

理论物理概论
——从牛顿力学到统一理论

曹知秋

2024 年 4 月 10 日

物理学家的无上考验在于达到那些普适性的基本规律，再从它演绎出宇宙。¹

——爱因斯坦 (Einstein)

¹引自爱因斯坦《探索的动机——在普朗克六十岁生日庆祝会上的讲话》。（见《爱因斯坦文集》第一卷，商务印书馆，P102。）这句名言在一定程度上是经过演绎了的，原文直译为：“物理学家的最高使命是要得到那些普遍的基本规律，由此世界体系就能够用单纯的演绎法建立起来。”现在看来，应当说爱因斯坦的上述论断是有失偏颇的。诚然，探寻物理世界的基本规律确实是物理学中的一项非常重要的工作，但它绝不是唯一重要的工作。探究各个尺度上的有效规律，并揭示出物理世界中存在的丰富而又复杂的现象，其重要性丝毫不逊色于对基本理论的研究。

序言

目前大多数理论物理学的参考书都只侧重于某一个或者某几个具体分支的介绍，而鲜有教材从整体的视角出发，从最简单的部分一路深入到物理学的基础前沿理论。理论物理学本身是一个整体，只不过出于研究问题和研究对象的不同才被割裂为不同的分支，这从某种程度上说是一种缺憾。就作者所知，彭罗斯 (Penrose) 的《通向实在之路》是这方面的一个优秀的典范，不过这本书重叙述而轻演算，更像是一本深入的科普著作。费曼 (Feynman) 的《费曼物理学讲义》浅明易懂、清晰流畅，不过其深度只及一些较为初步的量子力学。朗道 (Landau) 的十卷本《理论物理学教程》博大精深、卷帙浩繁，不过难免过于庞杂，容易使读者迷失在细节之中。国内以《理论物理概论》或《理论物理导论》为名出版的教材大多数是分析力学、电动力学、量子力学、统计物理这四门本科物理专业课的一个缩减版，其广度和深度仍然稍显欠缺。² 有鉴于此，作者在这份讲义中将试图以物理的基本原理为主线，来给出理论物理学从上至下的一个概述。同时作者还将谈谈自己对物理学的一些理解，以期给读者提供些许看待问题的新视角。

虽然理论物理学的发展已有数百年的历史，其所讨论的内容包罗万象、纷繁复杂，但确实存在着一条清晰的逻辑线索能够将理论物理学的最核心部分联系起来（尽管这一逻辑线索与历史的发展并不相同）。这就是物理系统的拉格朗日 (Lagrange) 表述，包括最小作用量原理以及路径积分方法。这条逻辑线索可以简述如下：在经典力学中，物体的运动可以由一个二阶微分方程来描述。这个微分方程可以等价地转换为一个泛函极值问题，由此就得到了系统的分析力学表述。将光速不变原理所要求的洛伦兹不变性条件加入到系统的作用量中，就得到了狭义相对论。将平直时空推广为弯曲时空并引入弯曲时空的动力学，就得到了广义相对论。将经典力学中的泛函极值问题推广为对所有可能的路径的积分，就得到了量子力学。将粒子的路径积分推广为场的泛函积分，就得到了量子场论。尽管度规场的泛函积分（即引力的量子化）仍然是一个悬而未决的难题，不过通过对场作用量的进一步推广，可以得到一些更加深入的理论，它们可以为统一理论的发展提供一条前进的道路。

尽管上述思想早已为理论物理学研究者所熟知，但时至今日，大多数物理教材仍然以运动方程（狭义相对论/广义相对论）或者哈密顿 (Hamilton) 表述（量子力学/量子场论）的方式进行展开。这可能是因为拉格朗日表述的形式要更加抽象，在解决具体问题时常常是不够方便的。然而相比于其他的表述而言，拉格朗日表述也有其独到的优势。形式上的抽象带来的是概念上的简洁，拉格朗日表述可以以最自然的方式和最小的代价从低能理论过渡到高能理论，理论的数学结构也常常能够在拉格朗日表述中得到更加完整的展现。在处理许多物理问题时，拉格朗日表述常常具有不可替代的优势。在现代物理学中，拉格朗日表述已经成为物理学的基本语言之一，其重要性和深刻性早已毋庸置疑。对贯穿理论物理始终的这一思想进行系统性的介绍，不仅是必要的，也是有启发性的。

本讲义即以物理系统的拉格朗日表述作为主线，力图为各个尺度上的物理理论提供一个统一的叙述。它讨论的内容包括牛顿 (Newton) 力学（第一章）、分析力学（第二章）、狭义相对

²当然，确实存在着以整体视角介绍整个物理体系的教材。例如就作者所知，较为系统的有 Manton 等著 *The physical world: an inspirational tour of fundamental physics*，以及 Lawrie 著 *A unified grand tour of theoretical physics* 等，其中前者浅易一些，后者则叙述得更加艰深。

论（第三章）、广义相对论（第四章）、量子力学（第五章）、量子场论（第六章）以及统一理论（第七章）。在内容的编排上，讲义采取了尽可能简单易懂的讲法，辅以适当的说明性文字，在介绍重要结果的基础上不深入过多的细节。

各章节的组织与安排将按照前述的逻辑线索进行。第一章是后续所有内容的基础，具有扎实的高中数学和物理基础的读者应当能够理解。如果想要真正涉足理论物理学，则至少要阅读第二章中的内容，这一章以及后续的章节至少要求读者熟悉一元和多元微积分中的内容，以及一些关于矩阵的基本概念。第三章和第五章是独立的，阅读完第二章之后可以根据需要阅读这两章的内容。第四章至少需要第三章的基础，第六章至少需要第三章和第五章的基础，而第七章则需要前面所有章节的基础。第八章扼要地概括了讲义中第一章至第六章的主要内容。

第一章至第六章的末尾均编制了大量的习题，它们实际上是为具有更深的物理基础的读者准备的，目的是通过启发性的方法补充一些未在正文中提及的重要内容。为了减轻正文的负担，作者将部分计算细节放在了附录 B 之中，另外一部分过于复杂和累赘的计算则略去，读者可以参考相关的教材和专著。在附录 C 之中，作者列举了一些在物理学中起到重要作用的常数。

在讲义中用专门的篇幅讨论（可能的）统一理论是有风险的，因为这一部分的理论尚无证据支撑，且随时可能会被实验排除。目前已经经受充分实验检验、且被物理学家广泛认同的理论包括以广义相对论为基础的宇宙学标准模型，以及以量子场论为基础的粒子物理标准模型，这些内容在讲义的第一章至第六章已做了较为系统的介绍。然而不论是理论本身的结构还是已有的实验数据和观测结果都提示我们，现有的理论绝非物理世界的终极理论。在能量更高、尺度更小的地方一定存在着新物理，只不过它的具体形式目前尚不为人所知。在这方面已有许多尝试，然而由于缺乏实验证据的支持，人们目前已经发展出了种类繁多且互相竞争的统一理论模型。我们实际上很难说明这些模型究竟在什么程度上是可靠的，以及它们究竟能在何种程度上反映真实的物理世界。在讲义的第七章中，作者选取了一些有代表性的理论进行简单的介绍，以使读者能够了解一些统一理论方面的研究进展。尽管这些内容仍然是不够可靠且富有争议性的，但它们确实代表了物理学家现阶段（以及在将来很长一段时间内）对统一理论的猜测。即使这些理论最终被实验排除了，它们也代表了这个时代物理学家的艰辛探索和曲折历程，其中所蕴含的思想对未来的物理学研究也有一定的启发。³

由于选材的缘故，讲义所覆盖的内容是相当宽泛的，它跨越了数个不同的领域、包含了大约在十几本不同的专著中才能够得到完整叙述的内容。而这就带来了一个问题，即各个不同领域中的符号与约定通常是很不相同的。作者原计划将所有的约定全部统一，但经过权衡后最终放弃了这个想法。因此，讲义中的各章节将依照各领域文献中的通用约定选取合适的单位制、度规张量和 γ 矩阵，而将其他的符号和约定（包括各物理量符号的选取、各公式中的正负号以及归一化系数）尽可能地进行统一。这样选择的优点是 can 与其他文献中的通用约定基本保持一致，便于读者进一步的学习研究；而缺点则是在一定程度上失去了各章节之间的连贯性和统一性。附录 A 中系统地介绍了讲义中使用的符号约定，在各章节的开头也简要介绍了该章节中的约定。所使用的约定第一次出现时也在正文中作了介绍，同时在脚注中注明了其他文献所采用的约定。

需要说明的是，物理学的发展已有数百年的历史，其体系之宏大、内容之精深远非一本小书所能概括。因此，在选材上这本讲义不追求全面，也不注重具体问题的应用，而是希望能够提供一条尽可能清晰的主线。当然，对不同题材的取舍和组织将不可避免地受到作者本人的知识结构和兴趣的影响。读者可以看到，各章节的展开基本上是以高能物理学的视角展开的，并且在讨论中特别强调了利用较高的观点（但并未上升到过于抽象的数学高度）来构建整个基础理论体系。作者希望能够借此让读者尽快对物理学的最基本框架有所了解。

这当然远远不是理论物理学的全部，并且讲义中所组织的材料恐怕也不能够让许多领域的

³除此之外，目前关于统一理论的中文论著仍然是非常少见的。据作者所知，在统一理论方面，系统性和详尽程度超越本讲义的中文专著仅有《超对称物理导论》（李新洲、徐建军，1992）。另有一部优秀的通俗科学史著作《超弦史话》（李淼，2016）介绍了弦理论的发展历史。

研究者感到满意。正如凝聚态物理学家安德森 (Anderson) 所说：“将万物还原为简单基本定律的能力，并不蕴含从这些定律出发重建整个宇宙的能力。”诚然，探寻物理世界的基本规律确实是物理学中的一项非常重要的工作，但它绝不是唯一重要的工作。探究各个尺度上的有效规律，并揭示出物理世界中存在的丰富而又复杂的现象，其重要性丝毫不逊色于对基本理论的研究。作者无力对此进行进一步的探讨，相关的内容恐怕只能留给其他研究者来完成了。

由于作者学识所限，讲义中的疏漏谬误之处在所难免，敬请各位读者批评指正。

作者谨识

2024.04

目录

序言	v
目录	ix
第一章 牛顿力学	1
1.1 位移函数	1
1.2 速度与导数	2
1.3 位移与不定积分	3
1.4 位移与定积分	5
1.5 微分方程	7
1.6 矢量、多粒子系统与势	9
1.7 微扰法	12
1.8 数值计算	14
1.9 伽利略变换	16
1.10 习题	18
第二章 分析力学	23
2.1 最小作用量原理	23
2.2 拉格朗日量与广义坐标	26
2.3 对称性与守恒律	31
2.4 哈密顿正则方程	33
2.5 混沌与统计物理	35
2.6 经典场论	43
2.7 习题	49
第三章 狭义相对论	59
3.1 洛伦兹变换	59
3.2 相对论性自由粒子	65
3.3 张量分析	67
3.4 自由张量场	71
3.5 自由旋量场	73
3.6 相对论性场论	78
3.7 经典电动力学	87
3.8 自发对称性破缺	91
3.9 规范对称性	92
3.10 习题	94

第四章 广义相对论	101
4.1 等效原理	101
4.2 引力场中的自由粒子	102
4.3 弯曲时空中的物理学	107
4.4 引力场的作用量	115
4.5 标架表述	121
4.6 史瓦西度规与黑洞	124
4.7 宇宙学标准模型	128
4.8 习题	133
第五章 量子力学	139
5.1 电子双缝干涉	139
5.2 路径积分	140
5.3 生成泛函与关联函数	146
5.4 波函数	151
5.5 算符理论	158
5.6 自旋	169
5.7 多粒子系统	172
5.8 量子统计物理	180
5.9 格点理论与配分函数	187
5.10 测量与诠释	189
5.11 相对论性量子力学	197
5.12 习题	200
第六章 量子场论	211
6.1 标量场路径积分量子化	211
6.2 标量场正则量子化	221
6.3 标量场重整化	234
6.4 重整化群与可重整性	244
6.5 旋量场和矢量场的量子化	253
6.6 量子电动力学	266
6.7 量子色动力学	279
6.8 电弱统一理论	287
6.9 粒子物理标准模型	297
6.10 引力场量子化	301
6.11 习题	304
第七章 统一理论	315
7.1 天空中的乌云	315
7.2 作为有效理论的量子场论	316
7.3 规范统一理论	318
7.4 额外维理论	331
7.5 超对称理论	337
7.6 弦理论	360
第八章 总结：物理世界的规律	385

附录 A 约定和记号	391
附录 B 计算细节	397
B.1 一维谐振子的关联函数	397
B.2 氢原子系统的求解	398
B.3 自由标量场的费曼传播子	400
B.4 LSZ 约化公式	402
B.5 关联函数与编时乘积真空期望值的等价性	404
B.6 维克定理	406
B.7 圈积分的正规化引理	407
B.8 微分散射截面公式	410
B.9 卢瑟福散射	412
B.10 瓦德-高桥恒等式	414
B.11 真空极化与顶点修正的张量结构	416
B.12 非阿贝尔规范场的量子化	419
附录 C 物理学常数	421
C.1 粒子物理标准模型中的参数	421
C.2 重要物理常数	422
C.3 天文学常数	425
C.4 宇宙的演化过程	429
参考文献	431

第一章 牛顿力学

在本章中，我们将采用国际单位制。

1.1 位移函数

作为一个最简单的例子，我们首先来考察小球的自由落体运动。取坐标原点为小球的初始位置 $x = 0$ ，并取竖直向下为正方向。假设我们在 $t = 0$ 时刻在地面附近释放一个静止的小球，那么根据自由落体定律，小球在 t 时刻所处的位置 x 将可以表示为

$$x = \frac{1}{2}gt^2, \quad (1.1)$$

式中 g 为重力加速度。这个公式给出了小球在时刻 t 所处的位置。

在得到了这个结果之后，我们就可以研究小球的运动。例如，从上述公式中将时间 t 反解出来，我们得到

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad (1.2)$$

从这个公式中我们可以求出小球运动到任意位置 x 所需要的时间。类似地，自由落体运动的速度 v 满足公式

$$v = gt, \quad (1.3)$$

从这个公式中我们可以求出小球在任意时刻 t 的速度。小球的能量 E 和动量 p 可以通过速度直接得出

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.4)$$

$$p = mv, \quad (1.5)$$

式中 m 为小球的质量。以此类推，我们可以求出其他我们所感兴趣的运动学量。

通过上述讨论，我们已经对于自由落体运动有了比较透彻的认识。但是现在我们要问：对于自由落体运动来说，尽管上面提到的各种运动学量都已经被我们求出来了，但是会不会存在某些运动学量，它们的信息仍然我们所不知道的呢？如果是这样的话，那么我们仍然不能称得上是充分了解了自由落体运动，因为在运动中仍然有一部分信息是我们所没有确定下来的。现在我们要问的不仅仅是小球在某时刻的速度是多少，抑或是小球要经过多长时间才可以达到某位置。我们想要的是一些更加野心勃勃的结果——这个运动中的一切信息，我们都已经了解了吗？

这个问题的答案其实很令人欣慰：我们真的已经了解了自由落体运动中的一切信息。这一切的根源在于 $x = gt^2/2$ 这个公式。现在我们不把它看作是代入时间然后用来计算位移的公式，而将它看作是位移 x 对时间 t 的函数。它蕴含着这样一种信息：任给一个时刻，我们都可以通过这个函数得到该质点所处位置。由于运动仅仅是质点在一系列不同时刻上空间位置的变化，因此这个公式唯一地确定了自由落体运动。

这样，运动的全部信息就被唯一地“浓缩”进了位移函数 $x = x(t)$ 之中。可以说一旦得到了位移函数，我们也就完全了解了相应的运动。这一结果虽然看似不起眼，但是却是通向理论物

理学的至关重要的一步。它给出了我们接下来的全部努力方向，并且给了我们一个非常强大的保证——一旦得到了位移函数，那么全部的工作都已宣告结束。因此，为了理解牛顿力学系统的运动，我们接下来要做的事情只有两个：

- (1) 在已知位移函数 $x = x(t)$ 的情况下，求出其他的运动学量。
- (2) 对给定的力学系统，求出其位移函数 $x = x(t)$ 。

1.2 速度与导数

我们考虑一个更加一般的一维运动，在那里位移函数表示为一般的函数形式

$$x = x(t). \quad (1.6)$$

得到位移函数之后，我们首先要看的就是这个运动的快慢程度，换句话说，是速度随时间的变化关系。而要想得到这一关系，我们首先需要为质点在某一时刻的瞬时速度下一个定义。

我们已经知道质点在一段时间内的平均速度的定义。考虑质点在时刻 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间内的平均速度，它定义为质点在这一段时间内的位移 $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ 与时间 Δt 的比值，即

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

这个平均速度刻画了质点在 t 到 $t + \Delta t$ 这一段时间内平均的快慢程度。¹

尽管平均速度并不是我们想要的瞬时速度，但是可以预想，如果时间间隔 Δt 取得足够小，那么这个平均速度就是对瞬时速度的一个较为精确的近似。而如果时间间隔取为无限小（也就是趋于零），那么平均速度将会无限接近于瞬时速度。事实上我们就把这个平均速度的极限作为瞬时速度的定义。将时间间隔 Δt 趋于零的过程记为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ ²，则瞬时速度可以表示为

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (1.8)$$

等式右边的部分称为函数 $x(t)$ 对时间 t 的导数，一般记作 dx/dt 、 $\dot{x}(t)$ 或者 $x'(t)$ 。将上述极限计算出来，我们就求出了位移 $x(t)$ 所对应的速度。

让我们看两个例子。对于匀速直线运动来说，位移函数为 $x = vt$ 。根据导数的定义，这一运动的速度为

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - vt}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v = v. \end{aligned} \quad (1.9)$$

这代表匀速直线运动的速度是一个常数 v 。同样地，我们也可以利用导数的定义求出自由落体运动的速度

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = gt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

¹这里存在着一个几乎被所有人忽略了的问题，那就是：为什么我们非要用位移与路程的比值来定义一个描述物体运动快慢的物理量呢？这个问题实际上对所有的物理量来说都是存在的（例如读者可以思考一下为什么要用电压与电流的比值来衡量一个物体的导电性能）。事实上除了历史上的原因之外，将物理量选取为某个定义的最小的原因就是这种定义有一些比较方便的性质。例如，若用位移与时间的比值来定义速度，则它可以在伽利略 (Galileo) 变换下保持线性叠加。相比之下，在狭义相对论中，我们有时用快度 y 来描述物体的运动快慢，它在洛伦兹 (Lorentz) 变换下是线性叠加的，使用起来会更加方便。

²这里的极限可以以如下方式来理解：如果在 x 足够接近 x_0 的情况下， $f(x)$ 可以任意地接近 f_0 ，则我们称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 下的极限为 f_0 。

这代表自由落体运动的速度是重力加速度与下落时间的乘积。上述结果与我们的预期都是相符的。仿照类似的过程，我们可以计算出更加复杂的运动的速度。

实际在计算函数的导数时，我们通常不直接利用定义计算，而是先计算出基本初等函数（常数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数）的导数，然后给出任意两个函数的和、差、积、商及复合的导数规则。由于我们所考虑的绝大多数函数都是由基本初等函数的四则运算和复合构成的（称为初等函数），因此因此重复利用上述公式，我们就可以求出任何初等函数的导数。

至此我们求出了任意一维运动 $x(t)$ 的速度，它就是位移函数 $x(t)$ 的导数。如果说速度是位移的变化率，并且它可以用位移的导数来描述，那么作为速度的变化率，加速度将同样可以用速度的导数，也就是位移的二阶导数来表示

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}. \quad (1.11)$$

至于质点的能量和动量，我们可以利用式 (1.4) 和式 (1.5) 直接通过速度求得。这样，我们就从位移函数 $x(t)$ 之中得到了我们感兴趣的力学量。

1.3 位移与不定积分

在上一节中，我们已经讨论了从位移函数求出各个力学量的方法，然而我们仍不知道质点位移函数的求法。直到牛顿提出了牛顿运动定律并发展了微积分的数学工具之后，这个问题才被彻底解决。

牛顿发现，所有力学系统都满足一条最基本的运动规律：物体的加速度 a 与其所受外力 F 成正比，而与其质量 m 成反比，即³

$$F = ma, \quad (1.12)$$

这被称为牛顿第二定律，它确定了一个力学系统的运动。注意到加速度是位移函数的二阶导数，因此牛顿第二定律实际上给出的是位移函数的二阶导数所满足的关系式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (1.13)$$

与代数方程的概念类似，我们将上式称为关于位移函数 $x(t)$ 的微分方程，它代表着系统的位移函数以及其导数（未知量）和系统的诸多已知量（如质量、外力等）之间的关系。将它求解出来，我们就能够得到我们想要的未知量（位移函数）的信息了。

求解微分方程并不是一个神秘的过程，它无非就是“找到”一个满足上述方程的函数而已。从这一点上看，它与求解代数方程是没什么太大的区别的。只不过，绝大多数的微分方程求解起来极为困难，甚至无法找到解析解。事实上我们可以证明，几乎所有的微分方程都没有封闭的解析解。⁴ 因此如果我们能够找到一种不错的方法可以解出某一类微分方程，这固然是很好的。但是在大多数情况下，我们并不知道该如何求解。“找到”微分方程的解，在某些情况下更像是将方程的解“猜出”来。在这里使用“猜出”而不是“解出”一词或许更能体现出我们数学工具的匮乏以及在面对微分方程时的无力之感。

假设系统受到一个随时间变化的外力 $F(t)$ ，则求解牛顿第二定律的目标就变成了找到一个二阶导数为 $F(t)/m$ 的函数 $x(t)$ 。这个问题还可以化为一个更简单的形式，即先找到一个一阶导数为 $F(t)/m$ 的函数 $v(t)$ ，它就是系统的速度；然后再找到一个一阶导数为 $v(t)$ 的函数 $x(t)$ ，它

³这仍然容许牛顿第二定律中存在一个任意的比例系数 k ，只不过在国际单位制中，我们已经通过恰当地定义力的单位“牛顿”(N) 将这个比例系数消除了。在后文中我们将看到，通过选取恰当的单位制，真空光速 c 、约化普朗克 (Planck) 常数 \hbar 、玻尔兹曼 (Boltzmann) 常数 k_B 、真空介电常数 ϵ_0 都可以通过类似的方法消除掉。这种单位制被称为自然单位制，它是理论物理学中最常用的单位制。

⁴并且不仅仅是微分方程，甚至几乎所有的代数方程也同样都没有封闭的解析解。

就是系统的位移。这样牛顿第二定律就被转化为了一个一阶微分方程组

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m}, \quad \frac{dx}{dt} = v(t). \quad (1.14)$$

它们都具有这样一个统一的形式

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1.15)$$

式中 $f(x)$ 是一个已知的函数。如果我们能给出这个方程的解法, 那么前面的问题也就迎刃而解了。

方程 (1.15) 是最简单的微分方程, 它实际上就是求导的逆运算。我们把这个方程的解称为 $f(x)$ 的不定积分, 记作

$$y = \int f(x) dx. \quad (1.16)$$

给出函数 $f(x)$ 的具体形式, 我们就可以将函数 $y(x)$ 求解出来。至于如何来求这个积分, 确实有一些技巧, 不过主要还是依靠经验, 根据导数公式一点点反推。

作为一个最简单的例子, 我们来考虑自由落体运动。在自由落体运动下, 物体受到一个恒定的重力 $G = mg$, 因此它的加速度恒为 $g = G/m$ 。因此我们需要找到一个速度函数 $v(t)$ 满足方程

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad (1.17)$$

换句话说, 也就是求常数 g 的不定积分。初看起来, 这个积分的求取是有些无从下手的。不过如果我们注意到幂函数的导数为

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}, \quad (1.18)$$

那么我们就可以推断出幂函数的不定积分为

$$\int t^n dt \sim \frac{1}{n+1} t^{n+1}. \quad (1.19)$$

但是这个结果仍是不完整的, 因为如果我们在函数中加上一个常数项, 那么它的导数不会发生改变。因此, 完整的不定积分为

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C, \quad (1.20)$$

式中 C 为一个任意的常数。

根据这个公式, 我们就可以计算出物体运动的速度

$$v(t) = \int g dt = gt + C_1, \quad (1.21)$$

而对速度进行进一步的积分, 我们就可以得到物体的位移函数⁵

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt = g \int t dt + \int C_1 dt \\ &= \frac{1}{2} g t^2 + C_1 t + C_2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

式中 C_1, C_2 是两个任意的常数。我们可以验证, 上述位移函数 $x(t)$ 的二阶导数确实是一个常数 g 。这样除了两个待定的常数之外, 我们就求出了自由落体运动的位移函数。

从物理上看, 这两个多余的常数意味着仅仅依靠牛顿第二定律还不能把物体的运动完全确定下来。因此, 我们仍然需要找到其他的条件来进一步为系统施加限制。我们发现在物体受力不变的情况下, 改变初始的速度和位置会产生一个新的运动。因此为了求出一个物体的位移函数, 我们需要的不仅仅有外力 F 的具体形式, 还有物体在某个给定的 t_0 时刻的初始位置 x_0 和初始速度 v_0 ⁶

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t), \quad (1.23)$$

⁵这里我们已经隐含地利用了积分运算的线性性。

⁶这里的约束条件可以适当放宽, 比如质点在某一时刻的速度和另一时刻的位置, 或者质点在两个不同时刻的位置。在物理上, 取两个不同自变量的函数值作为约束条件的边值问题同样是常见的, 但对于这种问题来说, 微分方程的变量已经不再是时间。对于动力学系统来说, 有意义的约束条件仍然是质点的在某一时刻的初始速度和初始位置。

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0. \quad (1.24)$$

通过这两个初始条件，我们就可以将两次不定积分中出现的常数确定下来。

以自由落体运动为例，其位移函数 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \quad (1.25)$$

由于在初始时刻物体处在坐标原点处且保持静止，因此自由落体运动的初始条件为

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 0. \quad (1.26)$$

将位移函数的具体表达式代入到初始条件中，我们就可以求解出位移函数中的两个待定系数的取值

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (1.27)$$

这样我们就求出了自由落体运动的位移函数

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad (1.28)$$

它可以由牛顿第二定律和初始条件唯一地确定下来。

至此，我们就得到了从牛顿第二定律求出位移函数的一般方法，即在特定的初始条件之下求解牛顿第二定律所对应的微分方程。对于一个给定的随时间变化的外力来说，它的具体做法就是对系统所受外力求两次积分。仿照类似的过程，我们可以计算出更加复杂外力作用下物体的运动。

最后需要特别说明的是，积分的计算实际上是非常困难的。在所有的被积函数之中，真正能被我们成功求解的只是极少一部分。在绝大多数情况下，面对着哪怕只是稍显复杂的被积函数，我们也只能放弃掉显式地求出积分的幻想，转而去求出系统的近似解或者是数值解，甚至仅仅是定性地分析一下解的性质。

1.4 位移与定积分

前面我们一直在用微分方程和不定积分的视角来审视积分，但实际上还有一种不同的视角来审视这个问题，这就是定积分。现在让我们暂时忘掉前面介绍的微分方程的解法，并试图在已知速度函数 $v(t)$ 的情况下计算质点在时刻 $t = 0$ 与 $t = t_0$ 之间的位移 $x(t_0)$ 。

我们目前所能处理的只有匀速直线运动的情况。假设在时间 t 内质点的速度恒为 v ，则质点在这一段时间内的位移可以写成

$$x = vt_0. \quad (1.29)$$

类似地，如果质点的运动是由多段匀速直线运动拼合而成的，那么总的位移就可以表示为各段匀速直线运动位移之和

$$x = \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i, \quad (1.30)$$

式中 v_i 和 Δt_i 分别为第 i 段匀速直线运动的速度和持续时间。

变速运动的处理是我们目前所力不能及的，但是我们可以认为在一个很短的时间间隔内，速度几乎是不发生变化的。于是我们可以将整个变速运动划分为一系列时间间隔很短的运动，并用该段时间间隔中某时刻质点的运动速度 $v(t_i)$ 来代替这一小段时间中质点的运动速度。如果取的时间间隔足够短的话，那么这将是一个好的近似。最终在这一段时间内的位移就近似等于将所有微小的匀速直线运动加起来的結果。

现在假设我们以任意的方式将整段路径分为若干段，记第 i 段路径的时间为 Δt_i ，并将整段路径的速度用 Δt_i 中的某一时刻 t_i 来近似。如果我们让所有路径的时间间隔 Δt_i 趋于无穷小，

那么这个近似就将收敛于真实的位移

$$x(t_0) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i, \quad (1.31)$$

等式右侧的极限与我们划分路径以及取极限的具体方式无关。我们把这个极限定义为 $v(t)$ 从 0 到 t_0 的定积分，记作

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t. \quad (1.32)$$

这一定积分在物理上给出了质点在时刻 $t = 0$ 与 $t = t_0$ 之间的位移

$$x(t_0) = \int_0^{t_0} v(t) dt. \quad (1.33)$$

现在我们利用这个定义来求自由落体运动的位移。自由落体运动的速度函数为 $v = gt$ ，这意味着自由落体运动的速度是随着时间均匀增加的。为方便起见，我们将整段时间均匀地划分为 n 段，每段时间间隔都取为相等的 $\Delta t = t_0/n$ ，并取每一段运动的速度为该时间间隔结束时质点的速度，即 $t_i = i\Delta t$ 。将各段运动的位移加在一起并取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限，我们得到

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{t_0/\Delta t} g(i\Delta t) \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} g \Delta t^2 \sum_{i=1}^{t_0/\Delta t} i \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} g \Delta t^2 \frac{(1 + \frac{t_0}{\Delta t}) \frac{t_0}{\Delta t}}{2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} g (t_0^2 + t_0 \Delta t) = \frac{1}{2} g t_0^2, \end{aligned} \quad (1.34)$$

这样我们就求出了质点在时刻 $t = 0$ 与 $t = t_0$ 之间的位移 $x(t_0)$ 。更一般地，我们可以让末态取为任意的一个时刻 t ，于是我们得到质点位移随时间的变化

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.35)$$

这就是自由落体运动的位移函数。从上述推导中可以看出，最终的位移与时间间隔 Δt 无关。这一结果是在我们的意料之内的，因为物体真实的位移应当与人为划分的无限小时间间隔无关。

通过这样一种求和的方式，我们给出了利用速度函数求位移的方法。但是在很多情况下，级数求和甚至要比计算积分更加困难，因此我们还要去寻找更加行之有效的求解方法。为此我们不妨设想将定积分的上限替换为一个变量 t ，并考虑将积分上限由 t 改变为 $t + \Delta t$ 的过程，此时位移将由 $x(t)$ 变为 $x(t + \Delta t)$ 。如果 Δt 非常小，那么两段位移的差值就可以近似地视为 $v(t)\Delta t$ ，即

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx v(t) \Delta t. \quad (1.36)$$

将等式两边同时除以 Δt 并取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限，我们得到

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v(t), \quad (1.37)$$

这实际上就是

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t). \quad (1.38)$$

它说明位移函数（也就是速度函数的定积分）的导数实际上就是速度函数。

上面的结果与我们用微分方程（不定积分）得到的结果是相同的。这并不出乎我们的意料，因为我们考虑的本来就是同一个物理过程。但是在定积分的视角下，我们实际上还可以更进一步。考虑从时刻 $t = 0$ 到 $t = t_0$ 的位移 $x(t_0)$ ，如果 $S(t)$ 是方程 1.38 的一个解，那么对于所有 t_0 来说， $S(t_0)$ 与 $x(t_0)$ 最多只差一个固定的常数 A

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = S(t_0) + A. \quad (1.39)$$

现在我们考虑 $t_0 = 0$ 的情况，此时系统的初末状态相等，积分结果应为零，于是我们得到

$$\int_0^0 v(t) dt = S(0) + A = 0, \quad (1.40)$$

从中可以求解出常数 A 的取值

$$A = -S(0). \quad (1.41)$$

因此我们有

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = S(t_0) - S(0). \quad (1.42)$$

对于更一般的定积分来说, 我们有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.43)$$

式中 $F(x)$ 是任意一个导数为 $f(x)$ 的函数, 称为 $f(x)$ 的原函数。这一结果被称为牛顿-莱布尼兹 (Leibniz) 公式。牛顿-莱布尼兹公式是一元微积分中最深刻的结果, 它指出函数 $f(x)$ 在某一区间上的积分, 实际上就等于其原函数 $F(x)$ 在这个积分区间的边界上两点的差值。⁷

至此, 我们给出了通过速度函数求位移的方法, 它可以通过对速度函数作定积分得到。类似地, 通过加速度函数求速度的做法是相同的。因此利用牛顿第二定律求位移实际上就是求两次定积分的过程。利用这一方法, 原则上我们就可以对任意给定的外力 $F(t)$ 求出运动的位移函数了。

1.5 微分方程

在前面两节中, 我们解决了质点在一个给定的外力作用下运动的问题。但是很多时候, 质点所受的力还可能与其自身的运动状态有关, 这种情况是更加复杂的。比如, 一个弹簧会给质点施加一个与位移成正比的力, 而质点所受的阻力有时可以表示为一个与速度成正比的力。这些力不是给定的, 而是会随着质点的运动而不断地发生变化。因此, 我们要求解的是这样一个更加普遍的微分方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right), \quad (1.44)$$

其初始条件为

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0. \quad (1.45)$$

与不定积分的情况相比, 这里的微分方程更加复杂, 它的求解也需要更多的技巧。

让我们考虑质点仅受一个与速度成正比的阻力的简单情况。假设质点的初位移为 0, 而初速度为 v_0 。仿照不定积分一节的做法, 我们希望通过牛顿第二定律给出质点的位移函数及其各个导数之间的关系式。令质点的质量为 m , 阻力的比例系数为 μ 。由于阻力的方向与运动方向相反, 因此公式中阻力为负值。这样, 牛顿第二定律就可以表示为

$$ma(t) = -\mu v(t), \quad (1.46)$$

即

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt}. \quad (1.47)$$

这是一个微分方程, 它给出了位移的导数与其二阶导数之间的关系式。求解这一微分方程, 就意味着“找出”一个函数 $x(t)$, 它满足上述牛顿第二定律给出的关系式。如果存在唯一的函数 $x(t)$ 满足上面的关系式以及两个预先给定的初始条件, 那么这个 $x(t)$ 就是我们要找的位移函数了。

⁷ 牛顿-莱布尼兹公式是更加强有力的斯托克斯 (Stokes) 定理的一个特例。斯托克斯定理告诉我们, 对于某“函数”的微分在某区域内的积分, 可以表示为这个“函数”本身在该区域边界上的另一个积分。斯托克斯定理不仅仅适用于一维积分, 还适用于高维积分, 甚至还适用于流形 (弯曲空间) 中的积分。多元微积分中的格林 (Green) 公式、斯托克斯公式和高斯 (Gauss) 公式实际上都是斯托克斯定理在不同维度下的特例。

我们还要指出, 不应当将定积分仅仅视为取了特殊值的定积分, 这是初学微积分的读者常见的误解。从技术的角度上来说, 定积分的计算完全可以绕过不定积分来进行; 而从数学结构的角度上来说, 定积分和不定积分本质上是不同的数学对象。更恰当地说, 不定积分应当视为某个微分方程的解, 而定积分应当视为对某些微分的求和, 我们在正文中实际上采取的就是这种观点。在多元微积分中, 定积分与不定积分的关联将不如一元微积分中的那样紧密。在后文中, 我们所考虑的积分大多都是定积分。

我们现在来求解这个微分方程。注意到方程之中不包含 x 本身, 因此我们可以把质点的速度 (也就是位移的一阶导数) 作为变量来求解。这样这个二阶的微分方程就转化为了一个一阶的微分方程

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu v. \quad (1.48)$$

这一方程要求我们找到一个函数 $v(t)$, 使得它对时间的导数正比于它自身, 比例系数为 $-\mu/m$ 。

可以验证, 指数函数恰好就是我们所需要的函数。为此我们试探性地设方程的解具有如下的形式

$$v = e^{-at}, \quad (1.49)$$

式中 a 是一个待定的常数。将上述形式代入到方程之中, 可以得到

$$-mae^{-at} = -\mu e^{-at}. \quad (1.50)$$

从中我们可以求出待定常数 a 的取值

$$a = \frac{\mu}{m}. \quad (1.51)$$

这样, 我们就找到了上述微分方程的一个解

$$v(t) = e^{-\mu t/m}. \quad (1.52)$$

方程 (1.48) 具有一个性质, 即如果函数 $v(t)$ 是方程的一个解, 那么 $v(t)$ 的某个倍数也将是方程的一个解。并且事实上我们可以证明, 上述方程所有的解都可以表示为其某个特解乘以一个常数系数的形式。因此, 方程 (1.48) 最一般的解可以表示为

$$v(t) = C_1 e^{-\mu t/m}, \quad (1.53)$$

式中 C_1 是一个待定系数。求得了速度函数之后, 位移函数可以通过直接的不定积分得到

$$x(t) = -\frac{C_1 m}{\mu} e^{-\mu t/m} + C_2, \quad (1.54)$$

式中 C_2 是第二个待定系数。

C_1 和 C_2 两个系数要通过初始条件确定下来。对于我们所考虑的运动来说, 这两个初始条件为

$$x(0) = 0, \quad v(0) = v_0. \quad (1.55)$$

将上述位移函数代入到初始条件之中, 我们就可以求出两个待定系数的取值

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = \frac{v_0 m}{\mu}. \quad (1.56)$$

于是微分方程的解为

$$x(t) = \frac{v_0 m}{\mu} (1 - e^{-\mu t/m}). \quad (1.57)$$

这样我们就求出了质点的运动。

让我们再看一个例子。假设一个质点受到弹簧作用, 在一个与位移成正比的弹力下运动, 比例系数为 k 。由于弹力与位移方向相反, 因此弹力的表达式中要额外多出一个负号。这样牛顿第二定律就可以表示为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (1.58)$$

这个系统被称为谐振子。

这个方程的解应当是一个二阶导数正比于其自身相反数的函数, 比例系数为 k/m 。我们发现正弦函数 (或者余弦函数) 恰好满足上述条件, 为此可以试探性地设方程的解具有正弦函数的形式

$$x(t) = \sin \omega t, \quad (1.59)$$

式中 a 为一个待定的常数。将上述形式代入到方程之中，可以得到

$$-m\omega^2 \sin \omega t = -k \sin \omega t. \quad (1.60)$$

从中解得

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.61)$$

类似地，对于一个余弦函数

$$x(t) = \cos \omega t \quad (1.62)$$

来说，我们有相同的结果。因此上述方程的通解将可以表示为正弦函数与余弦函数的线性组合

$$x(t) = C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right), \quad (1.63)$$

式中 C_1 和 C_2 是两个待定系数。

对于谐振子来说，其初始条件可以一般性地表示为

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \quad (1.64)$$

将上述位移函数代入到初始条件之中，我们就可以求出两个待定系数的取值

$$C_1 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad C_2 = x_0. \quad (1.65)$$

于是微分方程的解为

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \quad (1.66)$$

这样我们就求出了谐振子的运动。⁸

至此我们已经给出了在牛顿力学框架下求解质点运动的一般方法。对于单个质点来说，它的位移函数 $x(t)$ 将满足由牛顿第二定律给出的微分方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right). \quad (1.67)$$

如果能够在给定的初始条件下求解出这个方程，我们就可以得到系统的运动。当然，想要具体地求解出这个微分方程绝非易事，不过这是另外一个层面上的问题了。

1.6 矢量、多粒子系统与势

前面讨论的都是质点在一维空间中的运动，将之推广到三维空间中是容易的。既然给出了位移随时间的变化关系 $x = x(t)$ 就能够刻画质点在一维空间中的运动，那么分别给出三个方向上位移分量随时间的变化关系就能够刻画质点在三维空间中的运动了。我们用 x, y, z 分别代表三个方向上的位移分量，⁹ 这样质点的位移函数就可以写成

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.68)$$

相应地，三个方向上的速度可以表示为

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}. \quad (1.69)$$

⁸根据这两个例子来看，读者可能会觉得求解微分方程需要先求出其带两个待定常数的通解，然后将初始条件代入得到特解。实际上这只有在线性的微分方程之中才可能做到。究其原因在于线性微分方程的解构成了一个线性空间，只需要找到线性空间中的任意一组线性无关的基矢就可以求出整个线性空间中的矢量。对于非线性方程来说，方程的初始条件与方程本身是一个不可割裂的整体，它们必须被视为一个整体而同时求解。

⁹在三维空间中选取两两垂直的三个方向有两种不同的方法。我们通常选取的是右手坐标系，即将右手放置在坐标原点，伸出右手的拇指、食指与中指，使这三指两两垂直，则中指所指的方向为 x 轴正方向，拇指所指的方向为 y 轴正方向，食指所指的方向为 z 轴正方向。如果选取左手重复上述操作，则我们将得到左手坐标系。除非借助于某些破坏宇称的过程（如弱相互作用），否则我们无法在更基本的层面上将这两种坐标系区分开来。

三个方向上的加速度可以表示为

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z(t) = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.70)$$

牛顿第二定律指出, x 方向上的加速度与质点在 x 方向上的力 F_x 成正比, y 方向上的加速度与质点在 y 方向上的力 F_y 成正比, 而 z 方向上的加速度与质点在 z 方向上的力 F_z 成正比。一般来说, 某方向上的力不仅仅与该方向上的位移和速度有关, 还可能与其余方向上的位移和速度有关。因此, 牛顿第二定律的一般形式可以表示为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t), \quad (1.71)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t), \quad (1.72)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t). \quad (1.73)$$

这是一个常微分方程组。在相应的初始条件下将这个方程组求解出来, 我们就得到了系统的运动。

这个表达式的形式看起来颇为繁琐, 我们希望能够对它进行简化。考虑到三个方向上的运动是完全平等的, 因此我们可以将各个不同方向上的位移表示为一个矢量的三个分量

$$\mathbf{x} = (x, y, z), \quad (1.74)$$

或者将位移矢量表示为各个不同方向上基矢的线性组合

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad (1.75)$$

式中 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 分别为 x, y, z 三个方向上的基矢。对位移矢量求关于时间的导数, 得到的仍然是一个矢量, 称为速度矢量 \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z, \quad (1.76)$$

或者将其表示为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (1.77)$$

对速度矢量再求一次关于时间的导数, 我们得到的仍然是一个矢量, 称为加速度矢量 \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_z, \quad (1.78)$$

或者将其表示为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right). \quad (1.79)$$

相应地, 质点所受到的力也可以视为一个矢量

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z), \quad (1.80)$$

或者将其表示为

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z. \quad (1.81)$$

如果有多个力作用在这个质点上, 则它们的合力按照矢量加法的方式叠加, 也就是各分量分别相加

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i F_{ix}\mathbf{e}_x + \sum_i F_{iy}\mathbf{e}_y + \sum_i F_{iz}\mathbf{e}_z. \quad (1.82)$$

因此利用矢量的记号, 我们可以将质点运动的牛顿第二定律写成如下的统一形式

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (1.83)$$

如果写出上述方程的分量, 我们将得到三个不同方向上的牛顿第二定律

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \quad (1.84)$$

上式给了我们一个启示,那就是应当将质点在空间中的位移矢量视为一个整体,而不应当仅仅将其视为在三个坐标分量上的投影。牛顿第二定律矢量式的含义是:位移矢量对时间的二阶导数与力矢量成正比,而这个力矢量同时又是位移矢量、速度矢量和时间的函数。如果我们采用其他不同的坐标系,那么各坐标分量所满足的方程的形式可能会有很大的变化,但是作为一个整体的位移矢量所满足的方程却与坐标系无关。因此,采用矢量表达式而非分量表达式有时是更有启发性的。

还有另一种简化表达式的方法,那就是以完全平权的方式处理系统的各个分量。为此,我们将 x, y, z 统一地用 x_i 来表示,式中指标 i 取 $1, 2, 3$ 代表着位移的三个分量

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z. \quad (1.85)$$

相应地,速度和加速度可以表示为

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad a_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}. \quad (1.86)$$

对于力的三个分量也用同样的记号来表示。这样,三个分量的运动方程就可以表示为

$$m \frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i(x_i, v_i, t). \quad (1.87)$$

上式中指标 i 取三个不同的值的时候可以给出三个不同的方程,而函数自变量中的指标 i 代表着在自变量中取遍所有可能的三个分量。我们还将采用一个简略记号,即在未作说明的情况下,对同一项乘积中出现的两个重复指标自动进行求和,比如

$$x_i y_i = \sum_i x_i y_i, \quad (1.88)$$

这被称为爱因斯坦 (Einstein) 求和约定。

上述结果可以进一步推广到多质点相互作用的系统,其基本思想是利用牛顿第二定律写出每个质点的运动方程,而后联立微分方程组求解。设第 a 个质点的质量为 m_a , 位移为 \mathbf{x}_a 。用 \mathbf{F}_a 来表示质点 a 所受的合外力,它一般来说与各个质点的位移、速度和时间有关。因此,系统的运动方程可以写成

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{x}_a}{dt^2} = \mathbf{F}_a(\mathbf{x}_a, \mathbf{v}_a, t). \quad (1.89)$$

式中不对指标 a 求和。

以上是一般性的讨论,我们并未指定力的具体形式。如果我们为系统添加更强的限制条件,那么上述表达式还可以继续简化。我们注意到有一些力有一种很好的性质,即它做功的大小与路径的具体取值无关,而只与路径的起点和终点有关,这样的力我们称为保守力。对于这样的力,我们可以选定一个点作为势能零点,然后定义某点的势能为从势能零点到该点处该力所做的功的负值

$$V(\mathbf{r}) = - \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.90)$$

其中 l 为两点间的任意一条路径,式中的积分定义为对该条路径无限细分,计算每条路径微元 $d\mathbf{r}$ 上力 \mathbf{F} , 然后再将整条路径上的功累加起来。由于积分和导数互为逆运算,因此质点所受的合外力就等于势函数对坐标的偏导数

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla V, \quad (1.91)$$

式中

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.92)$$

为一个矢量偏导数算符,偏导数 $\partial f / \partial x$ 指的是将函数 f 中除 x 外的其他所有变量都看作是常数,然后对 x 求导。将上述表达式写成分量形式就是

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (1.93)$$

现在我们要求多粒子系统中所有的力都是保守力，这意味着存在势函数 V ，使得质点所受的力的 \mathbf{F}_a 可以表示为

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_a}. \quad (1.94)$$

这样，系统的牛顿第二定律就可以表示为

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{x}_a}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_a}, \quad (1.95)$$

式中不对指标 a 求和。给出势函数 V 的恰当形式，我们就得到了物体的运动方程。

将质点所受的外力表示为势函数偏导数的形式固然非常简洁，但问题在于我们对这个系统的限制条件会不会太强了？要求所有相互作用均为保守力，这现实吗？毕竟常见的支持力、阻力、摩擦力都不是保守力。如果排除掉这些情况，那我们还能处理什么问题呢？

实际上这取决于我们在哪个层面上看待问题。如果我们站在基本粒子的层面上来看待问题的话，那么我们（在牛顿力学范畴内）见到的所有力几乎都是引力或者电磁力，而这两种力恰好都是保守力。¹⁰ 支持力实际上就是组成两个物体的粒子之间的电磁相互作用的总和，而阻力也无非就是物体与空气分子之间的相互作用。因此，如果我们只考虑“基本力”的话，那么所有的力都将是保守力，也就是可以用势函数表示的力。如果某种力不能用势函数表示，那一定是因为我们为了简便起见割裂开了物体与环境之间的关系。

在下一章中，我们将发展一种更为普遍的方法，在那里由于完整约束产生的支持力会被隐藏起来。这样在相当大的程度上，我们就可以将所有的力都视为保守力了。

1.7 微扰法

至此为止，我们给出了处理牛顿力学问题的一般方法¹¹：根据牛顿第二定律写出质点位移所满足的微分方程，然后在特定的初始条件下进行求解。然而一旦我们真正去着手求解一个力学系统，就会发现问题将变得极其困难。甚至即使是对于稍复杂一些的系统来说，其微分方程也是无法求解的。那么，对于那些无法精确求解的物理系统来说，我们还能够做些什么？

如果我们不能够精确地求解一个系统，那么我们或许可以退而求其次，求出系统的近似解。幸运的是，如果待求的系统与精确可解的系统足够接近，那么我们仍可以求出可靠的近似解。也就是说，如果在一个能够精确求解的系统之上加上一个微小的扰动，那么我们仍可以利用近似的方法分析这个系统的运动。下面我们将以微扰法为例，给出求系统近似解的具体方法。

现在让我们考虑单摆系统。所谓单摆，指的就是一根固定住一端的长绳与一个被长绳悬挂起来的重物所构成的系统。将重物拉开竖直方向一段距离，然后让它自由运动，那么物体就会像钟摆一样在重力的作用下来回摆动，如图 1.1 所示。这个系统的运动是有些类似于谐振子的，不过比谐振子要更加复杂。简单地说，谐振子的回复力正比于位移 x ，而单摆的回复力正比于角位移 θ （也就是长绳与竖直方向偏移的角度）的正弦值 $\sin \theta$ 。这一点可以通过受力分析证明，也可利用下一章中介绍的求解约束系统的方法进行处理。我们可以以角位移 θ 为变量列出系统的运动方程，结果为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (1.96)$$

式中 $\omega^2 = g/l$ ， g 是重力加速度，而 l 是绳长。

如果微分方程中包含运动变量的正弦函数，那么它处理起来将是较为困难的。¹² 因此，我们需要找到一种更简单的函数来逼近它。在这里，我们选取的是形如

$$\sin \theta = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \dots \quad (1.97)$$

¹⁰ 磁力是个例外，它由磁矢势的旋度来描述，我们在下一章中会用更普遍的方法将它包括进来。

¹¹ 这里求解的仍然是无约束的“自由”问题，有约束的问题将在下一章之中处理。

¹² 事实上单摆系统仍然是可以精确求解的，只不过其解应当用椭圆函数来表示。本章末的习题中讨论了单摆系统的求解方法。

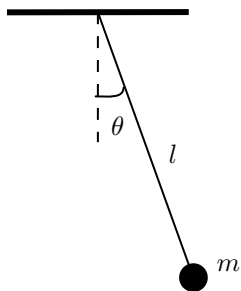


图 1.1: 单摆的示意图。

的幂级数。由于这个系统是在 $\theta = 0$ 附近运动的, 因此我们要求幂级数在 $\theta = 0$ 附近与 $\sin \theta$ 最接近。满足这个条件的最佳选择就是与 $\sin \theta$ 在 $\theta = 0$ 处的任意阶导数都相同的幂级数, 我们称之为泰勒 (Taylor) 级数。对于一般的函数 $f(x)$ 来说, 它在 $x = x_0$ 处展开的泰勒级数可以表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.98)$$

对于正弦函数来说, 它在平衡位置 $\theta = 0$ 处的泰勒级数为

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \dots, \quad (1.99)$$

我们就用这个函数来代替方程中出现的三角函数。如果 θ 取得足够小, 那么级数中所有高阶项的贡献就都可以忽略不计了, 此时回复力与 θ 成正比, 它实际上就是简谐振子。只有在 θ 较大的时候, 级数中后面的项才给出较为明显的贡献。为简便起见, 在求近似解的时候我们只取级数中的前两项。这样系统的运动方程就可以表示为¹³

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta - \frac{1}{6}\omega^2\theta^3 = 0. \quad (1.100)$$

在这个方程中, 前面两项就是可以精确求解的部分, 而非线性的 θ^3 项就是微扰。要想看出 θ^3 项对系统的影响, 我们可以尝试着改变这一项的大小, 来看看系统有什么变化。在本例中, 我们可以把方程改写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta + \varepsilon\theta^3 = 0, \quad (1.101)$$

式中 ε 代表着扰动的强度。当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统就回到了无扰动的状态, 这时它就是一个简谐振子。

如果改变 ε 的取值, 那么系统的位移函数 $\theta(t)$ 也会发生变化, 因此我们可以将 θ 看作是 ε 的函数。由于我们考虑的是微小的扰动, 因此 ε 应当取一个较小的值。在这种情况下, 我们可以将 θ 展开为 ε 的幂级数

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots, \quad (1.102)$$

式中各个 θ_i 均为时间 t 的函数。将上式代入到方程 (1.101) 之中并保留到 ε^2 项, 我们将得到

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \varepsilon^2\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega^2\theta_0 + \omega^2\varepsilon\theta_1 + \omega^2\varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon\theta_0^3 + 3\varepsilon^2\theta_0^2\theta_1 = 0. \quad (1.103)$$

要使这个方程对任意 ε 都成立, 我们需要让 ε 各幂次前的系数均等于零。整理上述方程并逐项比较系数, 我们就可以得到各 θ_i 之间的关系

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \omega^2\theta_0 = 0, \quad (1.104)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega^2\theta_1 = -\theta_0^3, \quad (1.105)$$

¹³事实上这个含三次项的非线性振子仍然是可以精确求解的, 只不过其解应当用椭圆函数来表示。本章末的习题中讨论了该非线性振子的求解方法。

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega^2\theta_2 = -3\theta_0^2\theta_1. \quad (1.106)$$

这组方程的求解方法是直接的。第一个方程就是未受扰动的方程，从中我们可以直接求解出 θ_0 。¹⁴ 解出第一个方程之后，接下来就可以把 θ_0 代入到第二个方程之中求解出 θ_1 ，然后再把 θ_0 和 θ_1 代入到第三个方程中求解 θ_2 ，以此类推。如果我们在方程中保留更多的项，那么我们就能够得到系统的更高阶展开式，求解过程是类似的。最后，将得到的所有项累加起来，我们就得到单摆系统的近似解。

上面介绍的方法就是微扰法，它是物理学中应用最广泛的近似方法。微扰法的核心思想就是将方程按照微扰级次展开，然后进行逐级求解。在真实的计算之中，我们一般只计算出前几阶的结果。通常来说这足以给出一个相当可靠的近似解，我们可以以此为基础来分析系统的性质。

读者或许觉得微扰论只是一种权宜之计，但实际上很多时候求出精确解已经成为了奢望，甚至是不切实际的幻想。随着物理理论复杂性的增加，人们所能计算出来的系统将变得越来越少，相应地也就越来越依赖微扰法等近似方法给出的结果。在量子力学之中，除了类似于谐振子、氢原子以及方势阱这样简单的系统之外，其他的相互作用系统基本都需要依靠各种近似方法来求解。而在量子场论之中，甚至绝大多数有价值的解析结果都是通过微扰论给出的。

1.8 数值计算

如果微扰论也失效了，我们该怎么办？很多时候，物理系统根本不可能被划分为一个可以精确求解的系统，外加一个与之相比幅度较小的扰动。在这种非微扰的情况下，物理系统已经远离我们可以解析求解的区域了，情况变得异常复杂。并且恰恰这才是最普遍的情况——毕竟能被我们精确求解的系统，真的少之又少。

在这种情况下，我们就要利用化无限为有限的方法，求出系统的数值解。这是目前我们最有力的近似手段，但同时它的代价也是巨大的：在这个方法之中，任何物理量都要代之以具体的数字。这就意味着，我们不再能够直接分析系统的某物理量对运动有什么影响，我们也不能够从总体上得到系统的运动性质。我们得到的将不再是系统的运动函数，而仅仅是系统“在这个时刻处在这个位置”这种非常不完备的信息。此外，它所消耗的计算量通常也极为巨大，即使是在电子计算机已经如此发达的今天也是如此。但是无论如何，它比完全束手无策的情况要好太多了。

现在我们就来看看数值方法是如何解决那些无法解析求解的问题的。仍然以前面讨论过的单摆问题为例，系统的运动方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (1.107)$$

系统的初始速度和初始位移为

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta(0)}{dt} = \omega_0. \quad (1.108)$$

这就是我们要求解的系统。

在自然界中，单摆是以一个连续的过程进行运动的，但是由于我们处理不了这个问题，因此我们将这个问题化为单摆在一系列离散的时间上运动的情况。我们将连续的时间离散化为一系列的时间间隔 Δt ，并且将第 i 个离散的时刻记为 $t_i = i\Delta t$ ，将该时刻单摆所处的位置记为 $\theta(t_i)$ （其中只包含 t_i 一个变量）。由于时间是离散的了，因此我们现在也要把导数表示为离散形式。回忆导数的定义，它本身就是一个令时间间隔取极限的过程。现在如果我们不让这个时间间隔取到无限小，而让它保持一个有限大小的值，那么我们就直接得到了导数的离散形式

$$\frac{d\theta(t_i)}{dt} \approx \frac{\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})}{\Delta t}. \quad (1.109)$$

¹⁴我们实际上是要在给定的初始条件下求出这个方程的一个特解。得到这个特解之后，我们要将它代入到第二个方程之中，然后在初始条件为零的情况下求出第二个方程的特解。以此类推，我们可以求出任意高阶的微扰解。

类似地，我们可以进一步求出二阶导数的离散形式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta(t_i)}{dt^2} &\approx \frac{\frac{d\theta(t_i)}{dt} - \frac{d\theta(t_{i-1})}{dt}}{\Delta t} \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})}{\Delta t} - \frac{\theta(t_{i-1}) - \theta(t_{i-2})}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{\theta(t_i) - 2\theta(t_{i-1}) + \theta(t_{i-2}))}{\Delta t^2}.\end{aligned}\quad (1.110)$$

将上述公式代入到运动方程之中，我们就得到了运动方程的离散形式¹⁵

$$\frac{\theta(t_i) - 2\theta(t_{i-1}) + \theta(t_{i-2}))}{\Delta t^2} + \omega^2 \sin \theta(t_{i-2}) = 0. \quad (1.111)$$

从上述表达式中将 $\theta(t_i)$ 求解出来，我们就得到了递推公式

$$\theta(t_i) = 2\theta(t_{i-1}) - \theta(t_{i-2}) + \Delta t^2 \omega^2 \sin \theta(t_{i-2}), \quad (1.112)$$

这个公式可以让我们在已知较小 $\theta(t_i)$ 的情况下得到较大的 $\theta(t_i)$ 的结果。递推公式的初始条件可以由系统的初始条件离散化后得到

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta(t_1) = \theta_0 + \omega_0 \Delta t. \quad (1.113)$$

利用 $\theta(t_0)$ 和 $\theta(t_1)$ 的值，我们可以计算出 $\theta(t_2)$ ，然后进一步就可以计算出 $\theta(t_3), \theta(t_4)$ ，以此类推。如果时间间隔划分得足够细，那么这个近似就会足够精确，我们就可以以任意的精度得到系统在任何时刻所处的位置。

需要注意的是，如果我们仍然在公式中保留各个变量，那么随着递推的进行，变量之间的嵌套关系会变得越来越复杂。因此我们要把递推关系中的变量 Δt 、 ω^2 、 θ_0 、 ω_0 全部替换为具体的数值，这样整个表达式就是一些纯数量之间的运算，我们可以从中得到有意义的结果。也正因为如此，这种近似方法才被称为“数值计算”——我们所处理的，从来都只有一堆数量之间的关系而已。

或许有些读者对于解析解还是有着独特的情结：如果我们求不出解析解，那当然没有办法；但如果我们能够用各种各样的技巧真的将解析解求解出来，那岂不是更好？诚然，解析解确实能够更好地在全局上告诉我们系统的某些性质，它也可以在理论上让我们对物理系统有更加深刻的认识。但是从某种程度上来说，我们也不必对解析解过分地执着，这主要有两个原因。

第一个原因在于，很多时候一个过于复杂的解析解实际上对我们并没有什么太大的启发。对于许多微分方程来说，我们确实可以求出它们的解析解，只不过这些解析解的形式过于复杂，以至于失去了任何启发性的意义。¹⁶ 诚然，这些公式精确地给出了方程的解析解。但是当我们看着这些复杂而又冗长的结果的时候，我们真的知道了这个方程的解究竟是什么吗？或许只有在我们真的利用数值方法计算出了这个方程的数值解、真正地作出这些函数的具体图像之后，我们才真正理解了这个方程，也真正能够利用这些结果去进行一些更加深入的分析。

另一个原因可能要更加本质一些。事实上在很多时候，我们用于描述物理系统的理论模型仅仅是近似，我们所列出的方程也并不是对于世界精确无误的描述。因此，即使我们能够求出解析解，那也仅仅是近似之后的模型的解析解。从这个意义上讲，在很多时候盲目地追求解析解其实是不必要的，对于那些已经进行过较大幅度的简化之后的问题来说更是如此。正如朗道所说：“近似在一般物理理论中起着重要作用，在从一般规律推导具体规律的过程中其作用也毫不逊色……确定所研究现象的近似程度在理论研究中是极端重要的。最严重的错误是：采用非常精确的理论并详细计算所有的细节修正，同时却忽略了比它们大得多的物理量。”

¹⁵ 如果我们利用其他方式（例如前向差分）来离散导数的话，则可能不能直接得到迭代公式，而是一个巨大无比的方程组。求解方程组当然比计算迭代公式困难，不过其优势是精度更高。

¹⁶ 以代数方程为例，可以考察一元三次方程和一元四次方程的根式解。

1.9 伽利略变换

在前面的章节之中，我们一直在讨论物体在时间和空间中的运动。现在是时候思考一个更基本的问题了：究竟什么是时空？

用一种最普通的观点来看，时间就象是一条不断流淌的河流，而空间就像是一个巨大的舞台，世间万物都不会对时间和空间本身造成影响。这种观点是从牛顿延续下来的，现在我们一般称之为“牛顿时空观”或者“绝对时空观”。它的核心观点是：存在着一个（或者至少是一系列）绝对的、不受外界影响的时空，物理规律是相对于绝对时空而言的。

牛顿举了一个例子来证明绝对时空观的观点：试想在一个水桶中装满水，然后将水桶绕其中心快速地旋转。受到离心力的作用，水面会形成向下凹陷的形状。在未转动的时候，水面是水平的，因此毫无疑问，水面凹陷是因为转动引起的。现在的问题在于：水面凹陷是因为水相对于什么的转动引起的？

如果答案是相对于周围的物体转动，那就错了。因为我们可以设想保持水桶不动，而让整个宇宙以水桶为中心沿反方向旋转。结果发现水桶的水面还是平的，没有发生凹陷，相反所有其他的东西都被甩得远远离开了中心。这说明水面的凹陷并不是由于相对于周围物体的转动而产生的。

我们还可以进一步设想将宇宙中的其他所有东西都拿掉（包括盛水的水桶），这时偌大的宇宙中只存在这一团水了。然后，我们让这团水旋转起来。神奇的是，在这种情况下，水面的凹陷仍然可以被观察到。那么这时水面的凹陷是因为相对于什么的转动引起的呢？在牛顿看来答案已经很明显了：水面的凹陷是因为相对于“绝对参考系”的转动引起的。¹⁷

在牛顿的年代，物理学家提到“绝对参考系”的时候指的确实是一个特殊的参考系，即“绝对时空”。牛顿本人关于时空问题的表述是：“绝对的、真正的和数学的时间，它自身以及它自己的本性与任何外在的东西无关，它均一地流动……绝对的空间，它自己的本性与任何外在的东西无关，总保持相似且不动……绝对的运动是物体从一个绝对的地方移动到另一个绝对的地方……相对的量不是它们承担名字的那些量自身，而是它们的那些可以感觉到的测量（无论精确或不精确），并被常人用来代替被测量的量。”因此，在他看来确实存在着一个真正绝对的参考系，也存在着绝对的静止和运动：凡是和这个绝对的参考系静止的物体就是静止的，而凡是和这个绝对的参考系有相对运动的物体就是运动的。等到电磁学得到发展之后，人们假设空间之中存在着一种稀薄的介质“以太”，它可以传递电磁相互作用，绝对参考系就可以选取为以太在其中保持静止的那个参考系。

现在我们已经不说水面的凹陷是相对于“绝对参考系”的转动引起的，而说它是相对于“惯性系”的转动引起的。在惯性系中，一切不受外力的物体总保持静止或者匀速直线运动，并且相对于惯性系做匀速直线运动的任意一个参考系与惯性系都是平权的。换句话说，在不同惯性系中发生的事件将遵循着相同的物理规律。为看出这一点，我们考虑两个相互作用匀速直线运动的惯性系。假设在第一个惯性系 s 的 (t, x, y, z) 处发生了某个事件，而这个事件在相对于该惯性系以速度 v 做匀速直线运动的另一个惯性系 s' 中看起来就像是在 (t', x', y', z') 处发生的一样。假设在 $t = 0$ 时刻两参考系的原点和坐标轴都完全重合，并假设两参考系之间的相对速度 v 沿 x

¹⁷实际情况是这样的吗？这是个颇为微妙的问题。根据牛顿理论来看，至少“想当然地”应该是这样的。马赫 (Mach) 对此提出了疑问，他认为物体的惯性来自于该物体与宇宙中其他所有物体之间的相互作用，这被称为马赫原理。正如他本人所说：“牛顿的旋转水桶实验仅仅告诉我们，水对于筒壁的相对旋转不产生任何显著的离心力，而它对于地球及其他天体质量的相对转动才产生这种力……如果把水桶固定，而让众恒星旋转，能够再次证明离心力不会存在吗？”按照马赫原理，若宇宙中空无一物，则旋转参考系中的水面将不会凹陷。但目前的实验并未给出支持马赫原理的证据，并且马赫原理与广义相对论之间也存在着一定的矛盾。因此，马赫原理目前并未被物理学家所接受。

轴正方向, 如图 1.2 所示。根据牛顿力学, 我们可以写出这两组参考系之间的变换关系

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.114)$$

上式被称为伽利略变换。对上式求关于时间的导数, 我们可以得到两个参考系中质点运动的速度之间的关系

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v. \quad (1.115)$$

更一般地, 如果参考系 s, s' 之间以速度 \mathbf{v} 运动, 则若物体在参考系 s 中的速度为 \mathbf{u} , 那么它在参考系 s' 中的速度将变为

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (1.116)$$

这与我们的预想是相符的。

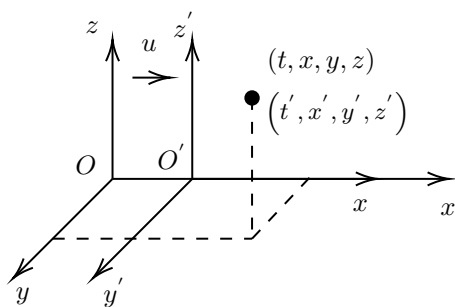


图 1.2: 伽利略变换。

我们说在不同惯性系 s 以及 s' 中发生的事件遵循着相同的物理规律, 这指的是物理规律不论用 (x, y, z, t) 来表示, 还是用 (x', y', z', t') 来表示, 形式都是一样的。或者用更精炼的语言可以表述为: 物理规律在伽利略变换下不变。¹⁸ 力学规律在不同的惯性系中都是相同的, 这意味着牛顿第二定律在两个参考系中都可以写成相同的形式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.117)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{u}', t'), \quad (1.118)$$

这里我们要求上述两式中 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 与 $\mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{u}', t')$ 具有相同的函数形式。或者更进一步地说, 如果 $\mathbf{x}(t)$ 是运动方程的一个解, 那么变换后得到的 $\mathbf{x}'(t')$ 也是同样的运动方程的一个解。如果物体所受的外力均为由其它物体所产生的保守力 (换句话说, 如果所有力都是“基本力”), 那么上述条件确实可以得到满足。因此, 力学规律在不同的惯性系中确实是相同的。

与之相应, 如果某参考系相对于惯性参考系以加速度 \mathbf{a} 做加速运动, 那么牛顿第二定律在该参考系中的形式就会发生改变。我们需要在物体的上面加上一个惯性力¹⁹

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a}, \quad (1.119)$$

¹⁸更一般地, 我们要求物理规律在伽利略变换、空间平移和空间旋转变换下均不发生改变, 这同时意味着空间各点是均匀且各向同性的。我们称伽利略变换、空间平移和空间旋转变换所构成的群为伽利略群, 它是经典力学体系所满足的对称群。

¹⁹读者可以发现这里的惯性力与引力具有完全相同的形式, 只不过我们要将加速度 $-\mathbf{a}$ 替换为引力场中的重力加速度 \mathbf{g} 。这被称为等效原理, 由它可以自然地得到广义相对论。

使得在这个参考系中看来,一个不受“外力”作用的物体将以加速度 $-\mathbf{a}$ 进行运动。²⁰ 当我们坐在加速前进的车中时,我们会感受到有一个力把我们向后拉。同样,当我们转动水桶的时候,会发现仿佛有一个力将水桶中的水向外拉。这些都是惯性力的体现。

牛顿的水桶论证是有力的,由它导出的绝对时空观也与我们的直觉相符。如果说有某种参考系是“惯性系”,某种参考系是“非惯性系”的话,那么一定要存在着某种“绝对”的东西将这两种参考系区分开来。这个绝对的东西本质上就是绝对参考系,或者至少是一族相互之间以伽利略变换连接起来的绝对参考系(也就是我们通常所讲的“惯性系”)。²¹

在牛顿力学的框架内,绝对参考系的引入不会造成任何的矛盾,它要等到迈克耳孙(Michelson)-莫雷(Morley)实验完成后才遭受了挑战。在这个实验中,人们发现光速在各个惯性系中都是相等的,这意味着没有哪个惯性系比其他惯性系更特殊,因此也就不存在一个绝对静止的参考系。但是这仍然没有说明为什么惯性系相比于其他参考系是特殊的。当然,我们现在认为绝对参考系是不存在的,而惯性系的选取与时空中的引力有关。不过我们暂时还没有办法反驳牛顿的水桶论证,这个问题要在广义相对论中才能被彻底解决。

1.10 习题

1. 计算下列函数对 x 的导数,并把结果化简到最简形式

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right].$$

从中我们可以看到不定积分计算的困难——一个看起来很简单的函数,其不定积分的形式可能会非常复杂,甚至几乎无法求解。

2. 证明刘维尔(Liouville)定理: 设 f 是有理函数(两个多项式函数的比值), g 是不等于常数的多项式函数。若 $f(x)e^{g(x)}$ 的不定积分是一个初等函数,则它一定具有如下形式:

$$\int f(x)e^{g(x)} dx = R(x)e^{g(x)} + C,$$

式中 R 也是一个有理函数。并利用刘维尔定理,证明下述函数的不定积分是非初等的

$$e^{-x^2}, \quad \frac{e^{-x}}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \ln(\ln x), \quad \sin(x^2), \quad \cos(x^2), \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}.$$

3. 常微分方程解的存在唯一性

(a) 试证明一阶常微分方程解的存在唯一性定理:

如果函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R: x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - a \leq y \leq y_0 + a$ 内连续,且存在常数 N 使得对于区域内任意一对点 $(x, y_1), (x, y_2)$ 均满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|,$$

则一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

在区间 $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ 上存在唯一解, 其中

$$h_0 = \min \left(a, \frac{b}{M} \right), \quad M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|.$$

²⁰从这一点上也可以看出,牛顿第一定律并非是牛顿第二定律的推论。相反,牛顿第一定律应当被视为牛顿第二定律成立的前提条件。

²¹在这里我们看到了惯性系在整个牛顿力学体系之中所占据的极为特殊的地位。但是问题在于,我们真的**一定要**将惯性系放置在如此特殊的位置上吗? 答案是否定的。我们完全可以选取任何一个参考系(比如相对于通常意义上的惯性系以加速度运动 \mathbf{a} 的参考系)作为基准,然后将牛顿第一定律修改为“在基准参考系中,一切不受外力的物体都以加速度 \mathbf{a} 运动”。这样看来,惯性参考系的地位将变得不再特殊,只不过是力学规律在其中的形式最为简单而已。我们将在广义相对论的章节中对此作更详细的讨论。

- (b) 试将上述定理推广到一阶常微分方程组。
- (c) 通过将高阶常微分方程改写为一阶常微分方程组的形式, 给出高阶常微分方程解的存在唯一性定理。

4. 线性微分方程

形如

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$$

的方程被称为二阶线性非齐次微分方程。特别地, 当 $f(x) = 0$ 时, 上述方程被称为齐次线性方程。

- (a) 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的解, 则证明对于任意的常数 C_1, C_2 来说, 函数 $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是方程的一个解, 并证明该二阶线性齐次微分方程的所有解都具有上述的形式。该表达式被称为上述微分方程的通解。
- (b) 如果 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次微分方程的一个解, $Y(x)$ 是其对应的齐次方程的通解, 证明函数 $y(x) = Y(x) + y^*(x)$ 是该二阶线性非齐次微分方程的通解。
- (c) 定义二阶线性微分方程的朗斯基 (Wronski) 行列式为

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

式中 y_1, y_2 为齐次微分方程的两个线性无关的特解。写出 $W(x)$ 所满足的微分方程, 并显式地将其求解出来。

- (d) 如果我们已知二阶齐次线性微分方程的一个特解为 $y_1(x)$, 试利用朗斯基行列式求出另一个与之线性无关的特解。
- (e) 对于一个二阶线性非齐次微分方程来说, 如果我们已知它所对应的齐次线性微分方程的两个线性无关的特解 $y_1(x), y_2(x)$, 则可以将非齐次方程的特解表示为齐次方程特解的线性组合 $y^*(x) = a_1(x)y_1(x) + a_2(x)y_2(x)$ 。试给出 $a_1(x), a_2(x)$ 所满足的微分方程, 并显式地求解出特解 $y^*(x)$ 的形式。
- (f) 将以上的结果推广到任意高阶的线性微分方程。

5. 阻尼振子

- (a) 设质量为 m 的质点既受到弹性系数为 k 的弹力作用, 又受到阻尼系数为 μ 的阻力作用, 试写出该系统的微分方程。这一系统被称为阻尼振子。
- (b) 以函数 $x(t) = e^{at}$ 为试探函数, 找出该系统的两个线性无关的特解, 并写出其通解。式中 a 可以取复数, 并注意方程有两个相等的解的特殊情况。
- (c) 当 a 取为复数时, 利用欧拉公式将通解化为实函数, 并讨论在各种不同参数情况下质点的运动性质。

6. 傅里叶 (Fourier) 变换

- (a) 考虑阻尼振子系统。如果阻尼振子受到一个预先给定的外力 $f(t)$ 的作用, 试写出其满足的方程。
- (b) 通过对方程两边作傅里叶变换, 求出上述方程的解。

(c) 定义系统的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)},$$

式中 $F(\omega)$, $X(\omega)$ 分别为外力 $f(t)$ 与位移 $x(t)$ 的傅里叶变换。它的物理意义是什么?

