近似算法

BY 唐志鹏 SA23011068

题目 1

引理：完全图的最小 2 匹配 S 将图分为若干个连通片，且每个连通片都是环（自然地，每个连通片至少包含 3 个顶点）

证明：假设某个连通片不是环，那么存在以下两种情况：

- 该连通片中存在环，那么至少存在一个环外的点 u 和一个环内的点 v 是相连的（否则，不连通）。于是，v 至少有 3 条相邻的边，这与 S 是 2 匹配矛盾！
- 该连通片中不存在环，那么该连通片就是树，叶子节点只有 1 条相邻的边，这也与 S 是 2 匹配矛盾！

因此，结论成立！

算法：

- step1: 首先，找到完全图 G 的最小 2 匹配 S，包含 k 个环 $C=\{C_1,C_2,...,C_k\}$
- step2: 在每个环 C_i 中随意取一条边 (u_i,v_i)，删除这些边，然后连接顶点 (v_j,u_{j+1})，$1\leq j\leq k-1$，和 (v_k,u_1)
- step3: 输出上述结果 $\mathcal{T}$

时间复杂度：上述每一步都可以在多项式时间内完成，因此是多项式时间复杂度

正确性：

首先，问题的最优解 OPT 是一个经过所有顶点的环，即：OPT 也是图 G 的一个 2 匹配，因此，$cost(C)\leq \mathrm{OPT}$

由于 C 中的每个环至少包含 3 个顶点，因此，$k\leq \frac{n}{3}$

在 step2 中，我们删除了 k 条边，同时添加了 k 条边，在最坏情况下，删除的边的权均为 1，而添加的边的权均为 2，因此，

$$\begin{aligned} cost(\mathcal{T}) &\leq cost(C)-k+2k\\ &= cost(C)+k\\ &\leq cost(C)+\frac{n}{3} \end{aligned}$$

由于 C 中恰好包含 n 条边，且权至少为 1，因此，$cost(C)\geq n$

$$\begin{aligned} cost(\mathcal{T}) &\leq cost(C)+\frac{n}{3}\\ &\leq cost(C)+\frac{cost(C)}{3}\\ &= \frac{4}{3}cost(C)\\ &\leq \frac{4}{3}\mathrm{OPT} \end{aligned}$$

综上所述，该算法是这种特殊 TSP 问题的 $\frac{4}{3}$ 近似算法

题目 2

设每个布尔变量 $x_i, (1 \le i \le n)$ 对应的值为 $y_i \in \{-1, 1\}$，设 $y_0 \in \{-1, 1\}$，且

$$x_i = \begin{cases} TRUE, & \text{if } y_i = y_0 \\ FALSE, & \text{otherwise} \end{cases}$$

这种情况下，我们可以用 y_i 来表示每个子句 C 的值 $v(C)$，如果 C 被满足，则 $v(C) = 1$，否则，$v(C) = 0$。对于只有一个文字的子句，

$$\begin{aligned} v(x_i) &= \frac{1 + y_0 y_i}{2} \\ v(\neg x_i) &= \frac{1 - y_0 y_i}{2} \end{aligned}$$

对于包含两个文字的子句，有，

$$\begin{aligned} v(x_i \vee x_j) &= 1 - v(\neg x_i) v(\neg x_j) \\ &= 1 - \frac{1 - y_0 y_i}{2} \cdot \frac{1 - y_0 y_j}{2} \\ &= \frac{1 + y_0 y_i}{4} + \frac{1 + y_0 y_j}{4} + \frac{1 - y_i y_j}{4} \\ v(\neg x_i \vee x_j) &= \frac{1 - y_0 y_i}{4} + \frac{1 + y_0 y_j}{4} + \frac{1 + y_i y_j}{4} \\ v(x_i \vee \neg x_j) &= \frac{1 + y_0 y_i}{4} + \frac{1 - y_0 y_j}{4} + \frac{1 + y_i y_j}{4} \\ v(\neg x_i \vee \neg x_j) &= \frac{1 - y_0 y_i}{4} + \frac{1 - y_0 y_j}{4} + \frac{1 - y_i y_j}{4} \end{aligned}$$

