\tau-\beta)]d\alpha d\beta$$

$$E[\xi_i(t_1-\alpha)\xi_i(t_1+\tau-\beta)] = R_i(\tau+\alpha-\beta)$$

$$\therefore \quad R_0(t_1, t_1+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta = R_0(\tau)$$

注意 输出过程的自相关函数仅是时间间隔 τ 的函数

结论1 若线性系统的输入是平稳的，则输出也是平稳的

3.4 平稳随机过程通过线性系统

输出过程 $\xi_o(t)$ 的功率谱密度 $P_o(\omega)$

$$\because \quad P_0(\omega)=FT\left[R_0(\tau)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

变量置换

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta\right]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

令 $\tau'=\tau+\alpha-\beta$ ，代入上式，得到

$$P_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)e^{j\omega\alpha}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)e^{-j\omega\beta}d\beta\int_{-\infty}^{\infty} R_i(\tau')e^{-j\omega\tau'}d\tau'$$

应用：

$$R_0(\tau)=IFT[P_0(\omega)]$$

$$\therefore \quad P_0(\omega)=H^*(\omega)\cdot H(\omega)\cdot P_i(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 P_i(\omega)$$

$$P_0(f)=H^*(f)\cdot H(f)\cdot P_i(f)=\left|H(f)\right|^2 P_i(f)$$

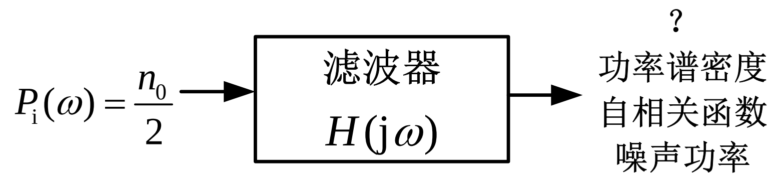
结论2

输出过程的功率谱密度是：
输入过程的功率谱密度 X 系统频率响应模值的平方

3.4 平稳随机过程通过线性系统

输出过程 $\xi_o(t)$的功率谱密度 $P_o(\omega)$

例



$$H(j\omega)=\begin{cases} k_0 e^{-j\omega t_d} & |\omega|\le\omega_H \\ 0 & others \end{cases}$$

解：

输出功率谱密度为：

$$P_o(\omega)=|H(\omega)|^2 P_i(\omega) = \frac{k_0^2 n_0}{2} \quad |\omega|\le\omega_H$$

输出自相关函数为：

$$R_o(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_o(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{k_0^2 n_0}{4\pi}\int_{-\omega_H}^{\omega_H}P_o(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=k_0^2 n_0 f_H Sa(2\pi f_H\tau)$$

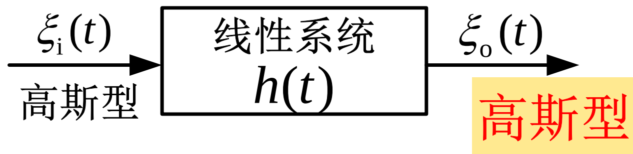
$$f_H=\frac{\omega_H}{2\pi}$$

输出噪声功率为：

$$N=R_o(0)=k_0^2 n_0 f_H$$

3.4 平稳随机过程通过线性系统

输出过程$\xi_o(t)$ 的概率分布



∵ $$\xi_o(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau$$

$$\xi_o(t)=\lim_{\Delta\tau_k\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\xi_i(t-\tau_k)h(\tau_k)\Delta\tau_k$$

