1. 余子式和代数余子式

1) 余子式

n 阶行列式中，划去元 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的元，剩下的元不改变原来的顺序所构成的 n-1 阶行列式称为元a_{ij} 的余子式。

作用：能把 n 阶的行列式化简为 n-1 阶。

2) 代数余子式

a_{ij} 的代数余子式 [3]：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$。

2. 行列式的含义

所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中求和指标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 取遍1,2,...,n所有n阶排列。共有n!项求和。

知乎 @小红粒粒

行列式，记作 det(A)，是一个将方阵 A 映射到实数的函数。

行列式等于矩阵**特征值的乘积。**

行列式的绝对值可以被认为是**衡量矩阵相乘后空间扩大或者缩小了多少。**如果行列式是 0, 那么空间至少沿着某一维完全收缩了，使其失去了所有的体积。如果行列式是 1, 那么矩阵相乘没有改变空间体积。

行列式等于它任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

本质含义（几何意义）：行列式就是在给定一组基下，N 个向量张成的一个 N 维广义四边形的体积。2 阶行列式代表的是平面内的面积；3 阶行列式自然而然就是 3 维空间内的体积；4 阶行列式是 4 维空间里的超体积。

3. 矩阵的秩(rank)

1) 基本概念

k 阶子式：在一个矩阵或行列式中取 k 行 k 列，交叉处的 k^2 个元素按原顺序构成的行列式。

[1] 从子式的角度定义：矩阵的**秩**就是矩阵中**非零子式的最高阶数**。

[2] 从极大线性无关组的角度定义：矩阵的所有行向量中**极大线性无关组**的元素个数。

[3] 从标准型的角度定义：求一个矩阵的秩，可以先将其化为**行阶梯型，非零行**的个数即为矩阵的秩。（行阶梯型矩阵的秩等于其非零行的行数。）

2) 与向量组的关系

矩阵的秩等于它列向量组的秩，也等于它行向量组的秩。

向量组的秩定义为向量组的极大线性无关组所含向量的个数。

3) 与向量空间的关系（几何意义）

任何矩阵的行空间的维数等于矩阵的列空间的维数等于矩阵的秩。

4) 与线性方程组解的关系

设 A 是 **m×n** 矩阵，若 **R(A)=r < n**（只和n有关，因为n是未知数的个数），则齐次线性方程组 Ax=0 有**基础解系**，且每个基础解系都含 n-r 个解向量。

5)

- 初等变换不改变矩阵的秩
- 两个矩阵同型的充要条件：秩相等
- 满秩——非奇异矩阵，非满秩——奇异矩阵
- 初等变换与初等矩阵的关系：对m*n矩阵A做一次初等行/列变换，相当于用一个相应的m/n阶初等矩阵左/右成A
- 满秩矩阵可以表示成一组同阶初等矩阵的成绩

6）逆矩阵：

n阶方阵A、B，若有AB=BA=E，则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵

- A可逆的充要条件是：$|A| \neq 0$，则$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
- 通常求法：$(A|E) --初等行变换--> (E|A^{-1})$

4. 矩阵的迹

方阵 A(n*n) 的迹定义为对角线元素的和。即：

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

知乎 @小红粒粒

- 方阵迹的和 = 特征值的和

5. 线性方程组解的情况 / 判断一个线性方程组是否有解有哪几种方法?

1) 对于齐次线性方程组 Ax=0

r(A)=n，有惟**一零解**；

r(A)<n，有**无穷多解。**

- 基础解系
  - 若齐次线性方程组的有限个解$\xi_1, ..., \xi_t$满足：
    - 线性无关
    - 方程组的每个解都可以由$\xi_1, ..., \xi_t$线性表示
  - 于是有通解 $k_1\xi_1 + ... + k_t\xi_t$
- 若齐次线性方程组的系数矩阵A的秩r<n，则其存在基础解系，且基础解系所含向量的个数为(n-r)

2) 对于非齐次线性方程组 Ax=b

r(A)≠r(A,b)，**无解**；

r(A)=r(A,b)=n，有**唯一解**；

r(A)=r(A,b)<n，有**无穷多解。**

6. 线性相关与线性无关

1) 含义

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$都为n维向量，若存在一组不完全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，否则，称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

m个向量组成的向量组A线性无关的充分必要条件是 R (A) = m.

