



近似算法习题
算法设计与分析
秋季 2023

截止时间: 2023 年 12 月 16 日 18:00

题目 1 20 分

设 G 是一个完全无向图, 其中所有边的长度要么是 1, 要么是 2 (显然, G 满足三角不等式)。为这种特殊的图设计一个 TSP 的 $4/3$ 近似算法。

提示: 可以先在 G 中找到最小 2 匹配。最小 2 匹配 S 是边的一个子集, 使得每个点正好有两条相邻的边。你可以假设找到一个最小 2 匹配能在多项式时间内完成。

题目 2 20 分

考虑 MAX 2SAT 问题, 其中每个子句最多有两个文字。与最大割问题一样, 我们希望将 MAX 2SAT 问题表示为 SDP, 然后对其最优解进行舍入, 以得到 MAX 2SAT 问题的近似解。设计一个用于解决 MAX 2SAT 问题的 0.878-近似算法。

题目 3 20 分

假设给定了 n 个城市, 这些城市在一个平面上。想要在不同的城市中选择 k 个城市建立 k 个仓库, 目标是最小化每个城市到最近仓库的最大距离。这意味着找到一组 k 个顶点的集合, 任意点到其集合中顶点的最大距离最小。给定一个算法来确定这 k 个顶点的位置, 该算法最多是最优解的 3 倍, 并且运行时间是 $O(nk)$ 。

题目 4 20 分

回顾 (最小) 点覆盖和 (最大) 独立集问题。对于点覆盖问题, 给定图 $G = (V, E)$, 目标是找到一个最小的子集 $S \subseteq V$, 使得对于任意边 $(u, v) \in E$, 要么 $u \in S$ 要么 $v \in S$ 。对于独立集问题, 给定图 $G = (V, E)$, 目标是找到一个最大的子集 $I \subseteq V$, 使得 I 中的任意两个顶点之间都没有边。

一个简单的观察是: 如果 S^* 是 G 中的最小点覆盖, 则 $V \setminus S^*$ 是 G 中的最大独立集。

假设你已经有了点覆盖问题的一个 2-近似算法。问: 可否利用这个算法来给出最大独立集问题的一个 $1/2$ -近似算法? 为什么?

题目 5 20 分

证明以下命题:

- 命题 1: 旅行商问题 (TSP 问题) 是 NP-难 (NP-hard) 问题。
- 命题 2: 最大加权独立集 (Maximum-weight independent set) 问题是 NP-难问题。