∴ 上式右端的每一项在任一时刻上都是一个高斯随机变量。

结论3

输出过程在任一时刻上得到的随机变量就是无限多个高斯随机变量之和，输出过程也为高斯过程。

注意

与输入高斯过程相比，输出高斯过程的数字特征已改变。

3.4 平稳随机过程通过线性系统

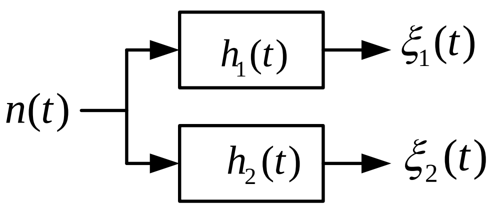
输入过程 $\xi_{\mathrm{i}}(t)$ 和输出过程 $\xi_{\mathrm{o}}(t)$ 的互功率谱密度 $P_{\xi_{\mathrm{i}}\xi_{\mathrm{o}}}(\omega)$

$$P_{\xi_{\mathrm{i}}\xi_{\mathrm{o}}}(\omega)=H(\omega)\cdot P_{\xi_{\mathrm{i}}}(\omega)$$

提示：$P_{\xi_{\mathrm{i}}\xi_{0}}(\omega)\leftarrow R_{\xi_{\mathrm{i}}\xi_{0}}(t_1,t_2)=?\,R_{\xi_{\mathrm{i}}\xi_{0}}(\tau)\ \leftarrow \xi_{\mathrm{i}}(t),\ \xi_{\mathrm{o}}(t)=?$

例

图示为一通信接收机中常见的单入双出系统，若输入过程 $n(t)$ 是平稳的，其功率谱为 $P_n(\omega)$，求 $\xi_1(t)$ 与 $\xi_2(t)$ 的互功率谱密度函数表达式。



解：

$$\xi_1(t)=n(t)*h_1(t)$$

$$\xi_2(t)=n(t)*h_2(t)$$

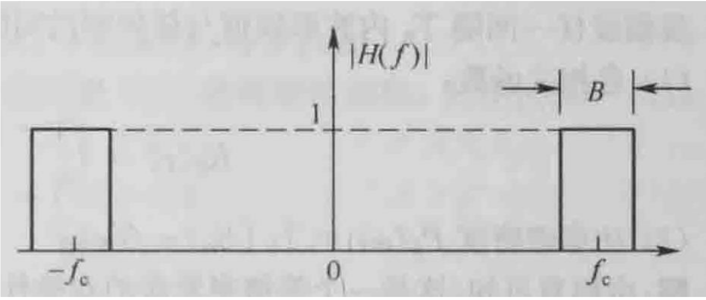
$$\begin{aligned}R_{12}(t_1,t_2)&=E\left[\xi_1(t)\xi_2(t)\right]\\&=\dots\\&=R_{12}(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{12}(\omega)&=FT\left[R_{12}(\tau)\right]\\&=H_1^*(\omega)H_2(\omega)P_n(\omega)\end{aligned}$$