7. 格林函数

(a) 对初速度、初位移均为零, 所受外力为 $\delta(t)$ 的阻尼振子, 写出其初条件与微分方程。

对这一方程左右两边作闭区间 $[0, \tau]$ 上的定积分, 试证明当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 上述阻尼振子的位移函数与初速度为 $1/m$ 、初位移为零且不受外力的阻尼振子的位移函数相同。

(b) 求解这一系统的位移函数 $h(t)$, 该函数被称为系统的格林函数。

(c) 试证明初速度、初位移均为零, 且受外力 $f(t)$ 作用的阻尼振子的位移函数可以表示为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

式中 h 为阻尼振子的格林函数。

(d) 试证明上题中的传递函数 $H(\omega)$ 是本题中的格林函数 $h(t)$ 的傅里叶变换

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt.$$

8. 常微分方程的级数解法

(a) 对于二阶线性齐次微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

来说, 如果 $p(x), q(x)$ 在 $x = x_0$ 处无奇异性, 则可以将函数 $y(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开为幂级数。逐项比较方程两边的系数, 即可得到各展开系数之间的递推关系式, 进而得到 $y(x)$ 的具体形式。这种求解微分方程的方法称为级数解法。

利用这种解法, 求下述两个方程的通解, 并将结果表示为初等函数的形式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

(b) 如果 $p(x), q(x)$ 在 $x = x_0$ 处有奇异性, 试证明可以将解展开为

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+s},$$

式中 s 满足方程 $s(s-1) + sp_{-1} + q_{-2} = 0$, p_{-1}, q_{-2} 分别为 $p(x), q(x)$ 展开式中的 x^{-1} 项和 x^{-2} 项系数。

(c) 利用上述方法, 求出超几何方程的级数解

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

9. 证明质点组动量等于质心动量, 并且质心动量的变化率等于系统所受合外力。特别地, 当系统所受合外力为零时, 质点组的动量守恒。

证明柯尼希 (Konig) 定理: 质点组动能等于质心动能加上各质点在质心系中的动能。特别地, 当系统所受外力均为保守力时, 质点组能量守恒。

10. 弹性碰撞与散射

设两个质量分别为 m_1, m_2 、速度分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 、半径均为 r 的小球在三维空间中发生弹性碰撞, 碰撞前后能量、动量均守恒, 不计重力作用, 如图 1.3 所示。

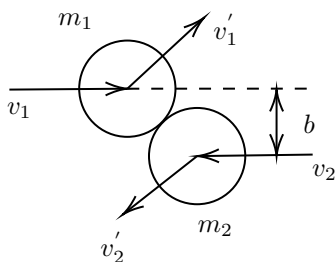


图 1.3: 小球的弹性碰撞。

- (a) 如果两小球发生对心碰撞, 且两小球的速度方向与球心连线方向相同, 则这个碰撞可以简化为一维弹性碰撞。试求碰撞后两球的速度 v_1', v_2' 。
- (b) 如果两小球的球心连线在垂直于两球相对速度的方向上的投影为 b (该量称为碰撞参数), 求碰撞后两球的速度 $\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2'$ 。
- (c) 设发生散射后两球运动速度的夹角为 θ , 求出硬球碰撞的微分散射截面 $D(\theta)$

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|.$$

对微分散射截面积分, 求出其总散射截面。

11. 一维质点的精确解

- (a) 考虑如下受保守力的一维质点

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

在上述微分方程左右两端乘以 dx/dt , 然后对时间进行积分, 将之转化为一个一阶微分方程。²²

- (b) 利用分离变量方法, 以隐函数的形式将上述一阶微分方程求解出来。
- (c) 利用椭圆积分求出单摆的精确解, 并讨论单摆的周期与初始摆角之间的关系。
- (d) 利用椭圆函数求出如下非谐振子的精确解

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4!} \lambda x^4,$$

并讨论非谐振子的周期与其各参数之间的关系。

12. 量纲分析

物理量的单位对应于量纲, 物理量的乘除对应于量纲的乘除。所有可能的量纲构成了一组线性空间, 可以在其中选取一组独立的量纲作为基矢。

- (a) 如果我们所选取的单位制中包含 n 个基本单位, 试证明任意 m 个物理量 ($m > n$) 至少能组合出 $m - n$ 个独立的无量纲量。
- (b) 试证明白金汉 (Buckingham) II 定理: 如果在某个物理现象中, 各物理量 a_i 之间满足某种函数关系 $f(a_i) = 0$, 则这些物理量之间的关系一定可以用由这些物理量所组合成的各无量纲量 Π_i 之间的函数关系来表示 $\Pi(a_i) = 0$ 。
- (c) 考虑单摆的运动, 我们所关心的物理量包含单摆的周期 T , 摆长 l , 重力加速度 g , 摆锤质量 m 以及系统的初始摆角 θ_0 。试证明单摆的周期一定可以表示为

$$T = f(\theta_0) \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

²²从物理上说, 这相当于系统的能量守恒方程。上述积分实际上完成了系统的初次积分, 积分常数就是系统的能量。

也就是说，单摆的周期 T 一定可以表示为一个与之量纲相等的物理量 $\sqrt{l/g}$ 乘以一个关于无量纲量 θ_0 的函数 $f(\theta_0)$ 。

- (d) 在线性近似和精确求解的情况下，求出 $f(\theta_0)$ 的具体形式，并给出单摆周期的表达式。

第二章 分析力学

在本章中，我们将采用国际单位制。

2.1 最小作用量原理

在前面的章节中，我们都是利用微分方程的手段来研究系统的运动。在这个视角下，质点的位移被看作是一个随着时间变化的量，它的二阶导数按照牛顿第二定律所要求的方式进行变化。这样看来，质点的运动实际上是一种“演化”，由当前的运动状态和系统的力学性质来决定下一时刻的运动状态。但是我们还可以采用一种更有启发性的视角来看待质点的运动，那就是将质点的整个运动轨迹看作一个整体，去寻找这条轨迹应该满足的关系。

自然界似乎总有着一种趋于“平稳”的特性，就像是山顶上滚下的石头，最终一定会停留在一个稳定的地方一样。如果我们希望质点的运动也遵循这一规律——换句话说，如果我们希望质点的运动轨迹在某种意义上是“平稳”的话，那么定量地说，我们就要为质点的每条可能的运动轨迹 $x(t)$ 找到一个特征量 S ，使得这个特征量在某种意义下趋于“平稳”。我们将这个特征量称为系统的“作用量”，它是质点运动轨迹的一个泛函（即从函数 $x(t)$ 到数 S 的映射）。现在的问题是：对于质点的运动来说，我们真的能够找到这样的作用量吗？所谓的“平稳”，它的精确含义是什么？

什么样的路径是“平稳”的路径呢？我们可以这样设想：让路径 $x(t)$ 变化一个小量 $\delta x(t)$ ，如果作用量的变化 δS 相比于 $\delta x(t)$ 可以忽略不计的话（换句话说，如果 δS 是 $\delta x(t)$ 的高阶小量的话），那么这样的路径就是平稳的。将这个条件形式地写下来，我们可以得到¹

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0, \quad (2.1)$$

或者更简洁地写作

$$\delta S = 0. \quad (2.2)$$

这个条件意味着什么呢？不妨让我们看一下它在普通函数中的对应。如果对于一个函数 $x(t)$ 来说，它的“平衡点”有类似的定义的话，那么就应该是

$$\frac{dx}{dt} = 0. \quad (2.3)$$

它代表着函数的一阶导数等于零。在大多数情况下，这意味着函数在这一点处即将从上升转为下降或由下降转为上升，它实际上就是函数的极值点。² 可以看到，函数只有在“山顶”或者“山谷”的地方才达到了“平稳点”，这与我们的考虑是相符的。

¹ 泛函微商较严格的定义如下：考虑函数 $f(x)$ 在 y 处的微小改变 $\varepsilon \delta(x - y)$ ，则定义泛函 $S[f(x)]$ 对 $f(y)$ 的泛函微商为

$$\frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[f(x) + \varepsilon \delta(x - y)] - S[f(x)]}{\varepsilon}.$$

² 我们暂时不去考虑驻点和鞍点的情况。如果我们要求系统的运动是稳定的，即在经受无限小的扰动后，新路径与原路径之间仍然只有一个无限小的偏差，则路径需要满足 $\delta^2 S > 0$ 。

对于泛函来说, 结果也是类似的, 那就是: 满足 $\delta S = 0$ 的“平稳”路径, 将会使得作用量 S 取极值。如果我们希望系统以这种“平稳”的方式来运动的话, 那么系统真实的运动状态将会使得某个预先定义好的作用量取极值。这是自然界中的一条非常普遍的规律, 称为“最小作用量原理”。

我们接下来尝试给出作用量 S 的表达式, 以期待最小作用量原理能够给出质点恰当的运动。如果这个量真的存在的话, 那么它的最简单的形式应当是将运动过程中各时刻的贡献累加起来而得到的。假设质点运动在某时刻的贡献 L 应当与质点在该时刻处的位移、速度以及时间本身有关,³ 它是一个与物体的运动状态相对应的随时间变化的量, 即

$$L(t) = L(x(t), \dot{x}(t), t), \quad (2.4)$$

它被称为拉格朗日量。将质点运动过程中各时刻的贡献累加起来 (也就是求积分), 我们就得到了质点运动轨迹的一个特征量 S

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (2.5)$$

我们将这个量称为系统的作用量, 式中 t_1 和 t_2 为质点运动的起止时间。正如我们所看到的这样, 这个积分接收了函数 $x(t)$ 作为输入, 而将积分后得到的数值作为输出, 它给任意一个满足条件的运动路径 $x(t)$ 指定了一个数值 S 。换句话说, 它是一个从函数到数的映射, 这样的映射就是物体运动轨迹的一个泛函。

现在考虑上述作用量的变分。如果路径变化了 δx , 速度变化了 $\delta \dot{x}$, 那么拉格朗日量的变化量为

$$\begin{aligned} \delta L(x, \dot{x}, t) &= L(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

这样, 作用量的微小变化量就可以表示为拉格朗日量变化量的积分

$$\begin{aligned} \delta S[x(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(x, \dot{x}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

由于求导与取变分的过程是可以相互交换的

$$\delta \dot{x} = \dot{x}'(t) - \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \delta(x) \quad (2.8)$$

于是利用导数公式, 积分中的第二项可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

上式中的第一项是一个对时间的全导数, 它可以直接积分出来。而上式中的第二项的变分项与积

³这本质上是因为系统的运动方程中最高只包含了位置的二阶导数, 这是一个实验结果。但我们可以在一定程度上证明, 如果系统中包含更高阶的导数, 那么会产生一些额外的问题。考虑一个含二阶导数项的拉格朗日量 $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$, 并假设二阶导数项并不能通过对时间分部积分的方式移去。将这个系统的广义坐标选取为 $q_1 = q, q_2 = \dot{q}$, 其所对应的广义动量为

$$p_1 = \frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}}, \quad p_2 = \frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}}.$$

系统的哈密顿量为

$$H = p_1 q_2 + p_2 \ddot{q}(q_1, q_2, p_2) - L(q_1, q_2, \ddot{q}(q_1, q_2, p_2)).$$

这个哈密顿量没有下界, 因此是非物理的。

分中的第一项是一样的，可以将它合并入第一项。于是作用量的变分可以表示为

$$\begin{aligned}\delta S[x(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] \delta x \, dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

右边的竖线代表对括号里的函数求 t_2 与 t_1 时刻的差值。

如果我们要求在取变分的时候保持路径的起点和终点不变，那么

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0, \quad (2.11)$$

这样上式中的第二项结果为零。因此作用量的变分可以表示为

$$\delta S[x(t)] = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] \delta x \, dt. \quad (2.12)$$

要求变分等于零，就相当于要求等式右端的积分等于零。由于上式要对任意一个 δx 成立，因此必须有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (2.13)$$

上式被称为拉格朗日方程，它与泛函极值条件 $\delta S = 0$ 等价。因此，我们就通过最小作用量原理给出了系统所满足的运动方程。

在这里有几个微分符号的使用需要特别澄清一下。当我们使用泛函导数 $\delta/\delta x$ 或泛函变分 δx 的时候，我们实际上是将 x 看作一个函数 $x(t)$ ，并将之作一个微小的变化。当我们使用偏导数 $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial \dot{x}$ 的时候，我们实际上是把拉格朗日量 $L(x, \dot{x}, t)$ 中的 x 和 \dot{x} 看作是独立的变量，并对它们求偏导数。当我们使用全导数 d/dt 的时候，我们实际上是把所有的变量看作是 t 的函数，并且对所有的量求 t 的导数。根据微积分的链式法则，偏导数 $\partial/\partial t$ 和全导数 d/dt 之间的关系为

$$\frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.14)$$

特别地，当我们在变量上加点的时候，我们意味着求该量对时间的全导数，例如

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.15)$$

我们来看一个例子。假设系统的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2, \quad (2.16)$$

式中 m, k 为两个常数，则拉格朗日方程中的各项为

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}. \quad (2.17)$$

这样拉格朗日方程就可以写成

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.18)$$

它将等价于如下的泛函极值

$$\delta S = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) dt \right] = 0. \quad (2.19)$$

不难发现，如果我们将 m 视为物体的质量，将 k 视为弹性系数，将坐标 x 视为谐振子偏离平衡位置的距离，那么上述作用量就恰当地描述了谐振子的运动。

以上讨论的是只包含一个运动变量 x 的简单情况。如果系统包含多个运动变量 x_i ，那么系统的拉格朗日量将是各个运动变量及它们的导数的函数

$$L(t) = L(x_i(t), \dot{x}_i(t), t), \quad (2.20)$$

在这里指标 i 代表其自变量取遍所有可能的运动变量 x_1, x_2, \dots, x_n 。系统的作用量将表示为对拉格朗日量的积分，它是所有运动变量 x_i 的泛函

$$S[x_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t) dt, \quad (2.21)$$

对上式中的每个坐标分别取变分，我们就可以得到一系列的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (2.22)$$

式中每一个指标 i 都对应着一个独立的拉格朗日方程。需要注意的是：尽管上式中偏导数只对 x_i 和 \dot{x}_i 进行计算，但是在求时间 t 的全导数时，要考虑到所有的坐标变量。

上面的方程中利用了带指标的变量 x_i 来指代所有的坐标变量，它将以完全平权的方式来处理所有质点的所有坐标分量。以三维空间中的多质点系统为例，我们可以将第一个质点的坐标用 x_1 至 x_3 表示，第二个质点的坐标用 x_4 至 x_6 表示，等等。对于一个没有约束的 N 体系统来说，它的坐标分量有 $3N$ 个，相应地也就有 $3N$ 个二阶运动方程。在 $6N$ 个初始条件下求解这 $3N$ 个二阶运动方程，我们就可以得到系统的运动。

初学物理的人可能会对最小作用量原理产生一些疑惑。比如，为什么自然界总是“偏爱”那条作用量最小的路径？难道自然界在质点运动之前，就已经“知道了”哪条路径会取最小值吗？实际上这条规律远远没有我们想象的那样神秘。我们已经知道了系统可以用微分方程来描写，而根据拉格朗日方程的形式，我们可以将相当多的微分方程都转化为一个等价的泛函极值问题。换句话说，不是自然界偏爱于让某个作用量取极值，而是自然界的运动状态作为微分方程的解总会使得某个泛函取极值，我们就把这个泛函定义为系统的作用量，仅此而已。

在基本定律的范围内，我们只能问“是什么”，而不能问“为什么”。不过，如果你非要一个理由的话，那么确实还能说出来一个。在量子力学里，质点运动并非仅仅走过一条路径，相反，它可以同时“经过”所有的路径。在远离极值点处的路径相互抵消，几乎没有什么效应，最终只有作用量取极值的路径给出了最主要的贡献。当然，上述解释完全没有解决这个问题，它只是将一个问题替换成了另一个问题而已。我们在后续的章节中会讨论量子力学理论的详细形式。

2.2 拉格朗日量与广义坐标

从前面的讨论中我们看到，给定了系统的拉格朗日量，我们就可以通过最小作用量原理得到系统的运动方程。接下来的目标就是找出拉格朗日量的具体形式。

为简单起见，先考虑自由粒子的情况。这时运动方程就是简单的

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (2.23)$$

我们发现，如果拉格朗日量取为

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (2.24)$$

那么系统的拉格朗日方程恰恰就是上面的自由粒子运动方程。⁴ 更一般地，如果系统有多个坐标自由度 x_i ，那么拉格朗日量可以取为

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2, \quad (2.25)$$

这样系统的拉格朗日方程实际上就给出了每个坐标的自由运动方程

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0, \quad (2.26)$$

式中不对 i 求和。

⁴我们也可以不借助牛顿第二定律，而是从伽利略不变性以及时空的均匀和各向同性出发，给出自由粒子的拉格朗日方程，这常常是更有启发性的。然而这绝不意味着物理世界先验地必然如此，实际上我们在推导这一结果的过程中已经隐含地加入了一些过强的假设。

如果系统中的各个质点之间有相互作用, 那么各个坐标之间将会相互耦合起来, 因此系统的拉格朗日量中也要添加相应的项。我们为拉格朗日量添加一项修正 V , 它是系统的各个坐标的函数, 这样拉格朗日量将可以表示为

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - V(x_i). \quad (2.27)$$

它所对应的拉格朗日方程为

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (2.28)$$

式中不对 i 求和。

我们注意到, 为系统的拉格朗日量附加上的那一项恰恰是系统的总势能 V , 同时系统自由运动的那一项就是系统的总动能 T 。因此, 在一般的情况下, 系统的拉格朗日量就是系统的总动能减去总势能

$$L = T - V. \quad (2.29)$$

将这个量对时间进行积分就得到了系统的作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t) dt, \quad (2.30)$$

而系统实际的运动就是使得作用量取极值的那个运动

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t) dt \right) = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (2.32)$$

在前面的讨论中, 我们将作用量中的各个变量 x_i 都视为质点的直角坐标。实际上这是不必要的, 我们也可以选用一组新的独立变量 q_i 来刻画粒子的运动。若系统的自由度为 n , 则它与直角坐标之间的关系可以一般性地表示为

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.33)$$

这组变量被称为广义坐标。对广义坐标求时间的导数, 我们将得到广义速度

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \dot{x}_j, \quad (2.34)$$

式中对指标 j 求和。由于系统的拉格朗日量和作用量都不会随着坐标的改变而发生变化

$$L(t) = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t), \quad (2.35)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (2.36)$$

因此最小作用量原理和拉格朗日方程在广义坐标下将具有与直角坐标完全相同的形式。⁵

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \right) = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.38)$$

这样, 如果我们用广义坐标写出系统的动能和势能, 进而写出拉格朗日量和作用量, 那么我们就可以利用最小作用量原理得到系统在广义坐标下的拉格朗日方程, 而这恰恰就是物体在广义坐标下的真实运动方程。

⁵更为常见的做法是考虑无穷小虚位移下的牛顿第二定律, 这被称为达朗贝尔 (d'Alembert) 原理。将达朗贝尔原理变换到广义坐标, 我们将自动得到广义坐标下的拉格朗日方程。从这个推导中我们可以看出, 拉格朗日方程并不包含什么新物理, 它实际上就是牛顿第二定律在一般的广义坐标下的形式。

作为一个例子, 我们接下来考察质点在极坐标系中的运动方程。我们取系统距离原点的距离 ρ 和系统偏离极轴的角度 θ 为广义坐标, 如图 2.1 所示。极坐标与直角坐标的变换关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}. \quad (2.39)$$

在这个坐标系中, 处理有心力场的问题是非常方便的。要想写出质点在极坐标系下的运动方程, 我们需要将质点的动能与势能用 r 和 θ 表示出来。

在直角坐标系下, 质量为 m 的质点的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (2.40)$$

由于 ρ 与 θ 均为变量, 因此质点在 x, y 方向上的速度可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}. \quad (2.41)$$

这样系统的动能就可以表示为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m[(\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta)^2] \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

这个表达式是较为简单的。

事实上为了求出质点的动能, 我们可以采用更简单的方法。我们将质点的运动分解为沿矢径方向的运动和垂直矢径方向的运动, 如图 2.1 所示。可以验证, 质点沿矢径方向的速度可以表示为 $v_\rho = \dot{\rho}$, 而垂直矢径方向的速度可以表示为 $v_\theta = \rho \dot{\theta}$ 。根据勾股定理, 质点的速度为

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\theta^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.43)$$

因此质点的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2). \quad (2.44)$$

我们将系统的势能一般地写作 $V(\rho, \theta)$, 这样系统的拉格朗日量就可以表示为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - V(\rho, \theta). \quad (2.45)$$

将上述结果代入到拉格朗日方程之中, 我们得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\theta}) = m\rho^2 \ddot{\theta} + 2m\rho \dot{\rho} \dot{\theta}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{\rho}) = m\ddot{\rho}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad (2.49)$$

于是拉格朗日方程可以表示为

$$m(\rho^2 \ddot{\theta} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (2.50)$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}. \quad (2.51)$$

这就是极坐标系下质点的运动方程。

需要注意的是, 上述表达式中的

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\rho F_\theta \quad (2.52)$$

是 θ 方向的力矩, 而不是力。因此若要用质点所受的力来写出质点在极坐标下的运动方程, 则我们应当将其表示为

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = F_\theta, \quad (2.53)$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho. \quad (2.54)$$

从牛顿第二定律出发直接进行坐标变换也能得到这一结果, 不过我们要对矢量表达式而非分量表达式进行变换, 并且我们也要考虑极坐标基矢随位置的变化。

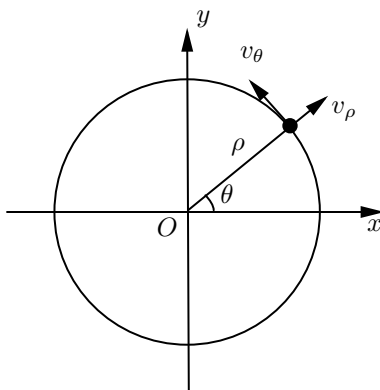


图 2.1: 极坐标系的示意图。

上述讨论实际上只说明了对于无约束系统来说, 采用直角坐标和广义坐标具有相同的结果。我们有时会考虑一些更加复杂的情况, 即各个坐标之间并不是完全独立的, 而是具有额外的约束。例如, 平面内单摆小球的运动可以用两个坐标 (x, y) 来描述。但这两个坐标并不是独立的, 因为若我们假设单摆的细线始终处于伸直的状态, 那么小球距离悬挂点的距离将是一个常数, 坐标 (x, y) 将不是独立的。设悬挂点为 $x = 0, y = 0$, 绳长为 l , 取 x, y 轴的正方向分别为水平向右和竖直向下, 则这两个坐标需要满足如下的约束关系

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (2.55)$$

我们称这样的约束为完整约束。如果系统中含有完整约束, 则我们应当在作用量中在这些约束全部得到满足的情况下进行变分运算。例如, 对于单摆系统来说, 我们应当在 $x^2 + y^2 = l^2$ 满足的情况下使得作用量取极值

$$\delta S[x, y]|_{x^2+y^2=l^2} = 0. \quad (2.56)$$

一般地, 系统中可能含有 k 个完整约束

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.57)$$

因此我们要在这些约束全部满足的情况下对系统进行变分运算。这在实际计算中通常是非常不方便的。但若我们能够为系统找到一组新的独立广义坐标 q_i , 它与直角坐标之间的关系为

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{n-k}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.58)$$

使得上述约束能够自动满足, 那么我们此时作用量将没有约束

$$\delta S[q_i] = 0. \quad (2.59)$$

在这种情况下, 我们仍然可以按照此前的方法对各个变量进行独立的变分运算, 得到广义坐标下的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.60)$$

我们仍以单摆系统为例, 讨论如何对其运动进行求解。我们发现, 虽然此时系统的 x, y 坐标由于满足约束条件 $x^2 + y^2 = l^2$ 而不再独立, 但我们仍然可以定义一个新的广义坐标

$$\theta = \arctan \frac{x}{y}. \quad (2.61)$$

利用这个广义坐标 θ , 我们可以将直角坐标 x, y 可以表示为

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta \end{cases}. \quad (2.62)$$

在这种情况下, 约束条件将自动得到满足

$$x^2 + y^2 = l^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta = l^2, \quad (2.63)$$

同时 θ 也没有受到任何的限制, 因此它就是一个合适的独立广义坐标。这样, 最小作用量原理可以表示为

$$\delta S[\theta] = 0, \quad (2.64)$$

拉格朗日方程可以表示为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (2.65)$$

实际上这一广义坐标就是单摆的摆角 θ , 如图 2.2 所示。

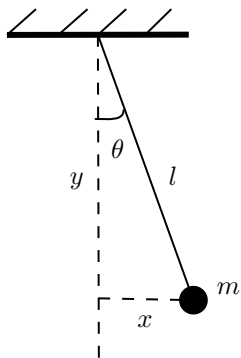


图 2.2: 单摆的独立坐标。

接下来我们明显地利用广义坐标 θ 写出单摆的作用量。设摆线长为 l , 摆锤质量为 m , 重力加速度为 g 。利用广义坐标 θ 写出摆锤的速度, 我们得到

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-l\dot{\theta} \sin \theta)^2 = l^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.66)$$

因此系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.67)$$

取摆绳固定端为重力势能的零点, 则摆锤的高度为

$$h = -l \cos \theta, \quad (2.68)$$

因此系统的势能为

$$V = mgh = -mgl \cos \theta. \quad (2.69)$$

系统的拉格朗日量为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (2.70)$$

将其代入到拉格朗日方程中, 我们将得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) = m l^2 \ddot{\theta}, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad (2.72)$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (2.73)$$

这就是单摆在广义坐标 θ 下的运动方程。

最后需要特别说明的是：对于同一个力学系统来说，我们可以给出一族相互等价的拉格朗日量。可以证明，如果 L 是某个系统的拉格朗日量，那么

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t) \quad (2.74)$$

也同样是系统的拉格朗日量，式中的后一项代表着一个关于广义坐标和时间的函数 $f(q_i, t)$ 的全导数。这是因为新拉格朗日量的作用量与原拉格朗日量的作用量之间的关系为

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q_i, t) dt \\ &= S + f(q_i(t_2), t_2) - f(q_i(t_1), t_1). \end{aligned} \quad (2.75)$$

后两项在取变分时没有贡献，因此新的拉格朗日量与旧的拉格朗日量可以给出相同的运动方程。这说明了相差一个全导数的拉格朗日量是相互等价的，它体现了拉格朗日量的某种“冗余”性质。

2.3 对称性与守恒律

在物理学之中，不变性是非常重要的，它能够为我们揭示物理系统中的深层次性质。对称性和守恒律是物理学之中的两个非常重要又有着紧密联系的不变性，在本节中我们将对它们进行简要的讨论。

在牛顿力学中，我们感兴趣的量可以表示为系统的各个（广义）坐标和（广义）速度的非平凡的函数

$$f(t) = f(q_i(t), \dot{q}_i(t)), \quad (2.76)$$

它被称为系统的运动学量。由于系统的广义坐标和广义速度都会随着时间变化，因此一般来说，系统的运动学量也要随时间变化。但如果某个运动学量恰好不随时间变化

$$\dot{f} = \frac{d}{dt} f(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = 0, \quad (2.77)$$

即

$$f(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \text{const.}, \quad (2.78)$$

那么我们就称它为守恒量。对于通常的系统来说，能量和动量就是两个常见的守恒量。

对称性则是另一种不变性的代表，它指的是物理规律在变换下的不变性。以图形的对称性为例，当我们说一个正方形具有轴对称性的时候，指的是当我们将正方形沿某个轴反转后，得到的新图形与原图形是一样的。（换句话说，正方形在沿轴反转的过程中是不变的。）类似地，当我们说物理系统具有某种对称性的时候，指的是支配这个系统的物理规律在某种变换下不变。比如，当我们说系统具有空间平移不变性的时候，指的是当我们把这个系统平移到空间中的另一个位置以后，支配新系统的物理规律与原系统是完全一样的。由于系统的作用量中承载了支配系统的物理规律，因此如果系统的作用量在某个变换下不发生变化，我们就说系统具有该变换下的对称性。⁶ 更精确地说，对称性指的就是在变换 $q_i(t) \rightarrow q'_i(t)$ 下，系统的作用量保持不变

$$S[q_i(t)] = S[q'_i(t)]. \quad (2.79)$$

⁶实际上，对称性要求的是系统的运动方程不变。要求系统的作用量不变相当于提高了要求，因为在系统的拉格朗日量相差一个时间全导数的情况下，不同的作用量可以对应于相同的运动方程。

对称性和守恒量各自揭示了系统的某种不变的性质，我们可以在它们之间找到一种深刻的关联。诺特 (Noether) 定理指出：如果系统具有一个连续对称性，那么系统将会有有一个对应的守恒量。换句话说，如果系统的作用量在某个连续变换下不变，则系统的某个运动学量将不随时间变化。接下来我们要明显地将这个守恒量的形式构造出来。

我们用一个参量 ε 来标记变换的程度

$$q'_i = q_i(\varepsilon), \quad (2.80)$$

并且当 $\varepsilon = 0$ 时，新坐标要能够回到原来的坐标 q_i （此时相当于没有变换）。如果 ε 的取值足够小，那么可以对 ε 进行级数展开并只保留到一阶项，结果可以表示为

$$q'_i(\varepsilon) = q_i + \varepsilon \eta_i(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (2.81)$$

式中 $\eta_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ 是一个由变换本身确定的函数。在这一变换下，作用量的改变为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right] dt. \quad (2.82)$$

将上式中的第二项做分部积分，结果为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d}{dt} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \eta_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i \right] dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

如果系统在该变换下不变，则有 $\delta S = 0$ 。这意味着

$$\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i \right] dt = 0. \quad (2.84)$$

如果上式对于任意的时间间隔以及任意的 ε 都成立的话，那么就必须有

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i \right] = 0, \quad (2.85)$$

即

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i = \text{const.} \quad (2.86)$$

这就是对称性所对应的守恒量。于是我们得出结论，拉格朗日力学系统的任何一个连续对称性都对应于一个守恒量。

让我们看一个例子。如果一个系统在某个广义坐标的平移变换 $q'_i(\varepsilon) = q_i + \varepsilon$ 下不变，那么我们有 $\eta_i = 1$ 。因此

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.87)$$

是一个守恒量，我们称 p_i 为对应于广义坐标 q_i 的广义动量。可以验证，如果广义坐标 q_i 取为直角坐标，那么它所对应的广义动量 p_i 就是通常的动量。因此，如果系统具有空间平移不变性，那么系统的动量将是守恒的。如果广义坐标 q_i 取为角度坐标 θ ，那么它所对应的广义动量 p_i 就是通常所说的角动量 L 。因此，如果系统具有空间转动不变性（也就是角度坐标的“平移”不变性），那么系统的角动量将是守恒的。

如果系统在某个广义坐标的平移变换下不变，那么说明无论这个广义坐标取什么值，系统的作用量都不发生变化，这实际上就意味着系统的拉格朗日量中根本就不包含这个广义坐标（但可能包含这个广义坐标的导数）。我们将拉格朗日量中没有包含的广义坐标称为循环坐标，由此可以立刻得到一个结论：循环坐标所对应的广义动量守恒。因此，循环坐标要么“静止”（取值不变），要么作“匀速直线运动”（随时间线性增长）。这是牛顿第一定律在广义坐标下的结果。

2.4 哈密顿正则方程

前面所讨论的都是坐标变换下的对称性，然而除此之外还有一个非常重要的对称性。如果系统具有时间平移对称性，那么就意味着拉格朗日量与时间无关，换句话说就是拉格朗日量不显含时间

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2.88)$$

在经典力学中，我们通常不将时间视为力学量，因此时间平移对称性被排除在了诺特定理之外。⁷ 但我们仍然希望能够找到这个对称性所对应的守恒量。

为了求出这个守恒量，我们来计算拉格朗日量对时间的全导数。根据拉格朗日方程，并利用导数的链式法则，可以得到如下结果

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right), \end{aligned} \quad (2.89)$$

即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0. \quad (2.90)$$

这意味着

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (2.91)$$

是一个守恒量，我们称之为能量。若系统的拉格朗日量可以表示为

$$L = T(\dot{q}_i) - V(q_i), \quad (2.92)$$

式中 T 是广义速度 \dot{q}_i 的二次齐次函数

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.93)$$

那么可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2} T_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k \dot{q}_i + \frac{1}{2} T_{jk} \delta_{ik} \dot{q}_j \dot{q}_i = T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T, \end{aligned} \quad (2.94)$$

式中 δ_{ij} 仅当 $i = j$ 时为 1，其余为 0。因此我们有

$$E = 2T - (T - V) = T + V, \quad (2.95)$$

这恰是系统的动能与势能之和。换句话说，时间平移不变性导致了能量守恒。

注意到 $\partial L / \partial \dot{q}_i$ 就是广义动量 p_i ，因此我们尝试着将整个 E 都表示为广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 的函数。当采用这一组变量时，它被称为系统的哈密顿量 H ，记为

$$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i(q_i, p_i) - L(q_i, \dot{q}_i(q_i, p_i), t). \quad (2.96)$$

对这个表达式求全微分，我们得到

$$dH = p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.97)$$

根据广义动量的定义

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad (2.98)$$

所有关于 $d\dot{q}_i$ 的项均可以被消去。利用拉格朗日方程，我们得到

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i, \quad (2.99)$$

⁷在相对论性理论中，时间平移对称性与空间平移对称性组合成了关于时空的平移变换不变性 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ ，由此可以直接从时空平移不变性中推导出系统的能动量守恒。

因此上式可以简化为

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.100)$$

但是根据全微分的定义, 哈密顿量 $H(p_i, q_i, t)$ 的全微分可以直接表示为

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.101)$$

因此比较各项的系数, 我们可以得到一组一阶微分方程

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.102)$$

这组方程被称为哈密顿正则方程, 它与拉格朗日方程等价。我们将以 q_i 和 \dot{q}_i 为变量的表述称为拉格朗日表述, 而将以 q_i 和 p_i 为变量的表述称为哈密顿表述, 这两种表述是相互等价的。⁸

从拉格朗日量到哈密顿量的变换是更加普遍的勒让德 (Legendre) 变换的一个例子。考虑一个以一系列 x_i 为自变量的函数 $f(x_i)$, 其全微分为

$$df = y_i dx_i, \quad (2.103)$$

式中

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (2.104)$$

现在利用 f 构造一个以各 y_i 为自变量的函数

$$g(y_i) = x_i y_i - f, \quad (2.105)$$

其全微分可表示为

$$\begin{aligned} dg &= d(x_i y_i) - df \\ &= x_i dy_i + y_i dx_i - y_i dx_i = x_i dy_i. \end{aligned} \quad (2.106)$$

从上述表达式中可以看出, 函数 $g(y_i)$ 与 $f(x_i)$ 蕴含着相同的信息, 我们称从 $f(x_i)$ 到 $g(y_i)$ 的变换为勒让德变换, 它将函数变换到了其对偶空间之上。对于我们这里讨论的例子来说, 我们利用勒让德变换的方法将变量从 \dot{q}_i 变换为了 p_i , 由此就从拉格朗日表述得到了哈密顿表述。

让我们来考察两个具体的例子。对于谐振子来说, 其拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2. \quad (2.107)$$

从中我们可以求出与 x 相对应的正则动量 p

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad (2.108)$$

因此其哈密顿量可以表示为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2, \quad (2.109)$$

这正确地给出了谐振子系统的能量。计算其哈密顿方程, 我们得到

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx. \quad (2.110)$$

从上述两式中消去正则动量 p , 我们得到

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.111)$$

这与牛顿第二定律给出的结果是一致的。

对于在电磁场中运动的粒子来说, 其拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.112)$$

⁸看起来拉格朗日表述和哈密顿表述之间的差别只是在于将广义速度换成了广义动量而已, 但实际上它们之间有着更加本质的差别。如果把系统的广义坐标空间 (位形空间) 看作是一个流形的话, 那么拉格朗日表述定义在它的切空间上, 而哈密顿表述定义在它的余切空间上, 它们之间以勒让德变换相连。

这一系统的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (2.113)$$

其中 ϕ 为电磁场的电势, \mathbf{A} 为电磁场的磁矢势。式中的 \mathbf{p} 是与坐标 \mathbf{x} 相对应的广义动量, 而 $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ 才是我们通常所说的物理动量 (机械动量) $m\mathbf{v}$ 。因此对于电磁场中的粒子来说, 哈密顿量仍然是系统的总能量, 这与我们的预期是相符的。

我们还可以将哈密顿表述改写成更抽象的形式。在哈密顿表述之中, 任意一个力学量都可以表示为各广义坐标、广义动量和时间的函数。定义两个力学量 u, v 的泊松 (Poisson) 括号为

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i}. \quad (2.114)$$

特别地, 坐标与正则动量之间的泊松括号为

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.115)$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0. \quad (2.116)$$

可以验证, 任意三个力学量 u, v, w 之间的泊松括号满足如下的雅可比恒等式

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0. \quad (2.117)$$

根据泊松括号的定义, 我们可以将哈密顿方程改写为

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H]. \quad (2.118)$$

更一般地, 对于任意一个力学量 $u(q_i, p_i, t)$ 来说, 我们都有

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

特别地, 如果某力学量 u 不显含时间, 且与哈密顿量的泊松括号等于零

$$[u, H] = 0, \quad (2.120)$$

那么我们将得到

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad (2.121)$$

这意味着 u 是一个守恒量。

2.5 混沌与统计物理

前面已经介绍过, 如果力学系统的某个坐标是循环坐标, 那么它所对应的广义动量守恒。在这种情况下, 所有的循环坐标都“静止”或做“匀速直线运动”, 它们的“速度”由对应的广义动量来确定。因此如果我们能够为力学系统找到一个变换, 将所有的坐标都变成循环坐标, 那么它实际上就已经被求解出来了。如果仅仅做坐标变换, 这在大多数情况下当然是不现实的; 但如果我们在保持系统的数学结构不变的情况下允许变换中包含广义动量和时间, 那么这就有可能实现。⁹ 这为力学系统提供了一个新的求解方法。

⁹在这里, 我们要求变换之后的系统仍然是一个哈密顿力学系统, 换句话说在变换后系统仍然有一系列非奇异的正则坐标和正则动量, 且它们仍然满足哈密顿正则方程。满足该条件的变换, 我们称为正则变换。这样的一种讨论通常是在哈密顿-雅可比方程的形式下进行的, 并且所取用的正则变换也是将系统在某一时刻的状态变换到初始时刻的状态。关于这一部分的稍详尽的讨论, 可以参考本章习题 13。

我们把那些可以将所有坐标变换成循环坐标的系统称为“可积系统”。¹⁰ 这样的系统的运动一般是比较“规律”的，我们在前面所求解的大多数系统都是可积系统。考虑一个具有 n 个自由度的系统，其相空间的维数为 $2n$ 。对于一个可积系统来说，其各个广义动量守恒，因此系统的运动将被约束在一个 n 维空间（流形）中。如果系统的运动是有界的，那么我们可以做适当的变换将所有循环坐标化为某种“角度”，¹¹ 这样可积系统的运动将在相空间中的一个 n 维环面上进行。

然而大多数系统都是不可积系统，因此无法用上述方法来简单地进行求解。在这种情况下，我们可以定性地考察一下这些系统的性质。如果系统与可积系统非常相似，仅有一个极小的扰动，那么我们成这样的系统为近可积系统。我们可以证明，在相空间中的几乎所有区域内，近可积系统的运动仍将处在 n 维环面之上，最多只有极小的偏离，这个结果被称为 KAM(Kolmogorov-Arnold-Mosere) 定理。在这种情况下，系统的运动大体上来说仍是有规律的。处理这种问题，用微扰法是合适的。

但如果系统与可积系统偏离得太远，那么情况就会变得非常复杂。随着扰动的逐渐增大，系统的运动将会距离环面越来越远，环面的变形越来越严重，最后甚至会破坏掉环面的整个结构。此时系统的运动将不会局限在 n 维环面之上，而是弥散到整个相空间中的 $2n-1$ 维等能量曲面之上。这种远离可积区域的力学系统将会呈现非常“随机”的性质，它的运动看起来“杂乱无章”，似乎“毫无规律可循”。并且这些系统将会体现出对初始条件的极端敏感性——即使初始条件发生了非常微小的变化，系统后续的演化也将天差地别。这样的系统被称为“混沌系统”。

我们以一个非线性的混沌摆为例来看混沌系统的性质，它的运动方程可以表示为

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \delta \frac{d\theta}{dt} + k \sin \theta = \gamma \cos \omega t. \quad (2.122)$$

式中 I 为系统的转动惯量， θ 为摆的转角， δ, k, γ 分别为阻力、回复力和外力的系数， ω 为外力的频率。可以看出，这实际上就是一个具有着周期性驱动外力、阻力和非线性回复力的振子。由于回复力在大摆角处有很强的非线性效应，并且等式右端的驱动力经常将摆拉到远离平衡状态的位置，因此这个摆是远离可积区间的混沌系统。

图 2.3 和图 2.4 分别展示了该摆在位形空间和相空间中的运动轨迹，从这两张图中我们可以看到混沌摆的运动呈现为一种较强的“随机”性和“无规律”性，而并不像我们之前所讨论的力学系统那样有规律。不仅如此，这个混沌摆的运动对初始条件的变化还是极为敏感的。图 2.3 中展示了两个具有极为相似的初始条件混沌摆的运动，它们的初始条件只有极小的偏差。这些初始条件的偏差是如此之小，以至于我们无法将之分辨出来。但是随着时间的推移，这个微小的偏差将变得越来越大，最终将使得两个运动变得完全不同。¹²

我们知道牛顿力学是确定性的系统，因此在给定初始条件之后，系统的运动就完全确定下来了。但是对于两个实际的运动来说，它们的初始条件无论如何接近，也不可能完全相同，总要存在着一个微小的差别。这种微小的差别会在随后的运动过程中被逐渐放大，最后就导致了对于看起来初始条件“相同”的两个运动来说，其后的运动也会完全不同。这说明我们在原则上对一个实际的混沌系统进行长时间的预测是不可能的。（精确）可解是一回事，可以进行（数值）预测是一回事，而运动系统的确定性又是另外一回事。牛顿系统是确定的系统，其随机性只隐含在方

¹⁰粗略地说，可积系统指的是解可以用积分表示的动力学系统。关于可积系统有如下的刘维尔定理：对于一个 n 维动力学系统来说，如果存在 n 个对易的运动积分（守恒量） $F_i(p_i, q_i, t)$ 满足

$$[F_i, F_j] = 0, \quad \frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + [F_i, H] = 0,$$

则系统是可积的。对于我们所考虑的情况来说，这里的运动积分实际上就是循环坐标所对应的广义动量。它们不随时间变化，因此是守恒的。

¹¹这里的循环坐标称为角变量，其所对应的广义动量称为相积分。

¹²更严格地说，两条运动轨迹之间的偏差将随着时间指数增长。考虑混沌系统中的两条初始状态十分接近的轨迹，在所考虑的时间范围不很大的情况下，它们之间的偏差 δx 随时间的演化将满足 $\delta x(t) = e^{\lambda t} \delta x(0)$ 。式中 λ 是一个正数，称为李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数，它刻画了系统的混沌性质。

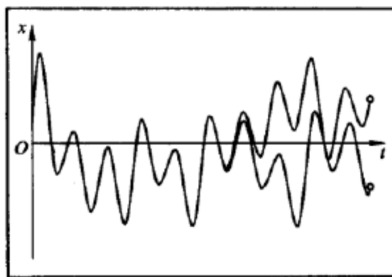


图 2.3: 非线性的混沌摆在两个极为接近的初始条件下的运动轨迹, 图中展示的是位形空间中的结果。图片引自漆安慎, 杜婵英《力学(第二版)》P322。

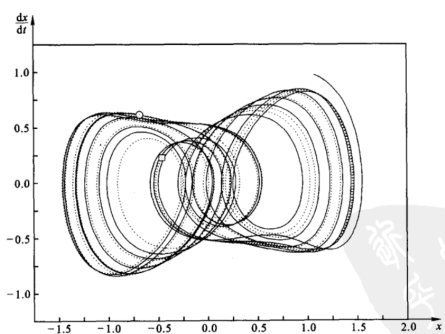


图 2.4: 非线性的混沌摆在两个极为接近的初始条件下的运动轨迹, 图中展示的是相空间中的结果。图片引自漆安慎, 杜婵英《力学(第二版)》P323。

程的内部, 以对初值的极端敏感性表现出来。

混沌系统具有如此之强的随机性, 以至于即使是我们此前介绍过的数值算法也对其无能为力。那我们还能够做些什么呢? 幸运的是, 混沌系统的随机性通常强到足以利用统计方法进行分析。这意味着我们可以不将混沌系统看作是一个动力学系统, 而将它看成是一个完全随机的系统。比如抛掷硬币当然是一个动力学过程, 但是由于它的混沌性太强, 实际上我们就可以将之视为一个完全随机的过程。这样做当然是有代价的, 我们将永远不可能知道硬币这一次哪个面朝上。但是我们知道了掷硬币结果的统计规律, 如果我们考察某一次掷硬币的结果, 那么它将有一半的概率正面朝上, 一半的概率反面朝上。

如果一个系统的运动足够随机, 那么可以设想在经历了足够长的时间之后, 它将能够到达相空间中可以达到的每个点。直观地来看, 我们可以认为一个足够随机的系统的运动轨迹将在经过了足够长时间后填满图 2.4 中的任何一个点。¹³ 这就是经典统计物理的基本假设, 称为“各态历经假设”。对于大多数复杂的系统来讲, 这个假设是合理的。刘维尔定理进一步告诉我们, 系统处在其轨道上的任意一点的概率是相同的。¹⁴ 因此如果一个系统能够演化到它所可能达到的任何一个状态, 那么它也将以相同的概率达到它能够达到的任何一个状态, 这被称为“等概率原理”。这样的系统的运动状态就可以被视为是随机的。

我们也可以另一种观点来看待混沌系统的运动。假如说有许许多多多个相同的系统, 它们的

¹³ 更准确一点地说, 应该是: 系统运动的轨迹可以任意地接近相空间中给定的任意一个点。我们设想如果对这个系统施加一个无限小的扰动, 那么它将可以经过相空间中的任意一个点。

¹⁴ 假设大量初始条件不同的相同系统构成一个系综, 每个系统对应于相空间中的一个点, 这些点在态空间中的密度为 $\rho(q_i, p_i)$ 。由于系统的数量是固定的, 因此相空间中点的密度应当满足如下的守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} + \frac{\partial (\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0.$$

这意味着 $\dot{\rho} = 0$, 即动力学系统在演化过程中的态密度不随时间发生变化, 这一结果被称为刘维尔定理。刘维尔定理意味着沿相空间轨道的态密度是相同的, 也就是说系统处在轨道上任意一点的概率是相同的。

初始条件不完全相同。那么如果系统是各态历经的，它们在经历了足够长时间的演化之后，也将均匀地分布在整个相空间中。直观地来看，假设图 2.3 中有许许多多多个初始条件相似的摆，那么经过足够长的时间之后，可以想象这些摆已经均匀地“弥散”在整个相空间之中了。

因此对于混沌系统来说，系统某力学量 $A(p_i, q_i)$ 的平均值（不论是对同一个系统运动状态的长时间平均，还是对许许多多的相同系统的运动状态求平均）将等于系统所有可能达到的状态的平均值。这可以通过将该力学量对整个相空间积分得到¹⁵

$$A = \frac{1}{\Omega} \int dp_i dq_i A(p_i, q_i) \delta(E - E_0), \quad (2.123)$$

式中 p_i, q_i 代表系统的各个广义动量和广义坐标， Ω 代表相空间的体积（面积）， δ 函数代表能量守恒的条件，我们已经略去了力学量的平均值符号（ \bar{A} 或 $\langle A \rangle$ ）。式中要对所有的坐标变量和动量变量进行积分，其总的效果相当于把整个相空间的贡献累加起来。实际上我们所考虑的是的大量遵循相同的规律、且处在不同的运动状态的系统的集合，我们称这种不与外界交换能量的系统的集合为微正则系综。例如，如果一堆台球（各自独立地）在台球桌上运动，那么它们的平均位置（对台球桌上的所有位置进行平均）将是台球桌的几何中心，而它们的平均速度（对所有方向、所有大小的速度进行平均）将是零。

各态历经假设对于统计物理来说是一个恰当的力学基础吗？目前看来是不容易下定论的。首先，确实存在一些不满足各态历经性的系统，如统计物理中的许多相变过程就与“遍历性破缺”密切相关。其次，即使一个系统确实是各态历经的，要想证明其各态历经性也是极为困难的。事实上我们只能证明一些极为简单的系统的各态历经性，这与实际热力学系统的复杂性形成了鲜明的对比。退一步说，即使我们可以确凿地证明系统的各态历经性，系统遍历整个相空间所需的时间非常漫长，以至于在我们所考虑的时间范围内，系统只能经历相空间中极为微小的一部分。最后，即使各态历经对于经典统计物理来说是一个合适的力学基础，它也不适合描述量子力学系统。对于一个量子力学系统来说，经典意义上的“遍历性”实际上并不存在，我们需要以其他方式来理解系统的混沌性。因此至少在目前看来，利用各态历经假设从动力学推导出统计物理学还是存在着严重的困难的。

统计效应本质上也是由力学规律支配的，因此我们当然可以在动力学中寻找统计物理学的基础。但或许我们也可以抛弃掉统计物理学的力学基础，而只将其视为有效理论。我们可以认为统计物理学拥有独立于力学的基础规律，即等概率原理，它向我们保证了可以利用系综的统计平均来代替力学量的时间平均。至于这一假设是否可靠，则要通过实验来回答。至少在目前看来，统计物理学已经经过了大量的实验检验，因此我们可以认为等概率原理作为统计物理学的基础是足够可靠的。并且，作为一个足够可靠的有效理论，统计物理学的思想早已被应用于物理之外的领域，例如经济学的研究者已经利用统计物理的方法得到了许多有价值的结果。

利用统计的方法求出的只是系统力学量的平均值，这确实是一种遗憾。然而很多时候，我们其实并不需要系统的细节。比方说，对于一团气体来讲，我们并不需要知道其中每个气体分子在某一时刻的具体位置和速度，我们所需要的其实只是诸如气体分子运动的平均剧烈程度（对应于温度）和气体分子对容器壁碰撞的平均剧烈程度（对应于压强）这样的热力学量。对于高度混沌的物理体系来说，虽然不同初始条件的系统的运动细节千差万别，但如果我们观察系统的总体性质，会发现它们其实没什么区别，这一点可以参考图 2.4 中的两条不同轨迹。特别是对于已经演化了足够长时间的一个热力学系统来说，它的初始条件已经几乎不会对其运动的平均性质产生什么影响。它的各个宏观的热力学量也已经达到了一个稳定的状态，基本不会再发生改变，我们将之称为热平衡状态。在这种情况下，统计的方式将是对于系统的一个很好的刻画。

¹⁵ 实际在计算的时候我们经常是在一个有限的能壳内计算积分，即

$$A = \frac{1}{\Omega} \int_{E_0 < E(p_i, q_i) < E_0 + \Delta E} dp_i dq_i A(p_i, q_i),$$

这里的 Ω 就是能壳的体积。

以上我们讨论的是不能与外界交换能量的孤立系统，但是实际的热力学系统经常能够与外界交换能量。我们考虑一个小系统与一个巨大的热源相耦合的情况，在这里小系统可以在保持温度恒定的情况下与热源交换能量，我们称大量这样的系统的总和为正则系综。由于小系统和热源加在一起构成了一个大的封闭系统，它处在相空间中各点的概率都相同，因此小系统处于某态的概率将取决于该态所对应的热源可能处于的相空间占总相空间的比例。

考虑一个小系统与热源耦合成为一个总能量为 E_0 的大系统的情况。假设小系统的尺度要远小于热源的尺度，并且可以和热源交换能量。由于各态历经假设，大系统处于任何一个可能的状态的概率都是相同的。因此，小系统处于能量为 E 的某态的概率将正比于热源具有能量 $E_0 - E$ 时的态空间体积 Ω

$$P(E) \propto \Omega(E_0 - E). \quad (2.124)$$

由于态空间体积 Ω 应当随着能量增加以指数的形式增长，因此我们可以对 $\ln \Omega$ 在 E_0 处进行泰勒展开

$$\ln \Omega(E_0 - E) = \ln \Omega(E_0) - \left. \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \right|_{E=E_0} E + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \ln \Omega}{\partial E^2} \right|_{E=E_0} E^2 + \dots \quad (2.125)$$

注意到展开式中的第一项为广延量（与体积成正比），第二项为强度量（与体积无关），而第三项为广延量的倒数（与体积成反比），因此在热力学极限之下只有前两项不为零。我们令

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}, \quad (2.126)$$

则在热力学极限下有

$$\ln \Omega(E_0 - E) = \ln \Omega(E_0) - \beta E. \quad (2.127)$$

于是

$$P(E) \propto \Omega(E_0 - E) \propto e^{-\beta E}. \quad (2.128)$$

这说明对于正则系综来说，系统处于某个状态的概率（密度）只与该态的能量 E 有关，并且与该态的能量呈指数关系

$$P(E) \propto e^{-\beta E}, \quad (2.129)$$

其中 β 是一个与热力学系统本身有关的参数，它反映了系统的热力学性质。利用这个参数，我们可以定义一个热力学量 T

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (2.130)$$

它被称为系统的温度，式中 k_B 为玻尔兹曼常数。

根据上面的结果可以知道，正则系综处在相空间中某一点 (p_i, q_i) 的概率（密度）由其能量决定

$$P(p_i, q_i) \propto e^{-\beta E(p_i, q_i)}. \quad (2.131)$$

由于系统处于所有态的概率之和为 1，因此上式的归一化系数可以选为

$$P(p_i, q_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(p_i, q_i)}, \quad (2.132)$$

其中

$$Z = \int dp_i dq_i e^{-\beta E(p_i, q_i)}, \quad (2.133)$$

称为系统的配分函数。¹⁶ 这样我们实际上就已经得到了处于平衡态的热力学系统的概率分布。需要说明的是，这一概率分布与等概率远离并不矛盾。等概率原理指出系统处在各个状态的概率都

¹⁶ 为了与量子力学中的结果相对应，多粒子系统配分函数的积分经常写成

$$Z = \frac{g^N}{N!} \int \frac{d^3 p_i d^3 q_i}{(2\pi\hbar)^{3N}} e^{-\beta E(p_i, q_i)},$$

其中 N 代表系统中的粒子数量， g 代表粒子的自旋简并度， $N!$ 代表着由于粒子全同性而扣除的简并度， \hbar 为约化普朗克常数， $(2\pi\hbar)^{3N}$ 代表每个粒子的相空间体积元 $d^3 p$ 中都有 $d^3 p / (2\pi\hbar)^3$ 个量子态。由于热力学势对应于配分函数的对数，因此如果我们不考虑这些系数，那么最终求得的热力学势将相差一个常数。

相等，这实际上是针对封闭系统来说的。封闭系统能量守恒，无论哪个态能量都是一样的。因此，更恰当的说法应当是：对于相同能量的各态来说，系统处在各个态的概率都是相等的；而对于能量不等的各态来说，处于各态上的概率将遵循正则系综的指数分布。