不难发现，只包含两个文字的子句的值都是 $1 + y_i y_j$ 和 $1 - y_i y_j$ 的线性组合，合并同类项，将每一项的因数分别记为 $a_{ij}, b_{ij} \ge 0$，我们可以将目标函数写为，

$$\begin{aligned} \max & \sum_{0 \le i < j \le n} [a_{ij}(1 + y_i y_j) + b_{ij}(1 - y_i y_j)] \\ s.t.\ & y_i \in \{-1, 1\} \qquad\qquad 0 \le i \le n \end{aligned}$$

我们这样设置 SDP 问题：假设 y_i 对应向量 $\boldsymbol{v}_i$

$$\begin{aligned} \max & \sum_{0 \le i < j \le n} [a_{ij}(1 + \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle) + b_{ij}(1 - \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)] \\ s.t.\ & \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 1 \qquad\qquad 0 \le i \le n \\ & \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad\qquad 0 \le i \le n \end{aligned}$$

算法：SDP-MAX-2SAT

- step1: 解决上述 SDP 问题，得到最优解 $\boldsymbol{v}_i, 0 \le i \le n$
- step2: 均匀随机选择一个单位向量 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n+1}$
- step3: 设置 $y_i, 0 \le i \le n$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{if } \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j \rangle \ge 0 \\ -1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- step4: 设置 $x_i, 1 \le i \le n$

$$x_i = \begin{cases} TRUE, & \text{if } y_i = y_0 \\ FALSE, & \text{otherwise} \end{cases}$$

时间复杂度：上述每一步都可以在多项式时间内完成，因此是多项式时间复杂度

正确性：

设 W 为满足的子句的数量，则

$$W=\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(1+y_iy_j)+b_{ij}(1-y_iy_j)]$$

设 $\theta_{ij}\in[0,\pi]$ 为 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_j$ 之间的夹角，根据课件中对 SDP-MAXCUT 算法的分析，有

$$\Pr[y_iy_i=-1]=\frac{2\theta_{ij}}{2\pi}=\frac{\theta_{ij}}{\pi}\ge 0.878\cdot\frac{1-\cos\theta_{ij}}{2}$$
$$\Pr[y_iy_i=1]=1-\frac{\theta_{ij}}{\pi}\ge 0.878\cdot\frac{1+\cos\theta_{ij}}{2}$$

因此，

$$\mathrm{E}[y_iy_j]=1\cdot\Pr[y_iy_i=1]+(-1)\cdot\Pr[y_iy_i=-1]=1-\frac{2\theta_{ij}}{\pi}$$

进一步，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[W]&=\mathrm{E}[\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(1+y_iy_j)+b_{ij}(1-y_iy_j)]]\\
&=\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(1+\mathrm{E}[y_iy_j])+b_{ij}(1-\mathrm{E}[y_iy_j])]\\
&=\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(2-\frac{2\theta_{ij}}{\pi})+b_{ij}\cdot\frac{2\theta_{ij}}{\pi}]\\
&=2\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(1-\frac{\theta_{ij}}{\pi})+b_{ij}\cdot\frac{\theta_{ij}}{\pi}]\\
&\ge 0.878\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(1+\cos\theta_{ij})+b_{ij}(1+\cos\theta_{ij})]\\
&=0.878\sum_{0\le i<j\le n}[a_{ij}(1+\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle)+b_{ij}(1+\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle)]\\
&=0.878\cdot\mathrm{OPT}_{\mathrm{SDP}}\\
&\ge 0.878\cdot\mathrm{OPT}
\end{aligned}$$