单选题 1分

设置

一个中心频率为f_c、带宽为B的理想带通滤波器如图所示。假设其输入是均值为0、功率谱密度为$n_0/2$的高斯白噪声，则滤波器输出噪声的自相关函数为：



A $R_o(\tau)=n_0BSa(\pi B\tau)\cos(2\pi f_c\tau)$

B $R_o(\tau)=\dfrac{n_0B}{2}Sa(\pi B\tau)\cos(2\pi f_c\tau)$

C 不会

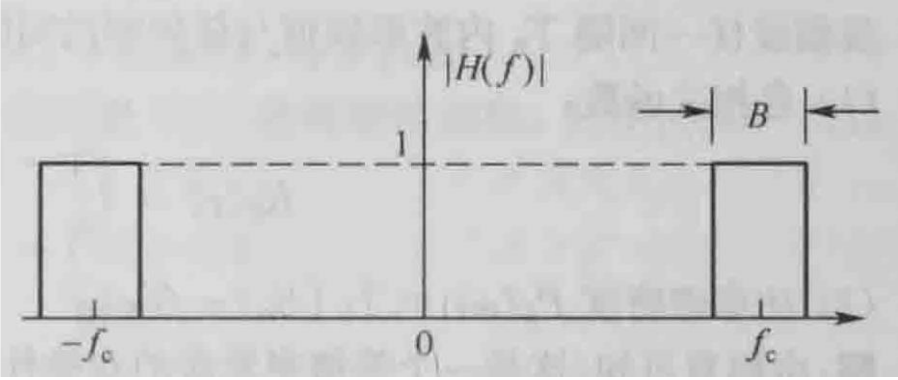
D 会，但未求出来

提交

填空题 1分

设置

一个中心频率为f_c、带宽为B的理想带通滤波器如图所示。假设其输入是均值为0、功率谱密度为$n_0/2$的高斯白噪声，则滤波器输出噪声的平均功率为 [填空1]



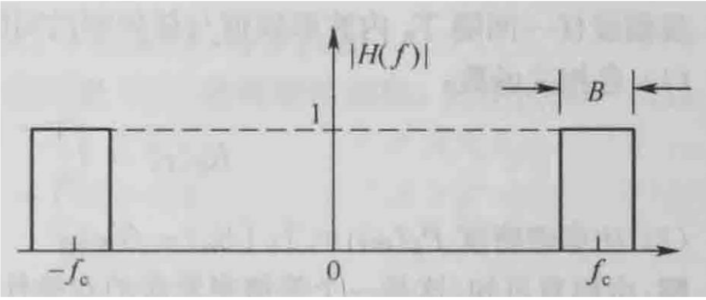
正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

单选题 1分

设置

一个中心频率为 f_c、带宽为 B 的理想带通滤波器如图所示。假设其输入是均值为0、功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声，则滤波器输出噪声的一维概率密度函数为：



A $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n_0 B}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2n_0 B}\right)$

B $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n_0 B}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2n_0 B}\right)$

C 不会

D 会，但未求出来

提交

3.4 平稳随机过程通过线性系统

$$\boxed{\xi_0(t)=\xi_i(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\xi_i(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

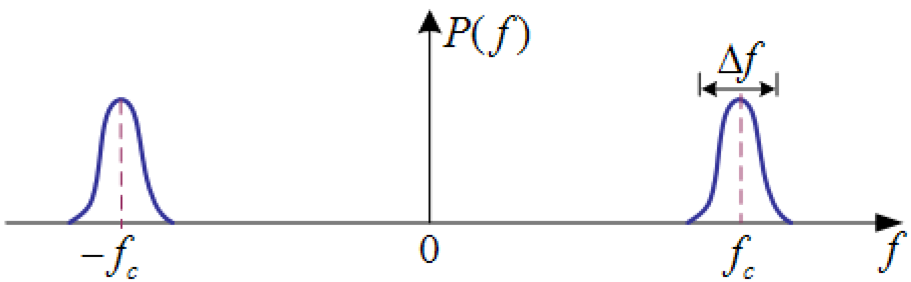
	输入过程 $\xi_i(t)$	输出过程 $\xi_o(t)$
概率分布	平稳、高斯	平稳、高斯
均 值	$E[\xi_i(t)]=a$ 常数	$E[\xi_o(t)]=a\cdot H(0)$ 常数
功率谱密度	$P_i(f)$	$\boxed{P_o(f)=\|H(f)\|^2P_i(f)}$
自相关函数	$R_i(\tau)\Leftrightarrow P_i(f)$	$R_o(\tau)\Leftrightarrow P_o(f)$