如果我们希望知道系统的某个力学量 $A(p_i, q_i)$ 的平均值，那么就可以利用配分函数将它写成

$$\begin{aligned} A &= \int dp_i dq_i A(p_i, q_i) P(p_i, q_i) \\ &= \frac{1}{Z} \int dp_i dq_i A(p_i, q_i) e^{-\beta E(p_i, q_i)}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

计算出这个积分，我们就得到了想要的结果。特别地，系统的平均能量可以简单地表示为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{Z} \int dp_i dq_i E(p_i, q_i) e^{-\beta E(p_i, q_i)} \\ &= -\frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)_{V, N} = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V, N}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

表达式的下标意味着在固定 V, N 不变的情况下计算相应的偏导数。体系的压强定义为在绝热情况下，体系的能量随体积的变化。因此它可以表示为

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{Z} \int dp_j dq_j \frac{\partial E(p_i, q_i)}{\partial V} e^{-\beta E(p_i, q_i)} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial V} \right)_{\beta, N} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta, N}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

按照类似的做法，我们可以给出其他热力学量的表达式。

作为一个最简单的例子，让我们在直角坐标系中考虑一个由 N 个无相互作用的相同粒子构成的系统。¹⁷ 在这种情况下，系统的总能量将可以表示为各个粒子的能量之和

$$E = \sum_i E_i, \quad (2.137)$$

因此系统的配分函数 Z 将可以表示为各个粒子的“单粒子配分函数” Z_1 的乘积

$$\begin{aligned} Z &= \int d^3 p_i d^3 x_i e^{-\sum_{i=1}^N \beta E_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i)} \\ &= \prod_{i=1}^N \left(\int d^3 p_i d^3 x_i e^{-\beta E_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i)} \right) \\ &= Z_1^N. \end{aligned} \quad (2.138)$$

由于单个粒子处于能量为 E 的态的概率密度 $n_1(E)$ 可以用单粒子配分函数 Z_1 表示为

$$n_1(E) = \frac{1}{Z_1} e^{-\beta E}, \quad (2.139)$$

因此系统处于能量为 E 的态的平均粒子数分布 $n(E)$ 将表示为

$$n(E) = N n_1(E) = \frac{N}{Z_1} e^{-\beta E}. \quad (2.140)$$

如果我们进一步定义

$$\frac{Z_1}{N} = e^\alpha, \quad (2.141)$$

那么系统处于能量为 E 的态的平均粒子数分布将可以表示为

$$n(E) = \frac{N}{Z_1} e^{-\beta E} = e^{-\alpha - \beta E}. \quad (2.142)$$

上式称为玻尔兹曼分布，它给出了无相互作用体系的粒子数分布规律。

¹⁷我们在这里讨论的并不仅限于由相同粒子构成的系统，而是包含了更普遍的由近独立子系所构成的系统。在这里之所以说这些子系是“近独立”的，是因为完全独立的子系并不能达到平衡状态。这意味着子系之间具有非常微弱的相互作用，可以使得系统从非平衡态逐渐演化到平衡态。在达到平衡态后，则可以略去这些微弱的相互作用，从而使得系统中的各个粒子的运动保持独立。

一旦我们写出能量 $E_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i)$ 的具体形式, 那么我们就可以得到系统的分布。比如, 我们考虑一团处在均匀重力场中的气体。由于高度为 h 的气体势能为

$$E(h) = mgh, \quad (2.143)$$

因此, 在积去动能项后, 气体密度 (也就是粒子数分布) 随高度的变化就可以表示为

$$\rho(h) \propto e^{-\beta mgh}. \quad (2.144)$$

这说明气体密度随高度指数衰减。又比如考虑理想气体分子, 将它们视为一团没有相互作用的质点。由于它们的动能与速度的关系为

$$E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.145)$$

因此具有速度 \mathbf{v} 的粒子数分布可以表示为

$$n(\mathbf{v}) \propto e^{-\frac{1}{2}\beta mv^2}. \quad (2.146)$$

如果我们只考虑速度的大小而不计方向, 那么就要将不同的方向全部积掉。在相空间中被积掉的部分正比于以 v 为半径的球面面积, 也就是 v^2 , 因此具有速率 v 的粒子数分布可以表示为

$$n(v) \propto v^2 e^{-\frac{1}{2}\beta mv^2}. \quad (2.147)$$

上式称为麦克斯韦 (Maxwell) 速率分布, 所缺少的比例系数可以通过归一化条件确定下来。

接下来我们具体地在直角坐标系中计算三维理想气体的配分函数, 看看这种统计物理方法可以为我们揭示出系统的何种性质。在微观上看来, 理想气体实际上就是一团自由运动的、没有相互作用的粒子。考虑一团具有 N 个粒子的理想气体, 气体的总能量应当表示为所有粒子的动能之和

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}. \quad (2.148)$$

因此系统的配分函数可以表示为一个 $6N$ 维的积分

$$\begin{aligned} Z &= \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{x}_i e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}} \\ &= \left(\int d^3x \right)^N \prod_{i=1}^{3N} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_i e^{-\frac{\beta}{2m} p_i^2} \\ &= V^N \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3N/2}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

式中我们利用了如下的高斯积分

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (2.150)$$

根据上述配分函数, 我们可以直接求出这团气体的能量

$$E = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V,N} = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T. \quad (2.151)$$

上式与热力学中能均分定理给出的结果一致, 即粒子的每个自由度都将贡献 $k_B T/2$ 的能量。气体的压强同样可以表示为配分函数对热力学量的导数

$$p = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta,V} = \frac{N k_B T}{V}. \quad (2.152)$$

对这个表达式稍作整理, 我们将得到

$$pV = N k_B T, \quad (2.153)$$

这一结论被称为理想气体状态方程, 它给出了理想气体的压强与温度和体积之间的关系。

以上我们给出了热力学量在一段较长的时间内的平均值。若更加细致地考察系统的热力学量随时间的演化, 则会发现它并不是一直处于同一个值, 而是会随着时间发生变化, 围绕其平

均值发生微小的涨落。这是可以理解的，因为从动力学的角度考察，系统确实可以在演化的过程中自发地达到某些不那么平衡的状态，从而使得热力学量的取值发生改变。

我们从统计学的角度对涨落进行一个简单的分析。设某量 x 为一个随机变量，它可以一定的概率 p_i 取为某些值 x_i 。定义该随机变量的期望值（平均值）为

$$\langle x \rangle = \sum_i p_i x_i. \quad (2.154)$$

对于连续随机变量有类似的结果，只不过我们应当将对分立的 x_i 的求和转变为对连续的变量 x 的积分。该随机变量的方差和标准差定义为

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad (2.155)$$

它们反映了随机变量偏离期望值的程度。现在考虑一个 n 粒子体系，现在将体系中第 i 个粒子对某热力学量的贡献视为一个随机变量 x_i 。为简便起见，假设各个随机变量 x_i 的概率分布是完全相同且相互独立的。总的热力学量（或者总热力学量在每粒子上的平均值）可以表示为各个随机变量 x_i 的平均

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.156)$$

这个热力学量 x 当然也是一个随机变量，具有一定的分布，且其统计性质由各个随机变量 x_i 决定。

关于上述随机变量 x 的统计性质，在统计学上有几个重要的定理。首先，在 $n \rightarrow \infty$ 的情况下，可以证明 x 的取值几乎必然为其平均值 $\langle x \rangle$ ，这一结论被称为大数定律。这里的“几乎必然”指的是除了一个测度（概率）为零的区间以外，上述结论都是能够得到满足的。¹⁸ 大数定律向我们保证，如果系统的粒子数趋于无穷（即取热力学极限），则系统的热力学量将几乎必然处于同一个值，这个值就是系统平衡态的热力学量取值。

其次，对于有限 n 个独立同分布随机变量 x_i 来说，我们可以证明，其平均值 x 的期望值 $\langle x \rangle$ 和标准差 σ 与每个独立变量的期望值 $\langle x_0 \rangle$ 和标准差 σ_0 之间的关系为

$$\langle x \rangle = \langle x_0 \rangle, \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \quad (2.157)$$

上述结论说明随着热力学系统的增大，其热力学量的涨落随着粒子数 n 的增大而按照 $1/\sqrt{n}$ 减小。最后，我们可以证明统计学中的中心极限定理，在 n 足够大的情况下，不论 x_i 的分布式什么样的， x 的分布最终都将收敛于正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\langle x \rangle)^2/2\sigma^2}, \quad (2.158)$$

这说明热力学系统的涨落总是呈高斯分布。实际热力学系统的粒子数动辄高达 10^{23} 量级，因此上述结论是很容易得到满足的。

以上我们讨论的是处于热平衡状态系统的热力学性质，它最终归结于计算系统的配分函数，其他所有的热力学量都可以从配分函数中推导出来。对于非平衡热力学系统的演化来说，情况则要复杂很多，因为这不仅仅是一个热力学问题，还是一个动力学问题。我们接下来只对非平衡系统作非常简略的讨论。

在讨论热力学系统的演化时，我们只关心它由各个热力学量所确定下来的宏观状态是如何演化的，至于系统实际的微观状态是不重要的。为简便起见，我们考虑一个封闭系统，并假设其满足各态历经性。根据等概率原理，系统处于某宏观态的状态 i 的概率 p_i 将正比于该宏观态所对应的微观态的相空间体积 Ω_i

$$p_i \propto \Omega_i. \quad (2.159)$$

¹⁸ 一个事件发生的概率为零，并不意味着它不能够发生。例如，若我们从所有的整数中随机选出一个数，则挑选到数字 0 的概率精确为零，但是这并不意味着选到数字 0 这件事不可能发生。此时我们说，在上述过程中“几乎必然”不会选到数字 0。

由于相空间体积 Ω_i 是一个相乘性的量，因此将其取对数后我们可以定义一个相加性的量 S_i

$$S_i = k_B \ln \Omega_i, \quad (2.160)$$

我们称 S_i 为该宏观状态所对应的熵。这被称为玻尔兹曼关系，它连接了微观的系综理论和宏观的热力学理论。因此在这个定义下，一个宏观态出现的概率就正比于该态熵的一个指数函数

$$p_i \propto e^{S_i/k_B}. \quad (2.161)$$

相空间体积的相乘性意味着如果我们把一个体系分成两部分，那么总的相空间体积等于两部分的相空间体积之积。而熵的相加性意味着如果我们把一个体系分成两部分，那么总的熵等于两部分的熵之和。因此这样定义的熵是一个广延量，它是一个适于描述系统热力学性质的热力学量。

如果一个宏观态所对应的相空间体积越大，那么它所对应的熵也就越大，相应地系统在热力学演化过程中处于这个状态的概率也就越大。对于一个热力学系统来说，其热平衡态就是系统最有可能处于的宏观状态。这意味着热平衡态将是所对应的态空间最大的态，换句话说就是熵最大的状态。而如果系统处于熵不是很大的状态，那么我们就说系统偏离了平衡态。

从动力学理论来计算非平衡态的演化过程是很复杂的，不过如果系统的混沌性足够强，那么我们可以认为系统将以近乎随机的概率演化到其他的微观状态上。这样系统将更有可能处在那些微观状态数更多的宏观态，也就是那些熵更大的宏观态上。这意味着处于热平衡状态的系统将处在熵最大的状态上，而处于非平衡态的系统将在演化中趋向于那些熵更大的状态。这个结论被称为热力学第二定律。

初看起来，熵增过程并不是必然地会在演化过程中出现。因为系统既然会自发地演化到熵较大的状态上，那么它将同样可能自发地演化到熵更小的状态上，只不过演化到熵大的状态的概率要更大一些。但是如果我们所考虑的热力学系统的尺度非常庞大，包含的粒子非常多，那么平衡态将在相空间中占据压倒性优势，整个系统自发地远离平衡态的概率就会变得极低。特别是在热力学极限（粒子数 $N \rightarrow \infty$ ）之下，系统将几乎必然处在热平衡状态。此时熵增过程几乎必然会发生，从而保证了热力学第二定律在宏观上的可靠性。

但由于实际的物理体系的尺度终究是有限的，因此无论熵增过程发生的概率如何高，它也不会必然发生；而熵减过程发生的概率就算再低，它也终究还是有可能发生的。这一点恰恰就为热力学第二定律打开了一个缺口，许多热力学佯谬都是由此引发的。比如庞加莱 (Poincare) 回归定理指出，处在有限相空间的经典力学系统在经历足够长的时间之后一定能够回到与其初始状态足够接近的地方。乍看起来这个定理与热力学第二定律是不相容的，因为系统的初始状态可能处于一个熵很低的状态，而在达到热力学平衡之后需要一个自发的熵减过程才能恢复到初始状态。但经过足够长的时间之后，这迟早是能够达到的，只不过所需时间可能会远超出我们的预想。

另一个热力学佯谬说的是热力学系统的可逆性问题。我们知道热力学系统的熵是不断地增大的，因此它是不可逆的。但是支配热力学系统的经典力学定律都是可逆的，这样就产生了悖论。实际上我们确实可以将经典力学系统作时间反演，也确实会发现系统自发地从热平衡态演化到了低熵状态。但这仍然是个概率问题：只有在严格取反的极低概率情况下，熵减过程才能够自发地发生。如果系统的初始状态稍微发生了一点的偏差，那么系统立刻会滑落到其他的热平衡状态。

2.6 经典场论

为了从质点力学过渡到经典场论，我们接下来将不把质点的运动看作是三维空间中位置的变化，而将之看作是附着在这个质点上的一个随时间变化的矢量。由于质点只有质量，没有大小，因此它实际上相当于一个点——换句话说，是一个零维空间。前述的质点力学考虑的就相当于是定义在零维空间上的一个随时间变化的矢量。

与之相应,有许多量是定义在三维空间中的,我们将这样的量称为场,它相当于为空间中的每一点都赋予了一个随时间变化的物理量。一般来说,场 ϕ 是时间 t 和坐标 \mathbf{x} 的函数¹⁹

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t). \quad (2.162)$$

我们可以将场视为一个无限自由度的动力学系统,即将处于每一个位置 \mathbf{x} 处的场 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 都视为一个以指标 \mathbf{x} 标记的随时间变化的广义坐标。为看出这一点,可将空间分成若干体积元 ΔV_i , 然后用场在该体积元上的平均值作为该体积元上的场近似值。经过这样的处理后,场将退化为一个有限自由度的力学系统,我们可以按照有限自由度力学体系的方法进行处理。在计算的最后取 $\Delta V_i \rightarrow 0$, 我们就得到了连续极限下的场论。因此,场论实际上相当于有限自由度(离散指标)的动力学系统向无限自由度(连续指标)的自然推广。求解出场随时间的演化,即给出场在任意时刻、任意位置的取值,就是经典场论所要解决的问题。

接下来我们将给出场所满足的最小作用量原理。如果我们要求场是定域的,也就是说位于空间中某点的场的演化只由该点邻域内场的性质所决定,那么场的拉格朗日量 L 将可以表示为空间各点处的拉格朗日密度 \mathcal{L} 对全空间的积分。一般来说,场的拉格朗日密度可以是这个场 ϕ 本身、场对时间和空间的一阶偏导数 $\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial\mathbf{x}$, 以及时空坐标 t, x_i 的函数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}, t, \mathbf{x}\right). \quad (2.163)$$

因此,场的拉格朗日量将可以表示为

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}, t, \mathbf{x}\right), \quad (2.164)$$

它是一个关于时间 t 的函数。场的作用量为拉格朗日量对时间的积分,它是场的一个泛函。为方便起见,这里考虑时间从负无穷到正无穷的全过程,并略去积分的区间。这样,场的作用量将表示为

$$S[\phi] = \int dt L(t) = \int dt \int d^3x \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}}, t, \mathbf{x}\right). \quad (2.165)$$

如果场的演化也满足最小作用量原理的话,那么在物理世界中真实存在的场就将是使得场作用量泛函取极值的那个场,即

$$\delta S[\phi] = \delta \int dt \int d^3x \mathcal{L} = 0. \quad (2.166)$$

在上述各个表达式中,时间变量和空间变量的地位是平等的,这暗示我们在场论中可以以相同的方式来处理时间与空间。²⁰ 由此我们可以令 $t = x^0, \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, 并将所有的时间和空间变量写在同一个四维矢量之中²¹

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}), \quad (2.167)$$

并且将场关于时空变量的偏导数统一记作

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \nabla\phi\right), \quad (2.168)$$

式中

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \quad (2.169)$$

¹⁹这里我们所考虑的坐标都是空间直角坐标。我们当然也可以不选择直角坐标,而改用其他的空间坐标。不过在这种情况下,表达式的形式将会变得更加复杂。事实上这里的空间坐标并非是系统的广义坐标,而仅仅是标记不同广义坐标的指标。系统的广义坐标应当是场在不同位置处的取值。本章末的习题中给出了一般正交曲线坐标系的处理方法。

²⁰尽管如此,对于非协变的理论来说,场的拉格朗日密度中时间分量和空间分量的地位仍然是不同的。只有在明显相对论性协变的理论中,空间和时间的地位才彻底平等,只在度规张量的分量上有所区别。

²¹按照狭义相对论的要求,我们这里应当写 $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$, 式中 c 为光速,并且将四维体积元表示为 $d^4x = c dt d^3x$ 。这样的写法可以使得整个四维矢量的量纲保持一致,并且使得四维体积元具有长度的四次方的量纲。在理论物理中,通常我们取自然单位制使得光速 $c = 1$ 。在这里虽然我们仍采用的是国际单位制,但是我们也不打算明显地作出这一区分,这只不过是徒增表达式的复杂性而已。

为一个三维矢量算符。今后用希腊字母作为指标的矢量都是四维矢量，而通常的三维矢量将选用拉丁字母作为指标，我们暂时不明显地区分上指标和下指标之间的区别。²²

利用这一套记号，场的拉格朗日量可以表示为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu), \quad (2.170)$$

场的作用量可以表示为

$$S[\phi] = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu). \quad (2.171)$$

作用量的变分可以表示为

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right]. \quad (2.172)$$

做分部积分后可以得到

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right]. \quad (2.173)$$

根据斯托克斯定理，上式中的第二项体积积分可以化为边界 σ_μ 上的面积分

$$\int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = \oint d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi. \quad (2.174)$$

由于积分区域是无穷大，因此其边界也就是在无穷远处。在物理上，无穷远处的边界条件将取为零，因此这一项积分对最后的结果没有贡献。于是作用量的变分可以表示为

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi. \quad (2.175)$$

要想对任意的场变分 $\delta \phi$ 都有 $\delta S = 0$ ，则必须有

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.176)$$

这就是场的拉格朗日方程。明显地写出时间和空间分量，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.177)$$

如果空间中有多个场或者一个场有多个分量 ϕ_i ，那么场的拉格朗日密度将表示为各个场及其导数的函数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\mu). \quad (2.178)$$

系统的作用量为各场的泛函，它可以表示为对拉格朗日密度的积分

$$S[\phi_i] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\mu). \quad (2.179)$$

对每个场（或其分量）分别作变分就得到了每个场的拉格朗日方程

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0, \quad (2.180)$$

式中对指标 μ 求和，而不对指标 i 求和。可以验证，若我们对系统的拉格朗日密度附加一个任意函数的全散度

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu, \quad (2.181)$$

则系统的作用量将变为

$$S' = S + \oint d\sigma_\mu \Lambda^\mu. \quad (2.182)$$

后一项在取变分时没有贡献，因此系统的运动方程不会发生改变。这说明与经典力学的情况类似，在经典场论中仍然存在拉格朗日密度的冗余。

²²这一套记号实际上就是狭义相对论的协变表述，但我们在这里只是形式上使用它们，而丝毫不要求它们有洛伦兹协变性。

对于具体的场来说,我们只需要计算出其动能密度和势能密度,将它们相减就可以得到场的拉格朗日密度。然后将拉格朗日密度代入到拉格朗日方程之中,就可以求出场的运动方程。例如对于作微小纵振动的一维弹性体来说,其在空间各点上偏离平衡位置的位移 $\eta(x)$ 构成一个标量场。它的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \quad (2.183)$$

式中 ρ 为弹性体的密度, Y 为弹性体的杨 (Young) 氏模量。可以看到, 式中第一项就是动能密度, 它代表弹性体的运动所携带的能量; 而第二项就是势能密度, 它代表着弹性体各点之间的相互作用。

将上述拉格朗日密度代入到拉格朗日方程之中, 我们就得到了弹性体的运动方程

$$\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = Y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \quad (2.184)$$

可以看到, 这个式子实际上就是弹性场的牛顿第二定律 $F = ma$, 左边的一项代表弹性体在某点处的密度乘以该点的加速度, 而右边一项代表周围的弹性体对该点的作用力。只要在给定的初始条件和边界条件下求解出这个偏微分方程 (也就是“找到”一个场满足上述偏微分方程以及给定的初始条件和边界条件), 那么我们就求解出了场的运动。

这个方程是一个二阶波动方程, 可以验证

$$\eta = A\sin\omega(t - x/c) \quad (2.185)$$

是上述方程的一个解, 它代表着一个在弹性体中传播的波速为 c 、频率为 ω 、振幅为 A 的波。从上述方程中可以解出波速的具体表达式

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad (2.186)$$

这被称为弹性体的声速。一个更普遍的做法是将波表示为

$$\eta = Ae^{i(\omega t - kx)}, \quad (2.187)$$

式中 $k = \omega/c$ 称为波矢。根据欧拉公式²³

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (2.188)$$

这个用复指数函数刻画的平面波的实部和虚部都是通常的波。实际弹性体的振动场 η 当然是一个实数, 这可以通过数个复指数波恰当地相互叠加, 消去虚部来得到。对于后文中我们所考虑的一些场 (如波函数场等) 来说, 我们不要求它们的取值为实数, 因此上述复指数波是更普遍的, 我们也允许波的振幅 A 一般性地取为复数。以上是用拉格朗日表述对场进行分析的一个例子。

仿照质点力学的方法, 我们可以得到场的诺特定理。考虑如下的无穷小变换

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x). \quad (2.189)$$

上述变换下, 作用量的变分为

$$\delta S = \delta\left(\int d^4x \mathcal{L}\right) = \int [\delta(d^4x)\mathcal{L} + d^4x\delta\mathcal{L}]. \quad (2.190)$$

其中体积元的变分为

$$\delta(d^4x) = d^4x(\partial_\mu\delta x^\mu). \quad (2.191)$$

²³复指数函数的定义绝非平凡, 原则上我们需要将实函数从实轴延拓到整个复平面上, 使得它在整个复平面上是解析的, 同时在实轴上与实指数函数的定义相同。可以证明, 这样的解析延拓是唯一的。我们在这里采用这样一种做法, 即先将实指数函数 e^x 展开为幂级数, 将每个幂级数中的实变量 x 替换为复变量 z , 所得到的复级数作为复指数函数 e^z 的定义。在这个定义下写出 $e^{i\theta}$ 的级数展开式, 我们将自然得到欧拉公式。

而拉格朗日密度的变分可以表示为

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \\ &= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \delta_0 \mathcal{L} \\ &= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta_0 \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 (\partial_\mu \phi_i),\end{aligned}\quad (2.192)$$

式中

$$\delta_0 \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) \quad (2.193)$$

代表只对拉格朗日密度本身进行变分，而不考虑坐标的变化，对于 $\delta_0 \phi_i, \delta_0 (\partial_\mu \phi_i)$ 等有类似的结果。

可以验证， δ_0 算符可以与偏导数相交换，而 δ 算符不可与偏导数相交换。利用链式求导法则，我们可以将拉格朗日密度的变分表示为

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \right] \delta_0 \phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 \phi_i \right). \quad (2.194)$$

利用拉格朗日方程，我们得到

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 \phi_i \right). \quad (2.195)$$

将上述结果代入到作用量的变分之中，结果为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[(\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} + \delta x^\mu (\partial_\mu \mathcal{L}) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 \phi_i \right) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta_0 \phi_i \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} \delta^\mu_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \phi_i \right) \delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right],\end{aligned}\quad (2.196)$$

式中

$$\delta^\mu_\rho = \begin{cases} 1, & \mu = \rho \\ 0, & \mu \neq \rho \end{cases} \quad (2.197)$$

为克罗内克 (Kronecker) 张量。

如果坐标和场的变换可以用一组参数 $\delta\omega^a$ 来表示

$$\delta x^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial \omega^a} \delta\omega^a, \quad \delta \phi_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \omega^a} \delta\omega^a, \quad (2.198)$$

那么在上述变换下，作用量的变分可以表示为

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} \delta^\mu_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \phi_i \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial \omega^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial \omega^a} \right] \delta\omega^a. \quad (2.199)$$

如果系统在该变换下具有对称性，则对于任意 $\delta\omega^a$ 来说，作用量的变分应当满足 $\delta S = 0$ ，这意味着

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0, \quad (2.200)$$

式中

$$j_a^\mu = - \left(\mathcal{L} \delta^\mu_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\rho \phi_i \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial \omega^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\partial \phi_i}{\partial \omega^a} \quad (2.201)$$

为无穷小变换 $\delta\omega^a$ 所对应的守恒流，这就是场的诺特定理。特别地，对守恒流的零分量在全空间进行积分，我们将得到守恒荷

$$Q_a = \int d^3x j_a^0 \quad (2.202)$$

它不随时间变化

$$\frac{dQ_a}{dt} = 0. \quad (2.203)$$

作为一个例子, 我们考虑最简单的时空平移不变性, 即系统在如下的时空平移变换下不发生改变

$$\delta x^\rho = \varepsilon^\rho, \quad \delta \phi_i = 0. \quad (2.204)$$

此时守恒流方程可以表示为

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (2.205)$$

式中 T^μ_ν 被称为能量-动量张量, 其表达式为

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} (\partial_\nu \phi_i) - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu. \quad (2.206)$$

其守恒荷密度的零分量为系统的能量密度

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial_0 \phi_i - \mathcal{L}, \quad (2.207)$$

而空间分量为系统的动量密度

$$T^0_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} \partial_j \phi_i. \quad (2.208)$$

对上述结果进行全空间的积分, 我们就得到了守恒的场的总能量和总动量²⁴

$$E = \int d^3x T^0_0, \quad p^i = - \int d^3x T^0_i. \quad (2.209)$$

因此, 时空平移不变性在场论中同样导致了能动量守恒的结果。

仿照经典力学中的做法, 我们还可以构建场的哈密顿表述。对于定域场来说, 其正则动量为

$$\pi_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}, \quad (2.210)$$

式中 $\dot{\phi}_i = \partial_0 \phi_i$, $\delta/\delta \phi_i$ 为泛函导数, 其运算规则为

$$\frac{\delta \phi_i(x)}{\delta \phi_j(x')} = \delta_{ij} \delta^{(4)}(x - x'), \quad (2.211)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi_j(x)} \int d^4x' \phi_i(x') u(x') = \delta_{ij} u(x). \quad (2.212)$$

场的哈密顿密度可以表示为

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}, \quad (2.213)$$

场的哈密顿量可以表示为哈密顿密度对全空间的积分

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}), \quad (2.214)$$

这样场将满足哈密顿方程

$$\dot{\phi}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i}, \quad \dot{\pi}_i = - \frac{\delta H}{\delta \phi_i}. \quad (2.215)$$

注意到在这里时间变量与空间变量的地位是非常不同的: 时间是标记系统演化的一个连续参量, 而空间是标记不同位置处场自由度的指标。

场力学量 u 定义为场 ϕ_i , 正则动量 π_i 以及时空坐标 x 的泛函

$$u = u[\phi_i, \pi_i, x]. \quad (2.216)$$

定义场的两个力学量间的泊松括号为

$$[u, v] = \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \phi_i} \frac{\delta v}{\delta \pi_i} - \frac{\delta v}{\delta \phi_i} \frac{\delta u}{\delta \pi_i} \right), \quad (2.217)$$

式中对全空间的积分对应于多自由度体系中对所有自由度的求和。可以验证, 场与其正则动量之间的等时泊松括号为

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.218)$$

²⁴我们约定场的总动量携带一个负号, 这是因为对 T^0_ν 进行全空间积分所得到的的是一个协变的动量四矢量 P_ν , 其分量为 $(E, -\mathbf{p})$ 。

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \phi_j(\mathbf{x}', t)] = [\pi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.219)$$

这是有限体系自由度系统的自然推论。根据哈密顿正则方程，任何一个场的力学量都将满足方程

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\delta u}{\delta \pi_i} \frac{\partial \pi_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \phi_i} \frac{\delta H}{\delta \pi_i} - \frac{\delta u}{\delta \pi_i} \frac{\delta H}{\delta \phi_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.220)$$

特别地我们有

$$\dot{\phi}_i = [\phi_i, H], \quad \dot{\pi}_i = [\pi_i, H], \quad (2.221)$$

这与场的哈密顿方程和拉格朗日方程是等价的。

至此我们已经给出了处理经典场的一般方法。我们只需要根据场的拉格朗日密度给出系统的运动方程，然后在特定的初始条件和边界条件下将它求解出来就可以了。支配场演化的一般是一个偏微分方程，它包含着对于不同时空变量的偏导数。通常来说，求解偏微分方程比求解常微分方程要更加困难，它也需要借助更复杂的技巧。本章末的习题中给出了一些偏微分方程的例子，感兴趣的读者可以作为参考。至于那些“基本”场的拉格朗日密度具体是什么，我们将在后续章节之中进行讨论。

2.7 习题

1. 利用变分原理证明：平直空间中的两点之间直线最短。
2. 设质点被约束在竖直平面中形如 $y(x)$ 的坡道上，在沿 y 轴负方向的重力的作用下由静止开始运动。求出质点从轨道上一点运动到另一点所花费的时间，并指出什么形状的轨道能够让质点经过两点的时间变得最短。
3. 双摆是由两个无质量的摆杆与两个摆球构成的系统。设两个摆杆的长度分别为 l_1, l_2 ，两个摆球的重量分别为 m_1, m_2 。以两摆杆偏离平衡位置的角度 θ_1, θ_2 为广义坐标，写出系统的拉格朗日方程。并选定一组参数，在大摆角的初始条件之下数值求解双摆的运动，证明双摆系统中出现了混沌现象。
4. 试推导球坐标系和柱坐标系中的牛顿第二定律。
5. 设体系的作用量为

$$S = \int dt g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j,$$

式中 g_{ij} 为各广义坐标的函数，试求出系统的运动方程。

6. 拉格朗日方程的推广

- (a) 如果系统中的第 i 个质点受到了非保守力 \mathbf{F}_i 的作用，试写出此时的拉格朗日方程。
- (b) 如果系统中的第 i 个质点受到了耗散力 \mathbf{F}_i 的作用，并且这个耗散力可以写成某个耗散势 $W = W(\mathbf{v}_j)$ 对速度的导数，试写出此时的拉格朗日方程。
- (c) 如果系统受到形如

$$\sum_j a_{ij} dq_j = 0$$

的非完整约束，试写出此时的拉格朗日方程。

(d) 利用将约束放松为约束力的方法, 求出系统所受约束力的表达式。

7. 两体有心力问题

- (a) 利用牛顿引力理论证明: 均匀球体之外的引力场等价于所有质量都集中于球体中心的质点所产生的引力场。
- (b) 考虑质量为 m_1 和 m_2 的两个质点在相互作用势 $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ 下运动的情况。试证明: 两质点之间的相对运动等价于一个质量为 $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 的质点在有心力场 $V(r)$ 中的运动。
- (c) 证明质点在有心力场中的运动始终处于同一个平面内。
- (d) 在极坐标系中求出角动量积分与能量积分, 直接求积 $r(t)$ 与 $\theta(t)$ 的隐函数表达式, 并求解出轨道方程 $r(\theta)$ 。
- (e) 设势具有形如 r^{-n} 的幂律形式。证明当 $n > 2$ 时, 轨道是不稳定的。
- (f) 证明伯特兰 (Bertrand) 定理: 当且仅当 $n = 1$ 或 $n = -2$ 时, 轨道是闭合的。
- (g) 证明位力定理: 在形如 r^{-n} 的势场中, 质点动能和势能的平均值满足 $\langle T \rangle = n \langle V \rangle / 2$ 。
- (h) 证明开普勒 (Kepler) 定律: 在引力的作用下, 行星围绕着以恒星为焦点的椭圆运动, 且其公转周期的平方与轨道半长轴的立方成正比。
- (i) 对于 $V = k/r$ 的特殊情况, 证明在质点运动的过程中, 龙格 (Runge)-楞次 (Lenz) 矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$ 是一个守恒量。²⁵ 式中 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 为 \mathbf{r} 方向上的单位矢量, \mathbf{L} 为角动量。
- (j) 对于 $V \propto r^2$ 的特殊情况, 直接求积 $r - t$ 与 $\theta - t$ 的隐函数关系式, 并在直角坐标之中显式地求解出系统的运动。
- (k) 假设相互作用势的形式为 $V \propto r^2$, 求出质点运动中的四个守恒量。²⁶

8. 刚体运动学

- (a) 在运动中, 任意两点间相对位置不发生变化的物体称为刚体。证明刚体的运动有六个自由度, 其中三个可以取为刚体的平动, 另外三个可以取为刚体的转动。
- (b) 证明转动变换矩阵一定是正交矩阵, 且其行列式为 1。
- (c) 刚体转动的三个自由度可以按照如下方式选取: 首先, 绕原 z 轴逆时针转过 ϕ 角; 然后, 绕第一次转动后的新 x 轴 (ξ 轴) 逆时针转过 θ 角; 最后, 绕第二次转动后的新 z 轴 (ζ' 轴) 逆时针转过 ψ 角。这三个自由度被称为欧拉 (Eular) 角, 转动的方法如图 2.5 所示。写出此时的转动矩阵。
- (d) 证明欧拉定理: 刚体在任一时刻的转动总可以等效为绕某一轴线的转动。
- (e) 对于固定在刚体上的坐标系 $O - x'y'z'$, 求出刚体绕体轴各方向的角速度与欧拉角之间的关系。这被称为欧拉运动学方程。

9. 刚体动力学

- (a) 质点相对于某点的角动量定义为 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ 。证明刚体角动量与角速度之间的关系满足 $L_i = I_{ij}\omega_j$, 式中 I_{ij} 称为刚体的转动惯量张量。

²⁵ 这个守恒量将系统的对称性从 $SO(3)$ 提升到了 $SO(4)$ 。

²⁶ 这些守恒量将系统的对称性从 $SO(2)$ 提升到了 $SU(2)$ 。

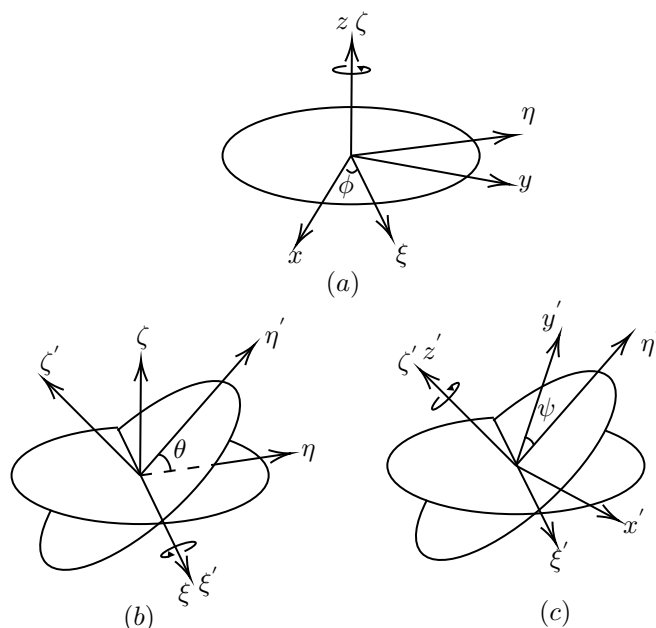


图 2.5: 欧拉角的三次转动。

- (b) 给出 I_{ij} 的积分表达式, 并证明可以通过选择新坐标轴的方式将转动惯量张量对角化 $L_{i'} = I_{i'}\omega_{i'}$, 式中不对指标 i' 进行求和。式中新坐标轴 i' 被称为转动主轴, $I_{i'}$ 被称为转动惯量。
- (c) 在固着于刚体之上、且以转动主轴为坐标轴的坐标系下, 求出刚体的角速度所满足的方程。这被称为欧拉动力学方程, 它是支配刚体运动的一般方程。

10. 证明: 在相对于某惯性系以角速度 ω 旋转的参考系中, 质点的运动方程为

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \mathbf{v},$$

式中第一项为质点所受外力, 第二项称为离心力, 第三项称为科里奥利 (Coriolis) 力。

11. 微幅振荡

- (a) 证明在平衡位置附近作微幅振动的系统总可以等价为一个耦合振子, 其运动方程为

$$m_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} + k_{ij} q_j = 0,$$

其中 m_{ij}, k_{ij} 为常数, q_j 为广义坐标。

- (b) 通过对各 q_j 进行恰当的线性变换, 将各广义坐标变换为一系列独立的变量, 从而将各个方程解耦。
- (c) 将试探解 $q_i = a_i e^{i\omega t}$ 代入到上述方程组之中, 给出各 ω 与 a_i 的求法。

12. 正则变换

保持哈密顿正则方程形式不变的变换称为正则变换。

- (a) 作变换 $Q_i = Q_i(q_i, p_i, t)$, $P_i = P_i(q_i, p_i, t)$, 证明如果新旧坐标和动量之间满足

$$p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = P_i \dot{Q}_i - H'(Q_i, P_i, t) + \frac{dF}{dt},$$

则上述变换是一个正则变换。其中 F 是新旧坐标动量以及时间的函数 $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, 它被称为正则变换的生成函数。

- (b) 设系统有 n 个广义坐标和广义动量。现在将所有的广义坐标 q_i 和广义动量 p_i 写在一个 $2n$ 维矢量中 $\mathbf{f} = (q_i, p_i)$ 。在正则变换之后, 新的广义坐标和广义动量变为 $\mathbf{F} = (Q_i, P_i)$ 。它们之间的变换可以用 $2n$ 阶雅可比矩阵 $M_{ij} = \partial f_i / \partial F_j$ 来表示。证明如果矩阵 M 满足

$$M^T J M = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 M 对应的变换为正则变换。²⁷

- (c) 将系统随时间的演化视为一个连续的正则变换, 证明哈密顿量就是这一正则变换的无限小生成元。
- (d) 证明守恒量就是使得哈密顿量保持不变的那些无限小正则变换的生成函数。
- (e) 证明泊松括号在正则变换下不变。
- (f) 证明相空间体积元在正则变换下不变。这里我们不考虑尺度变换。

13. 哈密顿-雅可比方程

- (a) 如果我们能找到一个正则变换使得新哈密顿量 H' 为零, 则所有的广义坐标和广义动量都将为常数。证明如果正则变换的生成函数取为 $F = S(q_i, P_i) - Q_i P_i$ 的形式, 那么新哈密顿量为零的条件等价于一阶偏微分方程

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

上式称为哈密顿-雅可比方程, S 称为哈密顿主函数。

- (b) 给出从 S 求出 q_i, p_i 的方法, 并证明哈密顿主函数和系统的作用量之间至多相差一个常数。
- (c) 试利用哈密顿-雅可比方程的方法, 求解出谐振子的运动。
- (d) 对于周期运动来说, 在一个周期内作积分

$$J_i = \oint p_i dq_i,$$

J_i 将是一个运动学不变量, 它被称为相积分, 式中不对指标 i 求和。²⁸ 称 J_i 所对应的循环坐标 ω_i 为角变量, 试给出将正则动量变换为角变量的方法。

- (e) 利用球坐标所对应的相积分 J_r, J_θ, J_φ 求解行星在引力场中的运动。

14. 量子力学的程函近似

- (a) 已知量子力学的薛定谔方程形式为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V\right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t),$$

式中 \hbar 为约化普朗克常数, 它代表着量子力学的特征效应; ψ 是一个复函数, 称为波函数, 它刻画量子力学系统的运动; i 为虚数单位。现在令

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar},$$

将上式代入薛定谔方程之中, 比较 \hbar 各阶的系数, 给出 ρ 和 S 满足的方程。在这个方程之中, ρ 代表着粒子的密度, 而 S 代表着粒子的相位。

²⁷ 由此可见, 正则变换构成一个辛群。若从数学的角度来说, 我们可以将经典力学视为辛流形上的几何。

²⁸ 在量子力学发展的早期, 研究者们曾经假设量子系统的相积分只能取为某些分立的值, 这被称为索末菲 (Sommerfeld) 量子化条件。

- (b) 在 $\hbar \rightarrow 0$ 的极限 (程函近似) 下, 证明 S 满足方程

$$\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

这恰恰是哈密顿-雅可比方程。这说明经典力学是量子力学的极限。

15. 均匀介质热力学

- (a) 系统的内能 U 可以表示为熵 S 和体积 V 的函数。利用 U 的全微分 $dU = TdS - pdV$ 可以定义系统的温度 T 和压强 p 。对 U 作勒让德变换可以得到其他的几个热力学势 $H(S, p), F(T, V), G(T, P)$, 写出上述三个热力学势的全微分形式, 它们分别被称为焓、自由能和吉布斯函数。
- (b) 热力学势的各个二阶导数均可以表示为关于 p, V, T, S 的一阶导数。试利用偏导数可交换顺序的性质, 给出 p, V, T, S 的各一阶偏导数之间的关系式。这一结果被称为麦克斯韦关系。

- (c) 试证明系统的热容满足

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

- (d) 求出理想气体在绝热过程中压强 p 与体积 V 所满足的关系。
- (e) 试利用热力学第二定律证明卡诺 (Carnot) 定理: 工作在高温和低温热源之间的所有热机的工作效率都不高于可逆热机, 且所有可逆热机的效率都相等。并求出这一效率的取值。
- (f) 试利用热力学第二定律证明克劳修斯 (Clausius) 不等式: 对于任何循环的热力学过程来说, 其在过程中吸收的热量 δQ 满足

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0.$$

- (g) 处于热平衡状态的辐射场 (理想光子气体) 的状态方程为 $p = u/3$, 式中 u 为其内能密度。试求出辐射场的各热力学函数, 并证明斯特藩 (Stefan)-玻尔兹曼定律: 辐射场总的辐射通量密度正比于温度的四次方。
- (h) 在一般的情况下, 系统在一个微小变化中外力所做的功可以表示为 $dW = Y_i dy_i$, 式中 Y_i 称为广义力, y_i 称为广义位移。在这种情况下, 给出均匀介质热力学的一般结果。
- (i) 试将介质中的磁化强度 M 和电极化强度 P 作为广义位移, 将磁场强度 H 和电场强度 E 作为广义力, 讨论电磁介质的热力学。

16. 多相系与多元系

- (a) 证明孤立系统平衡态的熵最大, 温度和体积不变的系统平衡态自由能最小, 温度和压强不变的系统平衡态吉布斯函数最小。
- (b) 考虑一个粒子数 (物质的量) n 可变的系统的内能, 其全微分可以表示为 $dU = TdS - pdV + \mu dn$, 式中 μ 称为系统的化学势。试给出系统其他热力学势全微分的表达式。
- (c) 定义系统的巨热力学势为 $J = F - \mu n$, 写出其全微分, 并证明它可以表示为 $J = -pV$ 。
- (d) 同一种物质在不同的温度、压强等热力学量下将处在热力学性质不相同的状态上, 称这些状态为不同的“相”。在某些情况下, 可以存在两相 (甚至多相) 共存的情况, 各相之间可以互相转化, 从一个相到另一个相的转变称为相变。证明两相平衡的条件是两相的压强、温度和化学势均相同。

- (e) 给出两相处于稳定平衡的条件。
 (f) 将上述结果推广到具有多个组分 n_i 的多元系。

17. 集团展开

- (a) 如果系统与一个大的热源耦合，它们之间既可以交换粒子，又可以交换能量，试求出系统处在能量为 E ，粒子数为 N 的态的概率。上述系统称为巨正则系综，在巨正则系综中对配分函数的推广称为巨配分函数。
 (b) 利用单粒子配分函数表示经典理想气体的巨配分函数。
 (c) 假设非理想气体的原子之间具有形如 $V_{ij} = V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ 的相互作用，试写出非理想气体的巨配分函数，并证明这个配分函数最终归结于计算如下关于相互作用项的积分

$$Q_V(N) = \int \frac{d^3x_i}{V^N} \exp \left(-\beta \sum_{i < j}^N V_{ij} \right).$$

- (d) 假设粒子之间的相互作用 V_{ij} 是短程的。定义 $f_{ij} = e^{-\beta V_{ij}} - 1$ ，试将 $Q_V(N)$ 中的指数部分展开成各个 f_{ij} 的乘积。²⁹
 (e) 现在用图形来表示上述展开的结果。假设用 N 个点来代表 N 个粒子，如果展开式中每出现一个 f_{ij} ，就在 i, j 两个粒子之间用一根线连接起来，每一个图形都与一个展开项一一对应。按照集团中连通图的点数，求出巨配分函数的展开解。
 (f) 试利用集团展开的方法，求出相互作用气体的各热力学量与状态方程。
 (g) 求出半径为 a 的硬球气体准至二阶的状态方程。
 (h) 雷纳德 (Lennard)-琼斯 (Jones) 势的表达式为

$$V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}.$$

试求出其准至二阶的状态方程。

18. 临界理论

考虑磁性体系，根据热力学量在临界点 T_c 附近的行为，可以定义 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$ 六个临界指数³⁰

$$M(T \rightarrow T_c, B = 0) \sim |T_c - T|^\beta, \quad M(T = T_c, B \rightarrow 0) \sim B^{1/\delta},$$

$$\chi(T \rightarrow T_c, B = 0) \sim |T_c - T|^{-\gamma}, \quad C_B(T \rightarrow T_c, B = 0) \sim |T_c - T|^{-\alpha},$$

$$C(T \rightarrow T_c, k \sim 0) \sim k^{-2+\eta}, \quad \xi(T \rightarrow T_c, B = 0) \sim |T_c - T|^{-\nu},$$

式中 M 为体系的磁化强度， χ 为体系的磁化率， C_B 为等磁热容， $C(k)$ 为频域的关联函数， ξ 为关联长度，它与关联函数（在不十分靠近临界点处）之间的关系为 $C(r) \sim e^{-r/\xi}/r$ 。

- (a) 利用热力学理论证明临界指数之间满足如下的不等式

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2, \quad \alpha + \beta(\delta + 1) \geq 2,$$

²⁹为什么不能够直接对指数作泰勒展开呢？因为指数部分其实并不是一个小量。试想我们考虑的是具有 10^{23} 个粒子组成的气体团（这团气体的质量只有数克而已），此时 $\sum_{i < j}^N V_{ij}$ 中将有约 10^{46} 项相互累加。无论 V_{ij} 有多么地小，如此多的项数之和都很难再被看成是一个小量。

³⁰这里已经假设临界指数的左极限和右极限是相同的。对于更一般的体系来说， B 可以取为更一般的热力学变量，而 M 可以代表更一般的序参量，它在对称性较高的相取为零，而在对称性较低的相不等于零。

(b) 朗道连续相变理论

假设系统的磁化强度为 M ，外场为 H ，系统的自由能为 F ，则在临界温度附近可以将单位体积系统自由能作为温度 T 的函数展开

$$F(T, H, M) = F_0 - HM + \frac{a(T)}{2}M^2 + \frac{b(T)}{4}M^4 + \dots$$

式中 $a(T)$ 、 $b(T)$ 、 $c(T)$ 为序参量的函数，且我们假设临界点是 $a(T)$ 的一个零点，在临界点附近有 $a(T) = a_0(T - T_c)$ 。在上述假设下，证明系统中存在二级相变。求出系统的临界指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ，并验证临界指数间的标度率

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \gamma = \beta(\delta - 1).$$

(c) 标度模型

一般地，我们假设系统的自由能对任意的 λ 满足如下的关系 $F(\lambda^p t, \lambda^q h) = \lambda F(t, h)$ ，其中 $t = T - T_c/T_c, h = \mu B/k_B T_c$ 称为序参量， p, q 为两个常数，称为系统的标度幂。进一步地，我们假设系统的关联长度满足如下的标度关系 $C(k) \sim \xi^\nu C(k\xi)$ 。试利用上述各标度幂表示出系统的各个临界指数，并验证临界指数间的标度率

$$\nu(2 - \eta) = \gamma, \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \gamma = \beta(\delta - 1), \quad \nu d = 2 + \alpha.$$

19. 涨落理论

(a) 假设某个热力学系统与大热源相耦合并达到了热平衡状态，此时该系统的各个热力学量仍有一定概率偏离热平衡状态的值。证明该系统处于某个微观状态的概率正比于系统总熵的偏移量的指数函数，即 $p \propto e^{\Delta S_0/k_B}$ 。

(b) 对处于平衡态的气体来说，求出其 E, T, S, p, V 五个热力学量的涨落 $\sigma_A^2 = \langle (\Delta A)^2 \rangle$ 。

(c) 对于一个已经处于平衡态的系统来说，假设它满足 $\langle x^2(t) \rangle$ 是一个常数。定义系统的位置关联函数为 $K(t_2 - t_1) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ ，试证明维纳-辛钦 (Khinchin) 定理³¹

$$K(t_2 - t_1) = \int_0^\infty w(\omega) e^{i\omega(t_2 - t_1)} d\omega,$$

式中 $w(\omega)$ 为随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度 (即单位时间内 $x(t)$ 傅里叶变换的期望值)。

(d) 假设我们对系统的哈密顿量外加一个与物理量 B 相耦合的随时间变化的微小扰动 $h(t)B$ ，那么某物理量 A 的取值也将随时间发生变化 $\delta A(t)$ 。一方面，我们可以定义 A, B 之间的线性响应函数 $\delta A(\omega) = \chi_{AB}(\omega)h(\omega)$ ，它度量了系统的耗散性质；另一方面，我们可以计算 A, B 之间的涨落关联 $G_{AB}(t - t') = \langle \delta A(t)\delta B(t') \rangle$ 。试证明

$$\text{Im}[\chi_{AB}(\omega)] = \frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{2\hbar} G_{AB}(\omega).$$

上式被称为涨落耗散定理。

(e) 假设有某些外加的作用 X_i 引起了系统中的某些物理量的变化，进而产生了流 \dot{x}_i 。如果外加的作用非常微小，则可以将它们之间视为线性响应。因此，可以将它们表达为一组线性微分方程 $\dot{x}_i = \gamma_{ij}X_j$ 。试证明昂萨格 (Onsager) 倒易关系 $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ 。这意味着一对物理量之间的相互作用程度是相等的。

20. 玻尔兹曼方程

(a) 对于一团气体来说，其粒子数的位置和动量分布可以表示为 $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ 。如果气体处于平衡态，试给出分布 f 的表达式。

³¹ 维纳-辛钦定理是一个普遍的数学结果，它指出任意一个均值为常数的广义平稳随机过程的功率谱密度是其自相关函数的傅立叶变换。

- (b) 考虑无相互作用的气体。如果气体处于非平衡态, 证明分布 f 的演化满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0.$$

式中 F 为气体分子在外场中所受的力。这被称为玻尔兹曼方程。

- (c) 如果我们考虑到粒子之间的相互作用, 则我们应当在玻尔兹曼方程的右端添加一个碰撞项。考虑两粒子之间的散射过程 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$, 如果这个散射过程的截面为 Λ , 试明显地给出碰撞项的表达式。³²

- (d) 定义系统的 H 因子为

$$H = \int d^3x d^3p f \ln f.$$

试证明玻尔兹曼 H 定理: 系统的 H 因子在随着时间演化的过程中将不断减小, 直到系统达到热平衡为止。

- (e) 假设系统的分布 f 相较于平衡态分布 f_0 只有一个微小的偏离, 我们可以将碰撞项近似为 $C = (f - f_0)/\tau$, 式中 τ 为系统的弛豫时间。上式被称为弛豫时间近似。试用弛豫时间近似, 求出近平衡气体的热传导系数和粘滞系数。

21. 求出梯度 $\nabla\varphi$ 、散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 、旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 、拉普拉斯 (Laplace) 算符 $\nabla^2\varphi$ 在正交曲线坐标系下的表达式。
22. 流体是一种可以连续变形的物质。假设流体可压缩并且不忽略粘性, 略去流体中的热传导, 试推导流体所满足的运动方程

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

其中 ρ 为流体密度, \mathbf{v} 为流体速度, η 为流体的剪切粘滞系数, ζ 为流体的体粘滞系数, F 包含流体所受的所有外力以及流涕微元之间的长程相互作用, 它们均为弥散在流体中的场。上述两个方程分别被称为纳维 (Navier)-斯托克斯方程和质量守恒方程。联立上述方程, 再加上一个预先给定的状态方程 $\rho = \rho(p)$ 和两个预先给定的粘滞系数表达式, 流体力学方程就是封闭的。³³

23. 弹性体是一种只在其平衡位置附近发生微小形变的物体。假设弹性体之中只存在线性相互作用, 试推弹性体所满足的运动方程

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_i = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

其中 $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 分别为弹性体的应变张量和应力张量, u_i 代表位移矢量, F_i 代表外力矢量, ρ 代表预先给定的弹性体的密度, D_{ijkl} 代表预先给定的四阶应力-应变张量, 它们均为弥散在弹性体中的场。式中的各个指标取值均为 1, 2, 3, 它们代表三个不同的空间方向。上述三个方程分别被称为平衡方程 (牛顿第二定律)、几何方程 (应变与位移的关系) 以及物理方程 (应力与应变的关系)。

24. 求解方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) - a^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0; t - t_0).$$

这个方程的解被称为相应齐次偏微分方程的格林函数。并利用齐次方程所对应的格林函数, 求出在任意源项 $f(\mathbf{r}, t)$ 作用下的非齐次偏微分方程的解。

³²我们已预先做了一个假设, 即假设相互碰撞的两个分子之间没有统计关联, 因此双例子分布函数可以表示为两个单粒子分布函数的乘积。

³³纳维-斯托克斯方程解的存在唯一性以及光滑性是千禧年七大数学难题之一。在数学上这是一个极为困难的问题, 至今尚无定论。

25. 对非齐次偏微分方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) - m^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

两边做傅里叶变换, 求解这一方程。并做傅里叶逆变换, 给出解的一般形式。

26. 分离变量法: 弦的振动

(a) 两端固定的弦的振动可以用标量场 $u(x, t)$ 来表示, 它满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

以试探函数 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 代入方程, 并将之化为两个常微分方程。这两个常微分方程中将含有一个未定的参数。

(b) 求解关于 x 的常微分方程, 并根据边界条件 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ 给出未定参数可能的取值, 这个参数的取值称为本征值。在不同的本征值下, 求解关于 t 的常微分方程, 得到的结果被称为该本征值所对应的本征函数。

(c) 方程的通解将表示为各个本征函数的线性组合。利用初始条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\dot{u}(x, 0) = \psi(x)$, 给出各个本征函数的系数。

27. 分离变量法: 球坐标

(a) 写出球坐标下方程 $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0$ 的形式。

(b) 以试探函数 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 代入方程之中, 并将之化为三个常微分方程。这三个常微分方程中将含有两个未定的参数。

(c) 注意到 θ 和 φ 都是角度, 因此它们在 0 和 2π 处的取值应当相同, 这构成了边界条件。在这一边界条件下, 求解关于 θ 和 φ 的两个常微分方程, 并求解出相应的本征值。这可归结为一个施图姆-刘维尔本征值问题, 上述方程的被解称为球谐函数。

(d) 在不同的本征值下, 求解关于 r 的常微分方程, 给出系统的各个本征函数, 并将结果表示为各个本征函数的线性组合。利用初始条件, 给出各个本征函数的系数。

28. 下述非线性方程被称为 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

我们可以将它的解视为定态薛定谔方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - [u(x, t) - \lambda] \psi = 0$$

的散射势。³⁴

(a) 欲求一个孤子解, 只需将试探函数 $u = \varphi(x - ct)$ 代入方程中。求出 φ 的取值。

(b) 如果势函数 $u(x, t)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 的情况下衰减得足够快, 求出在 $\lambda < 0$ 时, 薛定谔方程的解的渐进形式。这些解可以表示为入射、反射与透射平面波的叠加, 称这些波的振幅(随本征值变化)为散射数据。

(c) 如果势函数 $u(x, t)$ 满足 KdV 方程, 证明薛定谔方程的本征值 λ_n 将不随时间变化。

(d) 求出散射数据随时间的演化。

(e) 求出散射势 $u(x, t)$ 与各散射数据之间的关系, 并明确地给出 KdV 方程的求解方法。

(f) 在初始条件 $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ 下, 求出 KdV 方程的解, 这被称为孤子解。

(g) 在初始条件 $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ 下, 求出 KdV 方程的解, 这被称为双孤子解。

³⁴在上式中作代换 $u = 2mV/\hbar^2$, $\lambda = 2mE/\hbar^2$, 我们就得到了定态薛定谔方程。

第三章 狭义相对论

在本章中，我们将采用自然单位制 $c = \varepsilon_0 = 1$ ，度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ， γ 矩阵将选取为狄拉克 (Dirac) 表示。

3.1 洛伦兹变换

在之前的章节中，我们介绍了不同的惯性系之间的变换公式。考虑两个不同的惯性系 s 和 s' 。如果在参考系 s 中看来，时空中某点处在 (t, x, y, z) 的位置，那么在另一个以速度 v 做匀速直线运动的参考系 s' 看来，时空中的同一个点将处在 (t', x', y', z') 的位置。假设在 $t = 0$ 时刻两参考系的原点和坐标轴都完全重合，并假设两参考系之间的相对速度 v 沿 x 轴正方向，如图 3.1 所示。根据经典力学，两参考系之间的变换关系将满足伽利略变换

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.1)$$

我们已经在牛顿力学的章节中讨论过这一结果。

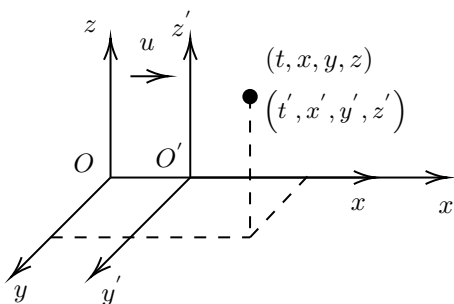


图 3.1: 参考系变换。

从上述表达式中我们可以得到一个推论，即伽利略变换会使得不同参考系中物体的运动速度发生变化。如果我们计算上述两参考系中物体的运动速度，那么我们会得到

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad (3.2)$$

这代表着两参考系之间的相对速度 v 将会影响参考系中所有物体的运动速度。这也与我们的经验是相符的：假如我们以某速度 v 去“追”一个物体，那么在我们看来，该物体的速度就将变慢。特别地，如果我们的运动速度和这个物体的运动速度是相同的，那么在我们看来，这个物体将会与我们保持相对静止，不再运动。

以上的讨论似乎是非常自然的。不幸的是，事实与我们所设想的是相反的。迈克耳孙-莫雷实验表明，光的传播速度与观测者的运动无关。换句话说，即使我们真的沿着光传播的方向运

动, 光相对于我们的传播速度也是光速, 没有发生丝毫变化。这是很奇怪的事情。因为我们都知道, 如果以一定的速度去追另一个物体, 它相对于我们的速度肯定是要减慢的。而对于光来说, 这一结论是不成立的。看来牛顿力学中的伽利略变换并不符合光速不变的实验结果, 我们有必要寻找一个新的变换来刻画两个惯性系之间的关系。那么, 这个能够保持光速不变的变换究竟是什么?