2) 几何意义

一组矢量的线性相关性本质上，是描述他们所张成的广义平行四边形体积是否为零。**N 个向量线性无关⇔他们所张成的N维体体积不为零。**于是有：线性无关矢量组成的矩阵的行列式不为零；线性相关矢量组成的矩阵的行列式必为零。

3) 一个矩阵线性无关的等价定义有什么？

非奇异矩阵、矩阵可逆、矩阵满秩、特征值没有 0。

（奇异矩阵：行列式等于零的矩阵（方阵）。）

7. 线性空间（向量空间）

n 维向量构成的非空集合，**对于向量加法和数乘两种运算封闭。**

> 设V是非空向量几何，若果对任意α，$\beta\in V$、任意实数k，都有$\alpha+\beta\in V,k\alpha\in V$，则称V是向量空间

8. 向量空间的基与维数

1) 基

设 V 是一向量空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\in V$ 且满足：

a) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性无关；

b) V 中向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性表示。

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 为 V 的一个基。

2) 维数

基中所含向量个数 r 称为向量空间的维数。

9. 特征值和特征向量 ★

1) 定义

对方阵 A 满足：Ax=λx，其中 x 为非零向量，则称 x 为特征向量，λ 为特征值。

2) 矩阵的特征值与特征向量有什么关系？

- 一个特征值可能对应多个特征向量，一个特征向量只能属于一个特征值。
- 属于不同特征值的特征向量一定线性无关。
- 设 λ 是 n 阶方阵 A 的一个 k 重特征值（λ 为特征方程的 k 重根），对应于 λ 的线性无关的特征向量的最大个数为 l，则 $k \geq l$，即特征值 λ 的**代数重数不小于几何重数。**

3) 特征值和特征向量的意义

如果一个向量投影到一个方阵定义的空间中只发生伸缩变化，而不发生旋转变化，那么该向量就是这个方阵的一个**特征向量**，伸缩的比例就是**特征值。**

特征向量的代数含义是：**将矩阵乘法转换为数乘操作**；特征向量的几何含义是：**特征向量通过方阵 A 变换只进行伸缩，而保持特征向量的方向不变。**特征值表示的是这个特征到底有多重要，类似于权重，而特征向量在几何上就是一个点，从原点到该点的方向表示向量的方向。

从物理意义来讲，这种**经过了矩阵变换之后，方向依然能保持不变的向量，就是这个矩阵的特征向量**，这些**特征向量经过变换后大小的改变，就是该特征向量的对应特征值**了。

4）矩阵特征值的求法

- 计算A的特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$
- 求特征方程 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=0$ 的全部根，它们就是A的全部特征值
- 对于A的每个特征值λ_i，求出相应的特征方程组$(A-\lambda_i E)X=0$ 的一个基础解系，它们就是A对应与λ_i的一组线性无关的特征向量，A对应于λ_i的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+...+k_t\xi_t\ (k\text{不全为}0)$

10. 相似矩阵 ★

设A,B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$则称B是A的相似矩阵，或说A和B相似。

相似矩阵：$P^{-1}AP=B$ （存在可逆的P）

等价矩阵：$PAQ=B$ （存在P、Q）

相似矩阵一定是等价矩阵，等价矩阵不一定是相似矩阵

11. 什么是向量正交？什么是矩阵正交？

- 若 (α,β)=0，即向量a和b内积为0，则称**向量 α 与 β 正交。**
- 若 n 阶向量组满足任意两个向量都是正交的，则称 向量组为**n维正交向量组。**
  - （n维正交向量组一定线性无关，但是n维线性无关的向量不一定是正交向量组
  - 通过施密特正交化，可以将线性无关向量组 化为 正交向量组。
    再做规范化，就可以得到 正交单位向量组
  - 于是，向量空间V中任一向量都可由 它们 线性表示
    向量α在正交规范基下，第i个坐标 可由该向量与第i个基ϵ_i的内积表示
- 若n阶方阵A满足$A^TA=E$，则称A为**n阶正交矩阵。**
  - （充要条件：A的行/列向量组是单位正交向量组）
  - 正交矩阵是指矩阵的转置等于矩阵的逆的矩阵。$A^{-1}=A^T$ or $A^TA=E$