$H(0)=\int_0^{\infty}h(t)dt$ 是线性系统的直流增益； $|H(f)|^2$ 是功率增益

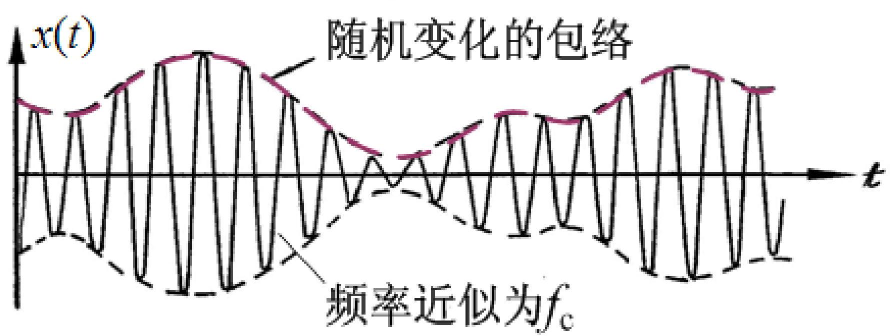
3.5 窄带随机过程

——通过窄带系统的随机信号或噪声

- **示意图：**



（a）窄带过程的**功率谱密度**



（b）窄带过程的**样本波形**

- **窄带条件：**

$$\begin{cases} \Delta f \ll f_c \\ f_c \gg 0 \end{cases}$$

可视为
包络缓慢变化
的正弦波

3.5 窄带随机过程

- **表达式：**

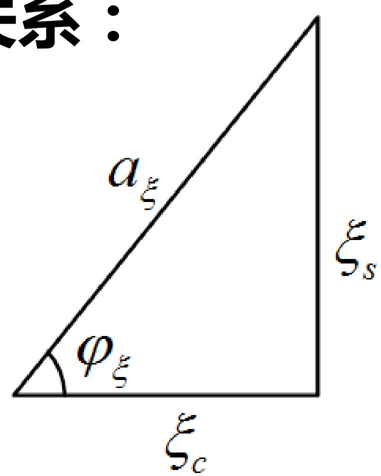
$$\xi(t)=a_\xi(t)\cos[\omega_c t+\varphi_\xi(t)],\quad a_\xi(t)\geq 0$$

随机包络　　**随机相位**　　**—包络相位形式**

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t$$

同相分量　　**正交分量**　　**—同相正交形式**

- **两者关系：**

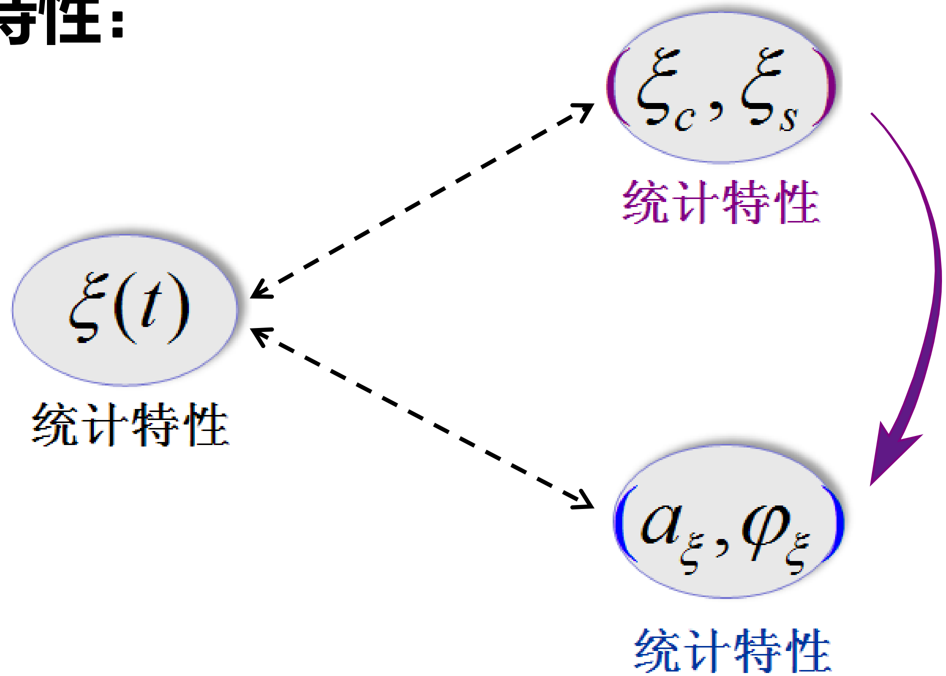


$$\begin{cases}\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)\\ \xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_\xi(t)=\sqrt{\xi_c^{\ 2}(t)+\xi_s^{\ 2}(t)}\\ \varphi_\xi(t)=\arctan[\xi_s(t)/\xi_c(t)]\end{cases}$$