实验目前对我们提出的要求只是光速不变, 因此我们把它当作最核心的要求。它意味着: 如果在参考系 s 中, 光可以以速度 c 从时空点 (t, x, y, z) 传播到 $(t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, 那么在参考系 s' 中, 光可以以同样的速度 c 从时空点 (t', x', y', z') 传播到 $(t' + \Delta t', x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z')$ 。在参考系 s 中, 如果光能够从一个时空点传播到另一个时空点的话, 那么这两个时空点之间的差值将满足

$$c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (3.3)$$

也就是说

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0. \quad (3.4)$$

式中 Δt^2 意为 $(\Delta t)^2$, 以此类推。如果我们进一步选取合适的单位使得光速 c 取为 1, 那么上述表达式可以写成更为简便的形式

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0. \quad (3.5)$$

光速在参考系变换下不变, 这意味着在参考系 s' 看来, 上述两时空点之间仍然满足关系式

$$\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = 0. \quad (3.6)$$

或者更一般地, 对于时空中任意的两点来说都有

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (3.7)$$

上述关系式定义了一个在参考系变换下不变的量, 即两点之间的时空间隔 (固有时) $\Delta\tau$

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (3.8)$$

如果我们希望光速不变, 那么参考系变换将使得变换前后两点之间的时空间隔不变

$$\Delta\tau^2 = \Delta\tau'^2. \quad (3.9)$$

对于时空中无限接近的两点来说, 它们之间也满足同样的关系

$$d\tau^2 = d\tau'^2, \quad (3.10)$$

其中

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.11)$$

为无限接近的两点间的时空间隔。

为了进一步简化讨论, 我们以四矢量的形式将时空点的坐标记作¹

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z), \quad (3.12)$$

我们统一地用希腊字母代表四矢量的指标, 而用拉丁字母代表空间部分三维矢量的指标。这样, 无限接近的两点间的时空间隔就可以表示为

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.13)$$

式中

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (3.14)$$

¹在国际单位制中恢复光速 c , 我们应当将四矢量表示为 $x^\mu = (ct, x, y, z)$, 这个四矢量具有统一的长度量纲。习惯上我们应当将四矢量记作列矢量, 不过我们打算在此做出明显的区分。在一些较古老的文献中, 时空四矢量记为 $x^\mu = (x, y, z, ict)$ 。这一约定的好处是度规张量将是对角矩阵, 同时我们不必明显地区分逆变矢量和协变矢量。在较现代的文献中, 这一约定已经被淘汰了。不过它蕴含着维克 (Wick) 转动的深刻物理思想, 至今仍然在为我们所借鉴。

称为度规张量, 具有该度规张量的时空被称为闵可夫斯基 (Minkowski) 时空。² 由于时空是均匀的, 因此我们要求参考系变换是一个线性变换, 这样变换后的时空分量将成为变换前时空分量的线性组合。³ 这个线性组合的系数我们用 Λ^μ_ν 来表示

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (3.15)$$

因此, 在 s' 系中时空间隔将表示为

$$d\tau'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma. \quad (3.16)$$

而在 s 系中, 时空间隔为

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma. \quad (3.17)$$

因此根据参考系变换下固有时不变的要求, Λ^μ_ν 应当满足

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma, \quad (3.18)$$

这就是光速不变对参考系变换所施加的要求。我们称满足上述条件的参考系变换为洛伦兹变换, 它可以保证光速在变换下是不变的。

我们可以把 Λ^μ_ν 写成矩阵的形式, 如下所示

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix},$$

其中的各个分量均为实数。从这个形式中可以看出, 洛伦兹变换矩阵 Λ^μ_ν 中有 16 个 (实) 变量。由于光速不变条件 $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma$ 的限制, 每个分量将给出一个约束, 一共是 16 个约束条件。交换两指标给出的实际上是同一个约束, 因此约束的数量要减去六个 (对角线上的不变)。因此, 实际的约束条件是 10 个, 这样满足条件的洛伦兹变换矩阵就只剩下了 $16 - 10 = 6$ 个独立变量。

这六个独立的变量可以以如下方式选取: 每个变量所对应的变换只将两个时空分量相互“混合”。注意到

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1, \quad (3.19)$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad (3.20)$$

式中

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3.21)$$

称为双曲函数, 因此我们可以将两空间分量 (例如 x, y) 混合的洛伦兹变换表示为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

而将时间 t 与某空间分量 (例如 x) 混合的洛伦兹变换表示为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y & 0 & 0 \\ -\sinh y & \cosh y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

² 闵可夫斯基时空的度规张量通常有两种选取方法, 一种取法为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, 这是量子场论中常用的约定。另一种取法相差一个负号 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, 这是广义相对论中常用的约定。

³ 这一条件实际上是不必要的, 因为我们可以证明, 保持光速 (即度规张量 $\eta_{\mu\nu}$) 不变的唯一非奇异的坐标变换 $x \rightarrow x'$ 实际上就是后文中得到的庞加莱变换。

式中 θ 称为转角, y 称为快度, 它们是度量洛伦兹变换程度的参量。可以验证, 上述变换都可以保持光速不变。

对两个空间坐标所进行的“混合”实际上就是空间转动, 参量 θ 就是绕轴转动的角度。但是对于那些将时间与空间分量进行“混合”的变换来说, 它们的物理意义现在还不是很清楚。为此我们令 $\tanh y = v$, 这样变换矩阵成为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -v & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

换句话说, 此时的洛伦兹变换为

$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}. \quad (3.25)$$

这实际上就是参考系沿 x 方向以速度 v 运动时的洛伦兹变换, 我们称之为洛伦兹推动 (boost)。

由此我们看到, 在洛伦兹推动下, 时间和空间都不是绝对的, 它们都会随着参考系的变换而发生变化。根据洛伦兹变换公式, 如果在静止参考系 S 中的某段时间间隔为 t_0 , 则在一个以速度 v 相对于 S 运动的参考系 S' 中, 观测到的这段时间间隔将变为

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (3.26)$$

因此随着速度的增加, 观测到的时间将会变长, 这被称为钟慢效应。设某物体在其静止参考系 S' 中的长度为 l_0 , 如果它以速度 v 与观测者发生相对运动, 则在观测者所处的参考系 S 看来, 它在运动方向上的长度将变为 l 。根据洛伦兹变换公式, l 与 l_0 之间的关系为

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3.27)$$

即

$$l = l_0 \sqrt{1-v^2}. \quad (3.28)$$

由此可见, 随着速度的增加, 观测到的长度将会变短, 这被称为尺缩效应。尺缩效应和钟慢效应是时空相对性的直观体现。

在洛伦兹推动变换下计算不同参考系中物体的运动速度, 可以得到它们之间的关系为

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - v \frac{dx}{dt}}. \quad (3.29)$$

如果我们假设在参考系 s 中有一个以光速 (也就是 1) 运动的物体, 那么 $dx/dt = 1$ 。在这种情况下, 我们看到在参考系 s' 中同样有 $dx'/dt' = 1$ 。这意味着如果一个物体在某惯性系中以光速运动, 那么在任意惯性系之中它都将以光速运动, 这就使得我们在实验中观察到的光速不变现象得到了满足。而如果物体的运动速度远小于 1 (光速), 那么上述洛伦兹变换将自动退化为伽利略变换, 这与我们的预期也是相符的。在国际单位制下, 光速 c 的取值约为 3×10^8 m/s。在通常的尺度下, 这是一个非常大的量, 因此相对论效应常常是不明显的。

我们也可以不明显地写出洛伦兹变换中的各个指标, 而用矩阵记号来表示变换的结果。利用矩阵记号, 洛伦兹变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 可以表示为

$$x' = \Lambda x, \quad (3.30)$$

两个洛伦兹变换的复合变换 $\Lambda^\mu_\nu = (\Lambda_2)^\mu_\rho (\Lambda_1)^\rho_\nu$ 可以表示为

$$\Lambda = \Lambda_2 \Lambda_1, \quad (3.31)$$

洛伦兹变换条件 $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma$ 可以表示为

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (3.32)$$

无穷小时空间隔可以表示为

$$d\tau^2 = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (3.33)$$

以此类推。

以上讨论并未完全穷尽满足光速不变性的所有变换。例如，如果我们做变换 $t' = -t$ ，即

$$\Lambda = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (3.34)$$

则光速不变性仍然会得到满足，这个变换被称为时间反演。如果我们做变换 $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ ，即

$$\Lambda = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (3.35)$$

则光速不变性仍然会得到满足，这个变换被称为空间反演。习惯上我们称排除掉空间反演和时间反演的变换，即满足如下条件的变换

$$\det(\Lambda) = 1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \quad (3.36)$$

为恰当正时洛伦兹变换。我们可以证明，由所有可能的空间转动与所有可能的洛伦兹推动复合得到的变换就是所有的恰当正时洛伦兹变换，而所有其余的洛伦兹变换都可以通过将恰当正时洛伦兹变换与空间反演以及时间反演变换复合得到。

除此之外，光速还可以在时空平移变换下保持不变

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad (3.37)$$

式中 a^μ 为任意四矢量。将洛伦兹变换和庞加莱变换结合到一起

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (3.38)$$

我们就得到了所有保持光速不变的变换（即所有闵可夫斯基时空的等度规变换），这被称为庞加莱变换。时空平移变换一共有四个自由度，加上洛伦兹变换的六个自由度后，庞加莱变换一共有十个自由度。各变换之间的关系可以简单表示如下

$$\text{庞加莱变换} = \overbrace{\text{空间转动} \times \text{洛伦兹推动}}^{\text{恰当正时洛伦兹变换}} \times \text{时间反演} \times \text{空间反演} \times \text{时空平移}. \quad (3.39)$$

洛伦兹变换

庞加莱变换可以保持光速不变，也就是说可以保持时空中两点的间距不变。换句话说，如果空间中的两点 x_1, x_2 在变换后变为 x'_1, x'_2 两点，那么变换前后两点间的时空间隔不发生改变

$$(x'_1 - x'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2. \quad (3.40)$$

由于度规张量是非正定的，因此这一时空间隔也可正可负。如果时空间隔是正的

$$(x_1 - x_2)^2 > 0, \quad (3.41)$$

那么两点间空间和时间的差值将满足

$$\Delta t^2 > \Delta \mathbf{x}^2. \quad (3.42)$$

由于我们取光速 $c = 1$ ，也就是说在这种情况下，光在 Δt 的时间内足够传播 $\Delta \mathbf{x}$ 的距离。因此，这两点之间是可以由因果关系连接起来的。通过恰当的洛伦兹变换，我们可以将两点之间的 $\Delta \mathbf{x}$ 变换为零。也就是说，我们可以将两点变换到同一空间位置，而使得它们处于不同时间。因此，我们称这两点之间的间隔为类时间隔。

类似地, 如果时空间隔等于零

$$(x_1 - x_2)^2 = 0, \quad (3.43)$$

那么光可以恰好由一点传播到另一点, 这两点之间也是有因果关系的, 我们称之为类光间隔。如果时空间隔小于零

$$(x_1 - x_2)^2 < 0, \quad (3.44)$$

那么光将不能够由一点传播到另一点, 因此这两点之间是没有因果关系的。通过恰当的洛伦兹变换, 我们可以将两点之间的 Δt 变换为零。也就是说, 我们可以将两点变换到同一时间, 而使得它们处于不同空间位置。因此, 我们称这两点之间的间隔为类空间隔。

庞加莱变换不会改变两点之间的时空间隔, 因此它也不会将类空间隔变换为类时间隔, 反之亦然。因此原来没有因果关系的两点, 在经过庞加莱变换后仍然没有因果关系。反之, 原来具有因果关系的两点, 在经过庞加莱变换之后仍然具有因果关系。一般来说, 庞加莱变换会改变各点的时间。对于类空的两点来说, 可以通过庞加莱变换将其中任意一点的时间变换到另一点之前, 或者将两点变为同一时刻。但是这只对无因果关系的类空两点才能够做到。如果我们考虑有因果关系的类时两点, 那么若一点的时间在另一点之前, 则不可能通过庞加莱变换将两点的顺序倒转。这就是说庞加莱变换会保持时空中各点之间的因果关系, 原来有因果关系的两点仍然具有因果关系, 并且原来是原因的点在变换后仍然是原因。

在数学上, 我们所考虑的变换构成了一种称为群的结构。我们在集合 G 中的任意两个元素之间可以定义某种乘法运算, 它将集合中的两个元素映射为第三个元素。如果该运算满足下列四条性质:

- (1) 存在一个单位元 e 使得对于任意 g 有 $eg = ge = g$,
- (2) 存在逆元, 即对于任意 g 存在 g^{-1} 使得 $g^{-1}g = gg^{-1} = e$,
- (3) 满足封闭性, 即对任意 $g_1, g_2 \in G$, $g = g_1g_2$ 仍是 G 中的元素,
- (4) 满足结合律, 即对任意三个元素都有 $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$,

则称集合在该运算下构成群。如果这样一个群是连续的, 则称之为李群。

我们把满足下述条件的线性变换所构成的群定义为如下的矩阵李群

$$O(n): \sum_{i=1}^n x_i'^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (3.45)$$

$$U(n): \sum_{i=1}^n x_i'x_i'^* = \sum_{i=1}^n x_ix_i^*, \quad (3.46)$$

$$O(m, n): \sum_{i=1}^m x_i'^2 - \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i'^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i^2, \quad (3.47)$$

$$U(m, n): \sum_{i=1}^m x_i'x_i'^* - \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i'x_i'^* = \sum_{i=1}^m x_ix_i^* - \sum_{i=m+1}^{m+n} x_ix_i^*, \quad (3.48)$$

另外如果我们附加条件使得变换矩阵 G 的行列式满足 $\det(G) = 1$, 则我们可以定义相应的么正群 $SO(n), SU(n), SO(m, n), SU(m, n)$ 。

群是一个抽象的概念, 但我们可以为它在物理世界中找到一些对应。我们发现, 庞加莱变换满足如下四条性质: 存在一个恒等的庞加莱变换 I ; 两个庞加莱变换复合之后得到一个新的庞加莱变换; 每一个庞加莱变换都存在着一个逆变换; 庞加莱变换满足结合律。因此若将各个不同的庞加莱变换视为不同的群元, 而将变换的相继作用视为群元中的乘法运算, 则庞加莱变换将构成一个李群, 我们称之为庞加莱群。⁴ 如果我们只考虑洛伦兹变换而不考虑时空平移变换, 则这些

⁴利用群论记号, 庞加莱群可以记作 $ISO(1, 3) = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1, 3)$, 它是时空平移变换群 $\mathbb{R}^{1,3}$ 与洛伦兹变换群 $O(1, 3)$ 的半直积。

变换构成的群被称为洛伦兹群，记作 $O(1, 3)$ 群。如果我们进一步要求洛伦兹变换的行列式为 1（即排除掉某些反演变换），那么这些变换构成的群被称为 $SO(1, 3)$ 群。⁵

在物理中，保持光速不变的最重要的变换就是包含空间转动和洛伦兹推动的恰当正时洛伦兹变换，我们将对它进行着重分析。我们打算对不同的群和变换做过于细致的区分，因此在未作特殊说明的情况下，后文中我们所说的“洛伦兹变换”指的都是恰当正时洛伦兹变换，所说的“洛伦兹群”指的都是 $SO(1, 3)$ 群。关于反演的问题将在后文中专门讨论。

3.2 相对论性自由粒子

在牛顿力学之中，我们要求物理规律在所有惯性系中的形式都是相同的，这意味着物理规律的形式在伽利略变换下不变。而在相对论之中，不同惯性系之间的光速是不发生改变的，这意味着不同惯性系之间应当由洛伦兹变换相联系。如果我们仍然要求物理规律（不仅仅是力学规律）在所有惯性系中的形式都是相同的，那么这就意味着物理规律的形式将在洛伦兹变换下保持不变。我们将这种对称性称为洛伦兹协变性。

接下来的目标就是要寻找一个能够恰当地刻画系统的运动、同时还在洛伦兹变换下不变的作用量，它将给出系统在相对论条件下的运动。作为最简单的情况，我们首先来考虑单个自由粒子在空间中运动的作用量。这个作用量应当是粒子运动的一个泛函，同时它还应当是一个洛伦兹变换下不变的量。满足这个条件的最简单、同时也是最自然的作用量，就是粒子运动的固有时 τ

$$S[x] \propto \int d\tau. \quad (3.49)$$

换句话说，自由粒子在空间中运动的路径，就是使得其固有时取极值（最小值）的路径。我们取比例系数为 $-m$ ，这样自由粒子的作用量就可以表示为

$$S[x] = -m \int d\tau. \quad (3.50)$$

如果我们用某个参数 λ 来标记物体的运动轨迹，那么物体的作用量就可以用分量的形式表示为

$$S[x(\lambda)] = -m \int d\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (3.51)$$

对于有质量粒子来说，这个参数 λ 通常可以取为固有时 τ 自身。对于无质量粒子来说，它沿着类光曲线运动，其固有时恒为零，我们可将此时的参数 λ 取为时间 $t = x^0$ 。

这其实并不是一个平凡的结果，而是一条很重要的原理，它指出了自由粒子在空间中的运动规律。如果我们考虑非相对论的极限，那么这意味着自由粒子在空间中运动的路径就是使得其运动时间最短的路径——换句话说，就是连接两点之间的直线。而这条原理如果推广到广义相对论的弯曲时空之中，那么这意味着在弯曲时空中运动的自由粒子的路径就是在弯曲时空中的那条“最短”的路径——换句话说，就是弯曲时空中的测地线。

现在我们来考察这个相对论性自由粒子作用量的非相对论极限。注意到

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2(1 - \mathbf{v}^2), \quad (3.52)$$

因此我们可以将作用量表示为对时间 t 的积分

$$S[x] = -m \int dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}, \quad (3.53)$$

式中 $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ 为粒子运动的速度。在非相对论极限下，粒子的速度 \mathbf{v} 远小于光速 1，因此对 \mathbf{v} 展开并保留到二阶项，结果为

$$S[x] = -m \int dt + \frac{m}{2} \int \mathbf{v}^2 dt. \quad (3.54)$$

⁵所有的恰当正时洛伦兹变换同样构成一个群，它被称为限制洛伦兹群，记作 $SO^+(1, 3)$ 。 $O(1, 3)$ 群一共有四个不连通的分支，这四个分支中只有 $SO^+(1, 3)$ 构成群。其余三个分支不包含单位元，它们是 $SO^+(1, 3)$ 群的陪集。 $SO(1, 3)$ 群包含两个分支，分别为 $SO^+(1, 3)$ 群所在的分支及其做时间-空间反演后得到的分支。

第一项是一个常数，它对变分没有贡献。第二项对应着非相对论系统的动能项

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2, \quad (3.55)$$

因此这里引入的比例系数就是粒子的质量 m 。

为求出粒子的运动方程，接下来我们取参数 $\lambda = \tau$ 。对上述作用量作关于粒子运动路径 x^μ 的变分，我们就可以写出粒子所满足的拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \quad (3.56)$$

上述方程等价于

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial L}{\partial \tau}, \quad (3.57)$$

式中

$$L = -m \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad (3.58)$$

为系统的拉格朗日量，而

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (3.59)$$

为对固有时 τ 的导数。

约去方程两端的因子 $-m$ 后，等式左边可以表示为

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (\eta_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho) \right) = 2\eta_{\sigma\mu} \ddot{x}^\sigma, \quad (3.60)$$

而等式右边为

$$2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial L}{\partial \tau} = 2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \sqrt{\eta_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\tau}{d\tau} \right) = 0. \quad (3.61)$$

于是我们得到粒子的运动方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (3.62)$$

换句话说，一个不受外力的相对论性粒子将保持静止或匀速直线运动，这与非相对论的自由粒子是相同的。

更一般地，如果系统中有多多个自由的粒子，那么总的作用量就是所有自由粒子的作用量之和

$$S[x_i(\lambda)] = -m_i \int d\tau_i = -m_i \int d\lambda_i \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx_i^\mu}{d\lambda_i} \frac{dx_i^\nu}{d\lambda_i}}, \quad (3.63)$$

式中对指标 i 求和。取参数 $\lambda_i = \tau_i$ ，对上述作用量作关于第 i 个粒子运动路径 x_i^μ 的变分，我们就可以写出第 i 个粒子的运动方程

$$\frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau_i^2} = 0. \quad (3.64)$$

这与单个自由粒子的运动是完全相同的。对于无质量粒子来说，尽管此时粒子的作用量恒为零，但我们仍然可以对路径做变分，从而得到粒子的运动方程。我们将在后续章节中处理这一问题。

以上我们讨论了自由粒子的作用量。仿照非相对论理论的做法，我们或许可以通过在自由粒子作用量中加入相互作用项的方式来刻画粒子之间的相互作用。但是，当我们试图将相互作用项加入到系统之中时，我们遇到了本质上的困难。这是因为凡是直接写出来的相互作用项，它的作用效果一定是瞬时传播过去的。比如说，如果我们让两个粒子之间有一个与距离呈平方反比的库伦 (Coulomb) 力，那么无论两个粒子之间的距离有多远，当其中一个粒子的位置发生变化时，另一个粒子都将在一瞬间感受到力的变化。而在实际的物理世界中，电磁相互作用传播的速度并不是无限大，而是一个有限的数值，这个速度就是光速。⁶

⁶根据人们目前的认识，任何一种相互作用传播的速度都不可能超过光速。如果宇宙中所有相互作用的传播确实都不可能超过光速，那么这就暗示着物体的运动速度也不可能超过光速。因为这种运动真的存在的话，那么我们就可以通过这种运动来构造一种传播速度超过光速的相互作用。

看起来，一个更加准确的图像是这样的：当粒子的位置发生变化时，它将在空间中产生某种扰动。这种扰动将以一个有限的速度在空间中传播，当它传播到第二个粒子的位置的时候，将对第二个粒子产生作用，此时第二个粒子才会“感受到”第一个粒子位置的变化。这种弥散在空间中的扰动实际上就是场，换句话说，粒子之间的相互作用是靠场来传播的。只有这样，我们才能构建出一个完备的相对论性理论。因此，我们接下来就将目光转向相对论性场论，看看相对论条件下的场是如何进行演化的。

3.3 张量分析

仅仅依靠固有时这一个在洛伦兹变换下不变的量，是不足以构造出场作用量的。因此我们需要考察更多的量在洛伦兹变换下的行为。这些变换行为不同的量，就构成了不同的张量。

我们所考虑的最简单的量是洛伦兹标量，它在洛伦兹变换下保持不变。我们所定义的固有时 τ 就是一个洛伦兹标量，它只有一个分量，因此也没有指标对它进行标记。物体的静质量 m_0 也应当是一个洛伦兹标量，尽管动质量在洛伦兹变换下是会改变的，但是静质量并不会发生变化。同样，物体的电荷 e 也应当是一个洛伦兹标量。各种常数在洛伦兹变化下不改变（包括光速本身），它们当然也都是洛伦兹标量。

其次我们根据定义可以知道，类似于时空四矢量 x^μ 这样的量，它在洛伦兹变换下的性质为

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (3.65)$$

我们把这样的量定义为逆变矢量，用一个上指标来标记它。在洛伦兹变换下，它的变换行为就是将洛伦兹变换的变换张量直接作用在它之上。

根据时空四矢量 x^μ ，我们可以定义更多的逆变矢量。既然 x^μ 是逆变矢量，那么它对固有时的导数

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (3.66)$$

也是一个逆变矢量，它被称为速度四矢量。设想对这一速度四矢量做洛伦兹变换， dx^μ 将按照逆变矢量进行变换，而 $d\tau$ 在洛伦兹变换下不变，因此 u^μ 将按照逆变矢量进行变换。但是要注意， $v^\mu = dx^\mu/dt$ 并不是一个四矢量，因为 dt 不是标量，它会在洛伦兹变换下发生变化。如果对速度四矢量再求一次对固有时的导数，那么我们将得到一个加速度四矢量

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (3.67)$$

它也是一个逆变矢量。

如果我们在速度四矢量 u^μ 上乘以物体的静止质量 m_0 ，那么我们得到的就是物体的动量四矢量

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.68)$$

这同样是一个逆变矢量，它的零分量就是物体的能量 E ，空间分量就是物体的三维动量 \mathbf{p} 。注意到

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (3.69)$$

因此我们可以将动量四矢量表示为

$$p^\mu = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} \right), \quad (3.70)$$

式中

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad v = |\mathbf{v}|. \quad (3.71)$$

从上述结果中我们可以看出，以速度 v 运动的物体所具有的等效质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3.72)$$

这被称为动质量。因此随着速度的增加，物体的动质量会不断增加。若对物体不断地进行加速，则物体的质量会不断变大，因此加速的过程会进行得越来越困难。在速度接近于光速的情况下，物体的质量会趋近于无穷大，因此我们不可能将物体加速到超过光速。

动量四矢量的零分量为物体的能量，在非相对论性极限下我们得到

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots \quad (3.73)$$

在非相对论性理论中，只有能量的相对差值有物理意义，因此上述展开式中的第二项就是物体的（非相对论）动能项 E_k 。取速度 $v = 0$ ，并在表达式中恢复光速，我们将得到物体的静能量

$$E_0 = m_0c^2, \quad (3.74)$$

这被称为爱因斯坦质能方程，它刻画了质量和能量之间的转化关系。设想经过某个物理过程后，体系静质量变化了 Δm_0 ，那么在这个过程中体系的静能量所发生的变化为

$$\Delta E_0 = \Delta m_0c^2. \quad (3.75)$$

由此可见，如果体系的静质量发生了较小的亏损，则在这一过程之中将会释放出巨大的能量。反之要想使得体系的静质量有所增加，也必须吸收巨大的能量。

我们还可以构造出其他的逆变矢量。如果我们在速度四矢量 u^μ 上乘以物体的电荷 e ，那么我们得到的就是物体的电流四矢量

$$j^\mu = eu^\mu = e \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.76)$$

它的零分量就是物体的电荷密度 ρ ，空间分量就是物体在空间中运动所引起的三维电流 \mathbf{j} 。类似地，如果我们将物体的动量四矢量除以约化普朗克常数 \hbar ，那么我们得到的就是一个四维波矢

$$\omega^\mu = \frac{p^\mu}{\hbar}. \quad (3.77)$$

它的零分量就是波的圆频率 ω ，空间分量就是物体的三维波矢 \mathbf{k} 。公式的左边代表着波的性质（频率，波矢），而右边代表着粒子的性质（能量，动量）。在量子力学中我们会发现，如果一个粒子以 p^μ 运动，则它所对应的波的四维波矢恰为 ω^μ 。因此，这个公式实际上将物体的粒子性与波动性联系在了一起。将上述表达式写成非协变的形式，我们得到

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (3.78)$$

这两个公式分别被称为普朗克公式和德布罗意 (de Broglie) 公式。上述结果意味着一个频率为 ω 的粒子所携带的能量为 $\hbar\omega$ ，而一个波矢为 \mathbf{k} 的粒子所携带的动量为 $\hbar\mathbf{k}$ 。在自然单位制中，我们将选取适当的单位使得 $\hbar = 1$ ，此时粒子的四维动量 p^μ 和四维波矢 ω^μ 实际上就是同一个量，一般我们将不再对它们作出区分。

为了进一步地找出更多不同类型的张量，让我们来考虑将度规张量作用在逆变矢量之上的效果。由于度规张量的对角元在空间分量上取值为 -1 ，所以当它作用在逆变矢量上的时候，实际上就是在这一逆变矢量的空间分量上加上一个负号。具体来说，当 $\eta_{\mu\nu}$ 作用在 x^μ 上的时候，得到的实际上就是

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu = (x^0, -x^i). \quad (3.79)$$

而如果我们进一步将它与 x^ν 缩并，我们会发现得到的结果是一个洛伦兹标量

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^0x^0 - x^ix^i = \tau^2, \quad (3.80)$$

它在洛伦兹变换下是不变的

$$\eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu. \quad (3.81)$$

由于 x^μ 按照洛伦兹变换张量 Λ 进行变化

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\rho x^\rho, \quad (3.82)$$

因此要想使得 $\eta_{\mu\nu}x^\mu$ 与 x^ν 的缩并在洛伦兹变换下不变, 它就需要按照洛伦兹变换张量的逆 Λ^{-1} 进行变化

$$\eta_{\mu\nu}x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \eta_{\mu\rho}x^\mu. \quad (3.83)$$

像这样按照洛伦兹变换张量的逆进行变化的矢量, 我们称为协变矢量。

我们把 $\eta_{\mu\nu}x^\mu$ 记作

$$x_\nu = \eta_{\mu\nu}x^\mu, \quad (3.84)$$

它定义为 x^μ 所对应的协变矢量, 在洛伦兹变换下按照如下方式进行变换

$$x'_\nu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu x_\rho. \quad (3.85)$$

类似地, 我们可以把任何一个逆变矢量 A^μ 与度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 缩并定义这个矢量的协变矢量

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu, \quad (3.86)$$

它的零分量与逆变矢量是相同的, 而空间分量与逆变矢量相反, 并且在洛伦兹变换下依照洛伦兹变换矩阵的逆进行变化⁷

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu. \quad (3.87)$$

任意协变矢量与逆变矢量的缩并, 得到的将是一个洛伦兹标量, 这一点可以通过直接计算它在洛伦兹变换下的性质来确定

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu B_\sigma = \delta^\sigma{}_\rho A^\rho B_\sigma = A^\rho B_\rho, \quad (3.88)$$

可以看出它确实是在洛伦兹变换下是不变的。

利用上述结论, 我们可以构造一系列洛伦兹标量。两个速度四矢量缩并的结果就是光速 c 的平方, 在自然单位制下可以简单地写成 1

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (3.89)$$

而两个动量四矢量缩并的结果就是静质量 m_0 的平方

$$p^\mu p_\mu = m_0^2, \quad (3.90)$$

写成分量的形式就是

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2, \quad (3.91)$$

即

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}, \quad (3.92)$$

这被称为相对论能动量关系。另外时空四矢量与四维波矢缩并的结果就是

$$k^\mu x_\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad (3.93)$$

这恰恰是波传播过程中那个不变的相位因子。

我们定义具有两个上指标的度规张量为 $\eta^{\mu\nu}$, 它满足

$$\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \quad (3.94)$$

其分量形式与 $\eta_{\mu\nu}$ 完全相同。可以验证, 将 $\eta^{\mu\nu}$ 与一个协变矢量 A_ν 缩并, 得到的是一个逆变矢量 A^μ

$$\eta^{\mu\nu}A_\nu = A^\mu. \quad (3.95)$$

反过来也是一样的, 将 $\eta_{\mu\nu}$ 与一个逆变矢量 A^ν 缩并, 得到的是一个协变矢量 A_μ

$$\eta^{\mu\nu}A^\nu = A_\mu. \quad (3.96)$$

通俗地说, 度规张量可以用来“升降指标”。

⁷ 有时我们将协变矢量的变换写成 $A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu$, 式中 $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\Lambda^\rho{}_\sigma$, 它与 $\Lambda^\nu{}_\mu$ 之间的关系为 $\Lambda_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ 。

还有一个重要的协变矢量。考虑某一个标量函数 $f(x^\mu)$ 的全微分

$$df = dx^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (3.97)$$

由于全微分是函数 f 本身的性质，因此它不会随着坐标变换而变化。换句话说， df 是一个洛伦兹标量。由于我们知道 dx^μ 是一个逆变矢量，它的变换形式应当是

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad (3.98)$$

因此要使得 df 是一个洛伦兹标量， f 的偏导数必须满足

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (3.99)$$

我们将偏导数算符记为

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \partial_\mu f, \quad \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \partial'_\mu f, \quad (3.100)$$

那么上式可以简化为

$$\partial'_\nu f = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu f, \quad (3.101)$$

这说明标量函数的偏导数 $\partial_\mu f$ 是一个协变矢量。

如果上述表达式对于任意的标量函数 f 都成立，那么我们可以直接说，算符 ∂_μ 实际上就是以洛伦兹变换张量的逆进行变化的

$$\partial'_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu, \quad (3.102)$$

这是一个协变矢量算符。进一步地，如果我们将具有两个上指标的度规张量作用在 ∂_μ 上，那么我们将得到一个逆变矢量

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z), \quad (3.103)$$

它按照洛伦兹变换张量进行变化。将这个矢量微分算符与自身进行缩并，我们将得到一个标量微分算符

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2, \quad (3.104)$$

它在洛伦兹变换下是不变的。

类似地，我们可以定义具有多个指标的张量，它们的每个上指标按照洛伦兹变换张量来变化，而每个下指标按照洛伦兹张量的逆来变化，比如

$$A'^\mu_{\nu\rho} = \Lambda^\mu_\sigma (\Lambda^{-1})^\eta_\nu (\Lambda^{-1})^\xi_\rho A^\sigma_{\eta\xi}. \quad (3.105)$$

同样，每一个指标都可以通过度规张量来进行升降，比如

$$A^\mu_\nu = A^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = A_{\sigma\nu} \eta^{\sigma\mu}. \quad (3.106)$$

根据度规张量的定义， $\eta_{\mu\nu}$ 和 $\eta^{\mu\nu}$ 分别是具有两个下指标和两个上指标的张量。而洛伦兹变换张量 Λ^μ_ν 和克罗内克张量 δ^μ_ν 均为具有一个下指标和一个上指标的张量。克罗内克张量 δ^μ_ν 和 η^μ_ν 其实是同一个张量，它们的对角元都是 1。需要注意的是，如果我们对克罗内克张量（或者是度规张量）进一步缩并，那么得到的结果并不是 1，而是

$$\delta^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 4. \quad (3.107)$$

如果我们将两个不同的洛伦兹张量乘在一起，那么我们得到的仍然是一个洛伦兹张量，只不过这个张量的上/下指标个数分别等于两个张量的上/下指标个数之和，比如

$$A^\mu_{\nu\rho} = B^\mu C_{\nu\rho}. \quad (3.108)$$

对上式进行洛伦兹变换

$$\begin{aligned} A'^\mu_{\nu\rho} &= B'^\mu C'_{\nu\rho} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha B^\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\nu (\Lambda^{-1})^\gamma_\rho C_{\beta\gamma} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta_\nu (\Lambda^{-1})^\gamma_\rho A^\alpha_{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

可以看出 $B^\mu C_{\nu\rho}$ 确实像一个三阶张量 $A^\mu_{\nu\rho}$ 一样变换。

类似地，我们还可以验证两个张量缩并掉一个指标之后仍然可以得到一个新的张量，只不过这个张量的指标数要扣除掉被缩并掉的那两个指标，比如

$$A_\nu = B^\mu C_{\mu\nu}. \quad (3.110)$$

一个高阶张量缩并掉一对指标之后，得到的同样是一个低阶张量，比如

$$A_\nu = A^\mu_{\mu\nu}. \quad (3.111)$$

同阶张量的线性组合所得到的仍然是相同类型的张量

$$A^\mu_{\nu\rho} = B^\mu_{\nu\rho} + C^\mu_{\nu\rho}. \quad (3.112)$$

因此从较为简单的张量出发，我们可以通过上述运算构造出一系列其他的各阶张量，它们在洛伦兹变换下将以特定的方式进行变换。

在结束本节之前，有一点需要做额外的说明。以上我们讨论的都是张量的分量及其在洛伦兹变换下的行为。然而正如我们在牛顿力学中所看到的那样，张量的分量会在坐标系下发生变化，而张量本身则并不会发生变化。因此从某种程度上说，张量自身的结构要比其分量更加基本。以时空中的四矢量为例，我们在时空中建立直角坐标系，将其四个基矢分别选取为

$$\hat{e}_t, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z. \quad (3.113)$$

于是时空中的四矢量 \hat{a} 就可以用其在该坐标系下的分量表示为

$$\hat{a} = a^\mu \hat{e}_\mu, \quad (3.114)$$

这里 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 分别代表指标 t, x, y, z ， a^μ 就是四矢量在该坐标系下的分量。在该坐标系下，两个四矢量的内积可以表示为

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = (a^\mu \hat{e}_\mu) \cdot (b^\nu \hat{e}_\nu) = a^\mu b^\nu (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu). \quad (3.115)$$

对于我们所考虑的坐标系来说，基矢的内积恰好是度规张量 $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu, \quad (3.116)$$

这意味着各个基矢相互正交，空间基矢与自身的内积为 1，而时间基矢与自身的内积为 -1。因此，两个四矢量的内积就可以表示为

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu. \quad (3.117)$$

对整个时空进行洛伦兹变换相当于重新选择了一个保持度规张量不变的坐标系，因此它不会改变内积的大小，这与我们此前得到的结果是相同的。当然在物理中，我们大多数时候还是更关心张量的分量。

3.4 自由张量场

我们已经知道了各种张量在洛伦兹变换下的规律，现在就可以更恰当地说出相对论协变性对我们的要求了：它要求系统的作用量必须是洛伦兹标量，或者是系统的运动方程必须是由同一类型的张量构成的。与非相对论性场论的情况类似，如果场是定域的，则系统的作用量 S 可以表示为场的拉格朗日密度 \mathcal{L} 对全时空的积分

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (3.118)$$

而场的真实构型将使得场作用量取极值

$$\delta S = \int d^4x \mathcal{L} = 0. \quad (3.119)$$

如果场的作用量是一个洛伦兹标量，那么场的拉格朗日密度也应当是一个洛伦兹标量。因此，接下来我们就着手构造符合相对论协变性的拉格朗日密度。

场的拉格朗日密度的具体形式最终还是要依靠实验来确定。换句话说，它应该由真实的物理世界中场的演化行为来确定。不过如果我们充分考虑到系统所满足的各种对称性，那么我们可以将场的拉格朗日密度确定到一个非常精确的地步。⁸

首先我们考察最简单的自由实标量场 $\phi(x)$ ，它相当于为时空中的每一点 x^μ 都赋予一个洛伦兹标量 ϕ 。如果系统具有洛伦兹不变性，那么拉格朗日密度 \mathcal{L} 将是一个洛伦兹标量，这意味着 \mathcal{L} 的各项要么由场 ϕ 的标量函数构成，要么由 ∂_μ 以及 x^μ 等项缩并而成。其次，由于运动方程都是二阶方程，因此我们要求拉格朗日密度中最高只能包含场的一阶导数（否则运动方程就要高于二阶）。满足这一条件的洛伦兹标量只有寥寥几项，把它们全部写进拉格朗日密度之中，结果就是

$$\mathcal{L} = m(\phi, x^\mu, \partial_\nu x^\mu) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + n_\mu(\phi, x^\mu, \partial_\nu x^\mu) \partial^\mu \phi - f(\phi, x^\mu, \partial_\nu x^\mu), \quad (3.120)$$

其中 m, n_μ, f 为任意的函数。

我们还可以为系统添加更强的限制条件。由于系统具有时空平移对称性，因此时空中任何一个位置都没有特殊的地位，换句话说拉格朗日密度中应当不包含 x^μ 或 $\partial_\nu x^\mu$ 这样的项。由于系统具有转动不变性，任何一个方向都没有特殊的优势，因此拉格朗日密度中应当不存在 $n_\mu(\phi) \partial^\mu \phi$ 项。于是，拉格朗日密度就可以表示为

$$\mathcal{L} = m(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - f(\phi). \quad (3.121)$$

如果我们希望系统的能量有下界（换句话说，物理世界是稳定的），那么我们就让 $m(\phi) > 0$ ，且 $f(\phi)$ 有下界。

如果我们希望运动方程中场的二阶项 $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ 不与 ϕ 场本身耦合，那么 $m(\phi)$ 应当是一个常数。由于在拉格朗日密度上乘以任何一个常数因子并不会改变运动方程的形式，因此如果我们只考虑自由标量场，那么这个常数系数确实是无足轻重的。但如果我们考虑场与物质的耦合，那么我们就需要调整这个参数，使得它能够恰当地反映与物质的耦合性质。本质上说，这个参数仍然需要依靠实验才能够完全确定下来。在这里我们取 $m(\phi) = 1/2$ ，这样系统的拉格朗日密度就可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - f(\phi). \quad (3.122)$$

对于一个自由场来说，其拉格朗日中不应当包含高于二次的项。⁹ 如果 $f(\phi)$ 中包含常数项，则可以将其简单地略去，而 $f(\phi)$ 中的一次项可以通过简单的平移变换消去。因此，我们可以将 $f(\phi)$ 表示为

$$f(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (3.123)$$

式中 m 是一个系数。因此，一个自由实标量场的拉格朗日密度将可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.124)$$

在后文中我们将看到，拉格朗日密度中二次项的系数 m 可以被视为场（所对应的粒子）的质量。

接下来我们考察矢量场。矢量场相当于为时空中的每一点都赋予一个协变矢量，它可以表示成 $A^\mu(x^\nu)$ 。我们要求自由矢量场的拉格朗日密度为洛伦兹标量，且运动方程中不包含高于二阶

⁸需要说明的是，在这个“推导”的过程中我们已经预设了太多过强的假设，以至于将大量可能存在（尽管并不符合真实物理世界规律）的理论排除在外了。我们并不能够从逻辑上先验地说明世界必然是这个样子的，在很大程度上这只是我们的一厢情愿而已。并且事实上确实存在某些场，它们以特定规律演化，而并不存在与之相对应的作用量，从而它们的运动也并不能表示为泛函极值的形式。只不过对于我们所考虑的“基本”场而言，它们确实都可以利用拉格朗日表述进行刻画。

⁹何谓自由场？我们在这里提出一个物理上的要求，即那些解为平面波的场为自由场。这些平面波在空间中以一种均匀的方式延展，看起来就像是一个具有确定动量的自由“粒子”一样，因此称为“自由场”。后文中将看到，这些平面波解在量子化之后确实可以对应于具有确定动量的自由粒子。

的项。在考虑了时空平移对称性和转动对称性后，我们将排除掉理论中对于 x^μ 以及 $\partial^\mu A^\nu$ 的一次项的依赖。这样，自由矢量场的拉格朗日密度的一般形式将可以表示为¹⁰

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + b\partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu + c\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + dA_\mu A^\mu, \quad (3.125)$$

式中 a, b, c, d 为常数系数。

我们可以对这个拉格朗日密度是加一些更严格的限制。通常我们所考虑的是无质量的矢量场，在这种情况下 $d = 0$ 。由于相差一个全导数项的拉格朗日密度是相互等价的，注意到

$$\partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \partial_\nu (A^\mu \partial_\mu A^\nu) - \partial_\mu (A^\mu \partial_\nu A^\nu), \quad (3.126)$$

因此我们可以不失一般性地取 $b = 0$ 。如果我们进一步要求系统的能量有下界，那么各系数间需要满足

$$a = -c \geq 0. \quad (3.127)$$

系数的具体取值还是要通过实验确定下来，在这里我们取 $a = -c = 1/2$ 。这样对于一个无质量的自由矢量场来说，其拉格朗日密度将可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu. \quad (3.128)$$

我们也可以在这个拉格朗日密度中加上适当的全导数项而将其表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.129)$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.130)$$

称为矢量场的场强张量。

矢量场具有一个重要的性质。如果我们为矢量场 A^μ 附加一个标量函数的全微分

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha, \quad (3.131)$$

那么系统的作用量不会发生任何的改变。这意味着对于同一个矢量场来说，存在着一系列相互等价的 A^μ ，我们可以选取其中的任意一个来刻画系统的性质。因此，矢量场的选择具有一定的任意性，它被称为规范对称性。¹¹ 为了将矢量场确定下来，我们需要额外为系统附加一个规范条件。我们经常采用的条件是

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \quad (3.132)$$

这被称为洛伦兹 (Lorenz) 规范。¹²

3.5 自由旋量场

除了各种张量场之外，还有一种重要的场，那就是旋量场。旋量 ψ 是一种在洛伦兹变换下以某种特殊的方式变换的量，而旋量场 $\psi(x^\mu)$ 就是为时空中每一个点都赋予一个旋量的场。形式上我们可以用一个具有四个分量的量来表示旋量，不过它在洛伦兹变换下的行为与矢量场并不相同。为揭示旋量场的性质，我们将更细致地考察场在洛伦兹变换下的行为。

¹⁰这里我们已经略去了形如 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma$ 这样的项。它们会破坏理论的 CP 对称性，因此我们暂时不去考虑它们。

¹¹如果我们将规范对称性作为自由矢量场拉格朗日密度所需要满足的条件，那么我们将发现场的拉格朗日密度只可能由场强张量 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 组成。因此，自由矢量场的拉格朗日密度将只可能取为 $\mathcal{L} = aF^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + b\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ 。式中的后一项会破坏系统的 CP 对称性，我们暂时不去考虑它，这样我们就几乎已经将拉格朗日密度完全确定下来了。

¹²应当指出，此时 A^μ 仍有规范任意性，只是其任意程度有所降低。我们仍然可以作变换 $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha$ ，只不过为了满足洛伦兹规范条件， α 必须满足 $\partial^\mu \partial_\mu \alpha = 0$ 。当然，满足这一条件的 α 仍是无限多的。

如果我们要求旋量场在洛伦兹变换下仍然以线性方式进行变换, 那么对于任意一个洛伦兹变换 Λ 来说, 我们总可以找到一个矩阵 $S(\Lambda)$, 使得旋量场的各个分量依矩阵 $S(\Lambda)$ 进行变换¹³

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad (3.133)$$

或者写成分量形式

$$\psi'_\alpha(x') = [S(\Lambda)]_{\alpha\beta}\psi_\beta(x). \quad (3.134)$$

在群论中, 变换矩阵 $S(\Lambda)$ 被称为洛伦兹群的表示, 它满足

$$S[\Lambda_1\Lambda_2] = S[\Lambda_1]S[\Lambda_2]. \quad (3.135)$$

可以验证, 对于标量来说, 洛伦兹群的表示为

$$S(\Lambda) = 1. \quad (3.136)$$

而对于矢量来说, 洛伦兹群的表示为

$$[S(\Lambda)]^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu. \quad (3.137)$$

如果我们能够对旋量 ψ 给出矩阵 $S(\Lambda)$ 的形式, 那么我们就得到了洛伦兹群的旋量表示, 也就了解了旋量场在洛伦兹变换下的行为。

直接写出洛伦兹群的表示 $S(\Lambda)$ 是不容易的, 因此我们首先考虑无限小的洛伦兹变换。考虑无穷小洛伦兹变换

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu, \quad (3.138)$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 是一个反对称二阶张量, 它是一个度量变换程度的无限小参数。我们可以将其参数化为

$$\Lambda = I - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, \quad (3.139)$$

式中 Λ 代表一个抽象的无限小洛伦兹变换, $J^{\mu\nu}$ 是一个有限大小的元素, 称为洛伦兹群的生成元, 记作 $\text{so}(1, 3)$ 。所有生成元的集合构成李群在单位元处的切空间, 我们称之为李代数。因此, 无限小洛伦兹变换的表示与其生成元的表示之间的关系为

$$S[\Lambda] = I - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S[J^{\mu\nu}], \quad (3.140)$$

式中 $S[\Lambda], S[J^{\mu\nu}]$ 均为特定的表示空间中的矩阵。我们也可以明显地写出上述表示的分量形式

$$S[\Lambda]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(S[J^{\mu\nu}])_{\alpha\beta}, \quad (3.141)$$

式中 α, β 为表示矩阵的分量指标。在得到了无限小洛伦兹变换的表示后, 我们可以将有限大小的洛伦兹变换 Λ 视为无穷多个无穷小变换的相继作用

$$S[\Lambda] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{i}{2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{n} S[J^{\mu\nu}] \right)^n = \exp \left(-\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S[J^{\mu\nu}] \right), \quad (3.142)$$

这里的 ε 不再限于一个无穷小量, 矩阵指数可以被理解为相应的泰勒级数

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (3.143)$$

因此, 如果我们能够找到洛伦兹群生成元的表示, 那么我们就可以得到洛伦兹群的表示。

首先我们考察洛伦兹变换生成元的时空四矢量表示。考虑一个无限小的洛伦兹变换

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu. \quad (3.144)$$

¹³这里我们所讨论的是原场 ψ 在原坐标 x 处的取值与新场 ψ' 在新坐标 x' 处的取值之间的关系, 当然我们也可以只考虑场本身在洛伦兹变换下的行为。注意到 $x = \Lambda^{-1}x'$, 我们可以将场的变换表示为 $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$ 。将自变量从 x' 替换为 x , 我们得到 $\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$, 即场本身的变换可以表示为 $\delta_0\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x)$ 。在无穷小变换下, 上式可以表示为

$$\delta_0\psi(x) = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S[J^{\mu\nu}])\psi(x).$$

上式中的第一项对应于轨道角动量, 第二项对应于自旋角动量。

将其作用在时空四矢量 x^μ 上, 我们得到

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) x^\nu. \quad (3.145)$$

上述结果可以等价地表示为¹⁴

$$x'^\mu = \left(I + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \right) x^\mu, \quad (3.146)$$

式中

$$L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (3.147)$$

因此这里的 $L^{\mu\nu}$ 就是洛伦兹变换生成元作用在时空四矢量上的表示。

不同的洛伦兹变换之间一般是不能够随意交换顺序的, 这种非交换的性质可以由两个生成元之间的对易关系来刻画。利用时空四矢量表示 $L^{\mu\nu}$ 的表达式, 我们可以验证洛伦兹变换的生成元满足如下的对易关系

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma} - J^{\rho\sigma} J^{\mu\nu} \\ &= i(\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (3.148)$$

对于洛伦兹群来说, 其生成元之间的对易关系决定了李代数的结构。因此如果我们能够找到一组矩阵 $S[J^{\mu\nu}]$ 满足上述对易关系, 那么我们就得到了洛伦兹变换的一个表示。

我们已经知道了标量场和矢量场在洛伦兹变换下的行为。标量场在洛伦兹变换下是不变的

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (3.149)$$

因此洛伦兹群生成元的标量表示为

$$S[J^{\mu\nu}] = 0. \quad (3.150)$$

矢量场在洛伦兹变换下依逆变矢量发生变化

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x), \quad (3.151)$$

因此可以验证, 洛伦兹群生成元的矢量表示为

$$(S[J^{\mu\nu}])_{\alpha\beta} = i(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha). \quad (3.152)$$

现在的问题是, 一个恰当的旋量表示应当将表示矩阵 $S[J^{\mu\nu}]$ 取为什么形式?

我们发现, 如果我们能够找到一组矩阵 γ^μ 使得其反对易关系满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (3.153)$$

那么如下矩阵

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.154)$$

将满足洛伦兹群洛伦兹群生成元的对易关系。因此, 这组表示矩阵 $S^{\mu\nu}$ 给出了洛伦兹群生成元的一个表示, 我们称之为旋量表示。在这个表示下, 无限小洛伦兹变换的表示为

$$S[\Lambda] = I - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \quad (3.155)$$

而有限大小的洛伦兹变换的表示为¹⁵

$$S[\Lambda] = \exp \left(-\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right). \quad (3.156)$$

¹⁴此处的约定与通常的生成元约定相差一个负号, 这是因为我们通常在考察坐标的变换时采用的都是被动变换(坐标变换)而非主动变换(几何变换)的视角。考虑洛伦兹变换 Λ , 它作用在场上时会把所有的时空点连带着时空点上的场一同变换, 而作用在坐标上时仅仅改变坐标系的选取。这两个变换相差一个逆, 即 $\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$, 因此习惯上我们约定坐标生成元的表示与场生成元的表示将相差一个负号。由于对生成元的表示乘以一个常数, 得到的仍然是生成元的表示, 因此这里的负号是无足轻重的。

¹⁵旋量表示并不总是保持群关系不变, 而是有可能相差一个正负号。例如, 在洛伦兹变换沿某个方向旋转 2π 后, 旋量场变为 $\psi \rightarrow -\psi$ 而非回到其自身, 只有旋转 4π 才回到自身。这一点说明旋量表示是一个双值表示而非单值表示。

在狄拉克表示下, γ 矩阵可以取为如下的 4×4 矩阵¹⁶

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.157)$$

其中

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.158)$$

I 和 σ^i 分别为单位矩阵和泡利 (Pauli) 自旋矩阵。我们定义: 在洛伦兹变换下, 其分量依照上述表示矩阵变换的四分量场

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi(x) \quad (3.159)$$

就是旋量场。这样我们就明显地给出了旋量场在洛伦兹变换下的变换规律。

有了旋量场, 我们就可以利用它来构造洛伦兹不变量。我们定义旋量场的共轭为

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.160)$$

其中 ψ^\dagger 为旋量场的厄密 (Hermite) 共轭。一般情况下, 自由旋量场的拉格朗日密度可以表示为一个旋量场的双线性型

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} D \psi, \quad (3.161)$$

式中 D 为一个 4×4 厄密矩阵, 且我们要求拉格朗日密度在洛伦兹变换下不变。

矩阵 D 有 16 个自由度, 我们可以利用 γ 矩阵为其构造一组线性无关且完备的基矢

$$I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5, \gamma_5 \gamma^\mu, \quad (3.162)$$

式中

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.163)$$

我们将考察这些矩阵在洛伦兹变换下的性质。在无穷小洛伦兹变换下, γ^μ 矩阵将变换为

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^\mu S &= \left(I + \frac{i}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right)\gamma^\mu \left(I - \frac{i}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right) \\ &= \gamma^\mu - \frac{i}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = \Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma. \end{aligned} \quad (3.164)$$

换句话说, γ^μ 在洛伦兹变换下是按照逆变矢量的方式来变化的。由于 $\sigma^{\mu\nu}$ 可以表示为两个 γ 矩阵之积, 因此它在洛伦兹变换下将按照二阶逆变张量来变化

$$S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \sigma^{\rho\sigma}. \quad (3.165)$$

我们可以进一步地将 γ^5 矩阵表示为

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu, \quad (3.166)$$

式中

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ 奇排列} \\ 1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ 偶排列} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (3.167)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.168)$$

¹⁶除了狄拉克表示之外, 我们还经常使用 γ 矩阵的外尔 (Weyl) 表示。外尔表示的优点在于, 它可以将左手旋量和右手旋量明显地区分开。除此之外, 还存在着一种马约拉纳 (Majorana) 表示。上述所有的四维表示都是等价的, 它们之间只相差一个相似变换。在超对称一节中, 我们将采用外尔表示。

为列维-奇维塔 (Levi-Civita) 张量, 它相对于所有的指标是完全反对称的。上述定义中的奇排列和偶排列分别为 $\mu\nu\rho\sigma$ 需要奇数和偶数次对换才能够排列成为 $0, 1, 2, 3$ 的序列, 也就是说取 $\varepsilon^{0123} = 1$, 将两个指标对换一次就产生一个负号。¹⁷ 因此在洛伦兹变换下, γ^5 矩阵将变换为

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma_5 S &= -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}S^{-1}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu S \\ &= -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\Lambda^\alpha_{\alpha'}\Lambda^\beta_{\beta'}\Lambda^\mu_{\mu'}\Lambda^\nu_{\nu'}\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}. \end{aligned} \quad (3.169)$$

注意到

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 4!, \quad (3.170)$$

因此我们得到

$$S^{-1}\gamma_5 S = -\frac{i}{4!}(\det \Lambda)\varepsilon_{\alpha'\beta'\mu'\nu'}\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}, \quad (3.171)$$

即

$$S^{-1}\gamma_5 S = (\det \Lambda)\gamma_5. \quad (3.172)$$

式中我们已经利用了行列式的定义

$$\begin{aligned} \det(A) &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n} \\ &= \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \end{aligned} \quad (3.173)$$

上述结果意味着 γ_5 矩阵在洛伦兹变换下将按照 $\det \Lambda$ 进行变化。

根据上述结果, 我们可以计算出旋量场双线性型的变换规律

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi, \quad (3.174)$$

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda^\mu_\sigma\bar{\psi}\gamma^\sigma\psi. \quad (3.175)$$

$$\bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S\psi = \Lambda^\mu_\lambda\Lambda^\nu_\sigma\bar{\psi}\sigma^{\lambda\sigma}\psi. \quad (3.176)$$

$$\bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^5 S\psi = \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (3.177)$$

$$\bar{\psi}'\gamma^5\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^5 S S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \det(\Lambda)\Lambda^\mu_\sigma\bar{\psi}\gamma^\sigma\psi. \quad (3.178)$$

从上述结果中我们看到, $\bar{\psi}(x)\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ 在洛伦兹变换下分别按照标量、逆变矢量和二阶逆变张量变换。而 $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$ 虽然在恰当正时洛伦兹变换下按照标量和逆变矢量变化, 但是它们在反演下会改变符号, 我们分别称之为赝标量和赝矢量。

如果我们只允许矩阵 D 中出现一阶导数项, 且系统的拉格朗日密度在洛伦兹变换下不变, 那么利用 γ 矩阵所能构造出的矩阵 D 的最普遍表达式为

$$\begin{aligned} D &= a^\mu\partial_\mu + b^\mu\gamma_5\partial_\mu + c\gamma^\mu\partial_\mu + d\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu + \sigma^{\mu\nu}e_\mu\partial_\nu \\ &\quad + fI + g\gamma_5 + u_\mu\gamma^\mu + v_\mu\gamma_5\gamma^\mu + w_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.179)$$

式中各 $a_\mu, b_\mu, c, d, e_\mu, f, g, u_\mu, v_\mu, w_{\mu\nu}$ 均为常系数。如果系统具有时空平移对称性和各向同性, 那么系统中将不应当包含 $a_\mu, b_\mu, e_\mu, u_\mu, v_\mu, w_{\mu\nu}$ 项。如果我们要求系统在宇称变换下保持不变, 那么系统中不应当包含 γ^5 项。这样, 系统的密度中将仅余下两项¹⁸

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f\bar{\psi}\psi. \quad (3.180)$$

表达式中的系数最终要通过实验来确定。最终我们取 $c = i, f = -m$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (3.181)$$

这就是质量为 m 的自由旋量场的拉格朗日密度。

¹⁷有的文献中的列维-奇维塔张量的约定与我们这里的约定相差一个负号, 即 $\varepsilon^{0123} = -1$ 。

¹⁸注意到 $\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$, 我们可以通过弃去全导数项的方式消除掉拉格朗日密度中的 $\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 项。

3.6 相对论性场论

在前面的章节中, 我们讨论了自由场的拉格朗日密度。根据场的拉格朗日密度, 我们就可以写出场的作用量, 进而得到场的运动方程。设系统中存在着若干个场 (或场的分量) ϕ_i , 则其作用量可以表示为各场的泛函, 它们是系统的拉格朗日密度对整个时空的积分

$$S[\phi_i] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (3.182)$$

这里我们用 ϕ_i 来代表理论中所有可能的标量场、旋量场、矢量场等。场的真实构型将使得场作用量取极值

$$\delta S[\phi_i] = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = 0. \quad (3.183)$$

这等价于场的拉格朗日方程

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (3.184)$$

与非相对论性场论不同的是, 这里的指标并不仅仅是形式上的记号, 而是要求系统明显地具有洛伦兹协变性。并且我们要求拉格朗日密度 \mathcal{L} 必须是一个洛伦兹标量, 这样系统的运动方程才在洛伦兹变换下保持不变。

在得到了场的拉格朗日密度后, 我们就可以对场的性质进行进一步的分析。在前面的章节中我们看到, 自由实标量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.185)$$

利用这个拉格朗日密度, 我们可以求出它所对应的拉格朗日方程, 结果为

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0, \quad (3.186)$$

其中 $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \nabla^2$, 它被称为克莱因 (Klein)-戈登 (Gordon) 方程。

这个方程的形式与波动方程非常相似, 因此我们不妨假设其解具有平面波的形式

$$\phi \sim e^{\pm i p \cdot x} = e^{\pm i(p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}. \quad (3.187)$$

将这个解代入方程之中, 我们发现波矢 p^μ 不能任意取值, 而要满足条件 $p^2 = m^2$ 。我们取四动量的零分量为正值, 即

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}. \quad (3.188)$$

因此, 给定了波的空间分量, 它的零分量将会被自动的确定下来。在后续的章节中我们将看到, 这里的 m 就对应于标量场量子化后得到的粒子的质量。

自由标量场的通解将是所有满足上述条件的平面波解的线性组合。在利用平面波展开场的时候, 我们需要计算的体积元 (积分测度) 为

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0). \quad (3.189)$$

根据 δ 函数的性质, 若 x_i 是函数 $f(x)$ 的零点, 则有

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \quad (3.190)$$

于是我们得到

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p^0 - E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}} + \frac{\delta(p^0 + E_{\mathbf{p}})}{2E_{\mathbf{p}}}, \quad (3.191)$$

因此

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \delta(p^0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \quad (3.192)$$

是一个协变的体积元。习惯上我们将其中的一个因子 $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 吸收到展开系数的定义中，因此满足克莱因-戈登方程的标量场可以表示为

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} [a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^* e^{ip \cdot x}], \quad (3.193)$$

式中 $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^*$ 为两组展开系数，最终的体积元中余下了一个 $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 的因子。对上式两边取复共轭，我们得到

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} [b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^* e^{ip \cdot x}]. \quad (3.194)$$

由于我们在这里所考虑的 ϕ 为实标量场，因此 $\phi^* = \phi$ ，这意味着上述展开式中的系数将满足 $a_{\mathbf{p}} = b_{\mathbf{p}}$ 。于是我们得到

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} [a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^* e^{ip \cdot x}]. \quad (3.195)$$

如果所考虑的是一般的复标量场，则 $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$ 可以取不同的值。

无质量自由矢量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.196)$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.197)$$

称为矢量场的场强张量。这样一个无质量矢量场所满足的拉格朗日方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.198)$$

在洛伦兹规范 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 下，矢量场的拉格朗日方程可以表示为

$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (3.199)$$

与标量场类似，自由矢量场的平面波解可以表示为

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=0}^3 [a_{\mathbf{p}}^\lambda \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{*\lambda} \varepsilon_\mu^{*\lambda}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}], \quad (3.200)$$

式中 $p^\mu p_\mu = 0$ ， $a_{\mathbf{p}}^\lambda$ 为展开系数， $\varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p})$ 为一组正交归一的极化矢量。

自由旋量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (3.201)$$

对 $\bar{\psi}$ 作变分可以得到自由旋量场的运动方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.202)$$

它被称为狄拉克方程。¹⁹ 通过求解狄拉克方程，我们可以得到自由旋量场的平面波解

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s [a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{*s} v^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}], \quad (3.203)$$

式中 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}$ ， u^s, v^s 为两组旋量基矢， $a_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}}^{*s}$ 为两组展开系数，指标 $s = 1, 2$ 。旋量基矢 u^s, v^s 的形式并不是任意的，它需要满足狄拉克方程。 u^s 满足方程

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.204)$$

求解这一方程，我们得到

$$u^s(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \xi^s \end{pmatrix}, \quad (3.205)$$

¹⁹在旋量场的作用量中，我们应当将 ψ 和 $\bar{\psi}$ 视为两个独立的场。对 $\bar{\psi}$ 作变分可以得到狄拉克方程，而对 ψ 作变分可以得到另一个方程 $\bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial} + m) = 0$ ，式中 $\bar{\psi}\overleftarrow{\partial}_\mu = \partial_\mu(\bar{\psi})$ ，这是狄拉克方程的共轭。一个有趣的事实是：狄拉克方程的解一定会让自由旋量场的拉格朗日密度取为零。

式中 ξ^s 为一组相互正交的二分量旋量。 v^s 满足方程

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.206)$$

求解这一方程, 我们得到

$$v^s(\mathbf{p}) = \sqrt{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \eta^s \\ \eta^s \end{pmatrix}, \quad (3.207)$$

式中 η^s 为一组相互正交的二分量旋量。我们可以将这组二分量旋量基矢选取为 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ 的本征矢

$$\xi^1 = \eta^1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \eta^2 = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.208)$$

这样我们就求出了旋量场展开式的一组合适的基矢。可以验证, 上述旋量基矢满足如下的正交归一关系

$$\bar{u}^s(\mathbf{p})u^{s'}(\mathbf{p}) = 2m\delta^{ss'}, \quad \bar{v}^s(\mathbf{p})v^{s'}(\mathbf{p}) = -2m\delta^{ss'}, \quad (3.209)$$

$$\bar{u}^s(\mathbf{p})v^{s'}(\mathbf{p}) = \bar{v}^s(\mathbf{p})u^{s'}(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.210)$$

$$\sum_s u^s(\mathbf{p})\bar{u}^s(\mathbf{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v^s(\mathbf{p})\bar{v}^s(\mathbf{p}) = \not{p} - m. \quad (3.211)$$

在得到了自由场的拉格朗日密度后, 我们可以讨论它在扰动下的响应。考虑自由标量场在源项 $J(x)$ 下的响应, 其拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi, \quad (3.212)$$

其拉格朗日方程为

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = J(x). \quad (3.213)$$

这一方程是线性的, 即对于任意的源项 J_1, J_2 来说, 系统的响应 $\phi(J, x)$ 满足

$$\phi(J_1 + J_2, x) = \phi(J_1, x) + \phi(J_2, x). \quad (3.214)$$

也就是说, 若我们能够选取一组较为简单的源项 J_i 并将任意的源项 J 展开为上述各 J_i 的组合, 则若我们能够求出系统在每个源项 J_i 下的响应, 那么我们就求出了任意源项 J 的响应。

一个合适的选择是将源项 J 分解为一系列点源的贡献之和。我们定义 δ 函数为²⁰

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad (3.215)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1. \quad (3.216)$$

直观地说, 这个函数可以代表一个位于 $x = 0$ 处的具有单位质量的质点的密度。类似地, 四维时空中的 δ 函数可以定义为

$$\delta^{(4)}(x) = \delta(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (3.217)$$

根据 δ 函数的性质, 我们可以将源项 $J(x)$ 展开为

$$J(x) = \int d^4x J(x_0)\delta^{(4)}(x - x_0), \quad (3.218)$$

这代表源项 $J(x)$ 可以表示为一系列位于 $x = x_0$, 且强度为 $J(x_0)$ 的点源 $\delta^{(4)}(x - x_0)$ 之和。由于这一方程是线性的, 因此源项所产生的扰动将等于各点源所产生的扰动之和。设系统在点源 $\delta^{(4)}(x - x_0)$ 的扰动下, 在 x 处的响应为传播子 $G(x, x_0)$

$$(\partial^2 + m^2)G(x, x_0) = \delta^{(4)}(x - x_0), \quad (3.219)$$

²⁰更严格地说, δ 函数可以定义为普通函数的极限, 例如

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Kx}{x}.$$

当然, 这一极限已经不是通常意义上的函数了, 我们应当称之为广义函数。

则场在源项 $J(x)$ 下的响应将可以表示为一系列传播子的线性组合

$$\phi(x) = \int d^4x J(x_0) G(x, x_0). \quad (3.220)$$

可以验证，这确实是含源方程的解。

因此，接下来的工作就是具体地求出传播子 $G(x, x_0)$ 的表达式。这里的传播子 $G(x, x_0)$ 实际上仅与 $x - x_0$ 有关，因此我们将其表示为 $G(x - x_0)$ 。求解这个方程最简单的方法就是对方程两边同时作傅里叶变换。对于一元函数的傅里叶变换（及逆变换）来说，我们采用如下约定²¹

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int dt f(t) e^{-i\omega t}, \quad (3.221)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega t}. \quad (3.222)$$

对于四维矢量的傅里叶变换（及逆变换）来说，我们采用如下的约定

$$F(p) = \int d^4x f(x) e^{ip \cdot x}, \quad (3.223)$$

$$f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} F(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (3.224)$$

这里空间分量的约定与一元函数的傅里叶变换是一致的，而时间分量相差了一个负号。

注意到

$$\partial^2 G(x - x_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p^2) G(p) e^{-ip \cdot (x - x_0)}, \quad (3.225)$$

$$\delta^{(4)}(x - x_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x_0)}, \quad (3.226)$$

将上述两式代入到方程之中，我们得到

$$(-p^2 + m^2) G(p) = 1, \quad (3.227)$$

从中解得

$$G(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2}. \quad (3.228)$$

因此 $G(x - x_0)$ 的表达式为²²

$$G(x - x_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x_0)}. \quad (3.229)$$

这样我们就求出了经典标量场的传播子。由此标量场在任意源项 $J(x)$ 下的响应就可以表示为

$$\phi(x) = \int d^4x J(x_0) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x_0)}, \quad (3.230)$$

它等于各传播子的贡献之和。

事实上我们也可以直接对含源方程

$$(\partial^2 + m^2) \phi(x) = J(x) \quad (3.231)$$

做傅里叶变换。定义场 $\phi(x)$ 和源 $J(x)$ 的傅里叶变换分别为

$$\phi(p) = \int d^4x \phi(x) e^{ip \cdot x}, \quad (3.232)$$

²¹ 傅里叶变换是符号约定的重灾区。一般地，我们可以将傅里叶变换与逆变换表示为

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ib\omega t} dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-ib\omega t} d\omega,$$

参数 a, b 的取值对应于不同的约定。常用的约定有以下四种：(1) $a = 0, b = 1$, (2) $a = 1, b = -1$, (3) $a = -1, b = 1$, (4) $a = 0, b = -2\pi$ 。

²² 除去一个虚数单位 i 之外，这里的传播子与量子场论中的传播子仍差一个负号。这是因为我们可以将自由标量场的拉格朗日密度表示为 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi$ ，由此场的拉格朗日方程可以表示为 $-(\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0$ 。在经典场论中，我们打算明显地做出这些区别。

$$J(p) = \int d^4x J(x) e^{ip \cdot x}. \quad (3.233)$$

对含源方程两边做傅里叶变换, 我们得到

$$(-p^2 + m^2) \phi(p) = J(p). \quad (3.234)$$

这是一个代数方程, 可直接解出 $\phi(p)$ 的取值

$$\phi(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2} J(p). \quad (3.235)$$

对上式做逆傅里叶变换, 我们得到

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} J(p) \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot x}. \quad (3.236)$$

根据傅里叶变换的性质

$$\mathcal{F}^{-1}[F(p)G(p)] = \int d^4x_0 f(x_0)g(x - x_0), \quad (3.237)$$

我们可以将场的响应表示为

$$\phi(x) = \int d^4x J(x_0) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x_0)}, \quad (3.238)$$