因此，SDP-MAX-2SAT 是该问题的一个 0.878-近似算法

题目 3

如果城市之间的距离满足三角不等式，那么该问题可以抽象为 k-center 问题

贪心算法：

- step1: $S\leftarrow\emptyset$ （S 为最终选择的 k 个城市的集合）
- step2: 对于每个城市 u，初始化 $d[u]=\infty$（$d[\,.\,]$ 为每个城市到当前 S 的最近距离）
- step3: 重复下面步骤 k 次
  - 选择一个城市 v，使得 $d[v]$ 最大
  - 将 v 加入到 S 中
  - 对于每个城市 u，更新 $d[u]=\min\{d[u],d(u,v)\}$（$d(u,v)$ 表示两个城市之间的距离）
- step4: 返回 S

时间复杂度：选择每个新的中心花费 $O(n)$ 时间，因此，总的时间复杂度为 $O(nk)$

正确性：

引理 假设存在 $k+1$ 个城市 $u_1,\ldots,u_{k+1}$，使得 $d(u_i,u_j)>2R$ 对所有的 $i\neq j$ 成立。那么有 $\mathrm{OPT}>R$，OPT 是最优解的最小化的距离

证明：假设 $\mathrm{OPT} \le R$，那么存在 k 个城市 $v_1, \dots, v_k$ 诱导出 k 个聚类 $C_1, \dots, C_k$（即到每个中心城市最近的城市组成的集合）使得，对于，每个 C_h 和 $p \in C_h$，$d(p, v_h) \le R$。根据鸽巢原理，引理中的 $k+1$ 个城市中，存在两个城市 $u_i, u_j (i \ne j)$ 在同一个聚类 C_h 中，于是，

$$d(u_i, u_j) \le d(u_i, v_h) + d(u_j, v_h) \le 2R$$

矛盾！因此，引理成立！

设贪心算法的输出为 $S = \{u_i, \dots, u_k\}$，算法最后得到的最小化的距离为 $D = \max_{v\text{为某个城市}} d(v, S)$

假设 $D > 2 \cdot \mathrm{OPT}$，那么，存在一个城市 v 使得 $d(v, S) > 2 \cdot \mathrm{OPT}$；这里可以看出 $v \notin S$

由于贪心算法每次都选择距离 S 最远的点，并且每次迭代中都没有选择 v，因此有，

$$d(u_i, \{u_1, \dots, u_{i-1}\}) > 2 \cdot \mathrm{OPT},\ i = 2, \dots, k$$

于是，$\{u_i, \dots, u_k, v\}$ 这 $k+1$ 个城市两两之间的距离大于 $2 \cdot \mathrm{OPT}$

根据引理得，$\mathrm{OPT} > \mathrm{OPT}$，矛盾！

因此，$D \le 2 \cdot \mathrm{OPT}$，即：上述算法得到的距离最多是最优解的 2 倍

题目 4

对于点覆盖问题的 2-近似算法的输出 S，显然满足 $|S| \le 2|S^*|$。因此可以得到独立集问题的一个解 $I = V \setminus S$，因此，

$$|I| = |V| - |S| \ge |V| - 2|S^*|$$

那么。对于独立集问题的近似比为 $\frac{|I|}{|I^*|} = \frac{|V \setminus S|}{|V \setminus S^*|} = \frac{|V| - 2|S^*|}{|V| - |S^*|}$。当 $|S^*| = \frac{|V|}{2}$ 时，近似比为 0。