13. 合同矩阵

两个n阶方阵A，B，若存在可逆矩阵C使 $C^TAC = B$，则称方阵A和B合同。

14. 什么是正定矩阵？什么是半正定矩阵？

1) 正定矩阵

给定一个大小为 $n \times n$ 的**实对称矩阵** A，若对于任意长度为 n 的非零向量 X，有 $X^TAX > 0$ 恒成立，则矩阵 A 是一个正定矩阵。

- 前提：矩阵是对称的
- 正定矩阵的所有特征值大于零
- 各阶主子式大于零

2) 半正定矩阵

给定一个大小为 $n \times n$ 的**实对称矩阵** A，若对于任意长度为 n 的非零向量 X，有 $X^TAX \geq 0$ 恒成立，则矩阵 A 是一个半正定矩阵。

- 多元正态分布的协方差矩阵要求是半正定的。

根据正定矩阵和半正定矩阵的定义，我们也会发现：半正定矩阵包括了正定矩阵，与非负实数(non-negative real number)和正实数 (positive real number)之间的关系很像。

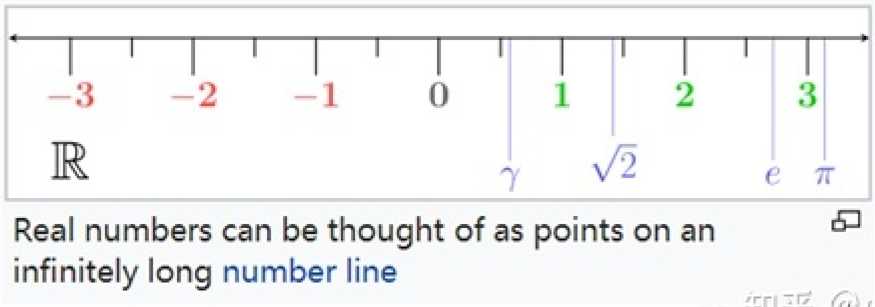

图1 正实数与负实数，图片来源于https://en.wikipedia.org/wiki/Real_number

15. 相似与对角化 ★

- 设A、B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$ 则称B 是 A 的相似矩阵
- 对角化
  - A 能对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量
  - 设 A 为为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵

相似对角化后，对角线的值就是矩阵 A 的 n 个特征值。

16. 向量范数与矩阵范数

1) 向量范数

- 1-范数：

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

，即向量元素绝对值之和，x 到零点的曼哈顿距离。

- 2-范数：

$$\|X\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$$

，Euclid范数（欧几里得范数，常用于计算向量长度），即向量元素绝对值的平方和再开方，表示 x 到零点的欧式距离。

- ∞-范数：

$$||x||_\infty = \max_i |x_i|$$

，即所有向量元素绝对值中的最大值。

- -∞-范数：

$$||x||_{-\infty} = \min_i |x_i|$$

，即所有向量元素绝对值中的最小值。

- p-范数：

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

，即向量元素绝对值的 p 次方和的 $\frac{1}{p}$ 次幂，表示 x 到零点的 p 阶闵氏距离。

2) 矩阵范数

一个在 $m \times n$ 的矩阵上的矩阵范数(matrix norm)是一个从 $m \times n$ 线性空间到实数域上的一个函数，记为||• ||

对于矩阵 $A \in R^{m \times n}$

1-范数

$||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$ ，列和范数，即所有矩阵列向量绝对值之和的最大值

2-范数

$||A||_2 = \sqrt{\lambda_1}$ ， λ_1 表示 $A^T A$ 的最大特征值，称为谱范数

知乎 @小红粒粒

∞ -范数

$||A||_\infty = \max_j \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|$ ，称为行和范数，即所有矩阵行向量绝对值之和的最大值

F-范数

$||A||_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$ ，称为Frobenius范数，即矩阵元素绝对值的平方和再开平方

知乎 @小红粒粒