专业课问答版复习笔记

数理基础（高数、概率论、线性代数）

知乎/小红书/CSDN@小吴学长 er

小吴学长er

扫一扫上面的二维码图案，加我为朋友

微信号：xwxzer

数理基础（高数、概率论、线性代数）

标黄题目为建议重点记忆的面试高频问题

高数

1. 洛必达法则（北大面试真题）

- 洛必达法则是一个求极限的方法，如果是 0/0 形无穷比无穷形才可以使用洛必达方法，原极限等于于上下分别求导再取极限。
- 当 x 趋近 a 时，f(x),g(x)都趋近 0 或为∞，f(x)和 g(x)的导数都存在且 g(x)的导数不等于 0，那么 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

2. 极限的定义（自动化所面试真题）

极限分为数列极限和函数极限。

- 数列极限，如果说一个常数 A，总存在一个 N>0,当 n>N 时，任意取一个正数 p，都有|Xn-A|<P 成立，则说 Xn 趋于无穷的极限为 P。
- 函数极限，f（x）在 x0 的去心领域中，存在一个ρ>0，在左右为ρ这个范围内，任意找一个 P>0，都可以有|f（x）-f（x）此处的极限|<P

3. 连续和一直连续的定义和区别（自动化所面试真题）

- 连续的定义：（1）这点函数有定义（2）函数左右极限存在且相等（3）这个点左右极限数值上等于这点函数值。
- 一致连续是无限接近的两个自变量点，他们的函数值也是无限接近的，不会出现跳变。一致连续一定连续，连续不一定一致连续。比如 y=x 方，他是一个连续但不是一致连续。解释是 x1=n，x2=n+1/n，他俩无穷的时候无限接近，但是(n+1/n)^2-n^2=1+1/n 方。并不是无限接近。

4. 判断极值的方法（北邮面试真题）

导数等于 0 且导数两边异号。如 x 三次方在原点位置，并不是极值点。

5. 梯度（北邮面试真题）

- **方向导数**：标量场在某点处沿某一方向对距离的变化率
- **梯度：**是一个矢量。矢量的方向：标量场在某点处所有的方向中，对距离的变化率最大的方向（方向导数的方向）。矢量的大小：等于最大的变化率（方向导数的大小）
- 可以引申出 BP 神经网络的训练参数方法：梯度下降法， 包括批量梯度下降和随机梯度下降

6. 散度（北邮面试真题）

- **通量：**矢量场中矢量在曲面 S 上的曲面积分。$\phi=\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$
- **散度：**单位体积内的矢量通量 $div\vec{F}=\lim_{\Delta V>0}\frac{\oint \vec{F}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$ (散度>0:源向外发散；散度=0:无源)

7. 旋度（北邮面试真题）

- **环流量：**矢量场中的一条闭合路径的曲线积分 $\Gamma=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=\nabla\cdot F$
- **旋度：**矢量场在某点处的旋度的方向是沿着使环流面密度取最大值的方向，大小等于环流面密度的最大值。$rot\vec{F}=\vec{n}\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{l}\,|_{\max}=\nabla\times\vec{\Gamma}$

8. 导数与微分

- **可导**（左右导数均存在且相等）一定连续，连续不一定可导。（$\sqrt{x}$连续不可导）
- **导数：**自变量都有微小变化时，变化前后两点间的斜率。
- **微分：**自变量有微小变化时，因变量的变化
- 一元函数可导 ⇔ 可微。
- 多元函数偏导数连续才可微，即可导不一定可微，但可微一定可导

9. 中值定理

- 第一个是罗尔定理，第二个是拉格朗日中值定理，第三个是柯西中值定理。
- 罗尔，拉格朗日都是柯西的特例：柯西 g(x)=x 就是拉格朗日；f(b)=f(a)就是罗尔

- **罗尔中值定理**:f(x)在闭区间[a,b]上连续;开区间(a,b)内可导;区间端点处的函数值相等⇔(a,b)区间内至少存在一点ξ，$f^{'}(\xi)=0$
- **拉格朗日中值定理:** f(x)在闭区间[a,b]上连续；开区间(a,b)内可导⇔(a,b)区间内至少存在一点ξ，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(\xi)$
- **柯西中值定理:** f(x)，g(x)在闭区间[a,b]上连续；开区间(a,b)内可导⇔(a,b)区间内至少存在一点ξ，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\zeta)}$
- **泰勒中值定理:** 如果函数 f(x)在 x_0 处存在 n 阶导，那么存在一个 x_0 的领域内，域内 f(x)都能展开成泰勒展开式，所有 x 满足: $f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}+R_n(x)$

10. 微分中值三大定理之间关系以及费马引理与其之间的联系是什么？（北邮真题）

第一个是罗尔定理，第二个是拉格朗日中值定理，第三个是柯西中值定理。

- 先从罗尔出发，函数在区间内连续可导，f（a）=f（b），则一定有一个点 f（c）导数=0
- 拉格朗日是连续可导，一定存在一个 f（c）导数=f（a）-f（b）/a-b
- 柯西是连续可导，且分母的导数不能为 0，一定存在一点 c，使 f(a)-f(b)/g(a)-g(b)=f’（c)/g’(c)。
- 费马引理：函数在点 c 的某邻域内有定义，并且在 c 处可导，如果对于任意的 x∈这个区域，都有 f（x）<=f(c)(或)f(x)>=f(c)，那么 f(c)导数=0。