所以，给定一个点覆盖问题的 2-近似算法，并不能得到一个最大独立集问题的 $\frac{1}{2}$-近似算法

题目 5

> 前提：独立集问题和点覆盖问题都是 NP-完全问题

旅行商问题

引理 哈密顿回路问题是 NP-完全问题

> 哈密顿回路问题：无向图 $G = (V, E)$ 中是否存在哈密顿回路？

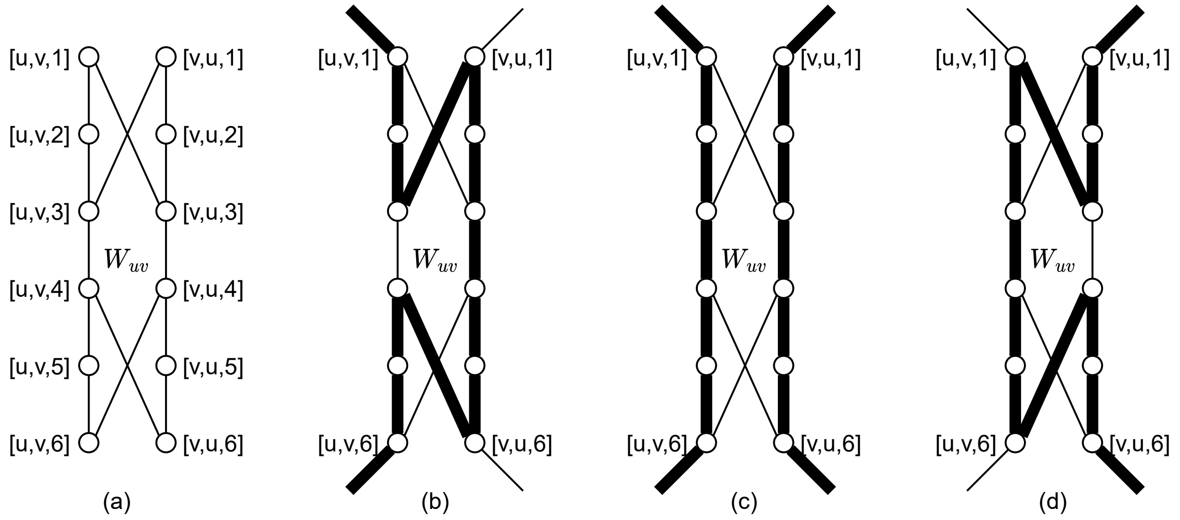
证明：

先说明哈密顿回路问题属于 NP。已知一个图 $G = (V, E)$，我们选取的证书是形成哈密顿回路的 $|V|$ 个顶点所组成的序列。验证算法检查这一序列包含 V 中每个顶点一次（第一个顶点会在末尾重复出现一次），并且它们在 G 中形成一个回路。也就是说，要检查序列中相邻两个顶点之间是否都存在一条边。显然，我们可以在多项式时间内验证。因此，哈密顿回路问题属于 NP

下面证明：点覆盖问题 $\le_P$ 哈密顿回路问题

给定一个无向图 $G = (V, E)$ 和一个整数 k，构造一个无向图 $G' = (V', E')$，使得它包含一个哈密顿回路，当且仅当 G 中有一个大小为 k 的顶点覆盖

对于 G 中的每条边 $(u, v) \in E$，先构造一个子图 W_{uv}（这些子图都是 G' 的一部分），其包含 12 个顶点，分别用 $[u, v, i], [v, u, i]$（$1 \le i \le 6$）表示，包含 14 条边，具体结构如下图 (a) 所示：



特别地，子图中只有顶点 $[u,v,1],[u,v,6],[v,u,1],[v,u,6]$ 这四个顶点包含与 G' 其它部分相邻的边。G' 中的任何哈密顿回路都必定以上图 (b)~(d) 中所示三种方法中的某一种来遍历 W_{uv} 中的边。