这与此前所得到的结果是一致的。

我们还可以以一种更有启发性的方式来考察此处的含源方程。若我们不将场 ϕ 和源 J 视为弥散在空间中的函数, 而是视为一个无穷维的矢量, 将 $\phi(x), J(x)$ 视为其在 x 处的分量, 那么线性微分算符 $(\partial^2 + m^2)$ 将可以被视为一个作用在矢量 ϕ 上的无穷维矩阵 (无穷维线性变换)。整个方程可以表示为: 求一个无穷维矢量 ϕ , 使得将一个无穷维线性变换 $(\partial^2 + m^2)$ 作用于其上后, 等于一个已知的无穷维矢量 J

$$(\partial^2 + m^2) \phi = J, \quad (3.239)$$

这无非就是一个无穷维的非齐次线性方程。要求解这一方程, 只需要找出变换 $(\partial^2 + m^2)$ 之逆即可

$$\phi = (\partial^2 + m^2)^{-1} J. \quad (3.240)$$

当然, 一般来说求出矩阵的逆是不容易的。但若可以设法将矩阵对角化, 则其逆就等于将其每个对角元分别取倒数。在这里傅里叶变换就相当于对矩阵进行基矢的变换, 将基矢从坐标表象下的 $\delta^{(4)}(x - x_0)$ 替换为了动量表象下的 $e^{-ip \cdot x}$ 。²³ 在进行这样的基矢变换后, 场 ϕ 和源 J 的分量分别变为 $\phi(p), J(p)$, 方程变为

$$(-p^2 + m^2) \phi(p) = J(p). \quad (3.241)$$

可以看到, 此时方程只将指标 p 的分量变换到指标 p 上, 而并未将不同指标的分量相互混合也就是说, 只将 $e^{-ip \cdot x}$ 变换到 $e^{-ip \cdot x}$, 最多只有一个幅度的改变, 而并未将 $e^{-ip \cdot x}$ 变换为其他的 $e^{-ip' \cdot x}$ 。因此, 此时变换 $(\partial^2 + m^2)$ 已经是对角的了。²⁴ 在对角化之后, 这个变换的逆是容易求出的

$$\phi(p) = \frac{-1}{p^2 - m^2} J(p). \quad (3.242)$$

再做傅里叶逆变换, 将动量表象的结果变换回通常的坐标表象, 我们就得到了系统在任意源项下的响应。我们将在量子力学中更详细地介绍这一思想。

²³应当说, 这里的 $\delta^{(4)}(x - x_0)$ 以及 $e^{-ip \cdot x}$ 仍然仅仅是坐标基矢和动量基矢在坐标表象下的分量, 而非坐标基矢和动量基矢本身。在量子力学中, 我们将用狄拉克符号将函数空间中的无穷维矢量与其分量明显地区分开来。

²⁴事实上, 对于任意线性且满足时空平移不变性的系统来说, 我们都可以通过傅里叶变换将其对角化。对于线性但是不满足时空平移不变性的系统来说, 傅里叶变换不能够将其对角化, 但我们仍然可能找到其他的变换将其对角化。只要系统是线性的, 那么利用传播子进行求解总是可能的。但若系统是非线性的, 则上述方法将全部失效, 我们必须将源项和整个方程 (甚至包括边界条件和初始条件) 作为一个整体来求解。非线性系统的求解是极为困难的, 迄今为止我们只在极少数系统中得到了精确解。

类似地, 我们可以求出自由旋量场和自由矢量场的传播子。自由旋量场传播子所满足的方程为

$$(i\partial - m)G(x - x_0) = \delta^{(4)}(x - x_0). \quad (3.243)$$

对方程两端做傅里叶变换, 我们就可以求出传播子的表达式

$$\begin{aligned} G(x - x_0) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x_0)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} e^{-ip \cdot (x - x_0)}. \end{aligned} \quad (3.244)$$

在洛伦兹规范下, 无质量自由矢量场传播子所满足的方程为

$$\partial^2 G^{\mu\nu}(x - x_0) = \eta^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x_0), \quad (3.245)$$

对方程两端做傅里叶变换, 我们就可以求出传播子的表达式

$$G^{\mu\nu}(x - x_0) = \int d^4 p \frac{-\eta^{\mu\nu}}{p^2} e^{-ip \cdot (x - x_0)}. \quad (3.246)$$

对上述传播子积分, 我们就可以得出旋量场和矢量场在任意源项下的响应。

除了上述三种自由场之外, 我们还可以考虑有质量矢量场。这仍然是一个自由场, 其拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (3.247)$$

拉格朗日方程为

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2 A^\mu = 0, \quad (3.248)$$

这被称为普罗卡 (Proca) 方程。需要注意的是, 此时系统不再具有规范对称性。计算出有质量矢量场的传播子, 我们得到

$$G^{\mu\nu}(x - x_0) = \int d^4 p \frac{-(\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m^2)}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x_0)}. \quad (3.249)$$

接下来我们讨论相对论性场论中的诺特定理。假设系统的拉格朗日密度在以 ω^a 为参数的无限小变换

$$\delta x^\rho = \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} \delta \omega^a, \quad \delta \phi_i = \frac{\delta \phi_i}{\delta \omega^a} \delta \omega^a \quad (3.250)$$

下不发生改变, 那么系统将满足守恒流方程

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0, \quad (3.251)$$

式中

$$j_a^\mu = - \left[\mathcal{L} \delta_\rho^\mu - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \partial_\rho \phi_i \right] \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \frac{\delta \phi_i}{\delta \omega^a}. \quad (3.252)$$

给定系统的连续对称性, 我们将得到它所对应的守恒流。对其零分量进行全空间的积分, 我们将得到守恒荷

$$Q_a = \int d^3 x j_a^0. \quad (3.253)$$

上述结果我们已经在非相对论性场论中讨论过了。

实际上由上述表达式定义的守恒流并不是唯一的, 且守恒荷的取值并不因守恒流而发生改变。可以验证, 如果 j_a^μ 是一个守恒流, 则

$$j_a'^\mu = j_a^\mu + \partial_\nu t^{\mu\nu} \quad (3.254)$$

也是一个守恒流, 式中 $t^{\mu\nu}$ 是一个反对称张量。我们可以利用这一性质对系统的能量动量张量进行对称化。除此之外, 一个保持作用量不变的对称变换还容许系统的拉格朗日密度发生一个四维散度的变化

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \chi^\mu. \quad (3.255)$$

此时系统的守恒流将变化为

$$j_a'^\mu = j_a^\mu + \delta\chi^\mu / \delta\omega^a. \quad (3.256)$$

对于相对论性场论来说, 我们要求它满足庞加莱不变性。如果系统在无限小时空平移变换下不变

$$\delta x^\rho = \varepsilon^\rho, \quad \delta\phi_i = 0, \quad (3.257)$$

则此时系统的守恒流为

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} (\partial_\nu \phi_i) - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu, \quad (3.258)$$

我们称之为系统的能量-动量张量。对其零分量进行全空间积分, 我们得到

$$P_\nu = \int d^3x T_\nu^0 = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i)} (\partial_\nu \phi_i) - \mathcal{L} \delta_\nu^0 \right] = (H, -\mathbf{p}), \quad (3.259)$$

这是守恒的动量四矢量。

系统在洛伦兹变换下的行为要更加复杂。考虑无穷小洛伦兹变换

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \varepsilon_\nu^\mu, \quad (3.260)$$

在这个变换下, 坐标的改变为

$$\delta x^\mu = \varepsilon_\nu^\mu x^\nu. \quad (3.261)$$

场在无穷小洛伦兹变换下的改变为

$$\delta\phi_r = -\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S[J^{\mu\nu}]_{rs} \phi_s(x), \quad (3.262)$$

式中 r, s 为场分量的指标, $S[J^{\mu\nu}]$ 为洛伦兹群生成元的表示 (见 3.5 节)。计算出系统在洛伦兹变换下的守恒流, 我们得到

$$M_{\mu\nu\lambda} = T_{\mu\lambda} x_\nu - T_{\mu\nu} x_\lambda - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} S[J_{\nu\lambda}]_{rs} \phi_s, \quad (3.263)$$

这被称为场的广义角动量张量。对其零分量进行全空间积分, 我们得到

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x \left(T_{0\lambda} x_\nu - T_{0\nu} x_\lambda - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} S[J_{\nu\lambda}]_{rs} \phi_s \right), \quad (3.264)$$

这被称为场的广义角动量。

取广义角动量的空间部分, 我们得到

$$M_{ij} = \int d^3x \left(T_{0j} x_i - T_{0i} x_j - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} S[J_{ij}]_{rs} \phi_s \right). \quad (3.265)$$

定义总角动量矢量为

$$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}, \quad (3.266)$$

它可以明显地区分为两个不同的部分

$$J_i = L_i + S_i, \quad (3.267)$$

式中

$$L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3x (T_{0j} x_i - T_{0i} x_j), \quad (3.268)$$

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (-i S[J_{jk}]_{rs}) \phi_s. \quad (3.269)$$

我们称上式定义的 \mathbf{L} 为轨道角动量, 它是由坐标的变化而产生的; 而 \mathbf{S} 为自旋角动量, 它是由场本身的变化而产生的。我们可以将轨道角动量 \mathbf{L} 改写为

$$L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} \left(x_n \frac{\partial}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \phi_r(x), \quad (3.270)$$

它就对应于通常意义上的角动量。自旋角动量 \mathbf{S} 的含义将在后文中进一步讨论。

我们还可以构建场的哈密顿表述。定义场的正则动量为

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}, \quad (3.271)$$

式中 $\dot{\phi}_i = \partial_0 \phi_i$ 。场的哈密顿密度可以表示为

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}, \quad (3.272)$$

哈密顿量为

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L}). \quad (3.273)$$

场的哈密顿方程可以表示为

$$\dot{\phi}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\delta H}{\delta \phi_i}. \quad (3.274)$$

需要注意的是，这里的哈密顿量不再协变了。但这并未引起矛盾，因为哈密顿量代表着系统的能量，而能量本身就不是协变的。

定义两个场力学量 u, v 之间的泊松括号为

$$[u, v] = \int d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \phi_i} \frac{\delta v}{\delta \pi_i} - \frac{\delta v}{\delta \phi_i} \frac{\delta u}{\delta \pi_i} \right). \quad (3.275)$$

场与其正则动量之间的等时泊松括号为

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.276)$$

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \phi_j(\mathbf{x}', t)] = [\pi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (3.277)$$

利用泊松括号，场的哈密顿方程可以等价地表示为

$$\dot{\phi}_i = [\phi_i, H], \quad \dot{\pi}_i = [\pi_i, H]. \quad (3.278)$$

从中将各正则动量场 π_i 约去，我们将得到场 ϕ_i 所满足的方程，它与系统的拉格朗日方程是等价的。

在结束本节之前，我们对洛伦兹群的表示理论进行一个更加普遍的讨论，并说明标量场、旋量场和矢量场在表示理论中的地位。一般地，若对于群 G 中的每一个群元 g 都能够找到一个矩阵 $R(g)$ ，使得 $R(g)$ 能够满足群元之间的乘积关系

$$R(g_1 \cdot g_2) = R(g_1)R(g_2), \quad (3.279)$$

则我们称 R 为群 G 的一个表示。对不同的场进行洛伦兹变换，场的各个分量将按照相应的变换矩阵进行变换。这里的变换矩阵实际上就是洛伦兹群的表示，因此可以说不同的场构成了承载这些不同表示的线性空间。研究洛伦兹变换下不同的场，实际上就是在研究洛伦兹群的不同表示。由于洛伦兹群的表示可以对应于其李代数的表示²⁵，因此我们接下来关注洛伦兹群李代数的表示。

我们已经知道，洛伦兹群的生成元可以用 $J^{\mu\nu}$ 来表示，这里 $J^{\mu\nu}$ 的每一个分量都是一个 4×4 的矩阵。这些矩阵关于指标 μ, ν 是对称的，因此洛伦兹群实际上只有六个独立的生成元，它们分别代表将四矢量的 μ 分量和 ν 分量混合起来。这一混合有两种不同的方式，一种是将时间分量和空间分量混合起来，一种是将两个空间分量混合起来，因此我们将这两种生成元明显地区分开来

$$J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}, \quad K^i = J^{0i}. \quad (3.280)$$

这里 J^i 将两个空间分量混合起来，它相当于无限小空间转动的生成元；而 K^i 将时间分量和空间分量混合起来，它相当于无限小洛伦兹推动的生成元。这组生成元的对易关系为

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = i\varepsilon^{ijk}K^k, \quad [K^i, K^j] = -i\varepsilon^{ijk}J^k. \quad (3.281)$$

²⁵更严格地说，李代数的表示实际上是一一对应于其通用覆盖群的表示。对于洛伦兹群来说，其通用覆盖群为 $SL(2, \mathbb{C})$ ，因此这里所说的实际上是 $SL(2, \mathbb{C})$ 的表示。

一般地, 有限的洛伦兹变换可以利用这两组生成元表示为

$$\Lambda = e^{-i(J^i \theta^i + K^i \eta^i)}, \quad (3.282)$$

式中 J^i, K^i 为生成元, θ^i, η^i 为变换参数。利用这两组生成元, 我们可以将它们的线性组合定义为为一组新的生成元

$$J_+^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i), \quad J_-^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i). \quad (3.283)$$

计算出这组新生成元的对易关系, 我们得到

$$[J_+^i, J_+^j] = i\varepsilon^{ijk} J_+^k, \quad [J_-^i, J_-^j] = i\varepsilon^{ijk} J_-^k, \quad [J_+^i, J_-^j] = 0. \quad (3.284)$$

由此可见, 在这一变换下我们将生成元“对角化”了, 将其分成了两个相互独立的子空间。

可以验证, 保持二维复矢量内积不变的 $SU(2)$ 变换可以利用泡利自旋矩阵表示为

$$A = e^{-iT^i \theta^i}, \quad (3.285)$$

式中 θ^i 为变换参数, $T^i = \sigma^i/2$ 实际上就是 $SU(2)$ 群生成元 (的表示)。计算出各生成元之间的对易关系, 我们得到

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon^{ijk} T^k. \quad (3.286)$$

这个结果与洛伦兹群的两组生成元 J_+^i, J_-^i 的对易关系是一致的, 因此洛伦兹群的李代数 $\mathfrak{so}(1, 3)$ 相当于两个 $SU(2)$ 群李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 的直和²⁶

$$\mathfrak{so}(3, 1) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \quad (3.287)$$

这意味着洛伦兹群的表示可以视为两个 $SU(2)$ 群表示的直积。也就是说, 要想给出一个洛伦兹群的表示, 我们只需要分别给出它的两个 $SU(2)$ 部分的表示即可。

那么, $SU(2)$ 群都有什么表示呢? 对于 $SU(2)$ 群来说, 我们可以将之作用在一个一维线性空间 (也就是一个数) 上。这时所有的群元都表示为一个单位矩阵, 它被称为 $SU(2)$ 群的恒等表示。类似地, 我们可以依么正群的定义将 $SU(2)$ 群作用在二维线性空间 (也就是二维复矢量) 上, 此时 $SU(2)$ 群就表示为那些使得二维矢量内积不变的矩阵, 这被称为 $SU(2)$ 群的基本表示。我们还可以看到 $SU(2)$ 群作用二维复矢量上相当于在这个矢量上的“旋转”, 因此可以设想以同样的方式将这种“旋转”作用于三维空间上。²⁷ 在群论中习惯于用表示的维数来标记群的表示, 因此前面的三个表示就可以按照其维数分别记作 **1, 2, 3**。在物理上习惯于将 $SU(2)$ 群的表示用一个整数或半整数 j 来标记, 它所对应的群表示的维数为 $2j + 1$, 前面的三个表示可以分别记为 0, 1/2, 1。我们可以在任意 n 维线性空间上构造 $SU(2)$ 群的不等价不可约表示, 因此我们还可以写出一系列更高维的表示, 如 3/2, 2, 5/2 等等。

洛伦兹群的表示相当于两个 $SU(2)$ 群表示的直积, 我们用 (j_1, j_2) 来标记这个表示, 它指的是在第一个 $SU(2)$ 部分作用表示 j_1 , 而在第二个 $SU(2)$ 部分作用表示 j_2 。由此我们系统性地得到了洛伦兹群的一系列表示。在场论中, 每种不同的场都承载了一个不同的表示, 我们可以验证标量场所对应的表示为

$$\phi \rightarrow (0, 0), \quad (3.288)$$

它在任何变换下都不变, 对应于恒等表示。旋量场所对应的表示为

$$\psi \rightarrow (1/2, 0) \oplus (0, 1/2), \quad (3.289)$$

它是两个表示的直和, 其中 $(1/2, 0)$ 所对应的场称为左手旋量, $(0, 1/2)$ 所对应的场称为右手旋量。矢量场所对应的表示为

$$A^\mu \rightarrow (1/2, 1/2), \quad (3.290)$$

它的两个 $SU(2)$ 部分都按照表示 1/2 变化。

²⁶更严格地说, 我们在这里考虑的是洛伦兹群李代数的复化 $\mathfrak{so}(1, 3)_C$ 。

²⁷这是说 $SU(2)$ 群与 $SO(3)$ 群同态。

由此可见, 虽然初看起来旋量场的定义是比较生硬的, 但是它与标量场和矢量场一起, 恰好给出了洛伦兹群的几个最低阶表示。特别是在将场量子化后, 这些表示的性质变得尤为重要。在量子场论中, 每一种粒子都有确定的自旋, 自旋可以取整数或者是半整数 (如 $1/2, 3/2$ 等)。这些具有不同自旋的粒子将用不同的场来刻画, 其中自旋为 0 的粒子所对应的场就是标量场, 而自旋为 $1/2$ 的粒子对应的就是旋量场, 自旋为 1 的粒子对应的场就是矢量场。

3.7 经典电动力学

前面提到过, 要想构造一个自洽的、满足洛伦兹协变性的相互作用理论, 我们需要在粒子之间引入场, 并利用场来传递粒子之间的相互作用。为描述粒子间的电磁相互作用, 我们需要在理论中引入电磁场, 并将粒子与电磁场耦合起来。那么, 这样一种电磁场应当如何进行刻画呢?

实际上, 电磁场就是一个无质量的矢量场。为了看出这一点, 我们将自由矢量场 A^μ 与一个源项 J^μ 耦合起来。这样一种含源矢量场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (3.291)$$

其中 $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ 是一个作为外源给定的电流四矢量场。对场作用量做关于矢量场 A^μ 的变分, 我们将得到

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int d^4x \left[J^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right] \\ &= - \int d^4x \left[J^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \right]. \end{aligned} \quad (3.292)$$

注意到场强张量 $F^{\mu\nu}$ 的反对称性, 利用分部积分并略去无穷远处的表面项, 我们得到

$$\delta S = - \int d^4x [J^\mu + \partial_\nu F^{\mu\nu}] \delta A_\mu. \quad (3.293)$$

要使得上述变分为零且对任意 δA_μ 都成立, 场强张量必须满足

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -J^\mu. \quad (3.294)$$

这就是含源电磁场所满足的方程。

此外, 根据场强张量 $F^{\mu\nu}$ 的反对称性, 我们还可以写出一个方程

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\rho A_\sigma + \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\nu \partial_\rho A_\sigma = 0, \end{aligned} \quad (3.295)$$

即

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.296)$$

定义电磁场的对偶张量为

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (3.297)$$

则方程 (3.296) 可以表示为

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.298)$$

上述两个方程 (3.294) 及 (3.296) 是含源无质量矢量场所满足的基本方程。

我们定义 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, 并且引入两个新场 \mathbf{E}, \mathbf{B} 满足

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.299)$$

式中

$$(\nabla \phi)_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \quad (\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (3.300)$$

分别为标量场 ϕ 的梯度、矢量场 \mathbf{A} 的散度和旋度。利用上述两个场，我们可以将场强张量表示为

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.301)$$

即

$$F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k. \quad (3.302)$$

将方程 (3.294) 及 (3.296) 展开成分量形式，并用 \mathbf{E}, \mathbf{B} 表示这些方程，我们得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.303)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.304)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.305)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.306)$$

上面四个方程称为麦克斯韦方程组，其中 \mathbf{E} 为电场， \mathbf{B} 为磁场， \mathbf{A} 为磁矢势， ϕ 为电势， ρ 为电荷密度，而 \mathbf{J} 为电流密度。这一结果与实验上观测到的电磁场是相符的，这说明电磁场确实是一个无质量的矢量场。²⁸ 看起来，这些方程的形式不十分对称，因为只有与电有关的源项，而没有与磁有关的源项。至少到目前为止，人们尚未观测到磁荷（磁单极子）的存在，因此我们还不需要在理论中引入与磁荷相对应的源项。

我们知道，矢量场具有规范对称性，即系统的运动方程在如下的规范变换下不变

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha. \quad (3.307)$$

我们可以在电磁场理论中明显地验证这一点。在规范变换下，电势和磁矢势的变化分别为

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \alpha, \quad (3.308)$$

因此电场和磁场的变化为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (3.309)$$

这意味着系统的麦克斯韦方程组在规范变换下是不变的，规范对称性得到了保证。²⁹

现在我们要将带电粒子与电磁场耦合起来。我们希望相互作用项不破坏电磁场原有的对称性，即在洛伦兹变换与规范变换下保持不变。假设粒子的运动轨迹为 x^μ ，那么满足上述条件的最简单的相互作用项可以表示为

$$S_{\text{int}} = -q \int A_\mu dx^\mu, \quad (3.310)$$

式中 q 是一个常数，代表着粒子与电磁场相互作用的强度，我们称之为电荷。上述相互作用项显然是洛伦兹不变的。为看出这一相互作用项的规范不变性，我们考虑如下的规范变换

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha, \quad x'^\mu \rightarrow x^\mu. \quad (3.311)$$

²⁸ 电磁学是单位制混乱的重灾区。我们这里采用的是使得 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$ 的自然单位制（亥维赛德 (Heaviside)-洛伦兹单位制）。若在国际单位制中恢复所有的常数，则有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

电磁学中也常常采用高斯单位制，在这个单位制下，麦克斯韦方程表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

²⁹ 初看起来，这似乎意味着电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 才是物理实在，而电势 ϕ 以及磁矢势 \mathbf{A} （或者说四矢量场 A^μ ）只起到辅助作用。不过在后文中我们将看到，在计及量子效应的情况下，四矢量场 A^μ 将携带着超越电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 的独特信息，引起独特的物理效应。

在这一变换下，作用量的变化为

$$\delta S_{\text{int}} = -q \int_{x_i}^{x_f} (\partial_\mu \alpha) dx^\mu, \quad (3.312)$$

式中 x_i, x_f 分别为粒子运动路径的起点与终点。由于在作用量上附加一个全导数项并不会改变系统的运动规律，因此上述相互作用项在规范变换下仍然是不变的。这样我们就得到了粒子和电磁场之间合适的相互作用项。

在上述相互作用项的基础之上，加上电磁场自身的作用量与粒子自身的作用量，我们就得到了完整的电磁相互作用作用量。假设系统中第 i 个粒子的运动轨迹为 x_i^μ ，电荷为 q_i ，质量为 m_i ，那么完整的作用量将可以表示为

$$S[x_i^\mu, A^\mu] = \underbrace{-m_i \int d\tau_i}_{S_{\text{particle}}} - \underbrace{\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{S_{\text{EM}}} - \underbrace{q_i \int A_\mu dx_i^\mu}_{S_{\text{int}}}, \quad (3.313)$$

式中对指标 i 求和。从这个式子中，我们可以看到电磁相互作用的作用量由三部分组成，它们分别为自由粒子的作用量 S_{particle} ，自由电磁场的作用量 S_{EM} 以及粒子和电磁场耦合的作用量 S_{int} ，这三项的物理意义是十分明确的。

从这个作用量中我们可以得到系统演化的方程。要计算作用量对粒子运动轨迹 x_i^μ 的变分，我们需要考虑 S_{particle} 与 S_{int} 这两部分的变分。首先计算 S_{particle} 的变分

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{particle}} &= -\sum_i m_i \int \delta(d\tau_i) = -\sum_i m_i \int \frac{1}{2} \frac{\delta(d\tau_i^2)}{d\tau_i} \\ &= -\sum_i m_i \int \frac{1}{2} \frac{\delta(\eta_{\mu\nu} dx_i^\mu dx_i^\nu)}{d\tau_i} \\ &= -\sum_i m_i \int \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} \eta_{\mu\nu} \delta(dx_i^\nu) \\ &= -\sum_i m_i \int \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} \eta_{\mu\nu} d(\delta x_i^\nu). \end{aligned} \quad (3.314)$$

将最后一行的结果分部积分，并略去无穷远处的表面项，结果为

$$\delta S_{\text{particle}} = \sum_i m_i \int d\tau_i \frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau_i^2} \eta_{\mu\nu} \delta x_i^\nu. \quad (3.315)$$

接下来计算 S_{int} 的变分，我们得到

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{int}} &= -\sum_i q_i \delta \int A_\mu dx_i^\mu \\ &= -\sum_i q_i \int \delta A_\nu dx_i^\nu - \sum_i q_i \int A_\mu d(\delta x_i^\mu) \\ &= -\sum_i q_i \int (\partial_\mu A_\nu \delta x_i^\mu dx_i^\nu - dA_\mu \delta x_i^\mu) \\ &= -\sum_i q_i \int (\partial_\mu A_\nu \delta x_i^\mu dx_i^\nu - \partial_\nu A_\mu dx_i^\nu \delta x_i^\mu) \\ &= -\sum_i q_i \int d\tau_i F_{\mu\nu} \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i} \delta x_i^\mu, \end{aligned} \quad (3.316)$$

式中我们已经进行了分部积分，并且弃去了无穷远处的表面项。

系统作用量的变分将表示为上述两项变分之和

$$\begin{aligned} \delta S &= S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} \\ &= \sum_i \int d\tau_i \left(m_i \frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau_i^2} - q_i F_{\mu\nu} \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i} \right) \delta x_i^\mu. \end{aligned} \quad (3.317)$$

要使得对任意 $\delta x_{i\mu}$ 都有 $\delta S = 0$, 粒子的运动必须满足

$$m_i \frac{d^2 x_i^\mu}{d\tau_i^2} = q_i F^\mu{}_\nu \frac{dx_i^\nu}{d\tau_i}, \quad (3.318)$$

式中不对指标 i 求和。将刻画粒子运动轨迹的参量取为时间 t , 并取上述方程的空间分量, 我们将得到

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}), \quad (3.319)$$

式中不对指标 i 求和。这个方程正确地刻画了粒子在电磁场中的运动。

对电磁场 A^μ 进行变分, 我们将得到电磁场演化的方程。我们将 S_{int} 改写成为对全时空的积分, 结果为

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= - \sum_i q_i \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} A_\mu \\ &= - \int d^4x \left[\sum_i q_i \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} \delta^{(4)}(x - x_i(\tau_i)) \right] A_\mu. \end{aligned} \quad (3.320)$$

这实际上就相当于

$$S_{\text{int}} = - \int d^4x J^\mu A_\mu, \quad (3.321)$$

其中

$$J^\mu = \sum_i q_i \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} \delta^{(4)}(x - x_i(\tau_i)) \quad (3.322)$$

是带电粒子为电磁场提供的源项。因此我们可以写出电磁场的演化方程

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = - \sum_i q_i \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu}{d\tau_i} \delta^{(4)}(x - x_i(\tau_i)), \quad (3.323)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (3.324)$$

将刻画粒子运动轨迹的参量取为时间 t , 引入电场和磁场并将上述积分计算出来, 我们将得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.325)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.326)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (3.327)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (3.328)$$

可以看到, 这实际上就是含源的麦克斯韦方程, 只不过其中的源项由各个带电粒子的运动产生

$$\rho = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (3.329)$$

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (3.330)$$

上述方程正确地刻画了电磁场的演化。

综上所述, 作用量 (3.313) 式正确地刻画了相对论性带电粒子相互作用的系统。从这里我们也可以看到拉格朗日表述的强大之处: 尽管力学与电磁学是两个完全不同的体系, 但它们却在同一套框架之中被统一起来了。通过以最简单的方式将粒子与场耦合起来, 我们就得到了整套电磁相互作用的演化方程。尽管它们的非协变形式是复杂的, 但是当我们在拉格朗日框架中以协变形式表述它们的时候, 这些结果显得既自然又优美。

如果将相互作用项更换一个形式, 或者在作用量中引入其他场, 我们将得到一个新的相互作用系统, 只不过这个相互作用系统就不再与电磁相互作用有直接的对应了。除了电磁相互作用之外, 在量子场论中我们还将考虑强相互作用和弱相互作用。它们都是通过类似的方法, 在拉格朗日密度中将不同的场耦合起来得到的。

3.8 自发对称性破缺

有一些问题是在量子场论中被提出的，但是它们在经典场论³⁰的框架下就可以被理解。本节介绍的自发对称性破缺就是其中一例。自发对称性破缺指的是系统具有某种对称性，但是态却把这种对称性破坏掉了。比如说，将一根针竖直放置在平整的桌面上。在松开手后，针将很快倒下。由于针和桌面在各个方向上的性质都是相同的，因此针朝着各个方向倒下的概率都是相同的，换句话说就是系统具有空间转动对称性。但是，实际上针只能朝一个方向倒下，因此这个倒下的方向就破坏了系统的空间转动对称性。这就是自发对称性破缺——系统并没有体现出某个方向上的特殊性，但是态却将这种特殊性体现出来了；并且这种对称性不是由于外在因素破坏的，而是系统“自发”地破坏掉的。

有人可能会质疑，发生了破缺的系统并不是严格地各向同性的。比如说，针尖与桌面接触的地方可能有某些不平整，或者是针的初始位置朝着某个方向有着略微的偏移，或者在松手后针受到了某个方向的微小的力，等等。如果不是这样的话，针为什么会朝这个方向倒下呢？这种说法当然是没错的。问题的关键在于，任意小的这种扰动都将使它破缺到一个固定的方向上，而物理系统时刻都在发生微小的涨落。因此，尽管涨落破坏掉了系统各向同性的性质，但由于它的强度可以任意小并且也是（近乎于）随机发生的，因此我们还是把它看作是系统“自发”的破缺。³¹

我们接下来要考虑的现象是场论中的自发对称性破缺。考虑一个具有 ϕ^4 自相互作用的实标量场 ϕ ，它的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left(\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right), \quad (3.331)$$

式中 $\lambda > 0$ 。系统的势函数可以表示为

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (3.332)$$

可以验证，这个系统在 $\phi \rightarrow -\phi$ 的反演变换下保持不变。将上述反演变换连续作用两次就可以使得系统恢复原状，因此它构成了一个二阶循环群 Z_2 ，我们称这个对称性为 Z_2 对称性。

如果场不随时间演化且在空间各点均匀，那么实际的场将使得系统的作用量（同时也就是上述势函数）取极值，这意味着势函数满足

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.333)$$

如果 $\mu^2 \geq 0$ ，那么系统的能量将在 $\phi = 0$ 处取最低值，这就是系统的基态。而如果 $\mu^2 < 0$ ，那么系统能量的最小值将不在零处，而是偏离到了

$$\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{-6\mu^2}{\lambda}} = \pm v. \quad (3.334)$$

这两个能量最低点是完全等价的。但由于系统只能取一个状态，那么它只能以相等的概率随机破缺到其中一个基态上。因此，虽然系统是左右对称的，但是态却破坏了这种左右对称，这样就产生了自发对称性破缺。

这个现象可以作如下的形象理解。将系统的哈密顿密度 \mathcal{H} 以实标量场 ϕ 的取值为横坐标画出函数图像，如图 3.2 所示。由于哈密顿密度越大的地方能量越高，因此不妨设想有一个形如函数图像的一个势垒，而系统的状态就如同停留在势垒上的一个小球一样，会滚到能量最低的地方。在 $\mu^2 \geq 0$ 时， $\phi = 0$ 就是系统的能量最低点，因此小球会停留在 $\phi = 0$ 处。而在 $\mu^2 < 0$ 时， $\phi = 0$ 变成了一个极大值点，因此小球要滚到一个能量更低的地方。但是由于左右两边都是相同的，因此它滚到哪一边其实是不确定的，这就发生了对称性的破缺。

假设系统最终破缺到了 $\phi = v$ 的基态上，则我们不妨作变量代换

$$\phi(x) = v + \eta(x), \quad (3.335)$$

³⁰这里的“经典”场论指的是非量子的场论，而并不是非相对论性的理论。

³¹事实上如果我们坚持通常的诠释的话，那么在量子力学中，这种涨落发生的时间、方向与强度确实是本质上随机的。

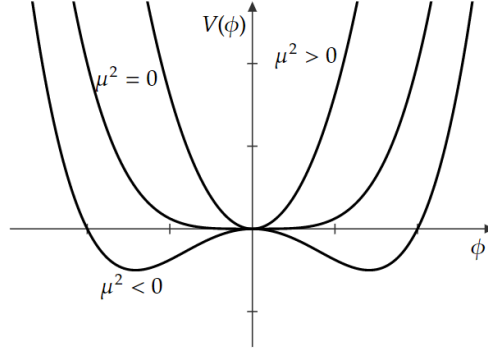


图 3.2: 自发对称性破缺, 在 $\mu^2 < 0$ 时系统会破缺到一个 $\phi \neq 0$ 的态。

并用新场 $\eta(x)$ 来刻画系统的性质, 这样系统的基态仍然处在 $\eta = 0$ 的状态上。在这种情况下, 系统的拉格朗日密度将可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \left(\frac{\lambda}{6} v^2 \eta^2 + \frac{\lambda}{6} v \eta^3 + \frac{\lambda}{24} \eta^4 \right) + \text{else.} \quad (3.336)$$

从这个式子中我们可以看出, 由于三次项的存在, 系统确实失去了原本的左右对称性。

如果我们可以精确求解这个系统, 那么 ϕ 场和 η 场的表述是没有任何区别的, 它们之间只相差一个坐标变换。但是实际上我们只能利用微扰论来处理系统, 因此我们只能在基态的附近进行微扰展开。所以在我们看来, 原来的那个具有左右对称性的 ϕ 场实际上被隐藏起来了。我们“能看到”的只有 η 场, 它的对称性是被破坏了的。

我们知道, 系统的二次项代表着场所对应的粒子的质量的平方, 因此对于 ϕ 场来说, 其质量为

$$m_\phi^2 = \mu^2 < 0. \quad (3.337)$$

换句话说, 要想让系统发生自发对称性破缺, ϕ 场必须拥有某种“负质量项”(或者称为“负质量平方项/虚质量项”)。这里的负质量项意味着场的四动量将是类空的, 它所对应的粒子的运动速度将超过光速, 我们称这样的粒子为快子。快子是非物理的, 它的存在意味着整个物理世界是不稳定的。但是对于破缺之后的 η 场来说, 其质量为

$$m_\eta^2 = \frac{\lambda}{3} v^2 = -2\mu^2 > 0, \quad (3.338)$$

于是破缺之后的场得到了一个正质量项, 从而理论中的矛盾得到了消除。事实上物理系统在其平衡点的邻域附近看起来总像是一个谐振子, 因此破缺后的场具有正的质量项也就不足为奇了。

我们这里所举的例子是一个简单的实标量场的破缺。在量子场论之中, 粒子的质量是由希格斯场的破缺带来的。通过将一个无质量的场与破缺后的希格斯场耦合, 我们就能成功地得到粒子的质量。在粒子物理标准模型中, 所有粒子的质量都是通过这种方式来得到的。在后续章节中, 我们将会详细地讨论这一部分的内容。

3.9 规范对称性

在前面的章节中我们已经看到了, 仅仅依靠洛伦兹对称性以及其他一些合理的要求, 我们就可以将系统的拉格朗日密度确定到一个非常精确的范围。而如果我们为系统指定某些更强的对称性, 它甚至几乎可以将系统的拉格朗日密度形式完全确定下来。它也可以告诉我们一个理论究竟需要哪些场, 而不同场之间究竟是以什么样的形式来耦合的。

我们以旋量场的 U(1) 规范对称性为例。前面已经得到自由旋量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (3.339)$$

我们可以验证，它不仅满足洛伦兹对称性，还满足整体的 U(1) 对称性，即系统的拉格朗日密度在变换

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\bar{\psi} \quad (3.340)$$

下不变，这里 α 是一个常数。

现在我们希望把这个整体 U(1) 对称性拓展到更强的局域 U(1) 对称性，即让变换参数 α 不再是一个处处相等的常数，而是一个关于时空点的任意函数 $\alpha(x)$ 。换句话说，即让系统的拉格朗日密度在变换

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi} \quad (3.341)$$

下不变。但由于拉格朗日密度中包含旋量场的导数，因此在变换后我们不仅要计及场本身随时空的变化，而且也要考虑到局域的相因子随时空的变化。可以验证，在局域 U(1) 变换下，旋量场的双线性型将变换为

$$\bar{\psi}'\partial_\mu\psi' = \bar{\psi}\partial_\mu\psi + \bar{\psi}(i\partial_\mu\alpha)\psi, \quad (3.342)$$

因此自由旋量场并不具有局域 U(1) 对称性。

为了让系统具有局域 U(1) 对称性，我们可以对拉格朗日密度进行某种修改。具体来说，如果我们能够找到一个协变导数算符 D_μ 使得旋量场双线性型在局域 U(1) 变换下不变

$$\bar{\psi}'D'_\mu\psi' = \bar{\psi}D_\mu\psi, \quad (3.343)$$

或者说协变导数算符自身在局域 U(1) 变换下满足

$$D'_\mu = e^{i\alpha(x)}D_\mu e^{-i\alpha(x)}, \quad (3.344)$$

那么此时的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (3.345)$$

就具有了局域 U(1) 对称性。

余下的问题就是将协变导数算符 D_μ 显式地构造出来，为此我们令

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (3.346)$$

式中 e 是一个耦合常数， A_μ 是一个矢量场。在规范变换后，这个协变导数算符将变换为

$$D'_\mu = \partial_\mu + ieA'_\mu. \quad (3.347)$$

将协变导数的表达式代入到变换 (3.344) 式之中，我们得到

$$\partial_\mu + ieA'_\mu = e^{i\alpha}[\partial_\mu + ieA_\mu]e^{-i\alpha} = \partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha. \quad (3.348)$$

要使得 D_μ 具有局域 U(1) 对称性，我们需要让矢量场 A_μ 在变换下满足

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (3.349)$$

这样系统就将满足局域 U(1) 对称性。

为了保持完整性，我们在系统的拉格朗日密度中再加上一项自由矢量场的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (3.350)$$

它将给出矢量场 A_μ 本身的演化。可以验证，场强张量 $F_{\mu\nu}$ 与协变导数 D_μ 之间的关系为

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}, \quad (3.351)$$

因此这一项是不破坏局域 U(1) 对称性的。因此，最终满足局域 U(1) 对称性的拉格朗日密度将可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{\text{EM}}} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}. \end{aligned} \quad (3.352)$$

可以看出, 上述拉格朗日密度描述了一个旋量场和一个矢量场的相互作用, 它在如下的联合变换

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad (3.353)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (3.354)$$

下保持不变。在这个变换下, 旋量场做了一个局域的相位变换, 而矢量场做了一个规范变换。我们称上述变换为 $U(1)$ 规范变换, 它们共同保持了系统的拉格朗日密度的规范不变性。

我们看到, 让旋量场具有 $U(1)$ 规范对称性, 这一要求自动为我们引入了一个矢量场, 同时给出了它们之间的相互作用形式。事实上自然界中的相互作用也确实满足这样的形式。在量子场论中, 每一种粒子都对应于一种场, 电子就对应于旋量场。如果我们要求电子具有 $U(1)$ 规范对称性, 那么这将为系统自动引入一个矢量场。这个矢量场实际上就是光子场 (电磁场), 而 $U(1)$ 规范场论恰好给出了量子场论中电磁相互作用的正确形式。

$U(1)$ 规范理论是最简单的规范理论, 当然我们也可以要求系统具有一些其他的规范对称性。如果我们要求系统具有 $SU(3)$ 规范对称性, 那么这将会为色空间中的一个具有三个内部自由度的旋量场 (每一个内部自由度都是一个完整的旋量场) 引入八个规范矢量场。在量子场论中, 这个三分量旋量场代表着具有三种不同色荷的夸克, 八个矢量场代表着八种不同的胶子, 而它们之间的相互作用正确地给出了量子色动力学的形式。类似地, 如果我们要求系统具有 $SU(2)$ 规范对称性, 那么这将会为一个二分量的旋量场引入三个规范矢量场。在量子场论中, 它与 $U(1)$ 规范场论一起, 共同给出了电弱统一理论。在之后的章节中, 我们将对规范理论进行更详细的讨论。

3.10 习题

1. 试通过量纲分析的方法, 恢复自然单位制下被略去的光速 c 。
2. 洛伦兹变换
 - (a) 给出麦克斯韦方程在伽利略变换下的形式, 并说明麦克斯韦方程组确实不是“伽利略协变”的。
 - (b) 通过对系统连续作用两次洛伦兹变换的方式, 求出相对论的速度叠加公式以及快度叠加公式。
 - (c) 推导不同参考系下的相对论加速度变换公式。
 - (d) 给出电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 在洛伦兹变换下的结果。
 - (e) 证明无源电磁场在变换 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ 下不变, 这一结果被称为电磁对偶。这一结果是电磁场具有时间反演不变性的体现。
 - (f) 讨论带有磁单极的电动力学理论。
 - (g) 证明: 沿不同的方向进行的两次洛伦兹推动, 其结果将包含空间转动的贡献。这个现象被称为托马斯 (Thomas) 进动。
3. 相对论力学
 - (a) 证明非协变的相对论性单粒子拉格朗日量可以表示为

$$L = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} - V,$$
 并给出相应的拉格朗日方程。
 - (b) 求解一维相对论性粒子在恒力 (线性势) $V = Fx$ 下的运动, 并计算粒子在 $t \rightarrow \infty$ 时的速度。

- (c) 利用微扰法求解一维相对论性粒子在谐振子势 $V = kx^2/2$ 下的运动, 并计算相对论效应对周期的修正。
- (d) 求出在强度为 B 匀强磁场中以速度 v 做圆周运动的相对论性粒子的运动半径和周期, 并给出其非相对论极限。
- (e) 设空火箭的静质量为 m_0 , 装满燃料的火箭质量为 m , 火箭喷出的燃气的速度相对于箭体的速度为 a 。忽略重力与阻力, 试求出燃料耗尽时火箭的速度。
- (f) 试证明多普勒 (Doppler) 公式: 在两个相互运动的参考系之间, 光的频率有如下关系 $\nu' = \nu/\gamma(1 - v \cos \alpha)$, 其中 v 是两参考系之间的相对速度, α 是相对速度与光传播方向的夹角。
- (g) 已知光子的能量与其波长成正比 $E = h\lambda$, 式中 h 为普朗克常数。设一个波长为 λ_0 的光子与一个静止的质量为 m 的电子发生碰撞 (相互作用), 如果光子的散射角为 θ , 试证明碰撞前后光子的波长关系为 $\lambda = \lambda_0 + h(1 - \cos \theta)/m$, 上式被称为康普顿 (Compton) 散射公式。
- (h) 考虑质量为 M 的粒子衰变成两个质量为 m_1, m_2 的粒子。如果衰变后两粒子运动方向的夹角为 θ , 试证明 $M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \theta$, 式中 p_1, p_2 分别为两个粒子三维动量的大小。

4. 带电粒子的辐射

- (a) 求出无界时空中电磁势的格林函数, 并给出在任意源项 J^μ 下电磁势的解。这被称为推迟势。
- (b) 对于一个电荷量为 q , 以 x^μ 运动的电荷, 给出其贡献的 $J^\mu(x)$, 并写出此时电磁势的解。这被称为理纳德 (Lienard)-威切特 (Weichert) 势。
- (c) 根据上述电磁势, 求出电磁场的表达式, 这被称为亥维赛德-费曼公式。
- (d) 计算带电粒子突然减速所发出的电磁辐射, 这被称为轫致辐射。
- (e) 计算带电粒子在介质中以超过介质中光速的速度运动所发出的辐射, 这被称为切伦科夫 (Cherenkov) 辐射。
- (f) 利用上述电磁场, 给出准至 v^2 阶的带电粒子间的有效作用量。这被称为达尔文 (Darwin) 拉格朗日量。

5. 经典电动力学 (本题采用国际单位制)

- (a) 利用高斯公式和斯托克斯公式, 给出非协变的麦克斯韦方程的积分形式。
- (b) 证明基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律: 对于电路中的任一节点, 流入的电流之和等于流出的电流之和; 对于电路中的任一回路, 电势之和等于各元件上的压降之和。
- (c) 推导静止电荷之间的相互作用、电荷在电场中所受的力、电流之间的相互作用以及电流在磁场中所受的力的表达式。
- (d) 考虑介质中的麦克斯韦方程。假设在外电磁场作用下, 电介质内部将产生电极化强度 \mathbf{P} 和磁极化强度 \mathbf{M} 。我们定义电位移矢量 \mathbf{D} 和磁场强度 \mathbf{H} , 它们和真空中的电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 之间的关系为 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 。试利用上述物理量给出介质中的麦克斯韦方程, 写出其微分和积分形式。
- (e) 对于均匀且各向同性的电介质来说, 电位移、磁感应强度均正比于电场强度和磁场强度 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ 。在这个条件下, 给出介质中的麦克斯韦方程。

- (f) 试根据真空麦克斯韦方程组, 给出不同介质之间的界面上各物理量之间的关系。
- (g) 如果真空中存在以 $\rho(\mathbf{r})$ 分布的电荷以及以 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 分布的电流, 求出空间中的电势和磁矢势分布。
- (h) 如果电荷以及电流只分布于一个比较小的区间之内, 则可以对 $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 进行泰勒级数展开或球谐函数展开, 这被称为多极展开。试给出多极展开的具体表达式。
- (i) 求出电磁场的能量密度和能流密度, 并验证电磁场的能量守恒定律。
- (j) 求出电磁场的动量密度、动量流密度、角动量、角动量流密度, 并验证电磁场的动量守恒定律和角动量守恒定律。
- (k) 如果介质的极化率会随着电磁波的频率发生变化, 试求出波的频率 ω 与波矢 ω 之间的关系, 这被称为色散关系。利用色散关系求出电磁介质中波包传播的速度, 这被称为群速度。

6. 光学 (本题采用国际单位制)

- (a) 利用麦克斯韦方程组推导电磁波在两种不同的电介质上的反射与折射, 证明光的折射定律与反射定律。给出介质的折射率与介质介电常数和磁导率之间的关系。
- (b) 给出在分界面处入射光、反射光、折射光各偏振分量的振幅, 并计算光的反射率和透射率。这个结果被称为菲涅尔 (Fresnel) 公式。
- (c) 证明在光从折射率较大的介质正入射或掠入射到折射率较小的介质的情况下, 如果入射角大于某一个临界值, 则折射光线将消失。这个现象被称为全反射。
- (d) 证明在折射光线与反射光线正交的情况下, 反射光只含有偏振面垂直于入射面的偏振分量。这个结果被称为布儒斯特 (Brewster) 定律。
- (e) 证明在光从折射率较小的介质正入射或掠入射到折射率较大的介质的情况下, 反射光相对入射光存在 π 的相位突变。这被称为半波损失。
- (f) 将场 ψ (代表电场或者磁场) 的振幅和相位表示为 $\psi = Ae^{iS}$, 给出 A 与 S 所满足的方程, 这里我们允许介质的折射率 n 可以连续地变化。在所考虑的系统尺度远大于光的波长的情况下, 可以将 A 视为在 S 发生显著变化的时候不发生明显的变化。在这一近似下, 给出 S 所满足的方程, 这被称为程函方程。
- (g) 处处垂直于等相位面的线称为光线。利用程函方程, 给出光线所满足的方程。
- (h) 定义路径 L 的光程为

$$L = \int_L n dl,$$

式中 n 为介质折射率。试证明费马 (Fermat) 原理: 光线传播的路径会使得其光程取极值。特别地, 在均匀的介质中, 光沿直线传播。

- (i) 考虑由球面分隔的两个不同的介质。在光轴附近, 由一点发出的一束光线经过折射后将会汇聚于另一点。分析这两点间的位置关系, 给出球面的折射规律。
- (j) 由两个球面组合而成的光具称为透镜。给出薄透镜的折射规律。
- (k) 从两个光源发出的两束频率、相位相同的光在空间中叠加的时候, 由于在各点处会产生不同的相位差, 因此会在空间中产生明暗相间的条纹。这个现象被称为光的干涉。试计算由两条狭缝所产生的光的干涉现象, 并计算干涉条纹的宽度。
- (l) 一束光照射到薄膜层的时候, 经过薄膜上下两层多次反射所形成的光会产生干涉现象。试计算这一干涉现象。

- (m) 由于光的波动性质，它在传播过程中会绕过障碍物，形成更加复杂的光场分布，这被称为光的衍射。设 S 为光源， Σ 为光的一个波面， Q 为波面上的点，振幅为 $U_0(Q)$ ，试证明光在 P 点处的总振幅 $U(P)$ 可以表示为

$$U(P) = -\frac{i}{2\lambda} \int_{\Sigma} (\cos \theta_0 + \cos \theta) U_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma,$$

其中 θ 是 PQ 与 Q 点法线的夹角， θ_0 是 SQ 与 Q 点法线的夹角。这个结果被称为基尔霍夫衍射积分。

- (n) 在 Σ 为球面以及傍轴近似下，给出基尔霍夫衍射积分的简化结果。
- (o) 如果衍射屏相距光源及观察平面均为无限远时，给出基尔霍夫衍射积分的简化结果，这被称为夫琅禾费 (Fraunhofer) 衍射。
- (p) 证明夫琅禾费衍射相当于光场的傅里叶变换。
- (q) 我们可以将透镜的折射视为两次衍射过程，即入射光经物平面发生夫琅和费衍射，在透镜焦平面上形成衍射场。而焦平面上的衍射场再进行一次衍射，最终在像平面上形成像。这被称为阿贝 (Abbe) 成像原理。试分析这一过程，并指出在焦平面上的操作会如何影响到像场的分布。

7. 洛伦兹群表示

- (a) 设 S^i 为空间转动变换生成元， K^i 为洛伦兹推动变换生成元，它们与洛伦兹变换生成元 $J^{\mu\nu}$ 之间的关系为

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{0i}.$$

计算上述各生成元之间的对易关系。

- (b) 定义两组新的生成元

$$J_+^i = \frac{1}{2} (S^i + iK^i), \quad J_-^i = \frac{1}{2} (S^i - iK^i),$$

计算这两组新的生成元之间的对易关系。这一结果代表着 $\mathfrak{so}(1,3)$ 同构于两个 $\mathfrak{su}(2)$ 的直和。

- (c) 群的不可约表示可以利用其卡西米尔 (Casimir) 算符的本征值来标记，其中卡西米尔算符定义为与群的所有生成元都对易的算符。证明角动量平方算符 $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ 是 $\mathfrak{SU}(2)$ 群的卡西米尔算符，并给出其本征值所有可能的取值。
- (d) 明显地构造出 $\mathfrak{SU}(2)$ 群的不可约表示。
- (e) 利用 $\mathfrak{SU}(2)$ 群的不可约表示，明显地构造出 $\mathfrak{SO}(1,3)$ 群的不可约表示，并指出标量场、旋量场和矢量场分别对应于 $\mathfrak{SO}(1,3)$ 群的什么表示。³²
- (f) 明显地计算出无限小时空平移算符 P^μ 与无限小洛伦兹变换算符 $J^{\mu\nu}$ 的时空四矢量表示。
- (g) 上述 P^μ 与 $J^{\mu\nu}$ 可以被视为庞加莱群的生成元，试计算这些生成元之间的对易关系。
- (h) 证明 $P_\mu P^\mu$ 与 $W_\mu W^\mu$ 为庞加莱群的卡西米尔算符，其中

$$W^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma}$$

为泡利-鲁邦斯基 (Lubanski) 矢量。

- (i) 说明上述两个卡西米尔算符的物理意义，并给出其本征值可能的取值。

³² 在讨论超对称理论的时候，我们会利用带点和不带点的二分量子数指标明显地写出两个 $\mathfrak{SU}(2)$ 群所对应的表示。

8. 自由场

- (a) 对于有 n 个内部自由度的自由复标量场, 可以用一个列矢量 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T$ 来代表它。这个自由场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi.$$

证明: 如果 n 阶矩阵 U 满足 $UU^\dagger = 1$, 则该系统在变换 $\phi' = U\phi$ 下保持不变。

- (b) 证明对于 n 阶对角矩阵 $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ 来说, 拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \text{Tr}(\partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi) - m^2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi)$$

可以同样地给出上述有 n 个 (非自旋) 内部自由度的复标量场, 并且这个拉格朗日密度在变换 $\Phi' = U\Phi U^{-1}$ 下不变。

- (c) 仿照上述过程, 讨论有 n 个内部自由度的矢量场与旋量场的对称性。
(d) 自旋为 $3/2$ 的无质量自由场 ψ^μ 的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma,$$

它是一个带有矢量指标的“旋量场”。试求出其传播子。

- (e) 自旋为 2 的自由张量场 $h_{\mu\nu}$ 的拉格朗日密度可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial_\alpha h^{\nu\alpha} + h \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} h \square h + \frac{1}{2} m^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2), \end{aligned}$$

试求出其传播子。

9. 螺度与手性

- (a) 证明: 在洛伦兹变换沿某个方向旋转 2π 后, 旋量场变为 $\psi \rightarrow -\psi$ 而并非回到其自身, 只有旋转 4π 才回到自身。这一点说明旋量场是一个双值表示而非单值表示。

- (b) 定义手征旋量为

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi,$$

证明对于自由旋量场来说, 这两个旋量为 γ^5 的本征矢。

- (c) 求出旋量场螺度的本征矢, 并证明对于无质量旋量场来说, 螺度本征矢就是手性本征矢。
(d) 证明无质量旋量场具有手征对称性, 即系统在左手场和右手场各自的相位变换下不变。
(e) 写出无质量旋量场的左手场和右手场满足的运动方程, 这被称为外尔方程。
(f) 证明在外尔表示下手性本征矢只有两个不为零的分量, 并在外尔表示下写出系统的外尔方程。
(g) 利用手征场写出有质量旋量场的拉格朗日密度, 证明狄拉克质量项将破坏系统的手征对称性。
(h) 给出旋量场在空间反演和时间反演下的变换规律。
(i) 在电荷共轭下, 旋量场的变换规律为 $\psi^C = C\psi$, $C = i\gamma^2\gamma^0$ 。证明外尔方程在电荷共轭变换或者空间反演联合变换下互相交换, 而在电荷共轭与空间反演的联合变换下不变。
(j) 如果一个旋量场在电荷共轭下保持不变, 则称其为马约拉纳旋量场。写出马约拉纳旋量场的拉格朗日密度。

- (k) 利用手征场写出马约拉纳旋量场的质量项。证明仅有手征场的条件将排除掉狄拉克质量项的存在，但并未禁戒马约拉纳质量项。

10. 金兹堡 (Ginzburg)-朗道理论

- (a) 金兹堡-朗道理论是一个唯象地描述超导现象的理论，其有效拉格朗日密度可以表示为一个对称性自发破缺的矢量场

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}\lambda(\phi^*\phi)^2.$$

写出这一理论所满足的规范对称性。

- (b) 写出对称性自发破缺后理论的表达式，求出电磁场在破缺后获得的质量。
- (c) 证明在破缺后，系统内部的磁场将变为零，这被称为迈斯纳 (Meissner) 效应，我们称此时的系统处于超导态。
- (d) 在超导态中，电流只能存在于超导体表面的一个薄层中。试计算该薄层的深度。
- (e) 证明若温度过高或外磁场过强，则超导将被破坏。

11. 扭折与孤子

- (a) 考虑一个处于一维空间 (1+1 维时空) 中的实标量场

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi).$$

写出这个场所满足的方程，并求出其稳态解 $\phi = \phi(x)$ 。

- (b) 显式地求出一维希格斯场的稳态解

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4,$$

式中 $\lambda > 0, \mu^2 < 0$ 。

- (c) 显式地求出一维正弦-戈登场的稳态解

$$V(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) \right].$$

- (d) 我们发现上述稳态解中存在着某种非微扰的扭折。它在负无穷远处取为一个值，在正无穷远处取为另一个值，而在一个有限大小的区域之内发生了明显的变化。对一维希格斯场以及一维正弦-戈登场计算这个扭折解的能量密度

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + V(\phi),$$

以及其在全空间中的能量 (这对应于一个“孤子”的质量)。

12. 陈 (Chern)-西蒙斯 (Simons) 理论

- (a) 考虑 2+1 维时空中的作用量

$$S = \gamma \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda,$$

这被称为陈-西蒙斯作用量。试证明陈-西蒙斯作用量在规范变换 $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu\Lambda$ 下保持不变。

- (b) 证明陈-西蒙斯作用量在任意的坐标变换下不变，换句话说它是一个拓扑不变量。
- (c) 证明陈-西蒙斯理论的能量动量张量和哈密顿密度均为零。

- (d) 考虑一个与陈-西蒙斯场耦合的粒子

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \gamma \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + a_\mu j^\mu,$$

式中 \mathcal{L}_0 为自由粒子的拉格朗日密度, 而 j^μ 为与 \mathcal{L}_0 对应的守恒流。证明如果我们在这个理论中绝热地交换两个粒子的位置, 则它们之间会产生一个 $\theta = 1/4\gamma$ 的相位差。这被称为分数统计。³³

- (e) 写出二维空间中磁场下电子的有效拉格朗日密度, 并证明它可以表示为一个陈-西蒙斯理论。
- (f) 试利用陈-西蒙斯理论中的分数统计理解分数量子霍尔效应。

13. 韦斯 (Wess)-祖米诺 (Zumino) 模型

- (a) 考虑如下的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + F^* F + m \phi F + \left(\frac{i}{2} m \chi^T \sigma^2 \chi + \text{h.c.} \right),$$

其中 ϕ, F 为复标量场, χ 为二分量旋量场, $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$, σ^i 为泡利自旋矩阵, h.c 为厄密共轭。这个模型被称为有质量的韦斯-祖米诺模型。试证明这个系统在如下的变换下保持不变

$$\delta \phi = -i \varepsilon^T \sigma^2 \chi, \quad \delta \chi = \varepsilon F + \sigma^\mu \partial_\mu \sigma^2 \varepsilon^*, \quad \delta F = -i \varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi,$$

式中 ε 为无限小的二分量旋量。这个变换将费米子与玻色子联系在了一起, 它被称为超对称变换。韦斯-祖米诺模型是最简单的具有超对称性质的模型。

- (b) F 场没有动能项, 因此被称为辅助场。求出 F 场所满足的拉格朗日方程, 并将 F 场从韦斯-祖米诺模型中约去。我们称余下的两个场互为超对称伴随场。证明它们的统计性质是相反的, 且具有相同的质量。

³³如果 $\theta = 0$, 则粒子满足玻色统计; 如果 $\theta = \pi$, 则粒子满足费米统计。在这里我们所构造的陈-西蒙斯理论可以让粒子满足任意的分数阶统计规律。

第四章 广义相对论

在本章中,我们将采用自然单位制 $c = \varepsilon_0 = 1$,同时度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 。

4.1 等效原理

在前面的章节中,我们已经利用场论的方法成功地得到了协变的电磁学理论。考虑到万有引力定律与库仑定律之间的相似性,我们或许不难得到一个协变的引力理论。我们可以设想,在这个引力理论中物质将与某个引力场耦合,就如同电磁相互作用中物质与电磁场的耦合一样。这样一种理论应当是与狭义相对论相容的。

然而,对牛顿引力的一个直接的协变推广很快就归于失败了。这是因为电磁作用与引力作用虽然乍看起来形式相似,但实际上却根本不同。例如,电荷有正负两种,同性相斥异性相吸,而所有物体之间的引力都是吸引的。运动的电荷会产生磁场,但是在引力系统中却没有发现类似的效应。看来,引力不能够像电磁作用一样,仅仅利用一个协变的矢量场来描述。那么,我们究竟应当如何得到一个恰当的协变的引力理论呢?