11. 积分三大公式

格林公式: 平面闭区域 D 上的二重积分可以通过沿 D 的边界 L 上的曲线积分来表示。

高斯公式: 空间闭区域上的三重积分可用Ω边界上的曲面积分表示

斯托克斯公式: 平面闭区域上的曲面积分可用边界曲线上的曲线积分来表示。

12. 用定义法证明 limn→∞1/n=0（上科大面试真题）

给定任意的θ大于 0，存在一个 N=1/θ的情况下，使得 n>N 时，|1/n|<|1<N|=θ。

13. 怎么判断一个函数的凹凸性（清华面试真题）

如果他的导数为正，且越来越小，则为凸函数。如果越来越大，也就是导数的导数是正，则为凹函数。如果导数为负则反之。

14. 泰勒公式展开（北航面试真题）

F（x）在趋近 x0 的时候，等于 F（x0）+xF（x）导数+x^2/2F(x)二次导数+……

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中，$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，此处的$\varepsilon$ 为x_0 与x 之间的某个值。$f(x)$ 称为n 阶泰勒公式，其中，

$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为n 次泰勒多项式，它与$f(x)$ 的误差

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为n 阶泰勒余项 [4] [5-6] [2] 。

15. 泰勒公式是为了解决什么问题的？（北航面试真题）

- 泰勒公式的初衷是用多项式来近似表示函数在某点周围的情况。如果函数足够光滑的话，在已知函数在某一点的各阶导数值的情况之下，泰勒公式可以用这些导数值做系数构建一个多项式来近似函数在这一点的邻域中的值。泰勒公式还给出了这个多项式和实际的函数值之间的偏差。
- 泰勒公式是为了研究复杂函数性质时经常使用的近似方法之一，也是函数微分学的一项重要应用内容。

16. 欧拉公式（清华面试真题）

e^jpi+1=0，联系了 e、j、π、1.

概率论与数理统计

1. 全概率公式和贝叶斯公式（一个是知道开始推结果，一个是知道结果推原因）

- **全概率公式：** $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$：已知各种原因的概率，各种原因导致结果的概率，求结果的概率。
- **贝叶斯公式：** $P(A_i\mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}$：已知原因的概率，各种原因导致结果的概率，求结果发生条件下，某个原因的概率。

2. 二项分布

n 重（n 次重复）伯努利实验得到的分布；而伯努利试验是指试验只有两个可能的结果：A 和 $\overline{A}$；

$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$

3. 四大分布

正态分布

χ^2分布：$X_1,X_2\ldots X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，$\chi^2=X^2{}_1+X^2{}_2\ldots+X^2{}_n$

t分布：$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$　　$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$

F分布：$u\sim\chi^2(n_1),v\sim\chi^2(n_2),u,v$相互独立　　$F=\frac{u/n_1}{u/n_2}$

4. 均值（数学期望）

描述随机变量 x 取值的平均大小　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

5. 方差

用来度量随机变量 x 与均值 E（x）的偏离程度　$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$

6. 相关系数

- 表征 X,Y 之间线性关系的紧密程度 $\begin{cases} |\rho_{XY}|\text{大：}X,Y\text{线性相关程度好} \\ |\rho_{XY}|\text{小：}X,Y\text{线性相关程度差} \\ |\rho_{XY}|=0\text{：不相关} \end{cases}$
- 相关性是就线性关系而言，独立性是根据一般关系而言。
- 独立一定不相关，不相关不一定独立。
- 对于正态分布， 不相关等价于相互独立。

7. 大数定律

- **辛钦大数定律：**前 n 个独立同分布变量的算数平均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 依概率收敛于单个随机变量的均值
- **伯努利大数定律：**只要重复独立试验次数足够大，事件发生的频率与时间发生的概率就几乎相等（频率的稳定性）。所以试验次数很大时，可用事件发生的频率代替事件的概率。
- **中心极限定理：**在一般情况下，当独立随机变量的个数不断增加时，其和的分布逼近于正态分布。因此在实际中，大量独立随机变量综合在一起才会造成影响，个别随机变量的影响很小。

8. 概率为 0 的事件可能发生吗？（北航 2021 真题）

不可能事件的发生概率是 0,但 0 概率事件可能发生。对于连续性随机变量，单个具体点的概率密度值为一有界常数，这个值可以是任意的（包括 0 和 1），但因为点是没有长度的，所以该点的概率密度积分为 0（因为该点概率密度值有界），即该点所对应的事件发生的概率为 0，但这个事件仍然是可能发生的，因为这个事件在事件域内。也就是说，概率为 0 的事件并不一定不会发生。

9. 样本的方差和总体的方差是什么关系？（北航 2021 真题）

样本方差是根据所抽取样本计算的出的方差,总体方差是总体计算出的方差，在有些计算中可以用样本方差估计总体方差。当样本的容量和总体的容量相等时样本的方差和总体的方差也相等。

线性代数（线代这 15 个问题全都是重点面试真题，就不一一标黄了哈哈）

1. 线性相关的概念和性质?