除了子图中的顶点之外，V' 中唯一的的其它顶点为选择器顶点 $s_1,s_2,\ldots,s_k$。

除了子图中的边之外，E' 中还有两类边：

- 首先，对于每个顶点 $u\in V$，都加入一些边来连接一对一对的子图，从而形成一条路径，它包含了所有对应于 G 中与 u 关联的的边的子图。对于与每个顶点 $u\in V$ 的所有顶点，将其任意地排序为 $u^1,u^2,\ldots,u^{\text{degree}(u)}$。将如下边都加入到 E' 中：

$$\{([u,u^i,6],[u,u^{i+1},1]):1\leq i\leq \text{degree}(u)-1\}$$

- E' 中最后一类边是将上述 $[u,u^1,1]$ 和 $[u,u^{\text{degree}(u)},6]$ 与每个选择器顶点连接，包含以下边：

$$\{(s_j,[u,u^1,1]):u\in V,1\leq j\leq k\}\cup\{(s_j,[u,u^{\text{degree}(u)},1]):u\in V,1\leq j\leq k\}$$

接着，我们要证明 G' 的规模是 G 的规模的多项式，因而可以在多项式时间内构造出 G'。

- 首先，G' 的顶点包含子图顶点和选择器顶点。每个子图包含 12 个顶点，因此，

$$|V'|=12|E|+k\leq 12|E|+|V|$$

- G' 中的边包括子图内的边，子图之间的边和子图与选择器顶点之间的边，三个部分的总和为：

$$|E'|=(14|E|)+\left(\sum_{u\in V}(\text{degree}(u)-1)\right)+(2k|V|)\leq 16|E|+(2|V|-1)|V|$$

现在，我们说明 G 中有一个规模为 k 的顶点覆盖当且仅当 G' 中有哈密顿回路

- 一方面，假设 $G=(V,E)$ 中有一个规模为 k 的顶点覆盖，$V^*\subset V$。设 $V^*=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$。通过为每个顶点 u_j 包含以下边，就可以在 G' 中形成一条哈密顿回路：

$$\{([u_j,u_j^i,6],[u_j,u_j^{i+1},1]):1\leq i\leq \text{degree}(u_j)-1\}$$

  这些边连接了所有与关联于 u_j 的边对应的子图。还要包含于上述 (b)~(d) 所示的子图的边，具体取决于那条边是否被 V^* 中的一个或两个顶点所覆盖。哈密顿回路还包含边：

$$\{(s_j,[u_j,u_j^1,1]):1\leq j\leq k\}\cup\{(s_{j+1},[u_j,u_j^{\text{degree}(u_j)},6]):1\leq j\leq k-1\}\cup\{(s_1,[u_k,u_k^{\text{degree}(u_k)},6])\}$$

  此回路从 s_1 开始，访问与所有关联于 u_1 的边对应的子图，再访问 s_2，访问与所有关联于 u_2 的边对应的子图…… 直到返回 s_1 时为止。每个子图都被回路访问了一次或两次，具体取决于 V^* 中的一个还是两个顶点覆盖了其对应的边。由于 V^* 是 G 的一个定点覆盖，E 中的每条边都与 V^* 中的某个顶点关联，因此回路访问 G' 的每个子图的所有顶点。由于回路还访问所有选择其顶点，因此，该回路为哈密顿回路

- 另一方面，假设 $G'=(V',E')$ 中包含一个哈密顿回路 $C\subset E'$。断言下面的顶点集合是 G 的一个顶点覆盖：

$$V^* = \{u \in V : (s_j, [u, u^1, 1]) \in C, 1 \le j \le k\}$$

我们把 C 划分为一些从某个选择器顶点 s_i 开始的覆盖路径，对于某个 $u \in V$，它们遍历一条边 $(s_i, u, u^1, 1)$，并终止于某个选择器顶点 s_j，而不会经过其它任何选择器顶点，称这样的路径为"覆盖路径"。根据 G' 的构造方法，每一条覆盖路径都必须从某个顶点 s_i 开始，对某个顶点 $u \in V$ 取边 $(s_i, u, u^1, 1)$，经过所有与 E 中关联于 u 的边对应的子图，然后终止于某个选择器顶点 s_j，称这一覆盖路径为 p_u。对于某个顶点 $v \in V$，p_u 所访问的子图都一定是 W_{uv} 或 W_{vu}。对于 p_u 所访问的每个子图，其顶点都会被一个或两个覆盖路径所访问。如果这些顶点被一条覆盖路径所访问，那么边 $(u, v) \in E$ 在 G 中就由顶点 u 所覆盖。如果有两条覆盖路径访问了该子图，那么另一条覆盖路径必定为 p_v，这就暗示着 $v \in V^*$，因而边 $(u, v) \in E$ 被顶点 u, v 所覆盖。因为每一个子图中的每一个顶点都要被某条覆盖路径所访问，所以不难发现，E 中的每一条边都由 V^* 中的某个顶点所覆盖