3.5 窄带随机过程

- **统计特性：**



若知窄带过程 $\xi(t)$ 的统计特性， 则可确定：

同相/正交， 包络/相位的统计特性； 反之亦然。

3.5.1 同相和正交分量的统计特性

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t$$

根据上式和窄带过程的统计特性，可推出：

结论1

均值 0、方差 σ_ξ^2 的平稳高斯窄带过程，它的

$$\left.\begin{array}{l}\text{同相分量 } \xi_c(t)\\ \text{正交分量 } \xi_s(t)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{同样也是}}\text{平稳、高斯}$$

且 均值为0，方差也相同： $\sigma_\xi^2=\sigma_c^2=\sigma_s^2$

$\because$ 均值 0

平均功率相同

并且 $R_{cs}(0)=0$ 互不相关

$\because$ 高斯

$\therefore$ 统计独立

3.5.2 包络和相位的统计特性

借助结论1，根据关系： $\begin{cases} \xi_c(t) = a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t) \\ \xi_s(t) = a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t) \end{cases}$

按照推导思路：

$$\left.\begin{matrix} \xi_c(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \\ \xi_s(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \end{matrix}\right\rangle \xrightarrow{\text{统计独立}} f(\xi_c,\xi_s) \xrightarrow{|J|} f(a_\xi,\varphi_\xi) \xrightarrow{\text{边际分布}} \left\langle\begin{matrix} f(a_\xi) \\ f(\varphi_\xi) \end{matrix}\right.$$

$$f(\xi_c,\xi_s) = f(\xi_c)\cdot f(\xi_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{\xi_c^2+\xi_s^2}{2\sigma_\xi^2}]$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_c}{\partial a_\xi} & \dfrac{\partial\xi_s}{\partial a_\xi} \\ \dfrac{\partial\xi_c}{\partial\varphi_\xi} & \dfrac{\partial\xi_s}{\partial\varphi_\xi} \end{vmatrix} = a_\xi \qquad f(a_\xi,\varphi_\xi) = \frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

3.5.2 包络和相位的统计特性

$$f(a_\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(a_\xi,\varphi_\xi)d\varphi_\xi=\int_0^{2\pi}\frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}]d\varphi_\xi$$

$$=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}],\quad a_\xi\geq 0$$

$$f(\varphi_\xi)=\int_0^{\infty} f(a_\xi,\varphi_\xi)da_\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2})da_\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi},\quad 0\leq\varphi_\xi\leq 2\pi$$

推出结论2：

3.5.2 包络和相位的统计特性

结论2

均值0 、方差σ_ξ^2 的平稳高斯窄带过程 ，它的

- 包络～瑞利分布：

$$f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right]\quad(a_\xi\geq 0)$$

- 相位～均匀分布：

$$f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi}\quad(0\leq\varphi_\xi\leq 2\pi)$$

且 $f(a_\xi,\varphi_\xi)=f(a_\xi)\cdot f(\varphi_\xi)$ ---统计独立

3.6 正弦波加窄带高斯过程

- **合成信号：**

常数

窄带高斯噪声 $(0, \sigma_\xi^2)$

$$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta) + n(t)$$

随机相位

[在(0，2π)上均匀分布]

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$

$$= z_c(t)\cos\omega_c t - z_S(t)\sin\omega_c t$$

$$= z(t)\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_c(t) &= A\cos\theta + n_c(t) \\ z_s(t) &= A\sin\theta + n_s(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{z_c^2(t) + z_s^2(t)},\quad z \geq 0 \\ \varphi(t) &= tg^{-1}\frac{z_s(t)}{z_c(t)},\quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}}$$