我们在伽利略时代就已经知道,物体在引力场中的运动与这个物体本身无关。具体地说,就是不同的物体在引力场中将以同样的加速度 g 下落。我们早已接受了这一事实,然而仔细思考就会发现,这远非自然而然的结果,也并非偶然的巧合,它实际上揭露了引力理论的深层次性质。最终,爱因斯坦以其极为深刻的洞见力发现,引力应当被描述为某种非惯性系的效应。沿着这条思路,我们就得到了广义相对论,它能够给引力提供一个恰当的协变描述。

要想对引力进行更深入的分析,我们需要更加细致地考察熟知的引力定律和惯性定律。我们知道,处在引力场 g 中的物体所受到的引力 \mathbf{F}_G 可以表示为

$$\mathbf{F}_G = m_G \mathbf{g}, \quad (4.1)$$

式中 m_G 是一个与物体本身有关的量,它刻画了物体感受引力场的能力,我们称之为物体的引力质量。而牛顿第二定律告诉我们,物体在受到外力 \mathbf{F} 时的加速度 \mathbf{a} 可以表示为

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}, \quad (4.2)$$

式中 m_I 刻画了物体抵抗外界的作用而维持自身运动的能力,我们称之为物体的惯性质量。习惯上我们将引力质量和惯性质量都笼统地称为质量,然而要注意这两个量的表征的是物体不同的物理性质:引力质量描述了物体对引力场的响应,而惯性质量描述了力对物体自身运动状态的影响。借用物理学史中的术语,我们可以为这两个物理量赋予更加生动的名字:引力质量实际上就是物体的“重性”,而惯性质量实际上就是物体的“惯性”。

引力场对物体的作用和物体对引力的响应集中体现于物体在引力场中的运动。计算出物体在引力场 \mathbf{g} 中的加速度,我们得到

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_G}{m_I} = \frac{m_G}{m_I} \mathbf{g}. \quad (4.3)$$

实验指出所有的物体在引力场中的加速度都是相同的,因此这意味着物体的引力质量 m_G 和惯性质量 m_I 这两个看似来源完全不同的物理量对于同一个物体来说总是相等的。这同时也意味

着所有物体在引力场中都将以相同的方式进行运动，不论其惯性质量和引力质量如何。

引力质量与惯性质量相等，这绝非自然而然的事实。相反，它蕴含了引力最为深刻的内涵。我们知道对于其他的相互作用来说，物体对这种相互作用的相应和物体维持自身运动的能力并不是由相同的物理量来刻画的。例如对于静电力来说，物体对其的响应由电荷 q 来表征，而维持自身运动的能力由惯性质量 m_I 来表征。因此，物体在电场 \mathbf{E} 中的加速度可以表示为

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_q}{m_I} = \frac{q}{m_I} \mathbf{E}. \quad (4.4)$$

我们看到不同的物体在电场中的加速度是不同的，它正比于电荷与惯性质量的比值 q/m_I ，这一物理量与物体自身的性质有关，我们称之为比荷。不同物体的比荷是不同的，因此也就在电磁场中具有不同的加速度。但是对于引力来说，引力质量与惯性质量的比值对于一切物体都是相同的。因此所有物体都在引力系统中具有相同的加速度，也都以完全相同的方式进行运动。

以上我们还是从经典的受力与运动的角度出发，对物体在引力场中的运动进行分析。但如果一个性质是所有物体都具有的，那么它就应当被视为物质本身的普遍性质，而非某个物体所独有的性质。因此，既然所有物质在引力场中的运动都是相同的，那我们就可以不将它们的运动视为由外界的因素所引起的，而将其视为物质的固有属性在引力场中的表现。在没有引力的情况下，我们知道物体的运动应当满足惯性定律，即在不受外力的作用下总保持静止或者匀速直线运动。而如果我们不将引力视为一个“外力”，那么引力场中的“惯性定律”就可以表示为：在引力场中，一个不受“外力”作用的物体总以加速度 \mathbf{g} 运动。

如果我们采取这个视角，那么我们会立刻发现，这实际上就是非惯性系中的“惯性定律”。在一个相对于惯性系以加速度 $-\mathbf{g}$ 运动的参考系中，所有不受外力的物体都将以加速度 \mathbf{g} 运动，这与一个引力场的效应是相同的。因此以上的讨论告诉我们，对于力学规律来说，引力场和非惯性系是等价的，这被称为爱因斯坦等效原理（弱等效原理）。我们甚至可以进一步地认为对于所有物理规律来说，引力场和非惯性系都是等价的，这被称为强等效原理。今后在提到等效原理的时候，指的都是强等效原理。

尽管这两种视角看起来截然不同，但是它们却可以给出完全相同的物理效应。一个地面附近的引力场和一个竖直向上作加速运动的非惯性系，实际上没有任何区别。我们无法通过物理现象来区分出自己到底是处在一个引力场中，还是自己正在做某种加速运动。¹ 狭义相对论告诉我们，所有惯性系都是等价的，而引力与非惯性系的等价性实际上进一步说明了所有的参考系（无论是惯性系还是非惯性系）都是相互等价的。在这里没有任何参考系是特殊的，一个非惯性系仅仅等价于一个惯性系加上一个引力场而已。因此我们说物理规律在任意的参考系变换（坐标变换）下都不发生改变，这被广义协变性原理。

4.2 引力场中的自由粒子

我们在上一节中介绍了等效原理，它指出一个非惯性系与一个引力场等价。我们也可以反过来，通过选取恰当的参考系，使得系统中看起来就像没有引力一样。如果引力场是均匀的（比如地球附近的重力场），那么我们可以找到一个参考系，使得在这个参考系看来空间中的任意一点都是没有引力的。如果引力场不均匀，那么上面的要求有时就不能达到了。但是至少我们总可以找到一个参考系，使得在这个参考系看来，在某时空点附近的足够小区域内是没有引力的。² 这样一个特殊的参考系称为该点的局域惯性系，在局域惯性系下，物理规律在该点保持着没有引力的形式。

¹ 这是针对引力场的无穷小区域说的，即这是引力场的局域性质。如果我们考虑不均匀引力场的有限大区域，那么引力场作用于物体各个不同位置上的差别将会产生潮汐力，从而被我们观测到。

² 事实上我们不仅可以找到一个恰当的坐标系，使得在某点处度规张量与平直时空相同，甚至我们还可以使得该点处度规张量的所有一阶导数均等于零（即使得该点处联络等于零）。但我们并不能够保证该点处度规张量的所有二阶导数均等于零（即使得该点处曲率等于零）。

在前面的章节之中，我们已经讨论了无引力系统的运动。因此当我们面对一个存在引力的系统时，我们可以采用如下的步骤来进行处理：

(1) 做恰当的参考系变换，将通常的参考系变换到时空中某点处的局域惯性系，使得在这个参考系中看来，该点处并没有引力。

(2) 在局域惯性系中求解系统在没有引力的情况下的运动。

(3) 做参考系的逆变换，将局域惯性系中的运动重新变换到通常的参考系中。

这样，我们就得到了系统在引力作用下的运动。

作为一个最简单的例子，我们考虑一个只受引力作用的“自由”粒子的运动。根据等效原理，我们总可以为时空中的某点找到一个局域惯性系 ξ^μ ，使得粒子在该点处的行为如同没有引力一样。换句话说，在局域惯性系内，粒子在该点附近的作用量将保持无引力时的形式

$$dS = -md\tau. \quad (4.5)$$

在本章中我们将遵循广义相对论文献中的通用约定，选取平直时空度规张量为

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (4.6)$$

相比于此前章节中的度规张量约定来说，每有一个明显的度规张量参与的两对指标缩并或有一对无度规张量参与的指标缩并都将产生出一个额外的负号，例如

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \rightarrow -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (4.7)$$

因此在这个约定下，局域惯性系内的时空间隔将表示为³

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.8)$$

式中 α, β 为局域惯性系中的指标。利用参数 λ 对曲线进行参数化，我们将得到粒子在局域惯性系中某点处作用量的形式

$$dS = -md\tau = -md\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (4.9)$$

假设我们在任意的参考系 x^μ 中研究粒子的运动。为了得到参考系 x^μ 中该点附近的作用量，我们需要进行一个坐标变换

$$\begin{aligned} dS &= -md\lambda \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \\ &= -md\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (4.11)$$

称为该点处的度规张量，这是一个对称的二阶张量

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (4.12)$$

对于非均匀的引力场来说，各点处的局域坐标系的选取方式并不相同，因此度规张量也处处不同，它实际上相当于时空中的一个场，称为度规张量场。注意到无引力时，局域惯性系 ξ^μ 就是参考系 x^μ ，因此此时的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 将自然地退化为 $\eta_{\mu\nu}$ 。

在广义相对论中，度规张量是极为重要的。时空中某点处的引力完全体现在了局域坐标系 ξ^μ 相对于通常的坐标系 x^μ 的选取，即变换 $\partial \xi^\mu / \partial x^\nu$ 之中。因此，这一引力效应也就完全体现在了度规张量 $g_{\mu\nu}$ 之中。如果得到了度规张量 $g_{\mu\nu}$ ，那么我们就完全了解了系统的引力性质。反

³更严格地说，我们在这里写出的量 $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 应当被称为“固有时”，我们要求它对于类时的两点的取值应当大于零。而时空间隔 ds^2 实际上就是时空流形的线元 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 。如果我们取度规张量为 $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ，那么固有时和时空间隔的表达式其实是相同的。而如果我们取度规张量为 $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ，那么固有时和时空间隔的表达式将相差一个负号。我们在这里不打算明显地做出这些区分。

之如果在时空中给定了一个引力场,那么其度规张量也是确定的。因此,我们只需考察度规张量就可以得到系统中引力的性质。

如果引力场是不均匀的,那么度规张量会随着位置变化。但是我们现在已经把所有的局域惯性系都变换到了同一个坐标系之中了,因此总的作用量就是将各作用量微元沿路径进行积分

$$S = -m \int d\tau = -m \int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (4.13)$$

因此我们看到,在这个例子中引力场的作用就是把 $\eta_{\mu\nu}$ 替换成了 $g_{\mu\nu}$ 。粒子真实的运动将使得上述作用量取极值

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0. \quad (4.14)$$

也就是说,粒子将沿着时空中最短的路径进行运动。我们称这条路径为测地线,它是平直时空中直线的推广。

计算作用量 S 对粒子运动路径 x^μ 的变分,我们将得到如下的拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0, \quad (4.15)$$

这一方程等价于

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} = 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial L}{\partial \lambda}, \quad (4.16)$$

式中

$$L = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (4.17)$$

为粒子的拉格朗日量,而

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (4.18)$$

为粒子的位置对参量 λ 的导数。

约去方程两端的因子 $-m$ 后,等式的左边可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho) \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} (-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho) \\ &= -\frac{d}{d\lambda} (2g_{\sigma\mu} \dot{x}^\sigma) + (\partial_\mu g_{\sigma\rho}) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho \\ &= (\partial_\mu g_{\sigma\rho}) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho - 2g_{\sigma\mu} \ddot{x}^\sigma - 2\partial_\rho g_{\sigma\mu} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho. \end{aligned} \quad (4.19)$$

我们定义引力场的仿射联络为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho, \quad (4.21)$$

式中 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, 则上述表达式可以进一步简化为

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} = -2g_{\sigma\mu} \ddot{x}^\sigma - 2\dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho \Gamma_{\mu\sigma\rho}. \quad (4.22)$$

与此同时,拉格朗日方程的右边可以表示为

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \sqrt{-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho}} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \frac{d^2\tau}{d\lambda^2} = -2 \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \dot{x}_\mu. \end{aligned} \quad (4.23)$$

因此,粒子在引力场中运动的方程将表示为

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \dot{x}^\lambda. \quad (4.24)$$

以上讨论的是一般情况。如果我们取参数 $\lambda = \tau$ ，那么 $\ddot{\tau} = 0$ ，此时等式右端将等于零，粒子的运动方程将简化为

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.25)$$

这被称为测地线方程，它告诉我们粒子是如何在一个给定的时空之中运动的。特别地，如果粒子处在平直时空中，则 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ，时空的仿射联络将为零，此时粒子的运动方程可以简单地表示为

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = 0. \quad (4.26)$$

我们在狭义相对论中已经得到这个结果了。

若我们考虑的是无质量粒子，则粒子的四速度将满足

$$u^\mu u_\mu = 0, \quad (4.27)$$

即

$$E^2 = \mathbf{p}^2. \quad (4.28)$$

要使得上述结果成立，粒子的运动速度必须等于光速。在这种情况下，粒子的固有时为零，因此它将不再适合作为粒子运动轨迹的参数。并且由于粒子的质量为零，作用量也将恒为零，不适合再进行变分运算。但是我们仍然可以求出使得粒子固有时 τ 最小的变分，这样的轨迹将刻画无质量粒子的运动。不失一般性地，我们仍以参量 λ 作为粒子运动轨迹的参数。重复此前的运算，我们得到

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}} \dot{x}^\lambda, \quad (4.29)$$

式中 $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ 。如果我们能够恰当地选取参数 λ 使得 $\ddot{\tau}/\dot{\tau} = 0$ ，那么上述方程将可以简化为

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (4.30)$$

这就是无质量粒子所满足的运动方程。它将使得粒子运动的固有时最短（此时这一最小值恰为零），只不过刻画粒子运动的参量将不再是固有时 τ 了。

实际上如果我们不从作用量出发，而是直接将无引力场情况下的自由粒子所满足的牛顿第二定律

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (4.31)$$

从局域惯性系 ξ^μ 变换到参考系 x^μ 中，那么我们将得到粒子在引力场中的运动方程

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.32)$$

式中的第二项实际上就是仿射联络

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (4.33)$$

因此我们同样得到了粒子的运动方程

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (4.34)$$

这种推导方式是更加简单的。对于广义相对论所考虑的时空来说，仿射联络的两个下指标满足对称性质

$$\Gamma_{\nu\tau}^\lambda = \Gamma_{\tau\nu}^\lambda, \quad (4.35)$$

这被称为无挠条件。如果引力场是确定的，那么度规张量和仿射联络也将唯一地被确定下来。因此在恰当的仿射联络下求解出测地线方程，我们就得到了粒子的运动。

我们预想在低能极限下, 上述方程将会退化为牛顿引力方程。为证明这一点, 我们考察质点在一个弱的定态引力场中缓慢运动的情况。如果质点运动的速度足够慢, 那么相比于 $dt/d\tau$ 可以略去 $d\mathbf{x}/d\tau$ 的贡献, 此时粒子的运动方程将简化为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.36)$$

对于定态的引力场来说, 度规张量所有分量的时间导数均为零, 于是我们得到

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (4.37)$$

在弱场近似下, 我们可以将度规张量的平直部分分离出来, 余下的是一个微量, 它代表弱场与平直空间之间的偏离

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad (4.38)$$

因此仿射联络可以表示为

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}. \quad (4.39)$$

将上述结果代入到运动方程中, 我们得到

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}, \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0. \quad (4.40)$$

从上述两式中消去 τ , 我们得到

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}. \quad (4.41)$$

在牛顿引力理论中, 质点在经典引力势 ϕ 中所满足的运动方程为

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (4.42)$$

因此我们得到度规张量与引力势之间的关系

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (4.43)$$

上述结果指出, 在低能极限下, 度规张量的零分量与平直时空的偏离为经典引力势的两倍。可以说, 度规张量与平直时空的偏离越大, 引力场就越强。

度规张量场 $g_{\mu\nu}$ 描述了局域惯性系 ξ^μ 与通常的参考系 x^μ 之间的关系, 它具有非常深刻的几何意义。为简便计, 我们只考虑一个二维空间。在二维平面上建立直角坐标系 (x^1, x^2) , 我们可以将平面上一段无限小距离写成

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2, \quad (4.44)$$

它也可以写成如下的“协变形式”

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.45)$$

其中度规张量 g_{ij} 是一个 2×2 的矩阵

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1). \quad (4.46)$$

现在我们来设想一下改变度规张量将会导致什么样的结果。如果度规张量取为某种更一般的形式, 那么就代表着在计算“距离”的时候, 不同的坐标将给出不同的贡献。可以形象地设想一种由横纵两组“平行”线构成的网格。如果我们不改变其他条件, 而是单纯地将某些线“抽出”一部分, 那么网格上相应的“距离”就会缩短。在这种情况下, 网格将会发生“弯曲”, 如图 4.1 所示。在设想这一点时, 不必假设网格被嵌入了三维平直空间中, 这种“弯曲”实际上是网格所代表的二维空间的内禀性质。

我们将这里的弯曲空间称作流形。或者更精确地说, 流形就是任意局部都可以被视为 n 维欧几里得空间 \mathbb{R}_n 的空间。举例来说, 通常的曲线或者曲面都是流形。形如符号“ \times ”的空间并

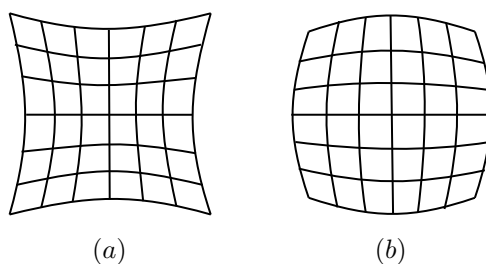


图 4.1: 弯曲空间示意图, 图中“等距”地画出了一些“平行线”。

不是流形, 因为在其交叉点处并不能够被视为 \mathbb{R}_n 。闭区间也不是流形, 因为在闭区间的边界处并不能够被视为 \mathbb{R}_n , 不过开区间仍可以被视为流形。

我们在设想弯曲流形的时候经常会将其嵌入到更高维的平直空间之中, 比如把曲线嵌入到平面上, 或者把曲面嵌入到空间中, 等等。事实上著名的惠特尼 (Whitney) 嵌入定理指出, 任意的 n 维流形总可以嵌入到 $2n$ 维平直空间中。因此如果愿意的话, 我们总可以在高维平直空间中研究弯曲流形, 就像在空间之中研究曲面一样。但这是不必要的, 弯曲流形可以内禀地存在, 而不必被嵌入到更高维的平直空间之中。

实际上即使是嵌入到三维平直空间中的曲面 (例如柱面) 也有可能是内禀平直的, 因为在这种情况下, 表面上的度规与平面是完全相同的。从操作的意义上说, 我们此时仍然可以在不拉伸或者收缩曲面的情况下将其重新展平为一个平面。在这种情况下, 其弯曲性质实际上来自于它在更高维空间中的嵌入, 而非曲面的内禀性质。如果有一个生活在柱面上的二维生物, 它将不会感受到柱面与平面有任何区别。与此相对应的是, 如果这个生物生活在球面上, 则它将会感受到球面的弯曲, 因为球面的弯曲是内蕴的。在物理上, 我们只关心内禀弯曲的时空, 而不关心时空在更高维中的嵌入以及由此可能带来的外部弯曲。因此我们在讨论流形的性质的时候通常也是以内禀的方式来讨论的。

由于流形的任意局部都可以被视为 \mathbb{R}_n , 因此我们可以在其上的任意一个位置建立起一个通常的直角坐标系 ξ^μ 。对于广义相对论来说, 这里的坐标系 ξ^μ 实际上就是我们所讨论的局域惯性系。在不同的坐标系之间可以建立变换关系。如果这些变换关系是可微的, 那么这样的流形就被称为微分流形。直观地说, 微分流形就是“光滑”的流形。在广义相对论中所讨论的弯曲时空就是一个微分流形。

度规张量代表着流形的内禀弯曲性质。由于引力的效应体现在度规张量 $g_{\mu\nu}$ 之中, 因此引力实际上就是时空的弯曲效应。在没有引力的平直时空之中, 自由粒子将沿着直线进行运动, 也就是说沿着最短的路径进行运动; 而在有引力的弯曲时空中, 自由粒子将同样沿着“长度” (时空间隔) 最短的那条路径运动——换句话说, 就是沿着测地线运动。因此, 一个自由的粒子在引力场中仍然是“自由”的, 只不过在引力场中, 原来的直线运动变成了弯曲时空中的测地线。在大质量恒星周围, 时空发生了弯曲, 因此粒子将沿着弯曲时空中的测地线运动, 其运动轨迹向恒星一侧偏转, 甚至围绕着恒星做圆周运动。从而在观测者看来, 粒子好像受到了“引力”的作用一样。在这里情况几乎与经典物理完全掉转了过来。经典物理认为, 物体在引力场中受力改变了自身状态, 而它在地面上受到的支持力平衡了这种作用, 使其能够继续保持静止。相反在广义相对论中, 物体在引力场中沿测地线运动, 这是最自由的状态, 而它在地面上所受到的支持力反而迫使它偏离测地线运动。

4.3 弯曲时空中的物理学

以上我们讨论了将物理规律推广到弯曲空间中的方法, 即首先写出系统在平直空间中的作用量, 然后对作用量进行恰当的坐标变换, 将之从局域惯性系 ξ^μ 变换到一般的坐标系 x^μ 中。

这样变换之后得到的作用量就是系统在弯曲空间中的作用量，它将可以描述系统在引力场中的运动。然而一般来说这并不能够得到最普遍的结果，因为我们实际上并不十分确切地知道物理体系在一般的坐标变换下的变换方式（通常所设想的方式可以说是一种最简单的变换方式，即“最小耦合”）。原则上来说，我们可以设想物质可以与时空的曲率有更复杂的耦合，它们在一般的坐标变换下会呈现出更加复杂的行为。然而由于这些耦合项在平直时空中没有贡献，因此我们看不到它们的作用，也就不能够在变换之中预先引入这些耦合。由于实验上对我们提出的要求只是等效原理，因此接下来我们将采用另一种做法，即只写出在任意坐标变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ 下不发生变化，且在局域惯性系中能够回到无引力场的作用量。⁴ 这样一种作用量将满足广义协变性原理，且可以退化为无引力场的情况，因此它将能够恰当地刻画系统在引力场中的运动。

在上一节中我们讨论了自由质点在引力场中的运动。为了写出场在弯曲空间中的作用量，我们接下来将讨论各种张量在一般的坐标变换之下的行为。最简单的量仍然是标量，它只有一个分量，在任意一个坐标变换下都不改变其数值。各种物理常数当然是标量，且固有时

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.47)$$

也是标量。如果我们希望广义协变性原理得到满足，那么我们就必须要求引力系统的作用量 S 是一个标量。

根据定义，在一般的坐标变换 $x \rightarrow x'$ 下，逆变时空四矢量 x^μ 应当按照如下方式变换

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu. \quad (4.48)$$

一般地，我们称在坐标变换 $x \rightarrow x'$ 下按照

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (4.49)$$

变换的量 A^μ 为逆变矢量。像速度四矢量 v^μ ，动量四矢量 p^μ ，电磁场四矢量 A^μ 这些洛伦兹逆变矢量，在一般的坐标变换下仍然是逆变矢量。特别地，坐标微分也是一个逆变矢量

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (4.50)$$

我们称在坐标变换 $x \rightarrow x'$ 下按照

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \quad (4.51)$$

变换的量 A_μ 为逆变矢量。根据度规张量的定义，在坐标变换下它按照如下方式进行变换

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

因此将逆变矢量与弯曲时空度规张量进行缩并得到一个协变矢量

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad (4.53)$$

它在坐标变换下按照如下方式进行变换

$$\begin{aligned} A'_\mu &= g'_{\mu\nu} A'^\nu = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} A^\gamma \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \delta^\beta_\gamma g_{\alpha\beta} A^\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha. \end{aligned} \quad (4.54)$$

利用度规张量的逆可以定义一个具有两上指标的度规张量

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma, \quad (4.55)$$

将它与协变矢量缩并可以得到一个逆变矢量

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu. \quad (4.56)$$

⁴我们可以不将这一变换视为坐标系之间的变换（被动变换），而将其视为流形到其自身的保持微分结构的映射（主动变换）。这样的映射在数学上被称为微分同胚变换，相应的不变性被称为微分同胚不变性。

逆变矢量和协变矢量进行缩并将得到一个标量

$$A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (4.57)$$

它在任意的坐标变换下不变

$$\begin{aligned} A'_\mu B'^\mu &= g'_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta} A^\gamma B^\delta \\ &= g_{\alpha\beta} A^\gamma B^\delta \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A_\alpha B^\alpha. \end{aligned} \quad (4.58)$$

类似地，我们可以定义具有多个指标的张量，它所有的上指标按照逆变矢量的方式变换，而所有的下指标按照协变矢量的方式进行变换，例如

$$T'^{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^{\kappa\rho\sigma}. \quad (4.59)$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是一个二阶协变张量，它可以对指标进行升降操作。在这样的定义之下，平直空间中关于张量线性组合、乘积以及缩并的结论将在弯曲空间中得到保留，即同阶张量的线性组合仍是同阶张量、张量乘积相当于将其上下指标分别相加，以及缩并消除掉一对上下指标。这说明在将作用量推广到弯曲时空的过程中，我们需要将度规张量由平直时空中的 $\eta_{\mu\nu}$ 替换为更一般的 $g_{\mu\nu}$ 。

以上都是非常直接的推广，它们看起来是很自然的。然而并不是所有的洛伦兹张量在弯曲时空中都自然地按照相应的张量形式进行变换。这通常是由于洛伦兹变换太过“简单”，以至于将问题巧妙地掩盖了起来。在更复杂的变换下，这些问题就会暴露出来，从而我们需要对定义进行某些修改才能使它们重新成为张量。

我们现在来考虑度规张量的行列式

$$g = \det(g^{\mu\nu}), \quad (4.60)$$

在洛伦兹变换下这个行列式的取值恒为 -1 ，不会发生变化。然而在一般的坐标变换下，度规张量行列式的变换性质要更加复杂。为看出这一点，我们考察一般的坐标变换 $x \rightarrow x'$ ，此时度规张量本身将按照下式进行变化

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \quad (4.61)$$

对等式两端取行列式，我们得到度规张量行列式的变化

$$g' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-2} g, \quad (4.62)$$

式中 $\det(\partial x'/\partial x)$ 称为变换 $x \rightarrow x'$ 的雅可比行列式，它是由 $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ 取遍所有指标所得到的 4×4 矩阵的行列式。这说明度规张量的行列式在一般的坐标变换下并不是标量，它将按照雅可比行列式的负二次方进行变换。

另一个例子是积分的体积元 d^4x ，它的变换形式为⁵

$$d^4x' = \left| \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \right| d^4x, \quad (4.63)$$

式中对变换的雅可比行列式取绝对值。从上述结果中我们可以看出，雅可比行列式实际上度量了在变换过程中体积元的变化情况。由于并非所有的变换都将某个无限小的空间映射到一个与之体积相同的空间，所以在这个情况下体积元的大小就要发生变化。只不过在洛伦兹变换中雅可比行列式总是取为 1（换句话说，洛伦兹变换只是不同坐标之间的“旋转”而不涉及体积的伸缩），所以标量密度才在洛伦兹变换下成为标量。

虽然 g 与 d^4x 都不是标量，但是 $d^4x\sqrt{-g}$ 却是一个标量。换句话说，这是一个“广义协变的”体积元，它在一般的坐标变换下不发生改变。在平直空间中，度规张量的行列式等于 -1 ，因此协变体积元将自然地退化为普通体积元。这说明在将作用量推广到弯曲空间的过程中，我们需要将积分中的体积元替换为协变体积元（也就是乘以度规张量行列式负值的开方）。

⁵若要证明这一结论对任意维度的流形都成立，则要利用微分形式的表述。

度规张量行列式 g 与微分体积元 d^4x 是更加普遍的张量密度的特殊情况。如果一个量在坐标变换下除了按照通常的张量进行变换外, 还要乘以变换雅可比行列式的 n 次方, 则称其为权为 n 的张量密度。由于雅可比行列式度量了变换中体积元的变化, 因此如果某量的变化对雅可比行列式有依赖关系, 则它确实是象空间中的某种“密度”一样变化。在这个定义下, 度规张量行列式 g 是权为 -2 的张量密度, 微分体积元 d^4x 是权为 1 的张量密度。

我们可以将列维-奇维塔张量的定义推广到任意时空

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ 奇排列} \\ 1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ 偶排列} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} = g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}g_{\eta\lambda}g_{\xi\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}. \quad (4.65)$$

可以验证列维-奇维塔张量是权为 -1 的张量密度

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\kappa} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}. \quad (4.66)$$

因此虽然 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 自身不是张量, 但是 $g^{-1/2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 却是一个张量。如果数个张量密度的权之和为 0 , 则它们的乘积将按照通常的张量来变化。特别地, 对于一个权为 n 的张量密度来说, 我们可以通过在其上乘以因子 $g^{n/2}$ 来得到一个张量。

另外一个例子是, 尽管在平直空间中 $\partial_\mu X^\nu$ 是一个洛伦兹张量, 但是在弯曲空间中 $\partial_\mu X^\nu$ 却不是张量。我们知道, 逆变矢量在坐标变换 $x \rightarrow x'$ 下的变换规律为

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (4.67)$$

对上式求偏导可以得到

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu. \quad (4.68)$$

类似地, 协变矢量的变换性质为

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} V_\rho, \quad (4.69)$$

对其求偏导数, 我们得到

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} V_\rho. \quad (4.70)$$

这说明在一般的坐标变换下, 一个张量的导数并不是协变的。这一点可以作如下理解: 在平直空间中坐标系的基矢处处相同, 因此在求导数的时候只需要考虑 X^ν 自身的变化。但是在弯曲空间中基矢会随着位置发生变化, 因此在求导数的时候不仅要考虑到 X^ν 自身的变化, 还要考虑不同位置上基矢的变化, 这就意味着张量的导数将不再是协变的。既然如此, 我们能不能找到某种具有广义协变性的导数呢?

回忆仿射联络的表达式

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (4.71)$$

式中 ξ^α 是局域惯性系。可以验证它在坐标变换下的性质为

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \quad (4.72)$$

注意到

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu, \quad (4.73)$$

因此上述变换也可以写成

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}. \quad (4.74)$$

从上述的讨论中可以看出, 仿射联络也不是一个张量。

计算出仿射联络与逆变矢量的缩并在坐标变换下的变换规律，我们得到

$$\Gamma'_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma}. \quad (4.75)$$

将之与逆变矢量的导数相加，我们发现非齐次项被消去了，于是

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\rho\sigma} V^{\sigma} \right), \quad (4.76)$$

我们把这个量定义为逆变矢量 V^{μ} 的协变导数

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} = \partial_{\lambda} V^{\mu} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa}, \quad (4.77)$$

式中 $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ 为对坐标 x^{μ} 的普通导数。上述协变导数 $\nabla_{\rho} V^{\mu}$ 在坐标变换下是协变的

$$\nabla'_{\lambda} V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \nabla_{\rho} V^{\nu}. \quad (4.78)$$

对协变矢量来说也有类似的结果。注意到

$$\Gamma'_{\mu\nu} V'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma} V_{\kappa} + \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\kappa}, \quad (4.79)$$

因此将之与逆变矢量的导数相加，我们发现非齐次项被消去了，于是

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'_{\mu\nu} V'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\rho\sigma} V_{\kappa} \right). \quad (4.80)$$

我们把这个量定义为协变矢量 V_{μ} 的协变导数

$$\nabla_{\nu} V_{\mu} = \partial_{\nu} V_{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V_{\lambda}, \quad (4.81)$$

式中 $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ 为对坐标 x^{μ} 的普通导数。上述协变导数 $\nabla_{\lambda} V_{\mu}$ 在坐标变换下是协变的

$$\nabla'_{\nu} V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \nabla_{\sigma} V_{\rho}. \quad (4.82)$$

对于更高阶的张量来说，我们有类似的结果。如果一个张量有多个指标，那么其协变导数将为每个上指标都加上仿射联络的贡献，而为每个下指标都减去仿射联络的贡献，例如三阶张量 $A^{\mu\nu}_{\rho}$ 的协变导数将表示为

$$\nabla_{\rho} T^{\mu\sigma}_{\lambda} = \partial_{\rho} T^{\mu\sigma}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} T^{\nu\sigma}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} T^{\mu\nu}_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa} T^{\mu\sigma}_{\kappa}. \quad (4.83)$$

特别地，利用度规张量和仿射联络之间的关系，可以验证度规张量的协变导数为零

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.84)$$

一般来说，协变导数是非对易的

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \neq 0, \quad (4.85)$$

但是可以验证协变导数之间满足如下的雅可比恒等式

$$[\nabla_{\lambda}, [\nabla_{\sigma}, \nabla_{\rho}]] + [\nabla_{\sigma}, [\nabla_{\rho}, \nabla_{\lambda}]] + [\nabla_{\rho}, [\nabla_{\lambda}, \nabla_{\sigma}]] = 0. \quad (4.86)$$

由于在平直时空中度规张量处处相等，因此其仿射联络为零，此时张量的协变导数将退化为普通导数。这说明在将作用量推广到弯曲时空的过程中，我们需要把所有的导数都替换为相应的协变导数。

以上我们讨论的都是各个张量的分量。在广义相对论中，由于坐标系可以任意选取，因此讨论张量本身的行为有时比讨论张量的分量更有启发性。仍以最简单的矢量为例进行讨论。在平直时空中，时空中任意一点处定义的矢量仍然在时空之内。但是在弯曲时空中，情况却不是这样。对于曲线来说，其上某点处所定义的矢量位于该点处的切线上；对于曲面来说，其上某点处所定义的矢量位于该点处的切平面上。因此可以设想，弯曲时空中某点处的矢量也将处于该点处的切空间内。曲线的切线维数为 1，曲面切平面的维数为 2，因此可以设想弯曲时空切空间的维数与时空的维数是相同的。

切空间中的矢量可以与流形的方向导数一一对应, 因此我们将其基矢选取为沿 x^μ 的偏导数

$$\hat{e}_\mu = \partial_\mu. \quad (4.87)$$

于是, 切空间中的任何一个矢量都可以表示为

$$\hat{a} = a^\mu \hat{e}_\mu. \quad (4.88)$$

考虑无穷小时空四矢量 $d\hat{x}$, 其分量为

$$d\hat{x} = dx^\mu \hat{e}_\mu, \quad (4.89)$$

于是两点之间的无穷小时空间隔可以表示为

$$d\tau^2 = d\hat{s} \cdot d\hat{s} = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu. \quad (4.90)$$

根据度规张量的定义, 这一时空间隔可以表示为

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.91)$$

因此基矢之间的内积恰好就是时空的度规张量

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (4.92)$$

切矢量的线性映射同样构成一个线性空间, 称为余切空间, 其中的矢量称为余切矢量。每个余切矢量 $\hat{\omega}$ 都构成一个线性映射, 它接受一个矢量 \hat{a} , 输出一个数 $\hat{\omega}(\hat{a})$ 。余切矢量可以类比于通常线性空间中的行矢量, 它与一个列矢量做内积, 得到一个数。我们将余切矢量的基矢选取为 $\hat{\theta}^\mu$, 在这组基矢下可以将余切矢量展开为

$$\hat{\omega} = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu. \quad (4.93)$$

余切空间中基矢的一个合适的选择是

$$\hat{\theta}^\mu = dx^\mu, \quad (4.94)$$

它将切空间中的基矢变换为

$$\hat{\theta}^\mu(\hat{e}_\nu) = dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (4.95)$$

因此一般的余切矢量将切矢量变换为

$$\hat{\omega}(\hat{v}) = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu(v^\nu \hat{e}_\nu) = \omega_\mu v^\nu \hat{\theta}^\mu(\hat{e}_\nu) = \omega_\mu v^\nu \delta^\mu_\nu = \omega_\mu v^\mu. \quad (4.96)$$

我们可以进一步地定义更高阶的张量。一般地, 一个 (k, l) 型张量可以定义为如下形式的映射

$$\hat{T} : \underbrace{T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*}_k \otimes \underbrace{T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_l \rightarrow R, \quad (4.97)$$

它作用于 k 个余切空间 T_p^* 与 l 个切空间 T_p 的张量积上, 给出一个实数。我们可以将其分量表示为

$$\hat{T} = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l}, \quad (4.98)$$

它将矢量映射为

$$(v_{\mu_1}, \cdots, v_{\mu_k}, w^{\nu_1}, \cdots, w^{\nu_l}) \mapsto T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} v_{\mu_1} \cdots v_{\mu_k} w^{\nu_1} \cdots w^{\nu_l}. \quad (4.99)$$

这一张量的分量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ 是一个具有 k 个上指标和 l 个下指标的量, 每个分量在坐标变换下都按照相应的方式进行变换

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\rho_k}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\rho_1 \cdots \rho_k}_{\sigma_1 \cdots \sigma_l}. \quad (4.100)$$

有些问题在分量下考察是比较复杂的, 但是将张量作为一个整体来考虑就非常简单, 前面所讨论的协变导数就是一例。协变导数产生的原因在于, 弯曲时空中不仅仅张量场本身在发生变

化,甚至连基矢本身也在不断地变化。因此,简单地计算矢量分量的偏导数并不能够反映矢量本身的变化。现在考虑如下矢量的协变导数

$$\hat{W} = W^\mu \hat{e}_\mu, \quad (4.101)$$

我们将矢量本身的导数记作 ∇ , 将分量的导数记为 ∂ 。计算出上述矢量沿 μ 方向的导数, 我们得到

$$\nabla_\mu \hat{W} = \nabla_\mu (W^\nu \hat{e}_\nu) = (\partial_\mu W^\nu) \hat{e}_\nu + W^\nu \nabla_\mu \hat{e}_\nu. \quad (4.102)$$

这里的第一项代表矢量分量的导数, 而第二项代表坐标基矢在不同位置上的变化。一般来说, 坐标基矢的变化可以表示为一系列其他基矢的线性组合。不失一般性地, 我们令

$$\nabla_\mu \hat{e}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \hat{e}_\lambda, \quad (4.103)$$

这里的 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 是基矢之间的组合系数, 可以在不同的位置取不同的值。直观地说, 它代表着我们将不同位置处的基矢“平移”到同一点后所产生的变化。因此我们得到矢量的导数为

$$\nabla_\mu \hat{W} = (\partial_\mu W^\nu) \hat{e}_\nu + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \hat{e}_\lambda. \quad (4.104)$$

取上述表达式的 λ 分量, 我们得到

$$\nabla_\mu W^\lambda = \partial_\mu W^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda W^\nu, \quad (4.105)$$

这恰是矢量场的协变导数。

通过考察矢量自身 \hat{W} 而非矢量分量 W^λ 随着位置的变化, 我们自然而然地得到了矢量的协变导数。普通导数直接计算矢量分量的导数, 而协变导数相当于将不同点的矢量“平移”到同一点上之后再计算导数, 计及了不同点处基矢的变化。在协变导数中多出了一项仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 的贡献, 它刻画了基矢随着坐标变化而发生的伸缩以及转动, 并且这一系数恰好是我们此前引入的仿射联络。根据上述讨论可以看出, 我们完全可以在没有度规张量的情况下定义流形上的联络以及协变导数。

事实上一个微分流形不一定非要具有度规张量的结构。我们称定义了度规张量的微分流形为黎曼 (Riemann) 流形, 它是一种更强的数学结构。可以证明, 如果一个黎曼流形满足如下的度规相容条件

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.106)$$

以及无挠条件

$$T^\lambda_{\nu\tau} = \Gamma^\lambda_{\nu\tau} - \Gamma^\lambda_{\tau\nu} = 0, \quad (4.107)$$

则仿射联络可以由度规张量唯一地确定下来, 它们之间的关系为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (4.108)$$

这与我们此前得到的结论是一致的。我们称等式右端为克里斯多弗 (Christoffel) 联络, 它只在流形满足相容且无挠的情况下才唯一地给出流形上的联络。幸运的是, 在物理上时空流形的度规张量总是存在的, 且无挠条件和度规相容条件总能够得到满足, 因此我们可以放心地使用这一结果。

现在我们已经考察了作用量在一般坐标变换下的变换行为。根据前文中的讨论, 在将作用量从平直时空推广到弯曲时空的过程中, 我们需要作如下的几点推广:

- (1) 将度规张量从 $\eta_{\mu\nu}$ 替换为弯曲时空度规张量 $g_{\mu\nu}$ 。
- (2) 将体积元从 $d^4\xi$ 替换为协变体积元 $d^4x\sqrt{-g}$ 。
- (3) 将导数从 ∂_μ 替换为协变导数 ∇_μ 。

这被称为最小耦合原理,它是得到广义协变理论最简单也是最直接的方式。⁶ 进行上述推广之后,我们就得到了物理系统在弯曲时空中的作用量。对作用量求变分,我们将得到弯曲时空中的运动方程。通常来说,它也可以直接通过在平直时空中的运动方程进行相应的替换得到。⁷

我们来具体地考察一下如何将平直时空中的物理理论推广到弯曲时空中。以电磁场为例,平直空间中电磁场的作用量可以表示为

$$S = \int d^4\xi \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (4.109)$$

其中

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (4.110)$$

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (4.111)$$

对电磁场 A^ν 作变分,我们将得到平直时空中电磁场的演化方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.112)$$

现在我们要将平直时空中的电磁场推广到弯曲空间中。将平直时空中的度规张量替换为弯曲时空中的度规张量,并将体积元和导数替换为协变体积元和协变导数,我们将得到弯曲时空中电磁场的作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (4.113)$$

其中电磁场强张量 $F_{\mu\nu}$ 为

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (4.114)$$

由于仿射联络的对称性质,电磁场强张量可以简化为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho - \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (4.115)$$

这意味着弯曲时空的电磁场强张量中实际上不含仿射联络以及度规张量,它与平直时空中的电磁场强张量具有相同的形式。当然,若要进一步对其升降指标,则仍然要用到度规张量

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (4.116)$$

对电磁场 A^ν 作变分,我们将得到弯曲时空中电磁场的演化方程

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.117)$$

即

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\mu F^{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu F^{\mu\rho} = 0. \quad (4.118)$$

这就是弯曲时空中电磁场所满足的方程。

⁶由于协变导数是不对易的,因此即使是对于最小耦合原理来说,上述推广也仍然存在着不确定性。具体采用哪种推广方式,最终仍然应当由实验来决定。

⁷较为特殊的情况是点粒子运动方程的直接推广。对于粒子运动的轨迹来说,我们应当将对固有时 τ 的导数替换为沿曲线的协变导数

$$\frac{d}{d\tau} \rightarrow \frac{D}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \nabla_\nu,$$

于是粒子的运动方程变为

$$\frac{D}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0,$$

这恰是粒子运动的测地线方程。粒子运动对固有时的导数 $dx^\mu/d\tau$ 为粒子运动轨迹的切线,这一切线沿曲线的协变导数为零意味着曲线上的切线各点处处平行。也就是说,粒子的“速度”在运动过程中始终没有发生变化,这是平直时空中自由粒子的推广。当然,如果我们直接对点粒子的作用量进行推广,并且对推广后的作用量求粒子运动的轨迹,那么我们将直接得到这一结果,而无需再额外对粒子运动轨迹的导数进行处理。

4.4 引力场的作用量

正如牛顿力学中的位移函数刻画了粒子的全部运动性质一样，广义相对论中的度规张量刻画了系统的全部引力性质。这一点为我们指出了接下来的全部努力方向：要想求出系统的引力性质，我们就要求出时空中的度规张量。现在我们已经知道了度规张量 $g_{\mu\nu}$ 刻画了引力场，也知道了引力场与物质的耦合方式，但我们还不清楚引力场本身是如何演化的。为此我们需要写出引力场本身的作用量。

根据广义协变性原理，这个作用量应当是一个标量，它在坐标变换下不发生改变。由于我们希望运动方程是二阶的，因此这个作用量应当只是度规张量及其各阶导数的函数，并且其中最多只包含度规张量的二阶导数，且对二阶导数是线性的。一般来说，标量可以通过更高阶的张量缩并而成。根据前面的讨论我们得知，度规张量的普通导数是非协变的，而其协变导数又平凡地等于零，因此符合上述条件的张量的构造并不是任意的。那么，我们应当选取什么样的张量呢？

我们在前文的讨论中已经看到，协变导数之间是不对易的。因此利用协变导数的对易子，我们可以恰当地定义一个张量

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} A^\sigma, \quad (4.119)$$

它在坐标变换下按照下式变化

$$R'^\lambda_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta} R^\lambda_{\mu\nu\kappa}, \quad (4.120)$$

因此它确实是一个具有广义协变性的张量，并且事实上是唯一符合上述条件的非平凡的张量。我们称 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 为黎曼曲率张量。

明显地计算出协变导数的对易子，我们将得到黎曼曲率张量与仿射联络之间的关系。将协变导数两次作用在矢量上，结果为

$$\begin{aligned} & \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho \\ &= \nabla_\mu [\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\sigma] \\ &= \partial_\mu [\partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} V^\sigma] - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} [\partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma] + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} [\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} V^\sigma] \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + \partial_\mu (\Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho \\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} V^\sigma. \end{aligned} \quad (4.121)$$

$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho$ 可以按照类似的方法求出，只不过要将上述表达式中的指标 μ, ν 交换。将两式做差，我们发现所有 V^ρ 的一次导数项和二次导数项都消去了，余下的只有 V^ρ 的常数项

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \left[\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \right] V^\sigma, \quad (4.122)$$

因此我们就得到了黎曼曲率张量的表达式

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta}. \quad (4.123)$$

利用度规张量可以将黎曼曲率张量下降为完全协变的形式

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\kappa}. \quad (4.124)$$

可以验证，黎曼曲率张量满足如下的交换对称性

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}, \quad (4.125)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\kappa\lambda\nu}, \quad (4.126)$$

以及

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (4.127)$$

此外，由于协变导数之间的雅可比恒等式，我们可以验证黎曼曲率张量的协变导数满足如下的关系

$$\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0, \quad (4.128)$$

这被称为比安基 (Bianchi) 恒等式。

通过对黎曼曲率张量的指标进行缩并, 我们可以得到更低阶的张量。但是这一指标缩并也并不是任意的。由于曲率张量各指标之间的交换对称性, 对其 1, 2 和 3, 4 指标进行缩并后的结果为零, 而对其余指标缩并得到的实际上是同一个张量, 最多相差一个正负号。因此对黎曼曲率张量缩并只能得到一个张量, 我们将之定义为

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R^{\nu}_{\mu\nu\kappa}. \quad (4.129)$$

这个张量被称为里奇 (Ricci) 张量。可以验证, 里奇张量的两个下指标是对称的

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (4.130)$$

对里奇张量再进行缩并, 我们就得到了一个标量

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}, \quad (4.131)$$

它被称为曲率标量。

曲率有什么物理意义呢? 直观地说, 它衡量了一个曲面内禀的弯曲程度。例如, 考虑一个半径为 a 的二维球面, 在其上建立球面坐标系 (θ, ϕ) , 则球面两点间的线元可以表示为

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.132)$$

因此其度规张量的非零分量为

$$g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2 \theta, \quad (4.133)$$

$$g^{\theta\theta} = (g_{\theta\theta})^{-1} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{\phi\phi} = (g_{\phi\phi})^{-1} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.134)$$

计算其仿射联络的非零分量, 我们得到

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot \theta. \quad (4.135)$$

于是曲率张量的唯一非零分量为

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} - \partial_{\phi}\Gamma^{\theta}_{\theta\phi} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\phi} \\ &= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - (-\sin \theta \cos \theta)(\cot \theta) = \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (4.136)$$

即

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = g_{\theta\theta} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} = a^2 \sin^2 \theta. \quad (4.137)$$

里奇标量为

$$R_{\theta\theta} = 1, \quad R_{\theta\phi} = R_{\phi\theta} = 0, \quad R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta, \quad (4.138)$$

因此我们得到这一球面的曲率标量

$$R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = \frac{2}{a^2}, \quad (4.139)$$

这反比于球面半径的平方。这一结果意味着, 曲面的弯曲程度越大, 其曲率也就越大。

而与此同时, 如果空间是内禀平直的, 那么不论在其上建立何种坐标系, 其曲率张量都恒等于零。例如, 二维平直时空中建立平面极坐标系, 则其度规张量为

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (4.140)$$

其仿射联络的非零分量为

$$\Gamma^{\rho}_{\theta\theta} = -\rho, \quad \Gamma^{\theta}_{\rho\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\rho} = \frac{1}{\rho}. \quad (4.141)$$

计算出其曲率张量, 我们发现其所有分量均为零

$$R_{ijkl} = 0. \quad (4.142)$$

这一结论反过来也是成立的，即若黎曼曲率张量的各个分量恒为零，则时空是平直的。换句话说，在这种情况下我们总能够找到一个恰当的变换，使得其度规张量仅由 ± 1 组成。由此可见，曲率确实代表着时空弯曲程度的大小。

如果仿射联络的两个下指标不是对称的，那么协变导数的对易子可以更一般地表示为

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} A^\sigma - T^\sigma_{\mu\nu} \nabla_\sigma A^\lambda, \quad (4.143)$$

式中

$$T^\lambda_{\nu\tau} = \Gamma^\lambda_{\nu\tau} - \Gamma^\lambda_{\tau\nu} \quad (4.144)$$

称为流形的挠率。直观地说，曲率刻画了流形的“弯曲”，而挠率刻画了流形的“扭转”。对于我们在广义相对论中所考虑的时空流形来说，其挠率总为零

$$T^\lambda_{\nu\tau} = 0, \quad (4.145)$$

因此我们得到了之前的结论

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} A^\sigma, \quad (4.146)$$

即可以利用协变导数的对易子来定义曲率张量。

我们也可以完全利用张量记号来表示流形的曲率张量和挠率张量。沿切矢量 \hat{V} 方向的协变导数可以表示为

$$\nabla_{\hat{V}} = V^\mu \nabla_{\hat{e}_\mu}, \quad (4.147)$$

这里 $\nabla_{\hat{e}_\mu}$ 的分量就是沿 μ 方向上的协变导数 ∇_μ 。曲率（挠率）刻画的是流形在两个不同方向上的差别，因此它们每一个都与流形上的两个切矢量相关联。利用沿切矢量的协变导数，我们可以将曲率张量和挠率张量表示为

$$\hat{R}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{T} = \nabla_{\hat{X}} \nabla_{\hat{Y}} \hat{T} - \nabla_{\hat{Y}} \nabla_{\hat{X}} \hat{T} - \nabla_{[\hat{X}, \hat{Y}]} \hat{T}, \quad (4.148)$$

$$\hat{T}(\hat{X}, \hat{Y}) = \nabla_{\hat{X}} \hat{Y} - \nabla_{\hat{Y}} \hat{X} - [\hat{X}, \hat{Y}], \quad (4.149)$$

式中两个切矢量之间的对易子定义为

$$[\hat{V}, \hat{U}]^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu. \quad (4.150)$$

曲率张量和挠率张量的分量可以表示为

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \langle dx^\kappa, \hat{R}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) \hat{e}_\lambda \rangle, \quad (4.151)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \langle dx^\lambda, \hat{T}(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) \rangle, \quad (4.152)$$

式中尖括号代表矢量的内积。将这些分量计算出来，我们就得到了它们与仿射联络各分量之间的关系

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta}, \quad (4.153)$$

$$T^\lambda_{\nu\tau} = \Gamma^\lambda_{\nu\tau} - \Gamma^\lambda_{\tau\nu} \quad (4.154)$$

这与我们此前得到的结果是一致的。

根据上述讨论可以看出，如果时空弯曲得越厉害，那么协变导数就“越不对易”，因此其曲率也就会越大。我们可以设想，如果时空弯曲的程度越大，那么相应的引力效应也就会越强。因此，我们可以利用曲率标量来刻画系统的引力强弱。广义协变性要求引力系统的作用量是一个标量，因此我们就假设引力场的作用量正比于这一曲率标量

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (4.155)$$

这被称为爱因斯坦-希尔伯特 (Hilbert) 作用量，式中 G 为万有引力常数。将它与物质场的作用量加起来，最终我们得到的作用量表达式是

$$S[g^{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \mathcal{L}_m, \quad (4.156)$$

式中 \mathcal{L}_m 为物质场的拉格朗日密度，它已包含了协变体积元中的因子 $\sqrt{-g}$ 。这样我们就得到了引力系统完整的作用量。

为求出引力系统的演化方程，我们计算作用量对度规场的变分

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (4.157)$$

定义物质场的能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.158)$$

利用这一能量动量张量，物质场作用量对度规张量的变分可以表示为

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.159)$$

事实上若在这个能量动量张量中取 $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ ，我们将自然地得到平直时空中的能量动量张量，它与上一章中利用时空平移对称性求出的结果是一致的。

引力场作用量的变分可以写成

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\sqrt{-g} \delta R + R \delta(\sqrt{-g})]. \quad (4.160)$$

式中第二项为

$$R \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}), \quad (4.161)$$

第一项为

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}). \quad (4.162)$$

里奇张量对度规张量的变分可以表示为

$$\frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}} \frac{\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\delta g^{\rho\sigma}}. \quad (4.163)$$

在这里虽然仿射联络 $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 不是张量，不过两个仿射联络的差，也就是仿射联络的变分 $\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 仍是一个张量。注意到

$$\nabla_{\lambda}(\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = \partial_{\lambda}(\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}, \quad (4.164)$$

因此

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}), \quad (4.165)$$

这意味着

$$g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) = \nabla_{\nu}(g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}) - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}. \quad (4.166)$$

这一项是全微分，在积分下将成为零，因此曲率标量的变分可以表示为

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}. \quad (4.167)$$

将上述结果总结起来，我们就可以得到系统总作用量的变分

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi G T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.168)$$

要使这个变分对任意 $\delta g^{\mu\nu}$ 均为零，则必须有

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.169)$$

上式被称为爱因斯坦方程，它刻画了引力场自身的演化。等式左端的张量被称为爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ ，因此我们可以将爱因斯坦方程改写为

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.170)$$

这个等式的物理意义是明确的，左边是时空的曲率，右边是物质的能量动量张量，它告诉我们时空是如何被物质所影响的。

度规张量有 10 个独立的分量，爱因斯坦方程也有 10 个分量。但是由于比安基恒等式，流形的爱因斯坦张量满足

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (4.171)$$

因此，爱因斯坦方程实际上只具有六个独立的自由度，度规张量中仍然有四个自由度是不能确定的。这四个自由度可以理解为坐标选取的自由度，即若以 x_μ 为坐标的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦方程的解，则做坐标变换 $x \rightarrow x'$ 所得到的新度规张量 $g'_{\mu\nu}$ 也将是爱因斯坦方程的解。由于时空本身是不随着坐标的变化而变化的，因此我们无论在时空中建立何种坐标系都不会改变时空的结构，这类似于我们此前讨论过的规范对称性。实际我们通常为度规张量附加一些额外的条件来从一系列相互等价的度规场中选取某些特定的度规场，即为度规场施加“规范固定条件”。常用的规范条件为

$$\Gamma^\rho = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0, \quad (4.172)$$

这一条件等价于

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0, \quad (4.173)$$

称为谐和规范条件。当然，这一规范条件并不是协变的，因为我们本来就是要从一系列由坐标变换联系起来的度规场中挑出某些特定的解。

接下来我们考察爱因斯坦方程的低能近似。对爱因斯坦方程两边求迹（缩并），注意对度规张量求迹的结果为 $g^\mu_\mu = 2$ ，我们得到

$$R = -8\pi GT, \quad (4.174)$$

其中 $T = T^\mu_\mu$ 。因此我们可以将爱因斯坦方程等价地表示为

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (4.175)$$

在低能近似下，取爱因斯坦方程的零分量，等式左边的里奇张量可以表示为

$$R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = -\frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\sigma \partial_\mu h_{00} = \nabla^2 \phi, \quad (4.176)$$

而等式右端的能量动量张量为

$$T_{00} = \rho, \quad T = -\rho, \quad (4.177)$$

因此我们得到

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (4.178)$$

这就是经典引力势所满足的泊松方程。由此可见，在低能下爱因斯坦方程自动回到了牛顿引力，并且理论中所引入的系数 G 恰是经典的万有引力常数。

从爱因斯坦方程出发，我们也可以推导出物质场所满足的守恒律。对爱因斯坦方程两边求协变导数，我们得到

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 8\pi G \nabla^\mu T_{\mu\nu}. \quad (4.179)$$

由于爱因斯坦张量的协变导数等于零 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ ，因此物质场能量动量张量的协变导数也等于零

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.180)$$

这就是物质场所满足的守恒方程，它可以给出物质场的演化。⁸

⁸ 严格来说，这并不是弯曲时空中的能量动量守恒方程，因为方程的协变导数中包含有仿射联络项，它实际上代表着物质场和引力场的能量交换。我们期望在加上引力场自身的能量动量张量后，可以得到物质场与引力场作为整体的能量动量守恒方程，然而这是一个极为困难的问题。迄今为止所有寻找引力场能量动量张量的尝试都没有成功，人们甚至怀疑引力场中可能不存在通常意义上的定域的能量动量张量。

给出物质场的作用量, 我们就可以研究它与引力场的耦合。作为一个例子, 考虑引力场中的一系列质量为 m_n 的质点。设其运动轨迹为 $x_n(\tau)$, 则质点的作用量可以表示为

$$S_m = - \sum_n m_n \int d\tau_n \sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}}. \quad (4.181)$$

将其改写为对全时空的积分, 我们得到

$$\begin{aligned} \delta S_m &= - \sum_n m_n \int d\tau_n \delta \sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}} \\ &= \sum_n m_n \int d\tau_n \frac{1}{2} \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta g_{\mu\nu}(x_n) \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \right] \delta g_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (4.182)$$

因此其能量动量张量为

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n)). \quad (4.183)$$

将这一能量动量张量代入到等式右端, 我们就得到了这一系列质点的爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n)). \quad (4.184)$$

注意到仿射联络满足如下性质

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\ln \sqrt{-g}), \quad (4.185)$$

因此质点的守恒方程可以简化为

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu T^{\mu\sigma}, \quad (4.186)$$

即

$$\begin{aligned} \sum_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(x - x_n(\tau_n)) d\tau_n \\ + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \sum_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\sigma}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n(\tau_n)) d\tau_n = 0. \end{aligned} \quad (4.187)$$

对上式分部积分, 弃去表面项后得到

$$\sum_n \int \left(\frac{d^2 x_n^\nu}{d\tau_n^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\sigma}{d\tau_n} \right) \delta^4(x - x_n(\tau_n)) d\tau_n = 0, \quad (4.188)$$

即

$$\frac{d^2 x_n^\nu}{d\tau_n^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\sigma}{d\tau_n} = 0, \quad (4.189)$$

这恰是各个粒子运动的测地线方程。当然, 此时的联络不再是给定的背景场的联络, 而是包含了其他粒子之间的相互作用。这就像电磁相互作用一样, 各个粒子之间不直接传递相互作用, 而是依靠电磁场来传递。由此可见, 我们通过守恒方程重新得到了粒子的运动方程, 这与此前通过等效原理得到的结果是一致的。

我们还可以考察与引力场耦合的电磁场。引力场和电磁场的总作用量可以表示为

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (4.190)$$

在弯曲时空中, 电磁场强张量 $F^{\mu\nu}$ 为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.191)$$

电磁场的能量动量张量为

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(-\frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right) \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \left(-\frac{1}{4} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right) + \sqrt{-g} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(-\frac{1}{4} F_{\gamma\delta} F_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} [F_{\gamma\delta} F_{\alpha\beta} (\delta^\alpha_\mu \delta^\gamma_\nu g^{\beta\delta} + \delta^\beta_\mu \delta^\delta_\nu g^{\beta\gamma})] \\
 &= -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu},
 \end{aligned} \tag{4.192}$$

于是爱因斯坦方程可以表示为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left(-\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - F_\mu{}^\rho F_{\rho\nu} \right). \tag{4.193}$$

电磁场自身的演化方程为

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{4.194}$$

由于电磁场强张量的反对称性，这一方程可以等价地表示为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \tag{4.195}$$

上述方程共同刻画了电磁场与引力场的演化。

4.5 标架表述

以上我们讨论了将物理规律推广到弯曲时空中的方法。我们还遗留下了一个没有解决的问题，那就是给出弯曲时空中旋量场的表达式。旋量场的直接推广是不容易的，因为洛伦兹群的张量表示在一般线性群 $GL(4)$ 下仍然是张量表示，然而对于洛伦兹群的旋量表示来说却不存在 $GL(4)$ 中的表示与之对应。因此，我们需要在流形的切空间中引入局域的正交标架场，这样才能够对旋量场进行恰当的处理。

现在我们在时空中的每一点处选取一组基矢 e_a^μ ，它们满足

$$e_a^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab}, \tag{4.196}$$

式中 μ 是洛伦兹指标，而 a, b 是用于区分不同基矢的指标， $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ 。我们称这样一组基矢为标架。直观地说，可以将标架视为局域惯性系的基矢。

利用 η_{ab} 可以对标架指标进行升降，而利用 $g_{\mu\nu}$ 可以对洛伦兹指标进行升降

$$e_\mu^a = \eta^{ab} e_{b\mu}, \quad e_\mu^a = g_{\mu\nu} e^{a\nu}. \tag{4.197}$$

因此我们可以将度规张量表示为

$$g_{\mu\nu} = e_{a\mu} e_\nu^a = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b, \tag{4.198}$$

或将无穷小时空间隔表示为

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} (e_\mu^a dx^\mu) (e_\nu^b dx^\nu). \tag{4.199}$$

将这个结果与局域惯性系中的度规相比较，我们发现标架场与局域惯性系 ξ^a 之间的关系为

$$e_\mu^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu}. \tag{4.200}$$

由于在一般的引力场中局域惯性系是处处不同的，因此标架也是处处不同的。这样一种处处不同的标架构成了一组场，我们称之为标架场，它起到了与度规张量场相同的作用。

对度规张量取行列式，我们得到

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta^{ab}) \det(e_\mu^a) \det(e_\nu^b) = -\det(e_\mu^a)^2, \tag{4.201}$$

因此我们得到标架场行列式的表达式

$$e = \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g}. \quad (4.202)$$

矢量的标架分量定义为它在标架上的投影

$$A_a = e_a^\mu A_\mu, \quad A^a = e_\mu^a A^\mu = \eta^{ab} A_b. \quad (4.203)$$

类似地, 我们也可以利用标架分量来表示矢量

$$A_\mu = e_\mu^a A_a, \quad A^\mu = e_a^\mu A^a. \quad (4.204)$$

导数的标架分量可以表示为

$$\partial_a = e_a^\mu \partial_\mu. \quad (4.205)$$

我们称 A^μ 为坐标矢量, 这指的是它在关于指标 μ 的一般坐标变换下表现为一个矢量。而称 A^a 为洛伦兹矢量, 这指的是它在关于指标 a 的(局域)洛伦兹变换下表现为一个矢量。按照这一标准, 我们可以说旋量场 ψ 的标架分量既是一个坐标标量, 也是一个洛伦兹旋量。不论在坐标分量 μ, ν 下, 还是在标架分量 a, b 下, 系统本身都不会发生什么变化。因此, 我们可以在标架分量下给出系统的作用量, 从而得到系统的运动规律。这就是理论的标架表述。

接下来我们要在标架表述下写出旋量场的作用量。由于理论的对称性, 我们要求这个作用量既是坐标标量, 同时也是洛伦兹标量。换句话说, 我们既要求它在关于指标 μ 的一般坐标变换下保持不变, 也要求它在关于指标 a 的洛伦兹变换下保持不变。如果我们将旋量场的作用量简单地表示为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (i\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (4.206)$$

那么它将是不能够满足我们的要求的。因为 $\partial_a \psi$ 并不是一个洛伦兹矢量, 它在洛伦兹变换下会产生出额外的修正项。为了解决这一问题, 我们可以设想在偏导数中额外添加一项, 从而将旋量场的作用量修改为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (i\bar{\psi} \gamma^a D_a \psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (4.207)$$

式中

$$D_a = e_a^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu) \quad (4.208)$$

称为协变导数。 ω_μ 项的存在将消除掉 $\partial_a \psi$ 在洛伦兹变换下的修正项, 从而使得系统的拉格朗日密度在洛伦兹变换下保持不变。

在局域的洛伦兹变换下, 标架场按照一个矢量的方式进行变化

$$e'^a_\mu = \Lambda^a_b e^b_\mu, \quad (4.209)$$

而标量场按照旋量表示进行变化

$$\psi' = S(\Lambda)\psi, \quad (4.210)$$

式中 $S(\Lambda)$ 为旋量场的表示矩阵。旋量场的协变导数具有协变性, 这意味着 $D_a \psi$ 在洛伦兹变换下将按照如下方式进行变化

$$D'_a \psi' = (\Lambda^{-1})^b_a S(\Lambda) D_b \psi, \quad (4.211)$$

也就是说, 协变导数中的附加项 ω_μ 在洛伦兹变换下将变换为

$$\omega'_\mu = S(\Lambda) \omega_\mu S^{-1}(\Lambda) - [\partial_\mu S(\Lambda)] S^{-1}(\Lambda). \quad (4.212)$$

为简便起见, 我们考虑无限小洛伦兹变换

$$\Lambda = I - \frac{i}{2} \varepsilon_{ab} J^{ab}, \quad (4.213)$$

式中 $J^{\mu\nu}$ 为洛伦兹变换的生成元。在这一无限小洛伦兹变换下, 旋量场的表示矩阵可以表示为

$$S[\Lambda] = I - \frac{i}{2} \varepsilon_{ab} S^{ab}, \quad (4.214)$$

式中 S^{ab} 是洛伦兹变换生成元的旋量表示, 其表达式为

$$S^{ab} = \frac{1}{2}\sigma^{ab} = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \quad (4.215)$$

γ^a 为 γ 矩阵的标架分量。在这一无限小洛伦兹变换下, ω_μ 将按照如下方式进行变换

$$\omega'_\mu = \omega_\mu - \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}[S_{ab}, \omega_\mu] + \frac{i}{2}S_{ab}\partial_\mu\varepsilon^{ab}. \quad (4.216)$$

要想使得上述表达式成立, 一个合适的选择是

$$\omega_\mu = -\frac{i}{2}\omega_\mu^{ab}S_{ab}, \quad (4.217)$$

式中 ω_μ^{ab} 称为自旋联络, 它满足如下的对易关系

$$[\gamma^a, \omega_b(x)] = \omega_{bv}^a(x)\gamma^b. \quad (4.218)$$

注意到 γ 矩阵满足

$$[\gamma^\lambda, S^{\mu\nu}] = i(\eta^{\lambda\mu}\gamma^\nu - \eta^{\lambda\nu}\gamma^\mu), \quad (4.219)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad (4.220)$$

因此自旋联络可以选取为

$$\omega_\mu^{ab} = (\nabla_\mu e^{a\nu})e_\nu^b, \quad (4.221)$$

式中 ∇_μ 为弯曲时空中的协变导数, 而

$$\gamma^a = e_\mu^a\gamma^\mu \quad (4.222)$$

为 γ 矩阵的标架分量。这样我们就得到了弯曲时空中旋量场的拉格朗日密度。事实上若我们计算矢量本身而非其标架分量的导数, 则我们会自然地得到自旋联络。对于其他的场来说, 我们只需要将洛伦兹变换生成元的旋量表示 S_{ab} 替换为其他场所对应的表示, 就可以得到标架表述中相应的协变导数。

如果我们作代换

$$D_a = e_a^\mu D_\mu, \quad \gamma_a = e_a^\mu \gamma_\mu, \quad (4.223)$$

那么就可以将标架表述中旋量场的作用量进一步地表示为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi), \quad (4.224)$$

对上述作用量求关于旋量场 $\bar{\psi}$ 的变分, 我们将得到

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.225)$$

这就是弯曲时空中的狄拉克方程。

我们也可以利用标架场将引力场自身的作用量表示出来。利用标架场可以将自旋联络表示为

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{ab} = & \frac{1}{2}e^{\nu a}(\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) - \frac{1}{2}e^{\nu b}(\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) \\ & - \frac{1}{2}e^{\rho a}e^{\sigma b}(\partial_\rho e_{\sigma c} - \partial_\sigma e_{\rho c})e_\mu^c, \end{aligned} \quad (4.226)$$

利用自旋联络可以将仿射联络表示为

$$\Gamma_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^{ab}e_{b\nu}. \quad (4.227)$$

进一步地, 利用自旋联络可以将曲率张量表示为

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu\omega_\nu^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac}\omega_{\nu c}^b - \omega_\nu^{ac}\omega_{\mu c}^b, \quad (4.228)$$

它与利用仿射联络定义的曲率张量之间的关系为

$$R_{\nu\sigma\lambda}^\mu = R_{\sigma\lambda}^{ab}e_a^\mu e_{\nu b}. \quad (4.229)$$

因此我们可以将引力场的作用量表示为

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e R. \quad (4.230)$$

这样我们就得到了标架表述下的引力理论，它与此前利用度规张量和仿射联络得到的引力理论是完全等价的。

4.6 史瓦西度规与黑洞

在前面的章节中，我们推导了爱因斯坦方程。这个方程的形式看起来是相对简洁的，但是曲率张量的定义中仍然包含着数个仿射联络，而仿射联络同样是以一种复杂的方式与度规张量关联起来的。因此如果我们把爱因斯坦方程展开成分量形式，那么我们最终得到的将是一个非常复杂的方程。事实上人类至今为止也只在极少数特别简单的系统中求出了度规的精确解，在大多数情况下我们只能依靠微扰论或者数值方法进行研究。本节中要介绍的史瓦西 (Schwarzschild) 度规就是其中最重要的一个精确解。

我们考虑一个静止的质点所产生的引力场。由于空间中除去该点之外没有任何物质，因此我们求解的实际上是在特定边界条件之下的无源度规场。在这个情况下，我们要求方程右端的能动张量为零

$$T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.231)$$

对爱因斯坦方程左右两端求迹（缩并）可以得到

$$R = -8\pi G T, \quad (4.232)$$

其中 $T = T^\mu_\mu$ 。从这个式子中可以看出，当能量动量张量为零时，空间的曲率标量 R 也等于零。因此，爱因斯坦方程简化为

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (4.233)$$

这被称为真空爱因斯坦方程。注意此时黎曼曲率张量 $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ 的各分量仍然可以不为零，因此真空爱因斯坦方程的解并不总是平直的，即没有物质的区域内也可能有引力场存在。