综上所述，点覆盖问题 $\le_P$ 哈密顿回路问题。由于，点覆盖问题是 NP-完全问题，且哈密顿回路问题是 NP 问题，所以，哈密顿回路问题也是 NP-完全问题。引理证毕！

旅行商问题对应的判定问题是：

$$\{\langle G, d, k\rangle : G = (V, E)\text{是一个完全图，}d\text{是}V \times V \to R\text{上的一个函数，}k \in R, G\text{中包含一个最长路径为}k\text{的旅行回路}\}$$

下面证明：哈密顿回路问题 $\le_P$ 旅行商问题

设 $G = (V, E)$ 是哈密顿回路问题的一个实例，构造旅行商问题的实例如下：先建立一个完全图 $G' = (V, E')$，定义距离函数 d 为，

$$d(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{若}\,(u, v) \in E \\ 1, & \text{若}\,(u, v) \notin E \end{cases}$$

显然，这个实例可以在多项式时间内产生

现在，我们说明 G 中有哈密顿回路当且仅当 G' 中有一个距离至多为 0 的回路

- 一方面，假定 G 中有一个哈密顿回路 C，C 中的每一条边都属于 E，因此这条回路在 G' 中的距离为 0
- 另一方面，假定 G' 中有一个距离至多为 0 的回路 C'。由于 E' 中边的距离都为 0 或 1，故，回路的距离就是 0，且回路上每条边的距离必为 0。因此，C' 仅包含 E 中的边，即：C' 是 G 的一个哈密顿回路

综上所述，哈密顿回路问题 $\le_P$ 旅行商问题。由于，哈密顿回路问题是 NP-完全问题，，即：所有的 NP 问题可以归约为哈密顿回路问题。因此所有的 NP 问题也可以归约为旅行商问题，所以，旅行商问题是 NP-难问题

最大加权独立集问题

最大加权独立集问题对应的判定问题的形式语言是：

$$\{\langle G, w, k\rangle : G = (V, E)\text{是一个图}, w\text{是}V \to R\text{上的一个函数，}k \in R, G\text{中包含一个加权和不小于}k\text{的独立集}\}$$

下面证明：最大独立集问题 $\le_P$ 最大加权独立集问题

设图 $G = (V, E)$ 包含一个大小至少为 k 的独立集为独立集问题的一个实例。构造加权独立集问题的实例如下：$G' = G, k = k$，定义权重函数为，

$$w(v) = 1,\ v \in V$$

现在我们说明图 G 包含一个大小至少为 k 的独立集当且仅当图 G' 包含一个权不小于k的独立集

- 一方面，当图 G 包含一个大小至少为 k 的独立集时，图 G' 也包含一个大小至少为 k 的独立集。由于每个顶点的权均为 1，因此这个独立集的权的和也至少为 k，即：图 G' 包含一个权不小于k的独立集

- 另一方面，当图 G' 包含一个权不小于k的独立集时，由于每个顶点的权均为 1，因此这个独立集的大小也至少为 k，这也对应图 G 包含一个大小至少为 k 的独立集

综上所述，最大独立集问题 $\leq_P$ 最大加权独立集问题

由于独立集问题是 NP-完全问题，即：所有的 NP 问题可以归约为独立集问题。因此所有的 NP 问题也可以归约为最大加权独立集问题。所以，最大加权独立集问题是 NP-难问题