关心---$z(t)$ **的统计特性:**

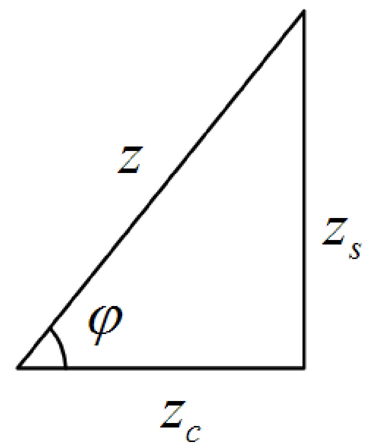
3.6 正弦波加窄带高斯过程

- **分析思路：**

在给定θ条件下，利用3.5.2节的推导方法和结论2。

$$\left.\begin{array}{l} z_c(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \\ z_s(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \end{array}\right\rangle \xrightarrow{\text{统计独立}} f(z_c, z_s/\theta) \xrightarrow{|J|} f(z, \varphi/\theta) \xrightarrow{\text{边际分布}} \left\langle \begin{array}{l} f(z/\theta) \\ f(\varphi/\theta) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} E[z_c] &= A\cos\theta \\ E[z_s] &= A\sin\theta \\ \sigma_c^2 &= \sigma_s^2 = \sigma_n^2 \end{aligned}$$



- **推导结果：**

◆ z(t) ~ 广义瑞利分布，又称莱斯（**Rice**）分布：

3.6 正弦波加窄带高斯过程

$$\boxed{f(z)=\frac{z}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2+A^2)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right),\quad z\ge 0}$$

莱斯分布

$I_0(x)$是零阶修正贝塞尔函数; 当$x\ge 0$时，$I_0(x)$单调上升，且$I_0(0)=1$

讨论:

- $A\to 0$，即 **r** $\to 0$时，$f(z)$ 退化为 瑞利分布;
- 信噪比 **r** 较大时，$f(z)$ 近似为 高斯分布。

注:

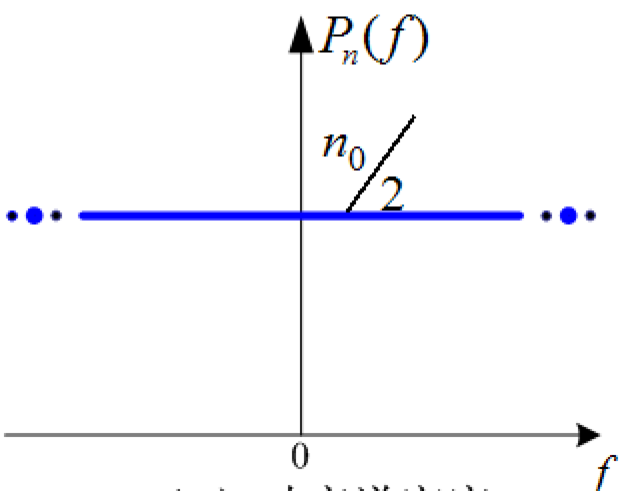
$$r=\frac{A^2}{2\sigma_\xi^2} \leftarrow \underbrace{A\cos(\omega_c t+\theta)}_{\text{信号功率 } A^2/2} + \underbrace{n(t)}_{\text{噪声功率 } \sigma_\xi^2}$$