由于质点在空间中始终静止且在各个方向上都是相同的，因此我们可以设想这个系统的度规场将保持静态且各向同性。如果度规是静态各向同性的，那么我们将可以找到一组坐标 x^μ 使得度规不依赖于时间且满足旋转不变性。满足上述条件的最一般的度规就是

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = F(r) dt^2 - 2E(r) dt \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - D(r) (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 - C(r) d\mathbf{x}^2, \quad (4.234)$$

式中 $r = |\mathbf{x}|$ 。在球坐标中，上式可以表示为

$$d\tau^2 = F(r) dt^2 - 2rE(r) dt dr - r^2 D(r) dr^2 - C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.235)$$

作变量代换

$$t' = t + \Phi(r), \quad (4.236)$$

其中 $\Phi(r)$ 满足

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}, \quad (4.237)$$

那么度规将表示为

$$d\tau^2 = F(r) dt'^2 - G(r) dr^2 - C(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.238)$$

式中

$$G(r) = r^2 \left[D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right]. \quad (4.239)$$

如果我们进一步作变量代换

$$r'^2 = C(r)r^2, \quad (4.240)$$

那么度规将表示为

$$d\tau^2 = B(r')dt'^2 - A(r')dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.241)$$

式中

$$B(r') = F(r), \quad (4.242)$$

$$A(r') = \left[1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right] \left[1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr}\right]^{-2}, \quad (4.243)$$

这就是静态各向同性度规的一般形式。

由于静止质点的引力场应当是静态且各向同性的，因此我们可以将其度规一般性地表示为

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.244)$$

在这个例子中，我们要求在离质点足够远的地方，度规将趋于平直。这一点要求

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (4.245)$$

另外我们还要求在经典极限下引力要回到万有引力定律的形式，这要求

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{tt}(r) = 1 - \frac{2MG}{r}. \quad (4.246)$$

以上是真空爱因斯坦方程的边界条件。

接下来我们将在上述度规和边界条件下求解真空爱因斯坦方程。对于一般的静态各向同性度规来说，其度规张量的非零分量为

$$g_{tt} = -B, \quad g_{rr} = A, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta, \quad (4.247)$$

对其求逆可以得到

$$g^{tt} = -B^{-1}, \quad g^{rr} = A^{-1}, \quad g^{\theta\theta} = r^{-2}, \quad g^{\phi\phi} = r^{-2} \sin^{-2}\theta. \quad (4.248)$$

仿射联络与度规张量之间的关系为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (4.249)$$

因此其非零分量为

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2\theta}{A}, \quad (4.250)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \quad (4.251)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot\theta, \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'}{2B}, \quad (4.252)$$

式中 $A' = dA/dr$ 。里奇张量和仿射联络之间的关系为

$$R_{\mu\kappa} = -\partial_\kappa \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \partial_\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda, \quad (4.253)$$

因此其非零分量为

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA}, \quad (4.254)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A}, \quad (4.255)$$

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA}, \quad (4.256)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \quad (4.257)$$

真空爱因斯坦方程要求里奇张量的各个分量均为零, 即

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (4.258)$$

因此从上述各式中, 我们就可以求解出 $A(r)$ 与 $B(r)$ 的具体表达式。注意到

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = \frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0, \quad (4.259)$$

因此 $A(r)$ 与 $B(r)$ 之间满足关系

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B}, \quad (4.260)$$

即

$$A(r)B(r) = \text{const.} \quad (4.261)$$

因为在无限远处引力场要趋于平直, 因此

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1, \quad (4.262)$$

这样我们有

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (4.263)$$

换句话说, $A(r)$ 与 $B(r)$ 互为倒数。

将上式代入到 $R_{\theta\theta} = 0$ 这个方程中, 我们将得到

$$R_{\theta\theta} = 1 - B'(r)r - B(r) = 0, \quad (4.264)$$

即

$$\frac{d}{dr}(rB(r)) = 1, \quad (4.265)$$

上述方程的解为

$$rB(r) = r + \text{const.} \quad (4.266)$$

在经典引力理论中, 质点的引力势为

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (4.267)$$

我们要求上述度规在经典极限下要回到万有引力定律的形式, 这意味着

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{tt}(r) = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right). \quad (4.268)$$

因此

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (4.269)$$

相应地

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (4.270)$$

因此待求的度规张量为

$$\begin{aligned} d\tau^2 = & \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ & - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (4.271)$$

这就是真空中的静止质点所产生的引力场, 它被称为史瓦西度规。事实上可以证明, 史瓦西度规就是四维时空中真空爱因斯坦方程唯一的球对称解, 这一结论被称为伯克霍夫 (Birkhoff) 定理。

上述的度规中有两个奇点, 分别为 $r = 0$ 和 $r = 2GM$ 。其中 $r = 0$ 的奇点确实是一个真正的奇点, 但是 $r = 2GM$ 处的奇点仅仅是由于坐标系的选取而造成的。如果我们选择一个恰当的坐标系, 那么 $r = 2GM$ 处的奇异性将消失。不过, 虽然 $r = 2GM$ 处并非奇点, 但是它也有着

独特的物理意义。我们称 $r = 2GM$ 为史瓦西半径 R_s 。在公式中恢复光速 c ，我们可以将史瓦西半径表示为

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4.272)$$

我们称半径等于史瓦西半径的球面为视界，它有许多奇特的性质。

对于无穷远处的静止观测者来说，如果我们观察一个由静止开始下落的粒子或者一条沿径向传播的光线，那么我们会发现粒子或者光线将花费无穷长的时间才能抵达视界。事实上固有时和观测者参考系中时间的关系为

$$\Delta\tau^2 = -g_{00}\Delta t^2, \quad (4.273)$$

因此在史瓦西度规中， r 处的时间将变为

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}}. \quad (4.274)$$

在 $r = 2GM$ 附近，观测者参考系中的时间 Δt 将变得非常大。因此，在这样的观测者看来，粒子的运动将会变得越来越慢，最后几乎是停滞在了视界附近。⁹ 当然，这并不是说粒子真的不能够穿过视界。如果观测者随着粒子一起在史瓦西度规中下落，那么由于度规本身在视界处并无奇异性，因此这一过程实际上是能够在有限的时间内完成的。

与之相对应地，我们也可以考虑视界之内的粒子向视界之外的运动。在视界内部，我们有 $r < 2GM$ ，因此度规张量的符号变为

$$g_{00} > 0, \quad g_{11} < 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{33} > 0. \quad (4.275)$$

这意味着此时应当将坐标 t 视为空间，而将坐标 r 视为时间，原来的 r 与 t 之间的关系仿佛倒转过来了。现在视界之内的等 r 面变成了等时面，因此所有粒子的世界线最终都将收束于 $r = 0$ 的奇点。对于任何粒子来说，一旦进入视界内部，就无法摆脱掉落到奇点上的命运。也就是说，视界之内的粒子将不能逃出视界之外而被我们观测到。¹⁰

以上的讨论都是基于史瓦西度规进行的，我们假设所有的质量都集中在 $r = 0$ 这一点上。对于一个静止的球对称天体来说，其内部的度规由有源爱因斯坦方程刻画，因此与真空的史瓦西度规不同。但是在天体之外，度规仍然由真空爱因斯坦方程的静态球对称解刻画，因此它仍是一个史瓦西度规。如果天体的半径大于视界，那么视界就被包裹在天体之中，此时它只是一个普通天体。如果它的半径小于视界，那么视界将暴露在星体之外。如果我们站在视界之外观察整个系统，那么我们将不能从视界之内接收到任何信息，整个视界之内的区域将是一片漆黑。正因为如此，这样的天体被形象地称为“黑洞”。当然，如果我们考虑到量子效应，那么视界之内的粒子还可以通过霍金 (Hawking) 辐射的方式逃出黑洞。因此黑洞形成之后将会不断“蒸发”，最终消亡。

通常的黑洞都是非常致密的，因此天体的史瓦西半径相比于天体原本的尺寸来说通常是非常微小的。举例来说，太阳的史瓦西半径仅为 3 km 左右，而地球的史瓦西半径仅为 9 mm 左右。但如果天体的质量非常巨大，那么其核心的物质有可能无法抗衡巨大的引力作用而紧密地坍塌在一起，最终形成一个黑洞。许多星系的中心都存在着一个巨大的黑洞，它为整个星系提供了强大的引力，使得其结构保持稳定，不至于因为高速的旋转而逸散开来。

⁹ 严格来讲，这里所说的实际上是无限红移面而非视界。无限红移面指的是光子发生无限大红移的界面，而视界指的是观测者恰好能观测到（或者说恰好不能观测到）事件发生的界面。对于史瓦西度规来说，视界和无限红移面是重合的，对于其他度规来说可能有区别。

¹⁰ 巧合的是，通过经典力学的分析可以得出相同的结论。设一质量为 m 的粒子从质量为 M 的星球表面 r 处发射，其速度为光速 c 。若粒子恰好不能够逃逸到无穷远，那么根据经典力学公式有 $mc^2/2 = GMm/r$ ，解之即得 $r = 2GM/c^2$ ，这恰是史瓦西半径的数值。

4.7 宇宙学标准模型

我们接下来利用广义相对论研究整个宇宙的演化。如果单看局部，那么由爱因斯坦方程所主导的引力现象将是极为复杂的。甚至对于更加简单的牛顿引力来说，都广泛存在着诸如三体问题这样的混沌现象。因此，讨论整个宇宙的演化似乎是十分困难，甚至是不可能完成的任务。

然而，为了了解整个宇宙的演化过程，我们并不一定需要知道每一个天体究竟是如何运动的。这正如我们在讨论一团气体的性质时所遇到的情况一样，我们并不需要知道每一个气体分子究竟是如何运动的。尽管不同的分子之间相互作用的规律非常复杂，其演化过程也是混沌的，但是如果我们在远超分子间距的尺度上考察分子的运动，那么整团气体就可以被视为一个均匀、稳定的流体，这一体系的演化是相对比较简单。因此，在讨论宇宙学的时候我们也可以将具体天体之间的复杂相互作用完全略去，而只在大尺度上讨论星际物质的平均性质。

虽然宇宙在小尺度上的分布是极为不均匀的，但如果我们将目光放在超星系团级别的大尺度结构上（大约 $10^8 - 10^9$ 光年），那么整个宇宙的物质分布涨落就被“抹平”了。在这个尺度下，宇宙中的物质可以被视为是一团均匀地分布在宇宙之中的极为稀薄的“尘埃云”，只不过这“尘埃云”中的每一个“尘埃”都是一个星系团乃至超星系团。因此，我们就可以近似地将整个宇宙视为均匀而且各向同性的，这无疑极大地简化了我们的计算。宇宙间物质均匀各向同性的假设与广义相对论结合在一起，被称为宇宙学标准模型。

如果宇宙中的物质分布是均匀各向同性的，那么宇宙度规的空间部分在任意一个时刻都将是均匀且各向同性的。所谓均匀指的是宇宙中没有哪一点比其他点更特殊，而各向同性指的是宇宙中没有哪一个方向比其他方向更特殊。均匀和各向同性的空间具有最大的对称性质，这一点可以帮助我们确定度规所可能具有的结构。

现在考虑任意一个给定时刻 t 的宇宙流形的空间部分所对应的三维流形。¹¹ 由于流形具有各向同性，因此我们总可以找到一组坐标，从而将三维空间流形的度规表示为

$$ds^2 = A(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.276)$$

式中 $A(r)$ 是关于坐标 r 的任意函数，而

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.277)$$

为角向的各向同性度规。

可以设想，若空间是均匀且各向同性的，则流形中各点处的曲率标量应当处处相等

$$R = \text{const.} \quad (4.278)$$

我们还可以证明，对于这种均匀各向同性的空间来说，其黎曼曲率张量和里奇张量总可以表示为¹²

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad R_{ij} = 2Kg_{ij}, \quad (4.279)$$

式中 K 为一个常数，对于 n 维流形来说它与曲率标量之间的关系为

$$K = \frac{R}{n(n-1)}. \quad (4.280)$$

计算度规 (4.276) 所对应的仿射联络，我们得到其非零分量为

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A}, \quad (4.281)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta, \quad (4.282)$$

¹¹ 这里我们的讨论过于朴素了。实际上在广义相对论中，“时间”的概念是含糊的，我们总可以进行某些时空坐标变换，从而得到一系列新的三维超曲面。为了更确切地说出这里的时间坐标的概念，我们定义一个与整个宇宙流体静止的观测者，称为基本观测者，并将时空超曲面选取为基本观测者的局部洛伦兹参考系的同时面的汇合。这样，上述讨论中的含糊之处将被消除。

¹² 要证明这一点，需要利用基灵 (Killing) 矢量的方法。基灵矢量是保度规变换群的生成元，均匀各向同性空间就是具有最大的保度规变换群的空间。

因此里奇张量的非零分量为

$$R_{rr} = \frac{A'}{rA}, \quad R_{\theta\theta} = -\frac{1}{A} + 1 + \frac{rA'}{2A^2}, \quad R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (4.283)$$

上述表达式中 $A' = dA/dr$ 。

要使得度规满足均匀各向同性的条件

$$R_{ij} = 2Kg_{ij}, \quad (4.284)$$

函数 A 必须满足

$$\frac{A'}{rA} = 2KA, \quad (4.285)$$

$$1 + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{1}{A} = 2Kr^2. \quad (4.286)$$

求解上述两个方程，结果为

$$A(r) = \frac{1}{1 - Kr^2}, \quad (4.287)$$

因此我们就得到了均匀各向同性三维空间的度规的一般形式

$$ds^2 = \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + d\Omega^2. \quad (4.288)$$

宇宙流形可以视为是一个均匀各向同性的空间流形随时间的不断演化，因此在恰当地选取坐标系后，我们可以将其度规表示为

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (4.289)$$

式中 $a(t)$ 是一个随时间变化的函数。特别地，若我们适当地选取 r 和 $a(t)$ 的形式，则度规张量可以进一步简化为

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (4.290)$$

式中

$$k = \text{sgn}(K) = \begin{cases} 1, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \\ -1, & K < 0 \end{cases}. \quad (4.291)$$

上述度规被称为 FRW(Friedmann-Robertson-Walker) 度规，这就是宇宙学标准模型所预言的宇宙度规。

FRW 度规中的参数 $k = 1, 0, -1$ 分别代表宇宙的曲率为正、零和负，此时宇宙流形的空间部分分别为三维超球面、三维平直空间和三维超双曲面，对应于封闭宇宙、平坦宇宙和开放宇宙。我们称 $a(t)$ 为宇宙的尺度因子，它刻画了宇宙的弯曲程度，并且随着时间的推移而不断演化。可以验证宇宙流形空间部分的曲率为

$$R = \frac{k}{a^2}, \quad (4.292)$$

因此尺度因子越大，宇宙就越平坦。特别地，若我们考虑的是正曲率宇宙，则宇宙将表现为有限但是无边的三维超球面（可以类比于嵌入三维时空中的二维球面），其体积可以表示为

$$V = 2\pi^2 a^3, \quad (4.293)$$

因此此时的尺度因子 $a(t)$ 可以被视为宇宙的“半径”。

为利用爱因斯坦方程给出宇宙的演化，我们还需要给出宇宙间物质的能量动量张量。能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 的各个分量具有如下的物理意义： T_{00} 为能量密度， T_{i0} 为动量密度， T_{0i} 为能流密度， T_{ij} 为空间中的应力张量。实际宇宙间的物质是非常稀薄的，因此我们可以将其视为无粘性（但可压缩）的理想流体。如果流体处于平直空间中，且其速度为零，那么其能量动量张量可以表示为

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p), \quad (4.294)$$

其中 p 为流体的压强, ρ 为流体的密度。这意味着平直空间中静止流体的能量密度为 ρ , 动量密度为 0, 在空间中只有正压力 p , 而没有剪应力。

上述能量动量张量可以等价地表示为

$$T_{\mu\nu} = p\eta_{\mu\nu} + (p + \rho)e_\mu^0 e_\nu^0, \quad (4.295)$$

式中 $e_\mu^0 = (1, 0, 0, 0)$ 为时间方向上的单位矢量。若流体以速度 u_μ 运动, 则在做洛伦兹变换后, 时间基矢 e_μ^0 将变为 u^μ , 因此其能量动量张量将变为

$$T_{\mu\nu} = p\eta_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu. \quad (4.296)$$

将上式推广到弯曲时空, 我们得到

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu, \quad (4.297)$$

这就是引力场中以速度 u^μ 运动的流体的能量动量张量。如果度规张量 $g_{\mu\nu}$ 和流体的速度 u_μ 在时空中的各点处各不相同, 那么流体的能量动量张量在各点处也是各不相同的。

接下来我们给出宇宙度规所满足的方程。FRW 度规的非零分量为

$$g_{tt} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.298)$$

仿射联络的非零分量为

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2, \quad (4.299)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.300)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \quad (4.301)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (4.302)$$

里奇张量的非零分量为

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (4.303)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad R_{\phi\phi} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta. \quad (4.304)$$

曲率标量为

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (4.305)$$

在上述表达式中, $\dot{a} = da/dt$ 。

将流体的能量动量张量带入到爱因斯坦方程中, 我们就可以求出宇宙度规的演化。在 FRW 度规下, 爱因斯坦方程的时间分量给出

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p), \quad (4.306)$$

而其空间分量给出

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (4.307)$$

整理上述两个方程, 我们得到

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (4.308)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.309)$$

式中 $\dot{a} = da/dt$ 。上述两个方程被称为弗里德曼 (Friedmann) 方程, 它们分别给出了宇宙膨胀的加速度和速度的表达式。

以上只有两个方程，但是却存在着 a, ρ, p 三个未知量。为求解宇宙的演化，我们还需要一个预先给定的宇宙物质的密度和压强之间的关系

$$p = p(\rho), \quad (4.310)$$

这个方程被称为状态方程，它与物质的具体形式有关。联立求解上述方程，我们就可以得到宇宙的度规张量随时间的演化。由于宇宙间的物质极为稀薄，因此我们假设密度和压强呈正比

$$p = w\rho, \quad (4.311)$$

式中比例系数 w 称为物态参数。对于非相对论性的尘埃粒子有 $w = 0$ ，对于辐射有 $w = 1/3$ ，对于宇宙学常数有 $w = -1$ 。实际的宇宙是由几种不同的物质组分所构成的，随着宇宙尺度因子的演化，在不同时期将由不同的物质组分占据主导作用。

前面我们讨论了宇宙学标准模型所预言的宇宙流形可能的演化，但是我们的宇宙究竟处于什么状态，还是要通过实验来判断。在天文学中，我们主要通过天体光谱的红移来测量尺度因子的变化。如果在光传播的过程中宇宙发生了膨胀，那么光的波长就会变得更长，在时刻 t 的波长正比于此时刻的尺度因子 $a(t)$ 。设以波长 λ_0 从天体中发出的光在地球上被接收时的波长为 λ 。定义红移因子 z 为波长的变化量与发射时波长的比值，它可以用尺度因子表示为

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{a(t) - a(t_0)}{a(t_0)}. \quad (4.312)$$

如果 t 和 t_0 之间的差距相比于宇宙尺度来说是比较小的，假设在这段时间内尺度因子的变化相对于自身是比较小的，那么红移因子可以表示为

$$z = \Delta t \frac{\dot{a}}{a} = dH_0, \quad (4.313)$$

这被称为哈勃 (Hubble) 定律，式中 d 为光线的发射点和观测点之间的距离 $H = \dot{a}/a$ 称为哈勃常数。天文学观测验证了哈勃定律的结论，人们发现宇宙中的天体普遍都发生了红移，距离我们越远的天体红移的程度越大，且其红移因子与距离成正比。若按经典的多普勒效应来理解，那么这意味着宇宙中所有的天体都在离我们远去，并且距离我们越远的天体远离我们的速度就越快。这一现象说明了宇宙本身正在不断膨胀，就像“吹气球”一样使得宇宙中的所有天体都不断地相互远离。

如果我们进一步地让时间流逝的方向相反，那么随着时间的推前，宇宙会不断收缩。这样不断地向前追溯，最终可以找到一个时刻，宇宙的尺度因子在这一时刻收缩到零。换句话说存在着某个时刻，宇宙从一个“奇点”开始膨胀，最终得到了我们现在的这个宇宙，这被称为宇宙大爆炸。¹³ 目前的天文观测认为，宇宙从大爆炸至今已经过去了约 137 亿年。现今宇宙中仍然可以观测到近乎于各向同性的 2.7 K 黑体辐射，称为宇宙微波背景辐射，这就是当初宇宙大爆炸产生的高温光子在漫长的时间里逐渐冷却所留下的遗迹。

对于我们的宇宙来说，它究竟是封闭的、平坦的还是开放的？这可以通过观测宇宙中的物质密度来判断。定义临界密度为

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (4.314)$$

宇宙中密度参数为实际密度与临界密度的比值

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho. \quad (4.315)$$

利用临界密度，我们可以将弗里德曼方程改写为

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (4.316)$$

¹³需要说明的是，这一“奇点”是从度规上说的，它并不一定意味着宇宙本身一定是有限的。尽管宇宙的曲率、物质密度和在温度这一奇点处为无穷大，但是只有在 $k > 0$ (封闭宇宙) 的情况下，宇宙在奇点处的体积才为零，其他情况 (平坦宇宙、开放宇宙) 在奇点处的体积都是无穷大。我们不当过分地从字面上理解这一“大爆炸”过程。

根据上述讨论可以看出, 宇宙的结构可以由 Ω 的取值来确定。若 $\Omega > 1$, 则 $k = 1$, 宇宙是封闭的; 若 $\Omega = 1$, 则 $k = 0$, 宇宙是平坦的; 若 $\Omega < 1$, 则 $k = -1$, 宇宙是开放的。天文观测指出, 目前宇宙的密度参数非常接近于 1, 这说明在相当大的程度上, 我们可以将宇宙视为平坦的。

然而若我们把这一结论推回到宇宙极早期, 则会产生一些困难。我们将弗里德曼方程进一步改写为

$$1 - \frac{1}{\Omega} = \frac{3k}{8\pi G\rho a^2}. \quad (4.317)$$

要想得到密度参数 Ω 随着尺度因子的变化, 我们需要先求出能量密度 ρ 随尺度因子的变化。考虑流体守恒方程的零分量

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.318)$$

注意这一方程并不独立于两个弗里德曼方程和状态方程。对这一方程求积得到

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (4.319)$$

因此对于尘埃来说有 $\rho \propto a^{-3}$, 对于辐射来说有 $\rho \propto a^{-4}$ 。不论是哪种情况, 随着尺度因子的增大, 密度参数 Ω 与 1 的偏离都会越来越大。从宇宙早期到现在, 宇宙的尺度因子已经膨胀了几十个量级。考虑到目前的密度参数仍然与 1 处于同一个量级, 因此在宇宙早期密度参数与 1 的偏差应当只发生在小数点后几十位的地方。要想得到这一结果, 宇宙的初始状态需要经过极为细致的微调, 而这是极为不自然的。

另一个困难来自于宇宙的视界。由于光速是有限的, 因此宇宙中并不是所有区域的光线都可以到达观测者。从宇宙大爆炸开始到 t 时刻, 光所能够传播的最远距离为

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{1}{a(t')} dt'. \quad (4.320)$$

这被称为粒子视界, 视界之内就是在该时刻可能与该点产生因果关联的所有区域。随着时间的推前, 视界的尺度缩小的要快于宇宙的膨胀速度, 因此在宇宙早期, 各点之间是没有因果关联的, 也就无法达到热平衡的状态。但我们知道, 宇宙的早期是高度均匀且各向同性的。如果各点之间没有因果关联, 那么应当如何解释这种高度的均匀各向同性呢?

我们当然可以相信宇宙早期的初始条件就是如此: 其临界密度确实和 1 之多只有小数点后几十位的偏差 (或者干脆就是精确地等于 1), 没有因果关联的各点之间确实是高度各向同性的。但我们还是希望能够得到一个更加自然的解释, 即存在着某种物理过程能够从一个较为普遍的初始条件出发, 自然地得到这些结果。暴胀理论假设在宇宙极早期曾经有一个快速膨胀的阶段, 尺度因子在约 10^{-30} s 的极短时间内迅速膨胀了约 10^{30} 倍。经历这一暴涨过程之后, 宇宙物质密度被迅速地稀释到极为接近于临界密度的状态, 原来可能不很平直的空间也变得非常平直。并且在这一段时间内, 宇宙从一个极小的有因果关联的区域迅速膨胀到看似相互没有关联的区域, 因此宇宙间各点的各向同性得以保留。同时初始状态的极小涨落为后续星系的演化提供了微小各向异性的“种子”, 这一涨落在定量上可以与天文观测相符合。由此我们看到, 暴胀理论为平坦性困难和视界困难提供了较为合理的解释。但我们对于暴涨过程的认识仍然是比较有限的, 我们不知道暴涨产生的原因和机制是什么, 也缺乏更加直接的关于暴涨的观测证据。

根据方程 (4.308) 可以看出, 如果物质的密度和压强满足¹⁴

$$\rho + 3p > 0, \quad (4.321)$$

那么尺度因子的二阶导数 \ddot{a} 一定小于零。对于通常的物质来说, 这一条件总是能够得到满足的。上述结论或许不难理解, 因为物质之间总是呈现出吸引的相互作用, 因此宇宙要么是在减速膨胀, 要么是在加速收缩。然而现代的天文学观测给出了与之不相符的结果。天文观测结果显示, 我们的宇宙正在加速膨胀。这说明宇宙中存在着额外的排斥力量来推动宇宙膨胀, 其效果甚至超过了物质之间的引力。因此, 前文所讨论的宇宙模型必须加以修改。物理学家们假设宇宙中存

¹⁴更一般地, 这一条件可以表示为对任意以 t^μ 运动的观测者都有 $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + T/2 \geq 0$, 这被称为主能量条件。

在着某种暗能量，它为宇宙的加速膨胀提供动力。这些暗能量不参与电磁作用、强作用和弱作用，因此我们无法用通常的手段观测到它们，而只能看到它们对引力的贡献。

目前我们还不知道暗能量是什么。一个可能的候选者是将引力作用量修改为

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \quad (4.322)$$

式中 Λ 被称为宇宙学常数。修改之后的爱因斯坦方程将表示为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.323)$$

与标准的爱因斯坦方程相比，这个方程中多了一个宇宙学常数项 $\Lambda g_{\mu\nu}$ ，它类似于弥散在空间中的“能量密度”。这一项将为整个宇宙提供一个“负压强”，因此将使得整个宇宙加速膨胀。目前的天文观测尚未发现暗能量的密度在宇宙演化过程中发生了明显的变化，因此宇宙学常数项至少是真实的暗能量的一个近似。人们猜想暗能量可能来自于量子场论的真真空能，不过理论预言的结果与实验测得的结果相差了几十个数量级，目前尚不知道如何解决这一困难。

宇宙中除了普通物质和暗能量以外，还存在着暗物质。暗物质只参与引力相互作用，而几乎不参与其他的相互作用。因此除了天文学观测之外，我们几乎不能观测到其效应。暗物质存在的最直接证据是星系的旋转曲线。通过测量距离星系中心不同位置的天体绕星系中心的旋转速度，我们可以推测出星系中物质密度的分布。结果发现在距离星系中心较远的地方，天体绕中心转动的速度基本不随距离变化，这意味着星系中物质密度的分布要明显地高于星系中各种天体以及尘埃物质的贡献。多出来的这一部分不参与其他相互作用，不能通过通常的天文手段直接观测到，它们就来自于暗物质的贡献。

根据天文观测的结果，目前宇宙中普通物质约占 5%，暗物质约占 27%，暗能量约占 68%。随着宇宙的膨胀，各组分所占的比例可能会发生变化。目前我们还不知道暗物质是什么，一些可能的候选者为轴子、惰性中微子、弱相互作用大质量粒子、额外维、超对称、原初黑洞、晕族大质量致密天体、引力修正等。然而上述所有候选者的最佳参数区间几乎都被实验所排除。可以说迄今为止，寻找暗物质的努力仍然是失败的。

4.8 习题

1. 利用广义协变性条件，将梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符推广到弯曲空间中。
2. 沿曲线的协变导数
 - (a) 设有一条曲线 $x^\mu(\lambda)$ ，给出逆变矢量场 A^μ 沿曲线的协变导数的恰当定义，并证明该协变导数确实是一个张量。
 - (b) 给出任意张量沿曲线的协变导数定义。
 - (c) 曲线的协变导数为流形上的矢量提供了平行的定义。如果矢量沿曲线的协变导数为零，则称矢量在这条曲线上处处平行。如果曲线的切矢量处处平行，则称该曲线为测地线，它是平直空间中直线的推广。给出测地线所满足的方程，并证明弯曲时空两点间测地线最短。

3. 微分形式

微分形式的定义请参考相关的微分几何专著，我们在后文中也对此有所介绍。

- (a) 证明微分形式的外积和霍奇 (Hodge) 对偶运算具有如下的性质

$$d(dA) = 0, \quad *(*A) = (-1)^{s+p(n-p)} A,$$

式中 s 为度规张量中负本征值的个数。

- (b) 利用微分形式, 给出三维时空中标量梯度、矢量散度、矢量旋度的表达式。
- (c) 在 n 维流形 M 上可以定义关于 n 形式 A 的积分。证明斯托克斯定理

$$\int_M dA = \int_{\partial M} A,$$

式中 M 为一个 n 维流形, M 的边界 ∂M 为一个 $n-1$ 维流形; A 为一个 $(n-1)$ 形式, dA 为一个 n 形式。

- (d) 给出牛顿-莱布尼兹公式、高斯公式和斯托克斯公式在流形上的推广。
- (e) 利用微分形式, 写出麦克斯韦方程的表达式。
- (f) 利用微分形式, 写出规范理论的作用量。

4. 李导数

李导数的定义请参考相关的微分几何专著。

- (a) 证明李导数的线性性 $\mathcal{L}_{\hat{V}}(a\hat{T} + b\hat{S}) = a\mathcal{L}_{\hat{V}}\hat{T} + b\mathcal{L}_{\hat{V}}\hat{S}$, $\mathcal{L}_{a\hat{V}+b\hat{W}}\hat{T} = a\mathcal{L}_{\hat{V}}\hat{T} + b\mathcal{L}_{\hat{W}}\hat{T}$ 。
- (b) 证明李导数的莱布尼兹法则 $\mathcal{L}_{\hat{V}}(\hat{T} \otimes \hat{S}) = (\mathcal{L}_{\hat{V}}\hat{T}) \otimes \hat{S} + \hat{T} \otimes (\mathcal{L}_{\hat{V}}\hat{S})$ 。
- (c) 证明李导数满足 $\mathcal{L}_{\hat{V}}\hat{U} = [\hat{V}, \hat{U}]$ 。
- (d) 在定义了联络的情况下, 给出张量的协变导数与李导数之间的关系。

5. 基灵矢量

- (a) 若流形的度规张量在无穷小变换 $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}$ 下不变, 则称 ξ^{μ} 为流形的基灵矢量。证明基灵矢量满足 $\nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu} = 0$, 这被称为基灵方程。
- (b) 证明若时空中存在基灵矢量, 则可以利用这一基灵矢量定义守恒量。
- (c) 证明基灵矢量场的对易子仍是基灵矢量场。
- (d) 证明基灵矢量场满足雅可比恒等式, 这说明基灵矢量场构成了李代数。
- (e) 证明基灵矢量场满足 $\nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}\xi^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}\xi^{\nu}$, $\xi^{\lambda}\nabla_{\lambda}R = 0$ 。
- (f) 证明一个 n 维流形中最多包含 $n(n+1)/2$ 个线性独立的基灵矢量场。
- (g) 证明若一个流形中包含 $n(n+1)/2$ 个线性独立的基灵矢量场, 则其黎曼曲率张量必然可以表示为 $R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\lambda\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\rho\sigma})$, 式中 K 是一个常数。

6. 利用等效原理证明引力场中时间流逝的速度会变慢, 并求出由于这一效应引起的引力红移。
7. 考察粒子在引力场中的运动。通过将测地线方程展开至更高阶的方式, 给出广义相对论相比于经典引力的修正, 这被称为后牛顿近似。

8. 弱场近似与引力波

- (a) 当引力场很弱的时候, 设度规张量为 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, 其中 $h_{\mu\nu}$ 是一个小量。试将爱因斯坦方程用 $h_{\mu\nu}$ 表示出来, 并保留到线性项。
- (b) 证明上述线性爱因斯坦方程在“规范变换” $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\zeta_{\nu} - \partial_{\nu}\zeta_{\mu}$ 下不变, 式中 ζ_{μ} 是一个任意的矢量场。
- (c) 作代换 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h/2$, 其中 $h = h^{\mu}_{\mu}$, 试将线性爱因斯坦方程用 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 表示出来。
- (d) 在弱场近似下, 求出牛顿引力势与度规张量之间的关系。

- (e) 在弱场极限下, 求出引力场扰动 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 所满足的方程, 并证明存在着以光速传播的引力波。
- (f) 计算扰动的格林函数。当某质量为 M 的天体以 $x^\mu(\tau)$ 的世界线进行运动时, 写出此时的度规。
- (g) 计算双星系统的引力辐射, 估计该引力辐射所损失的能量。

9. 史瓦西度规中的测地线

- (a) 写出史瓦西度规中的测地线方程。
- (b) 给出在史瓦西度规中运动粒子能量和动量的守恒方程。
- (c) 给出广义相对论相比于牛顿引力的修正, 利用微扰法求出粒子轨道的进动效应。
- (d) 考虑一个初速度为零、在史瓦西度规中做自由下落的粒子, 证明粒子需要花费无穷长的时间才能到达史瓦西半径处。
- (e) 计算在半径 R 处, 沿径向发射的粒子的逃逸速度。
- (f) 计算光子在史瓦西度规中的偏折。

10. 广义相对论精确解

- (a) 求出平直时空在任意变速参考系中的度规。
- (b) 考虑具有宇宙学常数的真空爱因斯坦方程, 求出其“平直”度规, 即在宇宙学常数 $\Lambda \rightarrow 0$ 时将回到闵可夫斯基时空的度规。上述 $\Lambda > 0$ 以及 $\Lambda < 0$ 的解分别称为德西特 (de Sitter) 时空和反德西特时空。
- (c) 求出任意维时空中的史瓦西度规。
- (d) 考虑一个静止的理想流体球, 球内流体的密度处处相等, 其表面压强为零。求出流体球内部的度规, 这被称为史瓦西内部解。
- (e) 写出引力场和电磁场耦合的球对称静态度规的一般形式, 并计算出带电球对称黑洞的度规, 它被称为莱斯纳 (Reissner)-努德斯特伦 (Nordstrom) 度规。
- (f) 写出引力场轴对称静态度规的一般形式, 并求出旋转黑洞的度规, 它被称为克尔 (Kerr) 度规。
- (g) 写出引力场和电磁场耦合的轴对称静态度规的一般形式, 并计算出带电旋转黑洞的度规, 它被称为克尔-纽曼 (Newman) 度规。

11. 黑洞

- (a) 证明奇点定理: 宇宙中一定存在奇点。¹⁵
- (b) 证明黑洞无毛定理: 稳定的黑洞必是轴对称的, 且其度规由克尔-纽曼度规来描述。换句话说, 黑洞的性质可以由其质量、角动量以及电荷这三个物理量唯一地确定下来。
- (c) 证明黑洞第零定律: 稳态黑洞视界上表面引力 κ 是一个常数。
- (d) 证明黑洞第一定律: 给定具有质量 M 、电荷 Q 、角动量 J 的一个稳态黑洞, 如果它被微扰后稳定下来后, 质量、电荷、角速度分别变成 $M + \delta M, Q + \delta Q, J + \delta J$, 那么

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$$

其中 κ, Φ_H, Ω_H 分别为黑洞视界处的表面引力、电表面势和角速度。

¹⁵ 宇宙监督假设指出, 奇点一定被包裹在世界之中, 因此它不会对外面的时空结构产生破坏。但是这一假设至今没有得到证明。

- (e) 证明黑洞第二定律：黑洞视界的面积是时间的非减函数。
- (f) 证明黑洞第三定律：黑洞视界上的表面引力无法在有限的时间内变为零。
- (g) 将上述黑洞定律与热力学定律作比较，给出黑洞熵与黑洞温度的表达式。
- (h) 利用黑洞热力学的方法，讨论黑洞自发向外进行的辐射，这被称为霍金辐射。

12. 恒星

- (a) 静态球对称恒星可以被视为是理想流体，其度规可以被看作是可以被看作是静态球对称度规。试给出星体的压强和密度随半径的变化以及空间中的引力场所满足的方程。
- (b) 证明球对称星体外的引力场等效于星体的所有物质处于球心的情况。这一点与牛顿引力是相同的。
- (c) 给出星体处于稳定平衡的条件。
- (d) 多方星体的状态方程为 $p = K\rho^\gamma$ ，试求解星体的结构。
- (e) 考虑一个由电子简并压维持平衡的天体，称为白矮星，计算其质量的极限。这被称为钱德拉塞卡 (Chandrasekhar) 极限。
- (f) 中子星的状态方程为 $p = \rho/3$ ，试求解星体的结构，并计算由于中子简并压所能够达到的质量极限。

13. 宇宙学标准模型

- (a) 给出哈勃定律的更高阶修正，说明它与宇宙膨胀加速度之间的关系。
- (b) 如果宇宙膨胀作用主要是由稀薄的尘埃产生的，求出尺度因子随时间的演化。
- (c) 如果宇宙膨胀作用主要是由辐射产生的，求出尺度因子随时间的演化。
- (d) 如果宇宙膨胀作用主要是由宇宙学常数产生的，求出尺度因子随时间的演化。
- (e) 考虑包含物质和暗能量两组分的宇宙学标准模型，讨论各种不同情况下，宇宙尺度因子演化的定性性质。
- (f) 给出宇宙年龄和事件视界的计算方法。

14. 试给出广义相对论的哈密顿表述。

15. 将爱因斯坦方程中的空间部分与时间部分明显地分离开来，并给出数值求解爱因斯坦方程的方法。

16. 暗能量模型

- (a) 证明宇宙学常数的物态参数为 -1 。
- (b) 假设暗能量是由一个标量场推动的，其拉格朗日密度为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right).$$

试证明这样一个标量场将能够为宇宙提供一个排斥的相互作用，并计算其物态参数的取值。

- (c) 假设暗能量是由一个标量场推动的，其拉格朗日密度为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right).$$

试证明这样一个标量场将能够为宇宙提供一个排斥的相互作用，并计算其物态参数的取值。

- (d) 考虑在宇宙极早期时由标量场 ϕ 推动的暴涨过程。假设势函数 $V(\phi)$ 在 $\phi = 0$ 附近非常平坦且取极大值，在 ϕ 较大的地方则会较为迅速地衰减。试证明：在势函数 $V(\phi)$ 非常平坦的地方，宇宙将近似以指数形式暴涨；如果 ϕ 场演化到了 $V(\phi)$ 非常陡峭的地方，则它将不能够支撑暴涨的继续进行， ϕ 场随后落入极小值点，暴涨过程结束。

第五章 量子力学

在本章中除 5.11 一节外的其余部分，我们将采用国际单位制，而在 5.11 节中将采用自然单位制。

5.1 电子双缝干涉

我们接下来将回到非相对论极限，考察经典力学在微观领域的拓展。在经典力学中，粒子运动的路径将使得系统的作用量取极值，即

$$\delta S[x(t)] = 0. \quad (5.1)$$

在量子力学之中，这条原理将被修改，至于如何修改要根据实验结果来决定。

我们从最经典的电子双缝干涉实验开始讲起。现在设想在一个薄板上刻划两条非常接近的狭缝，然后用一束电子去照射这两条狭缝。为了观测电子穿过狭缝后的行为，我们可以在狭缝后放置一块荧光屏。当电子击中荧光屏时，将会在屏上产生光斑，如图 5.1 所示。由于电子的初始条件有一定随机性，因此我们可以设想电子将有一定的概率穿过这条狭缝或者那条狭缝，最终在荧光屏后接收到的将是两条锐细的亮线，与这两条狭缝的形状大体上是相同的。

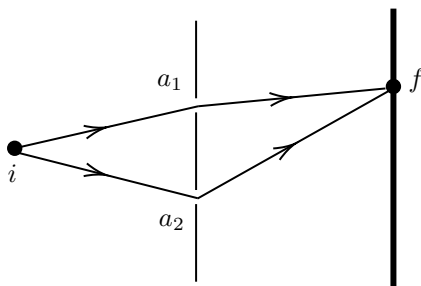


图 5.1: 电子的双缝干涉。

然而，实验得出了与之完全不同的结果。我们发现，在荧光屏上得到的是一系列明暗交替的条纹，这实际上与波的干涉现象相同。为了形象地思考一下这个结果，让我们设想一列水波穿过两个接近的孔洞。当水波穿过这两个孔洞时，将会在孔洞处形成两列新的水波。因此在狭缝后方的区域，两列水波将会相互叠加。有些地方波峰和波峰相遇，叠加得到了一个更大的波峰；有些地方波峰和波谷相遇，将原来的水波抵消掉了。因此，如果我们在狭缝后放上一个接收屏，那么将会发现有些地方振动得很剧烈，有些地方几乎没有振动。对于光来说也是一样的，波峰和波峰相遇处振幅更大，因此显得明亮；而波峰和波谷相遇处振幅更小，因此显得昏暗。这样就产生了光屏上所看到的明暗相间的现象。

如果真的是这样的话，那么我们就应当承认，电子的运动与波的运动有某种相似之处。为此我们设想电子也有一个与波的振幅相类似的量，我们称之为“几率振幅” K 。光波在光屏上接收到的信号强度正比于其能量密度，也就是振幅模值的平方；因此我们设想电子在荧光屏上接收到

的信号强度正比于电子的几率密度 P ，它应当等于几率振幅模值的平方

$$P = |K|^2, \quad (5.2)$$

这里将其定义为模值的平方是因为几率振幅如同波的振幅一样，可以取一个复数值。

我们设电子从电子发射器 i 运动到荧光屏 f 处的几率振幅为 $K(f; i)$ ，相应的几率密度为 $P(f; i)$ 。图 5.1 展示了电子运动的两条可能的路径。如果电子按照经典粒子的方式运动，那么在荧光屏 f 处接收到的电子几率密度 $P(f; i)$ 将表示为电子分别通过两条狭缝 a_1, a_2 的几率密度 $P_{a_1}(f; i)$ 与 $P_{a_2}(f; i)$ 之和，也就是

$$P(f; i) = P_{a_1}(f; i) + P_{a_2}(f; i) = |K_{a_1}(f; i)|^2 + |K_{a_2}(f; i)|^2. \quad (5.3)$$

式中的下标代表电子经过某条狭缝的几率振幅或几率密度。而如果电子按照波的方式来运动，那么电子几率密度 $P(f; i)$ 将表示为总几率振幅 $K(f; i)$ 的平方，而总几率振幅将表示为两条狭缝几率振幅 $K_{a_1}(f; i), K_{a_2}(f; i)$ 之和

$$P(f; i) = |K(f; i)|^2 = |K_{a_1}(f; i) + K_{a_2}(f; i)|^2, \quad (5.4)$$

换句话说，电子的运动就像波一样弥散在整个空间之中，同时“穿过”了两条狭缝，在狭缝后方相遇，然后自己与自己相叠加。叠加后的振幅作为总振幅反映在光屏上，才得到了电子双缝干涉中的实验结果。¹ 如果将上式进一步展开，可以发现有形如 $|K_{a_1}K_{a_2}|$ 的干涉项，正是这样的干涉项导致了条纹的产生。

从上面的例子中可以看到，微观粒子的运动方式与经典力学中的方式差别很大，因此我们需要新的运动学量来刻画粒子的运动。在量子力学中，描述粒子的运动并不能用经典力学中的位移函数 $x(t)$ ，而要代之以前述的几率振幅 $K(f; i)$ 。我们也可以明显地写出几率振幅中的时间分量 $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ ，它代表着 t_i 时刻处于 x_i 的粒子，在 t_f 时刻处于 x_f 的几率振幅。同经典力学中的位移函数一样，找到了粒子的几率振幅，我们也就获知了粒子的运动信息。因此，接下来的工作就是给出粒子几率振幅的表达式，以及给出求解几率振幅的方法。

5.2 路径积分

我们尚不知道几率振幅的计算方法，不过我们已经有了一个实验结果，那就是在双缝干涉之中，总的几率振幅等于两个狭缝贡献的几率振幅之和

$$K(f; i) = K_{a_1}(f; i) + K_{a_2}(f; i), \quad (5.5)$$

这里的下标代表着某条狭缝的贡献，换句话说就是传播途中经过某点的几率振幅的贡献。

现在我们来将这个实验结果一般化。如果我们在薄板上打若干个孔洞 a_i ，那么最终的振幅应当是将这些点的贡献全部累加起来

$$K(b; a) = \sum_{a_i} K_{a_i}(f; i). \quad (5.6)$$

如果我们进一步在光源和光屏上插入第二块薄板，并同样在其上打若干个孔洞，将它们分别记为 b_j ，那么最终光屏上的振幅应当是将所有通过 a_i 和 b_j 的振幅全部累加起来，如图 5.2 所示

$$K(f; i) = \sum_{a_i b_j} K_{a_i b_j}(f; i). \quad (5.7)$$

我们来思考这样一个问题：假如我们在电子发射器和荧光屏之间插入许多块薄板，并且在每个薄板上都打上许多个孔洞，那么荧光屏上的振幅应当如何表示呢？其结果当然是将电子通过所有薄板、所有孔洞的振幅全部累加起来。而如果我们在电子发射器和荧光屏之间插入假想的无数

¹也许我们可以争辩说，众多电子的集体行为才体现得像一个波一样，而并非单个的电子具有波动性。然而即使是在做实验的时候每次只向狭缝中发射一个电子，在累积了足够多的实验数据后仍然可以看到同样的干涉条纹。因此，波动性是单个粒子的效应，而不是众多粒子的集体效应。

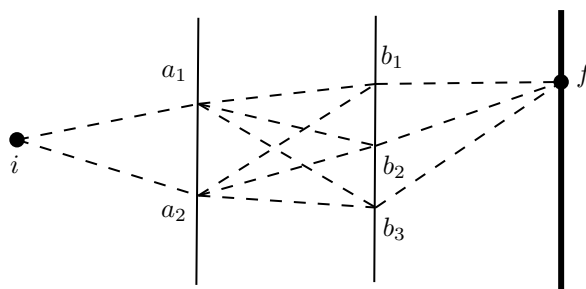


图 5.2: 插入第二块薄板后的干涉。

块薄板，并且在薄板上的每一个点都打上假想的孔洞（这实际上就是什么都没有！），那么荧光屏上的振幅将是电子发射器和荧光屏之间所有可能的路径累加起来，如图 5.3 所示。我们可以将之形式地记为

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{x(t) \in i \rightarrow f} K[x(t)], \quad (5.8)$$

式中 $K[x(t)]$ 代表每条路径对几率振幅的贡献，我们已明显地写出了初末状态的位置和时间。考虑到路径的选取是一个连续的过程，因此我们也可以形式上将几率振幅对所有路径的累加写成积分的形式

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}[x(t)] K[x(t)], \quad (5.9)$$

式中 $\mathcal{D}[x(t)]$ 代表形式上地对从 i 到 f 的所有可能的路径进行积分（求和），我们称之为路径积分。这就是粒子几率振幅的表达式。

关于粒子的路径积分，有两点值得做额外的说明。前文中薄板上的孔洞只是一个形象的理解，实际上路径可以选取的范围比这里的薄板所限制的还要更大。比如说，电子的路径可以选取某种“折返”的形式，也可以绕电子发射器一圈后再投射到光屏上。这些路径都是可能存在的，它们也确实对光屏上的总振幅有贡献。一个更恰当的说法是在时空中不同的时间处“插入”一系列“带有孔洞的薄板”，限制电子在某时刻只能通过某些位置，之后再把所有路径的贡献累加起来。另外这里所说的“所有路径”并未对电子的运动速度作出限制，这导致电子可以以任意大的速度运动，从而导致光锥之外也可能有一个非零的几率振幅。这一点似乎会违反相对论，不过它并不会产生困难，因为我们在这里本来就没有考虑任何的相对论效应。这正如牛顿力学同样可以超光速一样，它不会在理论内部产生任何的矛盾。

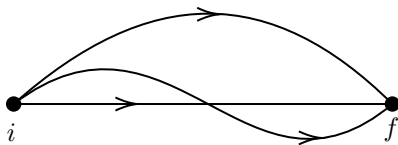


图 5.3: 自由粒子在空间中的运动。

我们目前还不知道每条路径对振幅的贡献 $K[x(t)]$ 是多少，不过由于它要在经典极限下回到最小作用量原理，因此我们设想这个贡献应当可以表示为系统作用量的函数。如果我们将路径拆成两段，那么总路径所贡献的几率振幅将可以表示为两段路径所贡献的几率振幅之积

$$K_{12} = K_1 K_2, \quad (5.10)$$

而总路径的作用量将可以表示为两段路径作用量之和

$$S_{12} = S_1 + S_2. \quad (5.11)$$

因此我们可以设想某段路径所贡献的几率振幅和该路径的作用量之间的关系为

$$K[x(t)] \sim e^{iS[x(t)]}, \quad (5.12)$$

因为只有指数函数可以满足上述关系。最终我们将路径 $x(t)$ 贡献的振幅选取为

$$K[x(t)] = e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (5.13)$$

式中 i 为虚数单位，它使得系统的演化是么正的（保持几率守恒），而 \hbar 为一个具有作用量量纲的参数，称为约化普朗克常数。量子系统的总几率振幅将可以表示为对所有路径贡献的积分

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (5.14)$$

积分对所有从 i 到 f 的路径进行。

现在我们已经知道了每条路径的贡献，但“路径微元”（积分测度） $\mathcal{D}[x(t)]$ 的含义仍然需要澄清。在数学上这个路径微元的严格定义是有困难的，因此我们在这里只采用一种非常直观的方式来定义路径微元。² 为此我们将所考虑的路径离散化为处于一系列分立时刻上的位置 $x_j = x(t_j)$ ，这样这条路径就可以用 (x_0, x_1, \dots, x_n) 来标记，并且我们要求 $x_0 = x_i, x_n = x_f$ 。经过这样的离散化后，每条路径将只有有限多个自由度 x_1, \dots, x_{n-1} ，如图 5.4 所示。因此对所有路径的积分就可以转化为对所有这些自由度的积分

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) \propto \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j e^{iS(x_k)/\hbar}, \quad (5.15)$$

这里的 $S(x_k)$ 包含所有的离散变量 $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。取 n 趋于无穷的极限

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j e^{iS(x_k)/\hbar}, \quad (5.16)$$

我们就得到了连续的路径积分。式中 M 是一个常数，它的取值要通过归一化条件确定下来。

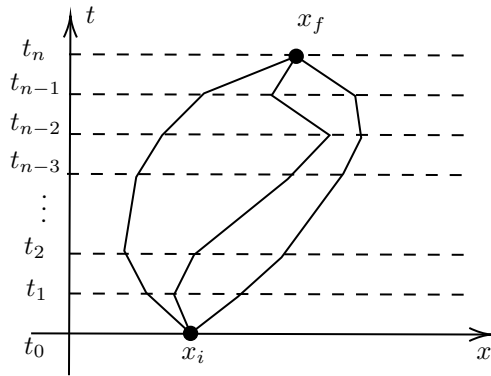


图 5.4: 离散化的路径积分。

为求出归一化常数的具体取值，我们考虑一段极短的时间内的运动，此时几率振幅将可以表示为

$$K(x', t + \Delta t; x, t) = A e^{iS/\hbar}, \quad (5.17)$$

²可以看出，在 $S[x(t)]$ 很大的地方，路径积分的复指数将会震荡得极为剧烈。在数学上，我们尚不知道应当如何严格定义这种震荡泛函积分的测度。一个更严格的做法是取 $\tau = it$ 为虚时间，然后定义虚时路径积分

$$K(x_f, \tau_f; x_i, \tau_i) = \int \mathcal{D}[x(\tau)] e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}$$

这一泛函积分是呈指数衰减的，因此是更容易定义的。在计算的最后，我们将 τ 延拓回实轴，就得到了实时间下的路径积分。

式中 A 是这一小段几率振幅的归一化常数, 这相当于离散化的路径积分中一段的贡献。由于概率守恒, 对几率振幅进行全空间的积分, 得到的结果一定等于 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' K(x', t + \Delta t; x, t) = 1. \quad (5.18)$$

这就是路径积分应当满足的归一化条件。为简便起见, 我们考虑一个自由粒子的运动, 在这一段极短的时间内其作用量可以表示为

$$S = \int_t^{t+\Delta t} dt \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{x' - x}{\Delta t} \right)^2 \Delta t = \frac{m(x' - x)^2}{2\Delta t}. \quad (5.19)$$

因此该粒子所对应的路径积分为

$$K(x', t + \Delta t; x, t) = A \exp \left[\frac{m(x' - x)^2}{2\hbar\Delta t} \right]. \quad (5.20)$$

归一化条件要求几率振幅满足

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp \left[\frac{m(x' - x)^2}{2\hbar\Delta t} \right] = A \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\Delta t}{m}} = 1, \quad (5.21)$$

因此常数 A 应当选取为

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}. \quad (5.22)$$

对于一段有限大小的路径积分来说, 我们将其分成了不同的 n 段, 这里的每一段路径都将贡献一个归一化因子 A 。因此, 路径积分的归一化系数将可以表示为

$$M = A^n = \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad (5.23)$$

由此可见, 路径积分中的积分测度为

$$\int \mathcal{D}[x(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j. \quad (5.24)$$

这样我们就得到了几率振幅的计算公式

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j e^{iS(x_k)/\hbar}. \quad (5.25)$$

对于一个具体的系统来说, 写出其作用量的形式并计算出相应的路径积分, 我们就得到了系统的几率振幅。

在经典力学中, 系统拉格朗日量的选取具有某种任意性, 即在拉格朗日量上加上一个对于时间的全导数项不影响系统的力学性质。这一点在量子力学中同样是成立的, 因为在拉格朗日量上加上一个全导数项相当于在作用量上加上一个常数, 这将导致所有的路径额外贡献一个相同的相因子。由于在量子力学中可观测量只是几率振幅的模平方, 因此这个额外的相因子是无足轻重的。

我们期望路径积分在经典极限下回到最小作用量原理, 也就是只有经典路径上的几率振幅贡献不为零。经典路径所对应的是泛函的极值点, 在该条路径上泛函的一阶变分为零, 其邻域内泛函的变化是缓慢的。但是在远离经典路径的地方, 路径积分复指数的相位变化将变得极为剧烈, 在作积分后将相互抵消, 最后剩下的只有来自于经典路径附近的贡献。在国际单位制下, 约化普朗克常数的取值约为 $1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 在通常的尺度下看这是个很小的量。在经典极限下, 作用量 S 的量级要远远大于 \hbar , 因此任何偏离极值点的路径都将被强烈地抵消, 实际上只有经典路径能够给出宏观的贡献。³

³事实上, 若作用量 $S[x]$ 可以在经典路径 x_i 附近展开为

$$S[x] = S[x_i + y] = S[x_i] + \frac{1}{2} \int dt dt' y(t') A_i(t', t) y(t) + \dots,$$

我们已经得到了路径积分的计算公式，现在要利用它来计算一些实际系统的几率振幅。作为一个最简单的例子，我们首先来考察一维自由粒子的几率振幅。我们知道自由粒子的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (5.26)$$

为了计算路径积分，我们需要将这个拉格朗日量离散化。将微分写成差分的形式，第 j 段路径上的拉格朗日量将可以表示为

$$L_j = \frac{1}{2}m \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2. \quad (5.27)$$

作用量将表示为各段路径上的拉格朗日量之和

$$S = \int_{t_0}^{t_n} dt L = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t L_j = \frac{m}{2\Delta t} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2. \quad (5.28)$$

因此，待求的路径积分为

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{k=1}^{n-1} dx_k \exp \left[\frac{im}{2\hbar\Delta t} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2 \right]. \quad (5.29)$$

接下来我们将这个积分明显地计算出来。注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\alpha x^2} = \left(\frac{i\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 e^{i\alpha[(x_2-x_1)^2+(x_1-x_0)^2]} = \left(\frac{i\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}(x_2-x_0)^2}, \quad (5.31)$$

以此类推。因此逐个计算各个变量 x_i 的积分，我们将得到

$$\int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \exp \left[i\alpha \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] = \left(\frac{i\pi}{\alpha} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{i\alpha}{n}(x_n-x_0)^2}. \quad (5.32)$$

作变量代换

$$\alpha = \frac{m}{2\hbar\Delta t}, \quad (5.33)$$

那么一维自由粒子的几率振幅将可以表示为

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar n\Delta t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar n\Delta t} (x_f - x_i)^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_f - t_i)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i} \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

可以看到在取极限后 Δt 和 n 都消失了，这说明几率振幅与路径离散化的具体方式无关。

路径积分的计算通常是极为困难的，不过也有某些物理现象可以用路径积分给出非常直观的解释。下面要介绍的阿哈罗诺夫 (Aharonov)-波姆 (Bohm) 效应就是一例。假设在一个不可穿透的圆柱内封闭着一个不为零的磁场，而圆柱外的磁场精确为零（但磁矢势并不为零）。现在我们从圆柱前方的 i 点发射出一个电子，然后让这个电子绕过圆柱，在其后方 f 点处发生干涉，如图 5.5 所示。我们要问的问题是：电子的运动与圆柱内的磁场有关吗？

初看起来，磁场被完全封闭在圆柱之中，而电子的运动完全处于圆柱之外，因此磁场不应当对电子的运动有所影响。但实际上，电子会在圆柱后方产生一个可观测的相位差，而这个相位差

则路径积分可以表示为

$$K = \int \mathcal{D}[x] e^{iS[x]/\hbar} = \sum_i e^{iS[x_i]/\hbar} \det \left(\frac{\hat{A}_i}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{iO(\hbar^{1/2})}.$$

这被称为稳相近似。

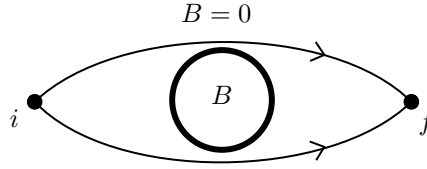


图 5.5: 阿哈罗诺夫-波姆效应。

的取值恰好正比于圆柱内磁场的磁通量。为了得到这一结果，让我们来看这个系统的路径积分。根据经典力学知识，空间中的磁场将为系统的拉格朗日量附加上额外的一项

$$\Delta L = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (5.35)$$

式中 \mathbf{A} 为磁矢势。因此作用量的改变将可以写成

$$\Delta S = e \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = e \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (5.36)$$

式中 $d\mathbf{x}$ 为路径微元。因此，当我们考虑一条路径时，该路径贡献的几率振幅将变为

$$e^{iS/\hbar} = e^{iS_0/\hbar} e^{i\Delta S/\hbar} = e^{iS_0/\hbar} \exp \left[\frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right], \quad (5.37)$$

式中 S_0 为无磁场时系统的作用量。由于磁场是矢势的旋度，因此如果空间中没有磁场，那么在圆柱外的磁矢势将是一个无旋场。根据斯托克斯定理，对这样一个无旋场进行的环路积分将与积分路径无关。因此对于那些不包含圆柱内的磁场的路径来说，不同的路径将给出相同的贡献。

但是，当我们考虑在圆柱上和圆柱下的两条不同的路径时，我们发现这两条路径所包含的区域内磁通量不为零。⁴ 因此，相应的积分将产生一个差值

$$\begin{aligned} \frac{e}{\hbar} \left[\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right]_{\text{up}} - \frac{e}{\hbar} \left[\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right]_{\text{down}} \\ = \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e\Phi}{\hbar}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

式中 Φ 为圆柱体内的磁通量。我们看到，磁场的存在为圆柱体上下的路径附加了一个不同的相位，其差值正比于圆柱体内的磁通量。在实验中，这个附加的相位差将导致上下两条路径的几率振幅发生干涉，从而被我们观察到。

因此我们看到，在磁场为零的地方确实产生了可观测的运动学效应，这说明磁场 \mathbf{B} 并不是对于系统的一个完备的描述。这一点似乎说明了磁场是非定域的效应，不过这一矛盾的产生只是因为磁场 \mathbf{B} 丢失了系统的某些信息。当我们用磁矢势 \mathbf{A} 来描述系统时，它就变成定域的了。我们通常认为磁场 \mathbf{B} 是刻画场性质的物理量，而磁矢势 \mathbf{A} 只是一个辅助的量，现在看起来并不完全是这样。考虑到上述积分是对磁矢势 \mathbf{A} 进行的，因此我们似乎可以说磁矢势 \mathbf{A} 是一个比磁场 \mathbf{B} 更基本的物理量。不过这并不意味着磁矢势 \mathbf{A} 将取代磁场 \mathbf{B} 成为可观测量，因为磁矢势 \mathbf{A} 仍然具有着规范的冗余。

事实上，一个恰当的刻画磁场的物理量应当被选取为环路积分所对应的相因子

$$U = \exp \left[\frac{ie}{\hbar} \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right], \quad (5.39)$$

它既是可观测量，又没有规范冗余。当环路足够小的时候，这个相因子等价于 $\exp[\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{S}]$ ，其中 $\Delta \mathbf{S}$ 为面元矢量，换句话说它给出了磁场 \mathbf{B} 。而当环路不能够收缩到同一点上的时候，它将给出类似于阿哈罗诺夫-波姆效应的额外效应。将这个相因子推广到四维时空中，我们将得到

$$U = \exp \left[ie \oint_l A^\mu dx_\mu \right], \quad (5.40)$$

它被称为威尔逊 (Wilson) 圈，是利用四矢量场 A^μ 所能构造出的最普遍的规范不变量。

⁴当然还存在着其他的路径，比如绕圆柱两圈乃至更多圈的路径，它们将额外贡献新的相位。不过由于它的贡献远小于在圆柱上和圆柱下的两条路径，因此我们在这里将它们的效应略去了。

5.3 生成泛函与关联函数

由于量子力学中粒子的运动不再局限于某个特定的轨道, 因此力学量的平均值(期望值)就变得重要起来。比如说, 虽然我们不能指出粒子某时某刻处于某个位置上, 但是我们可以指出“平均地说”粒子处在某个位置上。为简便计, 接下来我们只讨论一维的情况, 且只考虑时间从负无穷到正无穷的物理过程。假设有某个力学量 \mathcal{O} , 它是路径 $x(t)$ 的泛函。在量子系统中, 它的期望值将可以表示为⁵

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[x] \mathcal{O}[x] e^{iS[x]/\hbar}}{\int \mathcal{D}[x] e^{iS[x]/\hbar}}. \quad (5.41)$$

上述表达式意味着对力学量在所有的路径上进行加权平均, 每条路径的权重为 $\exp(iS/\hbar)$ 。

初看起来, 为了求出力学的平均值, 我们需要计算两次路径积分。不过很多时候可以将上述表达式进行简化。为此我们需要为系统引入一个随时间变化的源项 $J(t)$, 这样系统的作用量将表示为

$$S_J[x] = S[x] + \int dt J(t)x(t), \quad (5.42)$$

系统的路径积分为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[x] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[x] + \int dt J(t)x(t) \right) \right], \quad (5.43)$$

我们把上述定义的 $Z[J]$ 称为生成泛函。

利用生成泛函, 我们可以极大地简化力学量期望值的表达式。因为附加的源项是在指数上的, 因此对 $J(t)$ 求偏导, 路径积分中就会多出来一个 $x(t)$ 。于是, 粒子位置的期望值就可以表示为

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(t)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (5.44)$$

式中 $\delta/\delta J$ 为泛函导数, 其运算规则为

$$\frac{\delta J(t)}{\delta J(t')} = \delta(t - t'), \quad \frac{\delta}{\delta J(t)} \int dt' J(t')x(t') = x(t). \quad (5.45)$$

当然, 我们还能够求出位置平方的期望值(也就因此能求出粒子的涨落)

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i\hbar \frac{\delta^2}{\delta J^2(t)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (5.46)$$

我们还能求出不同时刻的两点关联函数

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J_1} \right) \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J_2} \right) Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (5.47)$$

式中 $x_i = x(t_i)$, $J_i = J(t_i)$ 。以此类推, 我们可以用生成泛函写出多点关联函数的表达式

$$\langle x_1 \dots x_n \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J_1} \right) \dots \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J_n} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (5.48)$$

上述结果可以等价地表示为

$$Z[J] = Z[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \int dx_1 \dots dx_n \langle x_1 \dots x_n \rangle J_1 \dots J_n, \quad (5.49)$$