- 概念：如果说向量α1α2…，存在一组不同时为 0 的常数 k1k2…，可以使 k1α1+k2α2…=0，则这一组向量线性相关。反之如果找不到这组常数则线性无关。
- 性质：如果说部分线性相关则整体肯定也是线性相关，如果说整体线性无关则部分也线性无关。线性相关无关可以用来判断矩阵的秩。

2. 矩阵的秩的概念是什么?

矩阵的秩是矩阵十分重要的一个特性。我们可以从最大行（列）线性无关组中向量的个数来判断矩阵的秩，n×m 矩阵的秩一定不会大于 n 和 m，我们可以通过方阵的秩来判断这个方阵行列式是否为 0，进而判断是否可逆。同时在解齐次方程组中，我们也通过系数矩阵和伴随矩阵的秩来判断有解无解、有限个解 or 无穷个解。

3. 什么是线性相关？什么是线性无关?

在线性代数里，矢量空间的一组元素中，若没有矢量可用有限个其他矢量的线性组合所表示，则称为线性无关或线性独立，反之称为线性相关。

4. 怎么判断线性相关和线性无关?

- 定义法：使向量组的线性组合为零（零向量），研究系数的值。当线性组合为零，仅当系数为零时，向量组是线性的；如果有不完全为零的系数，使线性组合为零，则向量组是线性的。
- 向量组的相关性质：（1）当向量组中的向量数等于向量维数时，向量组的行列式不为零的充分必要条件是向量组线性无关；(2)当向量组含有的向量超过向量维数时，向量组具有线性相关性；（3）通过向量组的正交性研究向量组的相关性；（4）通过向量组的齐次线性方程组解来判断向量组的线性相关性；线性方程组与非零解向量组有线性相关性，否则线性无关。（5）通过向量组的秩序研究向量组的相关性。如果向量组的秩等于向量数，则向量组是线性的；如果向量组的秩小于向量数，则向量组是线性的。

5. 向量组的线性相关性

- 线性相关：向量组 A 中至少有一个向量能由其他向量线性表示 ⇔ R(A) < 向量数
- 线性相关的性质：（1）A 线性相关，在 A 的基础上增加一个向量也线性相关；线性无关则减少一个向量也线性无关（2）A 线性无关，在 A 的基础上增加一个向量却线性相关，那么增加的那个向量一定能由 A 唯一表示（3）m 个 n 维向量组成的向量组，n<m 时，一定线性相关。

6. 线性方程组的解

$$n\text{元线性方程组}Ax=b\begin{cases}\text{无解}: & R(A)<R(A,b)\\ \text{唯一解}: & R(A)=R(A,b)=n\\ \text{无穷解}: & R(A)=R(A,b)<n\end{cases}$$

7. 线性方程组什么时候无解?

系数矩阵的秩小于伴随矩阵。

8. 研究矩阵的秩的意义?

用于多维信号特征处理降维

9. 正定矩阵的概念是什么?

设 M 是 n 阶方阵，如果对任何非零向量 z，都有 zTMz> 0，其中 zT 表示 z 的转置，就称 M 为正定矩阵。

10. 特征值的概念是什么?

使矩阵满足|A-λE|=0 的λ的值，我们就把他成为矩阵的特征值，与之对应的有特征向量，Aη=λη，一个特征值可能对应两个特征向量（多个），但是一个特征向量一定只会对应一个特征值。通过特征值求和我们还可以知道矩阵的迹，矩阵行列式是否为 0，矩阵的秩…

11. n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件?

对于 n 阶矩阵 A，其可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量

12. 克莱姆法则是什么？适用于解决什么问题?

克莱姆法则是线性代数中一个关于求解线性方程组的定理。它适用于变量和方程数目相等的线性方程组。

13. 判断矩阵是否可逆的方法（说出三种及以上）？

（1）定义法（2）初等变换法（3）伴随矩阵法（4）线性方程组求逆矩阵（5）分块矩阵求逆矩阵

14. 矩阵有哪三种重要的关系，联系是什么?

- 相似：存在一个可逆矩阵 P，B=P-1AP，A、B 相似。如果与对角矩阵相似则为可对角化<=>A 有 n 和线性无关的特性向量。
- 合同：两个矩阵 A 和 B 是合同的，当且仅当存在一个可逆矩阵 C，使得 CTAC=B，则称方阵 A 合同于矩阵 B。
- 等价：有两个 m×n 阶矩阵 A 和 B，如果这两个矩阵满足 B=QAP(P 是 n×n 阶可逆矩阵，Q 是 m×m 阶可逆矩阵)，那么这两个矩阵之间是等价关系。也就是说，存在可逆矩阵(P、Q)，使得 A 经过有限次的初等变换得到 B。

15. 空间的概念?

- 维数对应着生成空间的线性无关向量个数
- 定义运算数乘和加法
- 运算具备完备性