- $f(\varphi)$不再服从均匀分布

3.7 高斯白噪声和带限白噪声

1） 白噪声——理想的宽带过程

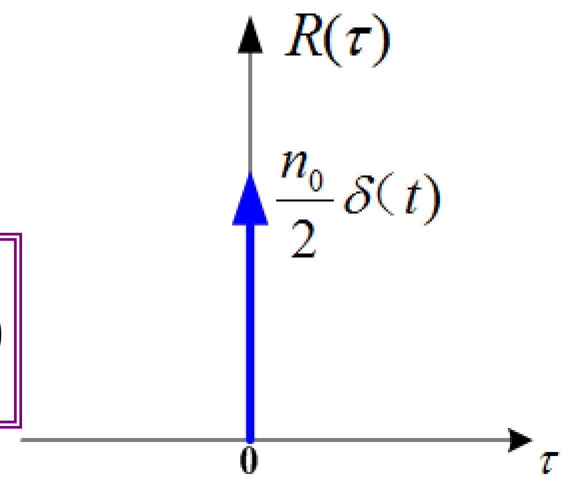
其功率谱密度均匀分布在整个频率范围内：



（a）功率谱密度

$$P_\xi(\omega)=\frac{n_0}{2}$$

$$R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$



（b）自相关函数

n_0 ---常数 (W/Hz)

白噪声仅在τ=0（同一时刻）时才相关。

3.7 高斯白噪声和带限白噪声

2） 高斯白噪声

---指概率分布服从高斯分布的白噪声。

高斯白噪声在任意两个不同时刻上的取值之间，不仅是互不相关的，而且还是统计独立的。

3） 带限白噪声

---白噪声通过带宽有限的信道或滤波器的情形。

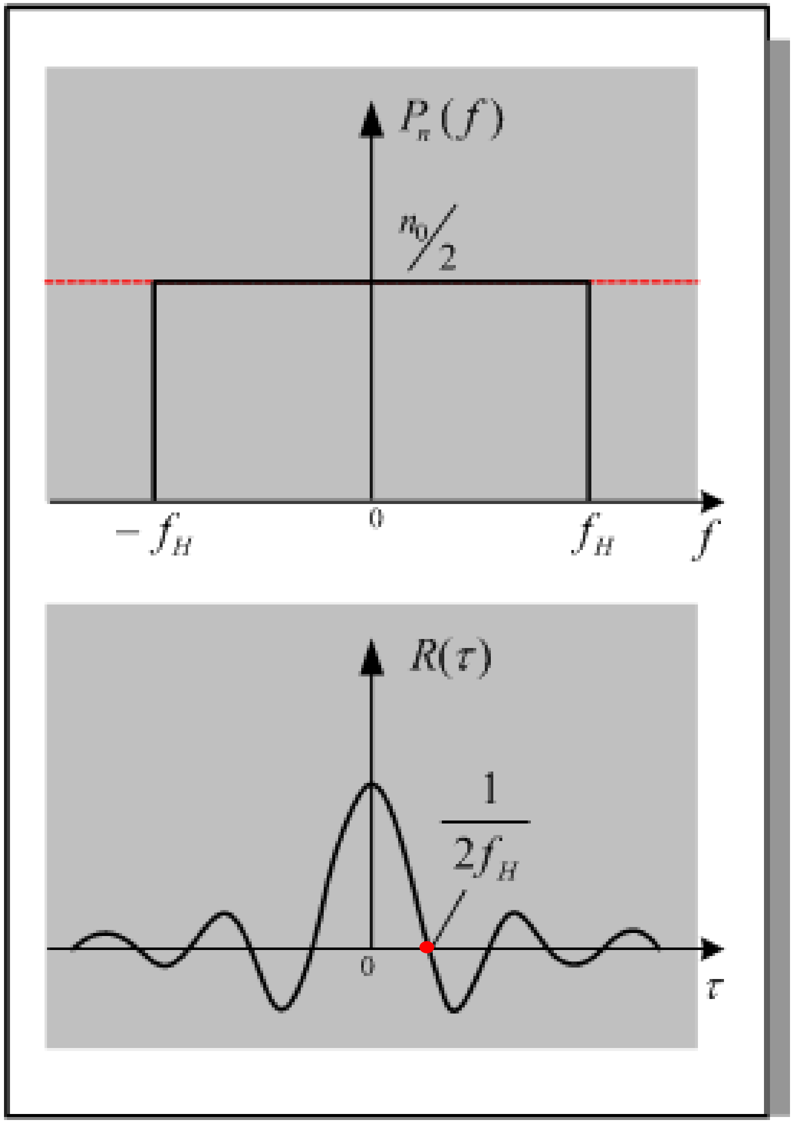
常见形式：
- 白噪声通过**LPF**---低通白噪声 --带限白噪声
- 白噪声通过**BPF**---带通白噪声 --窄带高斯白噪声

3.7 高斯白噪声和带限白噪声

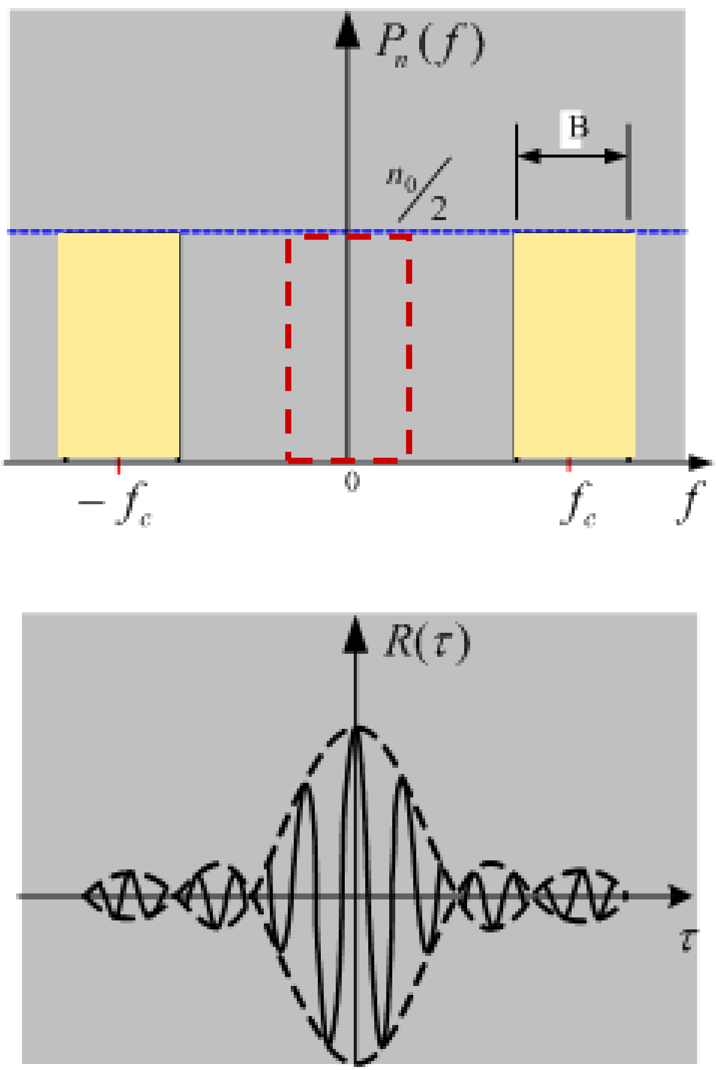
■ 低通白噪声

$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & |f|\le f_H \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0 f_H \frac{\sin 2\pi f_H \tau}{2\pi f_H \tau}$$



3.7 高斯白噪声和带限白噪声



若 $B << f_c$

窄带高斯白噪声

■ 带通白噪声

$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & f_c-\dfrac{B}{2}\le |f| \le f_c+\dfrac{B}{2} \\ 0, & \text{其他频率}\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0 B\frac{\sin \pi B\tau}{\pi B\tau}\cos 2\pi f_c \tau$$

$$\boxed{N=n_0 B}$$

- **作业：**

习题：3-3、3-6、3-7、3-8、3-11。