⁵严格来说, 这里所说的“状态”并不是指粒子所处的经典状态, 而是粒子的量子态, 这里的期望值也应当理解为算符 $\hat{\mathcal{O}}$ 在真空态(即能量最低的量子态)上的期望值 $\langle 0 | \hat{\mathcal{O}} | 0 \rangle$ 。如算符 $\hat{\mathcal{O}}$ 中包含不同的时间, 则还应当将其表示为编时乘积的期望值 $\langle 0 | T[\hat{\mathcal{O}}] | 0 \rangle$ 。严格来说, 在真空态期望值中插入初末态的坐标完备基, 我们可以得到

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \langle 0 | T[\hat{\mathcal{O}}] | 0 \rangle = \int \mathcal{D}[x] \psi_0^*(x_f, t_f) \langle x_f, t_f | T[\hat{\mathcal{O}}] | x_i, t_i \rangle \psi_0(x_i, t_i),$$

式中 $\psi_A(x, t) = \langle x, t | A \rangle$ 为态 A 在时刻 t 的波函数。这一表达式中的 $\langle x_f, t_f | T[\hat{\mathcal{O}}] | x_i, t_i \rangle$ 是坐标表象下的振幅, 它可以用我们前面所讨论的路径积分来表示。可以证明, 在时间趋于无穷的极限下, 算符的期望值将与系统的初末状态无关, 因此我们可以利用经典状态(即位置本征态)来代替量子态而不会产生问题。

即生成泛函“生成”了系统的多点关联函数。

接下来我们来计算系统的两点关联函数，它可以归结于对生成泛函求两次导数。为简便起见，我们首先考察复指数函数的多重积分

$$I = \int d^n x e^{-\frac{i}{2} x_i A_{ij} x_j + i J_i x_i}. \quad (5.50)$$

将 x_i 视为矢量， A_{ij} 视为矩阵，那么待求的积分将可以表示为

$$I = \int d^n x e^{-\frac{i}{2} x^T A x + i J x}. \quad (5.51)$$

为计算出这个积分，我们可以将上述矩阵对角化。如果矩阵 A 非奇异，那么一定存在一个变换 M 使得

$$x^T A x = \sum_j a_j y_j^2, \quad (5.52)$$

其中

$$y = Mx, \quad M^T M = 1, \quad (5.53)$$

并且 a_j 是矩阵 A 的第 j 个本征值。

现在我们将这个变换作用到上述积分中。由于矩阵 M 满足

$$|\det(M)| = 1, \quad (5.54)$$

所以在变换前后，积分体积元不发生改变

$$\prod_j dx_j = \prod_j dy_j. \quad (5.55)$$

将关于 x 的积分变换为关于 y 的积分，结果为

$$\begin{aligned} I &= \int d^n y e^{-\frac{i}{2} \sum_j a_j y_j^2 + i J M^T y} \\ &= \prod_j \sqrt{\frac{2\pi i}{a_j}} e^{\frac{i}{2} \frac{(J M^T)_j^2}{a_j}} \\ &= \sqrt{\frac{(-2\pi i)^n}{\det(A)}} e^{\frac{i}{2} J^T A^{-1} J}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

特别是在 $J = 0$ 时有

$$I = \int d^n x e^{-\frac{i}{2} x^T A x} = \sqrt{\frac{(-2\pi i)^n}{\det(A)}}, \quad (5.57)$$

因此我们得到

$$\int d^n x e^{-\frac{i}{2} x^T A x + i J x} = \int d^n x e^{-\frac{i}{2} x^T A x} \times e^{\frac{i}{2} J^T A^{-1} J}. \quad (5.58)$$

这样我们就计算出了这个积分。

将上述积分取连续极限，我们就得到了含源路径积分的结果

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[-\frac{i}{2} \iint dt_1 dt_2 x(t_1) A(t_1, t_2) x(t_2) + i \int dt J(t) x(t) \right] \\ &= \int \mathcal{D}[x(t)] \exp \left[-\frac{i}{2} \iint dt_1 dt_2 x(t_1) A(t_1, t_2) x(t_2) \right] \\ &\quad \times \exp \left[\frac{i}{2} \iint dt_1 dt_2 J(t_1) A^{-1}(t_1, t_2) J(t_2) \right], \end{aligned} \quad (5.59)$$

式中 $A^{-1}(t_1, t_2)$ 定义为

$$\int dt_3 A(t_1, t_3) A^{-1}(t_3, t_2) = \delta(t_1, t_2). \quad (5.60)$$

为简便起见, 我们将 $x(t_1)$ 记为 x_1 , 将 $A(t_a, t_b)$ 记为 A_{ab} , 并对重复出现的角标利用爱因斯坦规则进行求和 (积分)。这样系统的生成泛函将可以表示为

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}[x] e^{-\frac{i}{2} x_a A_{ab} x_b + i J_a x_a} \\ &= \int \mathcal{D}[x] e^{-\frac{i}{2} x_a A_{ab} x_b} \times e^{\frac{i}{2} J_a A_{ab}^{-1} J_b} \\ &= Z[0] e^{\frac{i}{2} J_a A_{ab}^{-1} J_b}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

这一结果是非常简洁的。

我们接下来要求出谐振子生成泛函的具体形式。谐振子的拉格朗日量可以表示为

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (5.62)$$

由于在拉格朗日量上加上一个全导数项不会改变系统的性质, 因此我们将谐振子的拉格朗日量改写为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \frac{d}{dt} \left(m x \frac{dx}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{2} m x \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \\ &= -\frac{1}{2} m x \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x. \end{aligned} \quad (5.63)$$

由于算符等价于一个作用在无穷维函数空间上的矩阵, 因此谐振子生成泛函中的算符 \hat{A} 就可以表示为

$$\hat{A} = \frac{m}{\hbar} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right). \quad (5.64)$$

在傅里叶变换下, 算符 A 将变为对角的

$$A_{12} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{m}{\hbar} (-p^2 + \omega^2) e^{-ip(t_1 - t_2)}, \quad (5.65)$$

其逆为

$$A_{12}^{-1} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\hbar}{m} \frac{1}{-p^2 + \omega^2} e^{-ip(t_1 - t_2)}. \quad (5.66)$$

谐振子系统的两点关联函数可以归结为生成泛函的二阶导数。将其计算出来, 我们得到

$$\langle x_1 x_2 \rangle = -i A_{12}^{-1} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\hbar}{m} \frac{i}{p^2 - \omega^2} e^{-ip(t_1 - t_2)}. \quad (5.67)$$

上述结果的推导详见附录 B.1。事实上, 这一两点关联函数恰恰是经典谐振子的传播子

$$\frac{m}{\hbar} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) G(t - t') = -i \delta(t - t'). \quad (5.68)$$

类似地, 我们还可以求出谐振子的四点关联函数 $\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle$, 它表示为对生成泛函计算四次偏导数。将结果计算出来, 我们得到

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle &= G(t_1 - t_3) G(t_2 - t_4) \\ &\quad + G(t_1 - t_2) G(t_3 - t_4) + G(t_1 - t_4) G(t_2 - t_3). \end{aligned} \quad (5.69)$$

也就是说, 谐振子的多点关联函数等于所有的传播子两两组合之和。上述结果的推导详见附录 B.1。事实上, 这一结果对于任意多点的关联函数都是成立的。⁶

我们可以用一种图形来直观地表示上述的结果, 这种图形被称为费曼图。用平面上的两个点分别代表 x_1 与 x_2 , 并且如果在两个点之间有一个传播子, 就将它们用一条线连起来, 如图 5.6 所示。从图中可以直观地看出, 谐振子的两点关联函数 $\langle x_1 x_2 \rangle$ 实际上就刻画了系统在 t_1 与 t_2 两时刻间的关联, 或者描绘了从时刻 t_1 传播到 t_2 的一个扰动。

⁶若我们考虑奇数点关联函数, 则它不可能进行传播子的两两配对。因此, 所有奇数点关联函数的取值均为零。

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ 1 \qquad 2 \end{array}$$

图 5.6: 谐振子两点关联函数的费曼图。

类似地, 我们用平面上的四个点分别代表 t_1, t_2, t_3, t_4 , 并且如果在两个点之间有一个传播子, 就将它们用一条线连起来。其结果就是四点关联函数可以表示为三张图的贡献之和, 如图 5.7 所示。根据费曼图来看, 它就等于 $t_1 \leftrightarrow t_2, t_3 \leftrightarrow t_4$ 传播的两个扰动, 加上 $t_1 \leftrightarrow t_3, t_2 \leftrightarrow t_4$ 传播的两个扰动, 再加上 $t_1 \leftrightarrow t_4, t_2 \leftrightarrow t_3$ 传播的两个扰动。如果我们要求每个点只能连接一根线, 并且所有的点都要被连接起来, 那么实际上我们只能画出这样的三张图。也就是说, 四点关联函数实际上就是所有可能的“四点图”的贡献之和。⁷ 上述结论对于任意多点的关联函数都是成立的。

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \begin{array}{c} t_1 \quad t_3 \\ \bullet \text{---} \bullet \\ t_2 \quad t_4 \end{array} + \begin{array}{c} t_1 \quad t_3 \\ \bullet \text{---} \bullet \\ t_2 \quad t_4 \end{array} + \begin{array}{c} t_1 \quad t_3 \\ \bullet \text{---} \bullet \\ t_2 \quad t_4 \end{array}$$

图 5.7: 谐振子四点关联函数的费曼图。

我们接下来考虑一个非线性谐振子, 它的拉格朗日量为⁸

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4. \quad (5.70)$$

为了计算它的四点关联函数, 我们需要考虑如下的路径积分

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \int \mathcal{D}[x] x_1 x_2 x_3 x_4 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S_0 - \int dt \frac{\lambda}{4!} x^4 \right) \right], \quad (5.71)$$

式中 S_0 为谐振子的作用量, 我们已经略去了分母中的归一化路径积分。⁹ 这个积分是不能够精确计算的, 因为它在指数中包含了 x^4 项。但如果我们假设非线性项是一个小量, 那么我们就可以对指数中的 x^4 项进行级数展开。注意到

$$e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \dots, \quad (5.72)$$

因此

$$\begin{aligned} & \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S_0 - \int dt \frac{\lambda}{4!} x^4 \right) \right] \\ &= e^{iS_0/\hbar} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \int dt_a x_a^4 + \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int dt_a dt_b x_a^4 x_b^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

式中 S_0 为谐振子的作用量。这一表达式可以等价地表示为

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \int dt \left(-i \frac{\delta}{\delta J(t)} \right)^4 \right] Z_0[J] \\ &= \left[1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \int dt_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta J_1} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int dt_1 dt_2 \left(-i \frac{\delta}{\delta J_1} \right)^4 \left(-i \frac{\delta}{\delta J_2} \right)^4 + \dots \right] Z_0[J], \end{aligned} \quad (5.74)$$

式中 $Z_0[J]$ 是谐振子的生成泛函。

⁷ 这一结论实际上是对所有可能的传播子的组合成立。不同的传播子的组合有可能对应于相同的微扰项, 因此我们应当为每一个费曼图乘以一个恰当的权重因子, 这样才能够恰当地得到其贡献。

⁸ 在量子场论中, 这个非线性谐振子将对应于具有 ϕ^4 自相互作用的场。

⁹ 在后文中我们将会看到, 分母中的路径积分恰好抵消了分子中的全部真空图。

上述级数的零阶项为

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle_0 = \int \mathcal{D}[x] x_1 x_2 x_3 x_4 e^{iS_0/\hbar}. \quad (5.75)$$

这个结果就是没有非线性扰动时的四点关联函数。为了得到非线性扰动对系统的影响，我们需要计算更高阶的微扰。取上述级数的一阶项，结果为

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle_1 = -\frac{i\lambda}{\hbar 4!} \int \mathcal{D}[x] \int dt_a x_1 x_2 x_3 x_4 x_a^4 e^{iS_0/\hbar}. \quad (5.76)$$

这可以看作是一个谐振子的八点关联函数，其中四个点 t_1, t_2, t_3, t_4 相互独立，有四个点重合在了 t_a 点，对变量 t_a 进行全时间的积分后再乘以一个常数系数。在考虑了传播子所有可能的组合之后，我们一共可以写出三种不同类型的微扰展开项

$$I_a = G(t_1 - t_3)G(t_2 - t_4) \times \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right) \int dt_a G(t_a - t_a)G(t_a - t_a), \quad (5.77)$$

$$I_b = -\frac{i\lambda}{\hbar} \int dt_a G(t_1 - t_a)G(t_a - t_a)G(t_a - t_3) \times G(t_2 - t_4), \quad (5.78)$$

$$I_c = -\frac{i\lambda}{\hbar} \int dt_a G(t_a - t_1)G(t_a - t_2)G(t_3 - t_a)G(t_4 - t_a), \quad (5.79)$$

式中因子 $4!$ 已经由于四个 t_a 的交换对称性消去了。

我们可以用费曼图来帮助分析这一结果。由于这一项所对应的关联函数中有四个点相互独立，有四个点重合在了同一点，因此我们在画费曼图的时候需要用四个连接一条线的点和一个连接四条线的点（顶点）来构建相应的图形。在画出所有可能的费曼图之后，我们可以得到三种不等价的图形，如图 5.8 所示。可以看到，这三种图形刚好与前面得到的三种传播子的组合相对应。分析不同的图形和微扰项之间的对应关系，我们可以得出如下的规则：

- (1) 每一条内线对应于一个连接两点的传播子。
- (2) 每一个顶点贡献一个因子 $-i\lambda/\hbar$ ，并对该点进行全时间的积分。
- (3) 将上述所有项乘在一起，就得到了该费曼图的贡献。

上述规则被称为费曼规则。借助这些费曼规则，我们可以容易地写出任何费曼图所对应的微扰项，这可以极大地简化我们的计算。若我们需要计算非谐振子多点关联函数的某阶微扰展开项，则只需按照费曼规则在给定的微扰阶画出费曼图，根据费曼图写出微扰项，再将所有这些微扰项求和即可。

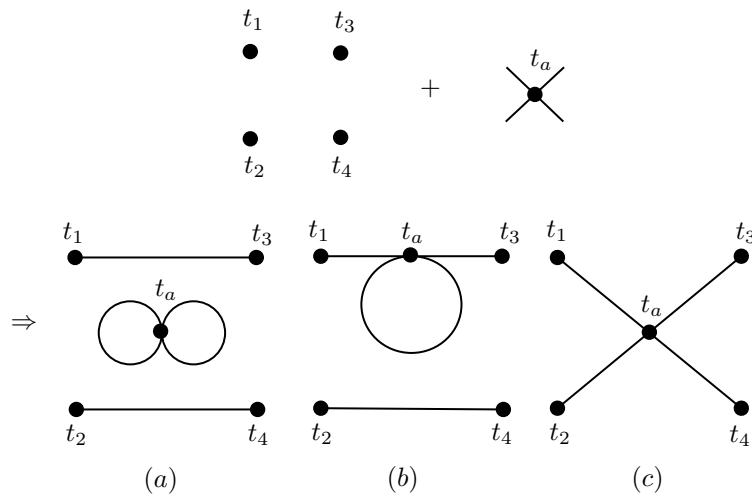


图 5.8: 非谐振子四点关联函数一阶微扰的费曼图。

我们可以进一步考察图 5.8 中各张费曼图的物理意义。图 (a) 代表着仍然有 $t_1 \leftrightarrow t_3, t_2 \leftrightarrow t_4$ “自由”传播的两个扰动（这里的自由代表着未受扰动的谐振子的传播子），只不过在此之外，系

统在“真空”之中发生了一次自相互作用。图 (b) 代表着仍然有 $t_1 \leftrightarrow t_3, t_2 \leftrightarrow t_4$ 传播的两个扰动, 只不过在 $t_1 \leftrightarrow t_3$ 这个扰动传播的过程中发生了一次自相互作用。图 (c) 代表着两个扰动在四点之间传播的时候, 它们之间发生了一次自相互作用 (或者用更形象的说法, 发生了一次“散射”)。由于上述各过程中的自相互作用可以发生在任何一个时刻, 因此最终的结果要对 t_a 进行积分。

当然, 需要再度重申的是, 费曼图只是一种直观的图示方法而已。我们不能将这种理解当作真实的物理图像, 也不能认为真实的物理系统中真的发生了如费曼图所描述的物理过程。四点关联函数中所谓从某点到某点的扰动是不存在的, 唯一存在的只有作为整体的一个四点关联函数。这一点在后面讨论更加复杂的费曼图的时候要尤其注意。

5.4 波函数

根据几率振幅的形式, 我们猜想量子系统中粒子将不再像经典粒子那样处于一个固定的位置上, 而是“弥散”在整个空间之中。如果我们用一个弥散在空间中的量 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 来表示这个粒子的状态, 那么根据几率振幅的定义, $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 应当满足

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \Psi(\mathbf{x}', t'), \quad (5.80)$$

式中的 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 被称为波函数。从这个表达式中我们可以看出, 粒子的几率振幅可以被视为波函数的传播子 (格林函数)。接下来我们推导波函数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 满足的方程。

为简便起见, 我们首先考虑一维的情况。对于一段极小的时间间隔 $\Delta t = t' - t$ 来说, 几率振幅 $K(x', t'; x, t)$ 可以表示为

$$K(x', t'; x, t) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}} e^{iS/\hbar}. \quad (5.81)$$

由于几率振幅就是波函数的传播子, 因此在这样一段时间间隔内波函数的演化将表示为

$$\Psi(x', t') = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{iS/\hbar} \Psi(x, t). \quad (5.82)$$

在 Δt 内, 系统的作用量可以近似地表示为

$$S = \frac{m}{2\Delta t} (x' - x)^2 - V(x', t) \Delta t. \quad (5.83)$$

取一段极短的时间间隔 Δt 以及一段极短的位置间隔 Δx , 并将等式两边对 Δt 和 η 展开, 结果为

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) + \Delta t \frac{\partial \Psi}{\partial t} = & \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\Delta t} \Delta x^2 \right] \left[1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t V(x, t) + \dots \right] \\ & \times \left[\Psi(x, t) - \Delta x \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

将关于 Δx 的积分计算出来, 并取这个表达式中所有含 Δt 的项, 我们就得到了波函数所满足的偏微分方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right] \Psi(x, t) \quad (5.85)$$

这就是一维空间中波函数的演化方程。类似地, 只需要将空间部分的导数换成拉普拉斯算符, 我们就得到了三维空间中波函数的演化方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (5.86)$$

上式被称为薛定谔方程。¹⁰ 根据上述推导可以看出, 给定了势函数 V 的形式, 我们就可以写出系统的薛定谔方程。同几率振幅一样, 波函数同样刻画了量子粒子的运动, 并且薛定谔方程给出了波函数的演化。求解薛定谔方程, 我们就得到了量子系统的性质。

我们发现, 上述薛定谔方程与经典力学方程之间有着一个直接的对应。在经典力学中, 我们有能量-动量关系

$$E = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (5.87)$$

只要我们作如下力学量和算符之间的代换

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad (5.88)$$

并让这些算符作用在波函数 Ψ 上, 那么我们就得到了薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}, t) \right] \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (5.89)$$

能量和动量的算符表达式是量子力学的基本原理之一, 但我们仍然可以通过启发性的方式给出这些算符的表达式。在经典力学中, 空间平移对称性对应于系统的动量守恒。我们假设在量子力学中这个条件同样可以得到满足, 即动量算符是系统空间平移变换的生成元

$$\left(1 - \frac{i\hat{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{x}}{\hbar} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} - d\mathbf{x}, t), \quad (5.90)$$

式中 \hbar 为一个具有作用量量纲的参数, 虚数单位 i 使得变换是幺正的。这里变换是作用在基矢 $|\mathbf{x}\rangle$ 上而非态矢 $|\psi\rangle$ 上, 因此变换后的波函数为 $\psi(\mathbf{x} - d\mathbf{x}, t)$ 。利用上述表达式, 我们可以求出动量算符为

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla. \quad (5.91)$$

类似地, 哈密顿算符为系统时间平移变换的生成元

$$\left(1 - \frac{i\hat{H}dt}{\hbar} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t + dt). \quad (5.92)$$

利用上述表达式, 我们可以求出能量算符为

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.93)$$

上述力学量算符所满足的关系还可以写成明显协变的形式

$$\left(1 - \frac{i\hat{p}^\mu dx_\mu}{\hbar} \right) \psi(x) = \psi(x + dx_\mu). \quad (5.94)$$

从中我们可以解得

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \partial^\mu = i\hbar (\partial_0, -\nabla), \quad (5.95)$$

式中取平直时空度规张量为 $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。这与我们此前所得到的结果是相同的。

一个稍特殊的例子是在电磁场中运动的粒子, 它的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (5.96)$$

哈密顿量为¹¹

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi, \quad (5.97)$$

¹⁰作为波函数的传播子, 几率振幅所满足的方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = -i\hbar \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0),$$

其边界条件为 $K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0$ ($t < t_0$)。

¹¹在量子力学中, 由于各力学量算符并不对易, 因此我们需要将广义动量的平方理解为 $(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 = p^2 - e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + e^2 A^2$, 中间的两项并不能够随意地交换位置。

式中

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (5.98)$$

为与粒子坐标 \mathbf{x} 相对应的广义动量。将能量和（广义）动量替换为相应的算符，我们就得到了带电粒子在电磁场中运动的薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{(-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi \right] \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (5.99)$$

从上述表达式中我们看出，电磁场的引入相当于对算符作如下代换

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar}\phi, \quad \nabla \rightarrow \nabla - \frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}. \quad (5.100)$$

将之明显地写成协变形式，我们得到

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar}A_\mu, \quad (5.101)$$

这恰是我们在 3.9 节中引入的协变导数。

在经典电磁理论中，我们知道电磁场具有规范对称性，即系统的物理规律在规范变换

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \alpha \quad (5.102)$$

下是不变的，式中 $\alpha(\mathbf{x}, t)$ 是一个与坐标和时间有关的任意函数。这个结论在量子力学中是同样成立的。如果对薛定谔方程中的电势和磁矢势做上述规范变换

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi'(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{(-i\hbar \nabla - e\mathbf{A}')^2}{2m} + e\phi' \right] \Psi'(\mathbf{x}, t), \quad (5.103)$$

那么新的波函数 Ψ' 与原来的波函数 Ψ 之间将只差一个相位

$$\Psi' = e^{-ie\alpha/\hbar} \Psi. \quad (5.104)$$

由于只有波函数的模平方是可观测量，因此附加的这个相位并不会引起可观测量效应。换句话说，经典电磁场的规范对称性在量子力学中仍然是得到了保持的。这个结果也与我们在 3.9 节中介绍的规范对称性相吻合。

作为一个弥散在空间中的量，我们可以把波函数看成是一个“经典场”。既然是经典场，那么我们就可以用前面介绍的经典场论的方法刻画这个系统。比如说，我们可以写出波函数场的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - V \Psi^* \Psi. \quad (5.105)$$

系统的作用量可以表示为对上述拉格朗日密度在全空间的积分。分别对作用量进行关于 Ψ^* 及 Ψ 的变分，我们将得到波函数场的拉格朗日方程，其结果正是薛定谔方程及其共轭。至此我们已经得到了量子系统的两个不同版本的拉格朗日表述，它们分别是对粒子的路径积分，以及把波函数看作经典场的经典场论。至少在运动方程的层面上，它们是等价的。在标准的量子力学中，我们一般采用路径积分的视角。在凝聚态物理中，有时我们会采用经典场的视角。在量子场论中，我们将把量子的粒子视为经典场，然后对其进行二次量子化得到量子场。

在量子力学之中，描述粒子运动状态的物理量从位移 $\mathbf{x}(t)$ 变成了波函数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 。这个波函数究竟意味着什么？它代表着粒子真的就像我们所设想的那样，“弥散”在了空间中，还是仅仅是因为我们对量子系统的了解不够全面，导致我们必须用“统计”的方式来理解？这个问题被称为量子力学的诠释问题，它至今尚无定论。我们在后续的章节中将专门讨论这个问题，现在我们只说波函数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ 代表着这样一件事情：当我们在时刻 t 测量这个粒子的位置时，我们会发现它处在位置 \mathbf{x} 的概率密度为波函数在该点模值的平方

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2. \quad (5.106)$$

或者更严格地说，在时刻 t 测量得到粒子处在 \mathbf{x} 附近 d^3x 区域内的概率为

$$\rho(\mathbf{x}, t) d^3x = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x. \quad (5.107)$$

由于粒子一定会出现在空间中的某个位置上, 因此对波函数模平方在全空间上进行积分, 我们将得到归一化条件¹²

$$\int d^3x |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 = 1. \quad (5.108)$$

薛定谔方程应当满足概率守恒的条件, 即若系统的波函数在某时刻满足归一化条件, 则在之后的任意时刻也都应当满足归一化条件。为证明这一点, 我们对薛定谔方程两边乘以 Ψ^* , 对其复共轭两边乘以 Ψ , 并将两式相减得到

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi^* + i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi = \frac{-\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \Psi) \Psi^* + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \Psi^*) \Psi, \quad (5.109)$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5.110)$$

式中

$$\rho = \Psi \Psi^* = |\Psi|^2, \quad (5.111)$$

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi), \quad (5.112)$$

分别为粒子的概率密度和概率流。对上述概率流守恒方程进行全空间的积分, 并弃去无穷远处守恒流的表面项, 我们将得到

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \rho = 0, \quad (5.113)$$

这说明系统的粒子数确实满足概率守恒。

我们接下来分析薛定谔方程的性质。如果势能项 V 不显含时间, 那我们称这样的系统处于定态, 此时薛定谔方程可以用分离变量的方式来进行求解。我们假设薛定谔方程的解可以表示为如下的形式

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})\phi(t), \quad (5.114)$$

它的空间部分和时间部分是相互独立的。这一解法并不失一般性, 因为我们可以证明, 对于可分离变量的线性偏微分方程来说, 其解总可以表示为各分离变量解的线性组合。将这个解的形式代入到薛定谔方程之中并在方程的两边除以波函数 Ψ , 我们得到

$$i\hbar \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi + V. \quad (5.115)$$

假设等式两边都等于某个待定的常数 E , 那么方程将表示为

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = E\phi, \quad (5.116)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi. \quad (5.117)$$

其中关于 ψ 的方程被称为定态薛定谔方程。通过这样一种方式, 我们就将波函数的空间部分和时间部分分离开来了。

关于 ϕ 的方程是容易求解的, 它的结果为

$$\phi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (5.118)$$

从这个式子中可以看出, 此时波函数的时间部分以复指数的形式震荡, 并且 E 就代表着系统的能量。而对于定态薛定谔方程来说, 一般来说只有当 E 取为某些特定的 E_n 时, 定态薛定谔方程才是有解的, 我们把这时的解记为 ψ_n

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_n + V\psi_n = E_n \psi_n. \quad (5.119)$$

¹²这个条件实际上并不是完全必要的。在态空间中, 相差一个常数倍数的态矢所代表的状态是相同的。因此, 我们实际上并不一定要规定波函数的归一化系数为一。但重要的是, 一旦我们选定了一个态矢, 那么由于粒子数守恒条件和演化的么正性, 我们将要求态矢的内积在演化过程中不再发生任何改变。

式中 E_n 被称为系统的能级、本征能量或者本征值，而 ψ_n 被称为系统的本征态或者本征矢，它们的具体形式要根据势函数 V 的形式确定下来。在这个方程中我们不对指标 n 求和。对于束缚态来说，其能级是分立的，我们一般用离散指标 m, n 等来标记。而对于散射态来说，其能级是连续的，我们一般用连续指标 p, k 等来标记。

由于粒子数守恒，因此在全空间中找到粒子的概率应当等于一，由此我们为系统的本征态添加如下的归一化条件

$$\int d^3x |\psi_n|^2 = 1. \quad (5.120)$$

如果我们考虑的是散射态，那么对波函数模平方的全空间积分将给出无穷大。在这种情况下，本征态的指标将成为连续指标 p, q ，相应的归一化条件将可以表示为

$$\int d^3x \psi_p^* \psi_q = \delta(p - q). \quad (5.121)$$

至此我们已经求出了系统空间和时间部分的波函数，将它们乘在一起，我们就得到了薛定谔方程的解

$$\Psi_n(\mathbf{x}, t) = \psi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (5.122)$$

由于薛定谔方程是一个线性方程，因此系统的通解将表示为所有特解的线性组合，即

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (5.123)$$

式中 c_n 是不同本征态的系数，它的取值要由系统的初始条件确定。因此对于定态系统来说，只要我们能够求出系统的各个本征值和本征态，那么我们就能够知道量子力学系统的态矢是如何随时间演化的。

如果我们已经知道了系统的几率振幅 K ，那么不用求解定态薛定谔方程就可以得到系统的各个本征值和本征态。可以证明，系统的几率振幅满足下述表达式

$$K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \sum_n e^{-iE_n(t'-t)/\hbar} \psi_n(\mathbf{x}') \psi_n^*(\mathbf{x}). \quad (5.124)$$

进一步地，我们定义系统的迹核函数为

$$G(t' - t) = \int d^3x K(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}, t), \quad (5.125)$$

可以证明，迹核函数满足下述表达式

$$G(t' - t) = \sum_n e^{-iE_n(t'-t)/\hbar}. \quad (5.126)$$

上述结果的证明将在后文中介绍。因此如果我们能够显式地写出几率振幅和迹核函数的形式，我们就能够得到系统的各个本征值和本征态。

作为一个最简单的例子，我们来考察一维自由粒子的运动。注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{i}{2}ax^2 + iJx} = \frac{2\pi i}{a} e^{\frac{i}{2}\frac{J^2}{a}}, \quad (5.127)$$

因此我们可以将一维自由粒子的几率振幅改写为

$$\begin{aligned} K(x', t'; x, t) &= \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t_f - t_i)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_f - x_i)^2}{t_f - t_i} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp \left[\frac{ip(x' - x)}{\hbar} - \frac{ip^2(t' - t)}{2m\hbar} \right]. \end{aligned} \quad (5.128)$$

将之与式 (5.124) 相比较，我们可以得到一维自由粒子的能级与本征态

$$E_p = \frac{p^2}{2m}, \quad (5.129)$$

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}. \quad (5.130)$$

从上面的表达式中我们可以看出,自由粒子的波函数是一个平面波。将本征能量与经典自由粒子的能量相比较,我们发现这里的指标 p 实际上就代表了这个粒子的动量,它是一个连续的指标。

当然,通过路径积分来求本征能量和本征态是十分复杂的,因此更简单的办法还是直接求解系统的定态薛定谔方程。对于自由粒子来说,势函数 $V = 0$, 因此其定态薛定谔方程可以表示为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x). \quad (5.131)$$

作代换 $k^2 = 2mE/\hbar^2$, 方程变为

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x). \quad (5.132)$$

这个方程的解为复指数函数

$$\psi_k(x) \sim e^{ikx}. \quad (5.133)$$

习惯上我们取 $p = \hbar k$, 这实际上就是量子力学中的德布罗意关系, 它给出了粒子的动量 p 与其波函数的波矢 k 之间的关系。于是系统的本征态可以表示为

$$\psi_p(x) \sim e^{ipx/\hbar}. \quad (5.134)$$

注意到复指数函数之间满足如下关系

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(p'-p)x/\hbar} = \delta(p' - p), \quad (5.135)$$

因此我们将归一化本征态表示为

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}. \quad (5.136)$$

将本征态带入到薛定谔方程中, 我们将得到系统的本征值

$$E_p = \frac{p^2}{2m}. \quad (5.137)$$

这与我们通过几率振幅求出来的本征值和本征态是相同的。

接下来我们考察束缚态的求解。以一维谐振子系统为例, 其势函数可以表示为

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (5.138)$$

因此其定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi. \quad (5.139)$$

作代换

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad (5.140)$$

则上述方程将简化为

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi, \quad (5.141)$$

其中 $K = 2E/\hbar\omega$ 。我们接下来将求解这个方程。

作代换

$$\psi(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}, \quad (5.142)$$

那么 $H(\xi)$ 将满足如下方程

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (K - 1)H = 0. \quad (5.143)$$

我们假设上述方程的解可以表示为幂级数的形式

$$H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j, \quad (5.144)$$

将其代入到方程之中，我们就得到了各个展开系数 a_i 之间的关系

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j] \xi^j = 0. \quad (5.145)$$

要想使得上述等式成立，级数中的各项系数必须均为零

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j = 0, \quad (5.146)$$

这等价于如下递推公式

$$a_{j+2} = \frac{2j+1-K}{(j+1)(j+2)} a_j. \quad (5.147)$$

原则上来说，任何一个满足上述递推公式的函数都是薛定谔方程的解。但是如果级数中包含无穷多项，那么系统的波函数将在 $\xi \rightarrow \infty$ 处发散，这不是一个物理上可以接受的结果。要想使得计算的结果有限，级数中必须只包含有限项，这意味着递推公式在计算到某一阶系数的时候将取为零。因此，如果我们希望级数收敛，那么参数 K 将只能取为

$$K = 2n + 1, \quad (5.148)$$

这意味着系统的本征值为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (5.149)$$

其中 n 是任意一个正整数，称为系统的量子数，它可以用来标记系统不同的量子态。

我们把对应于量子数 n 的解记为 $H_n(\xi)$ ，它被称为厄密多项式。根据递推公式，我们可以求出其级数展开式为

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad (5.150)$$

式中 $[n/2]$ 代表向下取整。因此系统的本征态为

$$\psi_n(\xi) = A_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (5.151)$$

式中 A_n 为归一化系数。由于本征态要满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \psi_n^*(\xi) \psi_n(\xi) = 1, \quad (5.152)$$

因此将积分计算出来，我们就得到了归一化系数的取值

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.153)$$

这样谐振子的各个归一化本征态将表示为

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right). \quad (5.154)$$

从上述讨论中我们可以看出，束缚态的条件（即在无穷远处波函数趋于零）自动地给出了分立的能级。我们发现谐振子的基态（即能量最低的态）能量不为零，而是取为一个有限大小的值 $\hbar\omega/2$ 。另外谐振子的相邻两个能级的能量差是相等的，均为 $\hbar\omega$ 。由于在平衡位置附近，任何系统都可以被近似地视为一系列谐振子，因此谐振子在物理中具有非常重要的意义。

最后我们来考察氢原子系统，它由一个质子和一个电子构成。假设质子的质量很大，在空间中固定不动，那么电子将可以被视为在库伦势中运动。这个系统的势能可以表示为

$$V(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad (5.155)$$

其中 e 是电子电荷，而 ϵ_0 为真空介电常数。由于库伦势是各向同性的，因此这个系统适合于在球坐标 (r, θ, ϕ) 下进行求解。在球坐标系下，我们可以将氢原子的定态薛定谔方程表示为

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V(r) \psi = E \psi. \end{aligned} \quad (5.156)$$

将这一方程求解出来, 我们就可以得到氢原子核外电子的各个本征值和本征态。这个系统的本征值为

$$E_{nlm} = - \left[\frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} \sim - \frac{1}{n^2}, \quad (5.157)$$

式中 m_e 为电子质量。¹³ n, l, m 是三个用于标记不同量子态的指标, 它们的取值范围为 $n = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。

上述表达式中的 n 代表系统的能量量子数, 而 l, m 分别代表角动量平方以及 z 方向角动量的量子数。求解氢原子系统的薛定谔方程, 我们会发现一系列具有相同能量的简并态, 它们具有相同的能量量子数 n 。但是对于这些态来说, 它们的角动量却是并不相同的, 因此我们选用角动量平方以及 z 方向角动量这两个力学量来区分系统的各个简并态。在实际的计算中, 通常选用一组相互对易且能够使得各本征态完全解除简并的力学量来标记各本征态, 这被称为力学量完备组, 系统本征态的量子数就是这些力学量所对应的量子数。从这个结果之中我们看到, 系统的能量仅与量子数 n 有关, 而对于量子数 l, m 是简并的。在未计及自旋的情况下, 每个能级 n 上具有 n^2 个简并的态 (计及自旋则有 $2n^2$ 个简并的态)。氢原子系统本征值和本征态的推导详见附录 B.2。

通常来说, 求解薛定谔方程的偏微分方程是非常困难的, 人们只能够在寥寥可数的几个简单系统中求出薛定谔方程的精确解。为了处理实际中遇到的复杂的量子系统, 人们发展了许多的近似方法, 如微扰论、变分法等, 它们极大地拓展了人们所能够处理的系统的范围。对这些近似方法的讨论详见本章末习题。

5.5 算符理论

在本节之中, 我们将以算符的角度来审视量子力学系统。它可以让我们更深刻地理解量子系统, 也可以让我们以一种更普遍的方式来表述量子力学的各种结论。

一个算符是从函数 $f(x)$ 到 $g(x)$ 的映射, 换句话说它接受一个函数 $f(x)$, 然后输出另一个函数 $g(x)$ 。比如导数运算, 它接受一个函数 $f(x)$, 然后输出另一个函数 $g(x) = f'(x)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x). \quad (5.158)$$

又比如一个坐标平移变换

$$\hat{T}[f(x)] = f(x + x_0), \quad (5.159)$$

它接受一个函数 $f(x)$, 然后输出另一个函数 $g(x) = f(x + x_0)$ 。因此, 导数运算和坐标平移变换都可以被视为算符。如果一个算符 $\hat{D}[f(x)]$ 是线性的, 那么它需要满足如下两个条件

$$\hat{D}[f_1(x) + f_2(x)] = \hat{D}[f_1(x)] + \hat{D}[f_2(x)], \quad (5.160)$$

$$\hat{D}[af(x)] = a\hat{D}[f(x)]. \quad (5.161)$$

由于算符就是函数之间的变换, 因此线性算符就是从函数到函数的一个线性变换。可以验证, 前面所说的导数算符和坐标平移算符都是线性算符, 因此它们都是作用在函数空间上的线性变换。

我们知道, 一个矢量的线性变换总是它的各个分量的线性组合。换句话说就是对于矢量 \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad (5.162)$$

来说, 它的一个线性变换总可以写成

$$x'_i = \sum_j D_{ij} x_j, \quad (5.163)$$

¹³如果我们考虑质子的有限质量效应, 那么我们仍可以将电子视为在库伦势下运动, 只不过此时电子的质量应当替换成系统的约化质量 $m = m_e m_p / (m_e + m_p)$ 。如果质子质量 m_p 远大于电子质量 m_e , 则约化质量可以用电子的质量来近似。这个结果与经典力学是完全相同的。

或者

$$\mathbf{X}' = \sum_i x'_i \mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_j D_{ij} x_j \right) \mathbf{e}_i \quad (5.164)$$

的形式。因此，一个矢量上的线性变换总可以写成矩阵 $D = \{D_{ij}\}$ 作用于其上的形式

$$\mathbf{X}' = D\mathbf{X}. \quad (5.165)$$

对于一个平方可积的函数来说也有类似的结果，即一个函数的线性变换总可以写成它的各点函数值的“线性组合”的形式¹⁴

$$f'(x) = \int dx' D(x, x') f(x'). \quad (5.166)$$

将之与相应的矢量变换表达式相比较，我们发现它暗示我们可以将函数看作是一个无穷维的矢量，而 $f(x)$ 就是它在 x 处的分量。根据量子力学中的习惯，我们采用狄拉克所引入的记号，将无穷维函数空间中的“矢量”记为 $|f\rangle$ ，将 x 处的“基矢”记作 $|x\rangle$ ，而将矢量 $|f\rangle$ 在基矢 $|x\rangle$ 上的“分量”记为 $f(x)$ 。因此，一个作为矢量的函数 f 就可以表示为

$$|f\rangle = \int dx f(x) |x\rangle, \quad (5.167)$$

而它的一个线性变换就可以写成

$$|f'\rangle = \int dx f'(x) |x\rangle = \int dx \left(\int dx' D(x, x') f(x') \right) |x\rangle. \quad (5.168)$$

将这个变换写成算符 $\hat{D} = \{D(x, x')\}$ 的形式，我们就得到了

$$|f'\rangle = \hat{D}|f\rangle. \quad (5.169)$$

如果我们将函数视为一个无穷维的“矢量”，那么算符 \hat{D} 就可以被视为作用在函数空间上的一个“无穷维矩阵”。利用这个视角，我们就可以用线性代数的手段去研究函数与算符之间的关系。

我们应当如何来理解这种“无限维线性空间”呢？这需要我们进一步从数学的角度考察线性空间的概念。在数学上，定义了元素间某些关系或结构的集合被称为一个空间。如果我们在元素之间恰当地定义了满足特定性质的加法和数乘运算¹⁵，则称这样的空间为线性空间。如果我们进一步在元素之间定义满足特定性质的内积¹⁶，则这样的空间被称为内积空间。如果空间中所有元素序列的极限都收敛于空间之中，则称这样一个空间为希尔伯特空间（即完备的内积空间）。在物理上所考虑的最重要的空间就是希尔伯特空间。

有限维的欧几里得空间是一个希尔伯特空间，其中的元素就是线性空间中的有限维矢量。对于我们这里所考虑的平方可积函数来说，我们可以在函数之间定义加法、数乘与内积

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (5.170)$$

¹⁴当然，对于一般的线性变换来说，它所对应的分量 $D(x, x')$ 不一定为普通函数，而有可能是类似于 δ 函数那样的广义函数。例如函数的导数以及时间平移变换可以表示为

$$\frac{df(x)}{dx} = \int dx' \delta'(x' - x) f(x'), \quad f(x - x_0) = \int dx' \delta[x' - (x - x_0)] f(x'),$$

式中 $\delta'(x)$ 为 δ 函数的导数。这里所谓的广义函数可以更一般地考虑为一个作用在函数上的线性泛函。对于 δ 函数来说，它可以被视为一个线性泛函

$$\delta[f(x)] = \int dx' \delta(x') f(x') = f(0),$$

它接收一个函数 $f(x)$ ，而输出其在原点的取值。

¹⁵这里的加法和数乘运算需要满足如下性质：(1) 对任意元素 x, y, z 满足 $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。(2) 对任意元素 x, y 满足 $x + y = y + x$ 。(3) 存在一个元素 0 ，使得对于任意元素 x 都满足 $x + 0 = x$ 。(4) 对任意元素 x ，存在一个元素 $-x$ 使得 $x + (-x) = 0$ 。(5) 对任意数 a, b 以及任意元素 x 满足 $a(bx) = (ab)x$ 。(6) 数域中存在 1 使得对任意元素 x 满足 $1x = x$ 。(7) 对任意数 a 及元素 x, y 满足 $a(x + y) = ax + ay$ 。(8) 对任意数 a, b 及元素 x 满足 $(a + b)x = ax + bx$ 。

¹⁶内积运算需要满足如下性质：(1) 对任意元素 x 有 $\langle x, x \rangle \geq 0$ ，且只有当 $x = 0$ 时取等。(2) 对任意元素 x, y 有 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ 。(3) 对任意元素 x, y, z 有 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ 。(4) 对任意数 a 及元素 x, y 有 $\langle x, ay \rangle = a\langle x, y \rangle$ 。

$$(cf)(x) = cf(x), \quad (5.171)$$

$$(f \cdot g)(x) = \int dx f^*(x)g(x), \quad (5.172)$$

这些运算满足线性空间所要求的性质。所有函数序列均收敛于空间中，因此这样的函数空间是一个完备的空间。换句话说，所有平方可积的函数构成的空间是一个无穷维的希尔伯特空间。在量子力学中，我们习惯上将这样的函数空间称为态空间，将其中的矢量称为态矢。¹⁷ 借助这一观点，我们就可以利用线性空间中的方法来讨论量子力学。当然需要说明的是，很多时候“无穷”的性质是超乎我们想象的。许多在有限维空间中成立的定理，在无穷维空间中并不成立。因此在讨论无穷维矩阵的时候需要格外小心。我们在这里只是打算直观地利用这些概念，而不打算进行更严格的论证。

作为这种无限维线性空间的一个例子，我们可以将一个非齐次线性微分方程写成如下的算符形式

$$\hat{D}|f\rangle = |g\rangle, \quad (5.173)$$

这里 $|g\rangle$ 是一个已知的“函数矢量”， $|f\rangle$ 是待求的“函数矢量”，而 \hat{D} 是包含着导算符在内的一个线性算符。举例来说，我们考虑一个受到外力 $F(t)$ 作用的简谐振子，它的微分方程可以表示为

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = F(t), \quad (5.174)$$

这个方程已经写成了“分量”形式。如果我们令

$$|x\rangle = \int dt x(t)|t\rangle, \quad |F\rangle = \int dt F(t)|F\rangle, \quad (5.175)$$

$$\hat{D} = m \frac{d^2}{dt^2} + k, \quad (5.176)$$

那么我们就将这个微分方程写成了算符形式

$$\hat{D}|x\rangle = |F\rangle, \quad (5.177)$$

要想求解这个方程，我们可以在方程两边乘上算符 \hat{D} 的逆 \hat{D}^{-1} ，这样方程就变为

$$|x\rangle = \hat{D}^{-1}|F\rangle. \quad (5.178)$$

将之写成分量形式，我们就得到了如下的结果

$$x(t) = \int dt' D^{-1}(t, t') F(t). \quad (5.179)$$

我们可以看到，上式中的积分核函数 $D^{-1}(t, t')$ 恰恰就是方程的格林函数。这意味着格林函数就是算符的逆在坐标基矢下的分量。

接下来我们考虑定态薛定谔方程。定义系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V. \quad (5.180)$$

系统的量子态与无穷维态空间中的一个态矢 $|\psi\rangle$ 相对应，¹⁸ 因此我们可以将定态薛定谔方程表示为

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (5.181)$$

这实际上就是在求无穷维哈密顿算符 \hat{H} 的本征值方程。将这个本征值方程求解出来，我们可以得到一系列本征值 E_n 和本征态 $|n\rangle$

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (5.182)$$

¹⁷更严格地说，我们在量子力学中所考虑的实际上是一个推广的希尔伯特空间。在这个空间中我们容许存在一些自身的内积不存在，但是与希尔伯特空间中的其它矢量存在内积的元素（如严格的平面波或点粒子等）。

¹⁸严格来说，希尔伯特空间中的态矢乘以一个常数系数所对应的仍然是相同的量子态，因此一个量子态所对应的实际上是希尔伯特空间中的一条射线。

这与我们此前得到的结论是相同的。

对矢量取厄密共轭，我们可以得到一个行矢量。比如对于矢量

$$\mathbf{X} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad (5.183)$$

来说，它的厄密共轭定义为

$$\mathbf{X}^\dagger = \sum_i x_i^* \mathbf{e}_i^\dagger. \quad (5.184)$$

这里的 \mathbf{X}^\dagger 和基矢 \mathbf{e}_i^\dagger 都是行矢量。类似地，对于函数空间中的任意一个态矢

$$|f\rangle = \int dx f(x) |x\rangle, \quad (5.185)$$

我们也可以定义一个对偶矢量

$$\langle f| = \int dx f^*(x) \langle x|, \quad (5.186)$$

它相当于无穷维函数空间中的一个“行矢量”。¹⁹

两个矢量 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 的内积可以定义为 \mathbf{X} 的厄密共轭与 \mathbf{Y} 相乘

$$\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y} = \sum_{ij} X_i^* Y_j \mathbf{e}_i^\dagger \mathbf{e}_j. \quad (5.187)$$

由于基矢之间满足正交归一关系，因此有 $\mathbf{e}_i^\dagger \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ，于是

$$\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y} = \sum_{ij} X_i^* Y_j \delta_{ij} = \sum_i X_i^* Y_i. \quad (5.188)$$

类似地，函数空间中矢量 $|f\rangle, |g\rangle$ 的“内积”也可以定义为 $|f\rangle$ 的对偶矢量 $\langle f|$ 与 $|g\rangle$ 的乘积 $\langle f|g\rangle$ 。由于坐标基矢满足正交归一关系

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad (5.189)$$

因此两个函数空间中矢量的内积可以表示为²⁰

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle &= \int dx dx' f^*(x) g(x') \langle x|x'\rangle \\ &= \int dx dx' f^*(x) g(x') \delta(x - x') \\ &= \int dx f^*(x) g(x). \end{aligned} \quad (5.190)$$

这意味着函数空间中矢量的内积等于对应分量乘积后再求和（在连续情况下是积分）。

虽然基矢之间的内积 $\mathbf{e}_i^\dagger \mathbf{e}_j$ 是一个数，但是将它们调换顺序相乘 $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\dagger$ ，其结果却是一个矩阵。并且这个矩阵刚好只有对应于 i 行 j 列的一个元素为 1，而其余的元素都为零。因此，一般的矩阵将可以表示为各个 $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\dagger$ 的线性组合的形式

$$D = \sum_{ij} D_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\dagger, \quad (5.191)$$

其中 D_{ij} 是矩阵 i 行 j 列的元素，它可以表示为

$$D_{ij} = \mathbf{e}_i^\dagger D \mathbf{e}_j. \quad (5.192)$$

类似地，对于算符我们也可以写出相应的结果

$$D(x, x') = \langle x|\hat{D}|x'\rangle, \quad (5.193)$$

¹⁹ 严格一点说，对偶矢量处在函数空间的对偶空间，它是函数空间上的线性泛函。对偶矢量接受一个态矢，与之做内积后输出一个实数。我们在前面讨论广义相对论的时候曾遇到过类似的概念，如果用广义相对论中的概念来类比，那么函数空间中的矢量就类似于流形上的协变矢量 A_μ ，而对偶空间中的对偶矢量就类似于流形上的逆变矢量 A^μ 。

²⁰ 凡满足内积公理的映射，都可以定义为函数空间中的内积。更一般地，我们可以将函数空间中的内积选取为 $\langle f|g\rangle = \int dx f^*(x) g(x) \rho(x)$ ，这被称为以 $\rho(x)$ 为权的内积。

$$\hat{D} = \int dx dx' D(x, x') |x\rangle \langle x'| = \int dx dx' |x\rangle \langle x| \hat{D} |x'\rangle \langle x'|. \quad (5.194)$$

这里的 $D(x, x')$ 就是算符 \hat{D} 在坐标基矢下的分量。对于态矢来说也有类似的结果

$$f(x) = \langle x|f\rangle, \quad (5.195)$$

$$|f\rangle = \int dx f(x) |x\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|f\rangle. \quad (5.196)$$

利用上述结果，我们可以将方程完全改写成算符形式。比如对于微分方程

$$\hat{D}|f\rangle = |g\rangle \quad (5.197)$$

来说，它在坐标基矢下将表示为

$$\int dx \left(\int dx' \langle x|\hat{D}|x'\rangle \langle x'|f\rangle \right) |x\rangle = \int dx \langle x|g\rangle |x\rangle. \quad (5.198)$$

这个方程的分量就是

$$\int dx' \langle x|\hat{D}|x'\rangle \langle x'|f\rangle = \langle x|g\rangle. \quad (5.199)$$

因此，我们平常写下的微分方程，只是算符方程在坐标基矢下的分量。

将方程改写成算符形式，可以极大地加深我们对理论的认识。我们可以超越坐标基矢的狭小范围，以更深入的视角探讨矢量本身的性质和演化。例如对于微分方程

$$\hat{D}|f\rangle = |g\rangle \quad (5.200)$$

来说，我们既然可以在坐标基矢 $|x\rangle$ 下写出其分量

$$\int dx' \langle x|\hat{D}|x'\rangle \langle x'|f\rangle = \langle x|g\rangle, \quad (5.201)$$

那么我们就同样可以选用另一组（例如是离散的）基矢 $|i\rangle$ 写出其分量

$$\sum_j \langle i|\hat{D}|j\rangle \langle j|f\rangle = \langle i|g\rangle. \quad (5.202)$$

我们将不同的基矢称为不同的表象。不同表象下的方程本身是没什么区别的，不过有时当我们变换一组基矢后，很多事情将会变得更加容易理解。

考虑两组正交归一且完备的基矢 $|a_i\rangle, |b_i\rangle$ ，在这两组基矢下任意一个态矢量 $|\psi\rangle$ 可以表示为

$$|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\psi\rangle = \sum_i |b_i\rangle \langle b_i|\psi\rangle. \quad (5.203)$$

我们希望能够找到在不同基矢下的展开系数 $\langle a_i|\psi\rangle, \langle b_i|\psi\rangle$ 之间的关系。由于基矢 $|a_i\rangle, |b_i\rangle$ 是完备的，因此我们可以利用它们构造恒等算符

$$I = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = \sum_i |b_i\rangle \langle b_i|. \quad (5.204)$$

将这个算符作用在任何一个态矢上，得到的仍然是这个态矢本身，因此我们可以将这个恒等算符插入在算符表达式中的任意位置。利用这个方法，我们就得到了态矢在不同表象下的展开系数之间的关系

$$\langle a_i|\psi\rangle = \sum_j \langle a_i|b_j\rangle \langle b_j|\psi\rangle, \quad (5.205)$$

式中 $\langle a_i|b_j\rangle$ 相当于基矢变换矩阵的矩阵元，这个结果与有限维矢量基矢变换的结果是一致的。类似地，我们可以给出在不同表象下算符矩阵元之间的变换关系

$$\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle = \sum_{kl} \langle a_i|b_k\rangle \langle b_k|\hat{A}|b_l\rangle \langle b_l|a_j\rangle. \quad (5.206)$$

利用上述结果，我们可以容易地将算符表达式变换到不同的表象之下。

如果我们选择的基矢恰好就是算符 \hat{D} 的本征矢 $|n\rangle$ ，且这组本征矢在态空间中构成一组正交归一完备的基矢，²¹ 那么在这个表象下算符 \hat{D} 将表现为一个“对角矩阵”

$$\hat{D} = \sum_n D_n |n\rangle\langle n|, \quad (5.207)$$

其中

$$D_n = \langle n|\hat{D}|n\rangle \quad (5.208)$$

为矩阵的“对角元”。在这组基矢下，微分方程 (5.200) 的分量可以简单地表示为

$$D_n \langle n|f\rangle = \langle n|g\rangle. \quad (5.209)$$

从这个方程中我们可以直接求解出 $|f\rangle$ 的分量

$$\langle n|f\rangle = \frac{1}{D_n} \langle n|g\rangle, \quad (5.210)$$

因此待求的函数就可以表示为

$$|f\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|f\rangle = \sum_n \frac{1}{D_n} |n\rangle\langle n|g\rangle, \quad (5.211)$$

这样我们就在微分算符的本征矢表象下求解出了这个方程。作为一个最重要的例子，如果 \hat{D} 是一个线性且不随时间变化的常微分算符，那么其本征态可以用 $|\omega\rangle$ 来标记，其在时间表象下的分量恰为复指数函数 $\langle t|\omega\rangle = e^{i\omega t}$ 。因此，算符 \hat{D} 在 ω 表象下是对角化的。在 ω 表象下写出方程的分量，实际上就相当于对方程进行了傅里叶变换，在变换后方程的各个 ω 分量将解耦，从而可以容易地求解出来。要想得到通常的 t 表象下的结果，只需要再做傅里叶逆变换即可。

接下来我们来讨论薛定谔方程

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t), \quad (5.212)$$

我们可以直接将薛定谔方程写成算符形式

$$\hat{H}|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle. \quad (5.213)$$

在这个表达式中时间 t 并不是一个算符，而是一个参数。态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 实际上是相当于一个随着时间不断演化的态矢 $|\Psi\rangle$ ，薛定谔方程描述了这个态矢是如何在态空间中随时间演化的。

既然我们能够普遍地将波函数看作矢量，而将算符看作是一个作用在态矢上的无穷维矩阵，那我们就没有必要在坐标基底下写出薛定谔方程。比如我们可以选取一组不随时间变化的正交归一完备基矢 $|n\rangle$ 并将态矢 $|\Psi\rangle$ 展开为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle. \quad (5.214)$$

如果系统的哈密顿算符不显含时间，则在这组基矢下，薛定谔方程将表示为

$$\sum_{mn} c_m \langle m|\hat{H}|n\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n c_n |n\rangle. \quad (5.215)$$

对上式两端左乘 $\langle n|$ ，并注意到 $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ ，我们将得到在 $|n\rangle$ 表象下波函数的分量 $c_n(t)$ 所满足的方程

$$\sum_m c_m H_{mn} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n, \quad (5.216)$$

式中 $H_{mn} = \langle m|\hat{H}|n\rangle$ 是系统的哈密顿算符在 $|n\rangle$ 表象下的矩阵元。这就是在任意一组表象 $|n\rangle$ 下的薛定谔方程。

如果我们所选取的基矢恰好是哈密顿算符的本征矢

$$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (5.217)$$

²¹ 我们在物理上所考虑的算符都是厄密算符，因此这总是可以得到满足的。

那么在这组基矢下, 哈密顿算符将是对角的, 此时矩阵元将表示为

$$H_{mn} = E_n \delta_{mn}, \quad (5.218)$$

薛定谔方程成为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) = E_n c_n(t), \quad (5.219)$$

上述两式不对指标 n 求和。这个方程可以直接求解, 其结果为

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (5.220)$$

因此, 系统在能量本征态表象下的解为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle, \quad (5.221)$$

这恰是式 (5.123)。

我们可以利用时间演化算符来更普遍地表示上述结果。定义态矢 $|\Psi(t)\rangle$ 所对应的时间演化算符 $\hat{U}(t, t_0)$ 为

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (5.222)$$

它刻画了态矢从时刻 t 到时刻 t' 的演化。将时间演化算符的表达式代入到薛定谔方程中, 我们将得到如下的算符方程

$$\hat{H} \hat{U}(t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0). \quad (5.223)$$

如果哈密顿算符不显含时间 t , 那么时间演化算符将只是 $t - t_0$ 的函数 $\hat{U}(t - t_0)$ 。将这个方程形式地求解出来, 我们得到

$$\hat{U}(t - t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}. \quad (5.224)$$

上述算符指数应当理解为一个关于 \hat{H} 的幂级数

$$\hat{U}(t - t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{-i\hat{H}(t - t_0)}{\hbar} \right]^n. \quad (5.225)$$

将之代入到时间演化算符的方程中, 可以看到它恰是方程的解。

从这个表达式中我们看出, 哈密顿算符 \hat{H} 的本征态 $|n\rangle$ 一定同样是时间演化算符 $\hat{U}(t - t_0)$ 的本征态, 并且其本征值可以表示为

$$\hat{U}(t - t_0) |n\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |n\rangle. \quad (5.226)$$

因此, 在能量表象下, 时间演化算符同样是对角的, 它可以表示为

$$\hat{U}(t - t_0) = \sum_n e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |n\rangle \langle n|. \quad (5.227)$$

将它作用在 t_0 时刻的态矢上

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_n c_n(t_0) |n\rangle, \quad (5.228)$$

我们将得到

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t_0) e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |n\rangle, \quad (5.229)$$

这与我们之前求得的结果是相同的。

我们知道, 几率振幅 $K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ 代表着在 t 时刻出现在 \mathbf{x} 处的粒子, 在 t' 时刻出现在 \mathbf{x}' 处的几率密度。这可以表示为不同时刻的态矢 $\langle \mathbf{x}', t' |$ 与 $|\mathbf{x}, t\rangle$ 的内积

$$K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x}', t' | \mathbf{x}, t \rangle, \quad (5.230)$$

式中我们用 $|\mathbf{x}, t\rangle$ 来代表粒子在 t 时刻处在 \mathbf{x} 处的状态。我们也可以以一个确定时刻 $t = t_0$ 的态矢为基准, 将几率振幅表示为

$$K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x}', t_0 | \hat{U}^\dagger(t_0 - t') \hat{U}(t_0 - t) | \mathbf{x}, t_0 \rangle = \langle \mathbf{x}', t_0 | \hat{U}(t' - t) | \mathbf{x}, t_0 \rangle, \quad (5.231)$$

由于这个结果是有普遍性的, 所选取的态矢不随时间变化, 因此我们可以更进一步地将上述表达式中态矢的时间标记略去²²

$$K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x}' | \hat{U}(t' - t) | \mathbf{x} \rangle. \quad (5.232)$$

直观地说, 它实际上就等于坐标本征态 $|\mathbf{x}\rangle$ 从时间 t 演化到 t' 所得到的状态 $\hat{U}(t' - t)|\mathbf{x}\rangle$ 与另一个坐标本征态 $\langle \mathbf{x}' |$ 的内积。换句话说, 几率振幅 $K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)$ 就是时间演化算符 $\hat{U}(t' - t)$ 在坐标表象下的分量。这个表达式实际上将量子力学的路径积分表述和薛定谔表述联系在了一起

$$\langle \mathbf{x}' | \hat{U}(t' - t) | \mathbf{x} \rangle = K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar}. \quad (5.233)$$

如果我们考虑更一般的初末状态, 那么我们将得到

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \hat{U}(t' - t) | \psi_2 \rangle &= \int d^3x d^3x' \langle \psi_1 | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \hat{U}(t' - t) | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \psi_2 \rangle \\ &= \int d^3x d^3x' \psi_1^*(\mathbf{x}') K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \psi_2(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.234)$$

这给出了系统从状态 $|\psi_2\rangle$ 演化到 $|\psi_1\rangle$ 的几率振幅。

在能量表象下, 我们可以将系统的几率振幅和迹核函数表示为更简单的形式。时间演化算符在能量表象下的表达式为

$$\hat{U}(t' - t) = \sum_n e^{-iE_n(t' - t)/\hbar} |n\rangle \langle n|. \quad (5.235)$$

因此我们可以将几率振幅表示为

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) &= \sum_n e^{-iE_n(t' - t)/\hbar} \langle \mathbf{x}' | n \rangle \langle n | \mathbf{x} \rangle \\ &= \sum_n e^{-iE_n(t' - t)/\hbar} \psi_n(\mathbf{x}') \psi_n^*(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.236)$$

式中 ψ_n 为第 n 个能量本征态的波函数。对时间演化算符求迹, 我们就得到了系统的迹核函数

$$\begin{aligned} G(t' - t) &= \int d^3x K(\mathbf{x}, t'; \mathbf{x}, t) \\ &= \int d^3x \sum_n e^{-iE_n(t' - t)/\hbar} \psi_n(\mathbf{x}) \psi_n^*(\mathbf{x}) \\ &= \sum_n e^{-iE_n(t' - t)/\hbar}. \end{aligned} \quad (5.237)$$

这样我们就得到了式 (5.124) 和 (5.126) 的结果。

我们接下来考虑另一个问题。设有一线性算符 \hat{A} , 它的各个本征值和 (正交归一的) 本征态分别为

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle. \quad (5.238)$$

如果我们问本征态 $|a_n\rangle$ 在这个算符上的“取值”是多少, 那么一个合理的答案就是 a_n 。对于一般的态

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \quad (5.239)$$

来说, 我们就不能说它在这个算符上的“取值”是多少了, 因为它并非该算符的本征态。但是, 我们可以换一个问法, 即说“平均来讲”它在这个算符上的“取值”是多少, 或者说它在这个算符上的“期望值”是多少。注意到概率应当表示为波函数模值的平方, 因此一个合适的期望值定义就是

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n. \quad (5.240)$$

这一结果可以写成等价但是更加简洁的形式

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (5.241)$$

²² 这里的态矢 $|\mathbf{x}\rangle$ 实际上就是海森堡 (Heisenberg) 绘景下的态矢。

在坐标表象下, 这一结果可以表示为

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x}) [\hat{A}\psi(\mathbf{x})]. \quad (5.242)$$

我们可以为每个力学量指定一个线性算符, 这样力学量在某态上的期望值就定义为算符在该态上的期望值。不过并非所有的线性算符都能够成为力学量, 因为尽管态是利用复数来描述的, 但我们所测量得到的力学量永远是一个实数。换句话说, 只有那些本征值全部为实数的算符才有资格成为力学量。²³ 那么, 什么样的算符的本征值才是实数呢?

假设算符 \hat{A} 可对角化, 其本征值为 a_i , 本征态为 $|a_i\rangle$, 则在其本征态表象下可以将算符 \hat{A} 表示为²⁴

$$\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (5.243)$$

通过在表达式中插入恒等算符

$$I = \sum_n |n\rangle \langle n|, \quad (5.244)$$

我们可以在任意一组正交归一完备的基矢 $|n\rangle$ 表象下写出 \hat{A} 的表达式, 结果为

$$\hat{A} = \sum_{m,n} |m\rangle \langle m| \hat{A} |n\rangle \langle n|, \quad (5.245)$$

式中

$$\langle m| \hat{A} |n\rangle = \sum_i a_i \langle m| a_i \rangle \langle a_i | n \rangle \quad (5.246)$$

为算符 \hat{A} 的矩阵元。现在我们调换矩阵元中的 $|m\rangle, |n\rangle$ 两个矢量, 并对等式两边取复共轭, 我们将得到

$$\langle n| \hat{A} |m\rangle^* = \sum_i a_i^* \langle m| a_i \rangle \langle a_i | n \rangle. \quad (5.247)$$

我们发现, 如果 \hat{A} 的本征值均为实数, 那么其矩阵元需要满足

$$\langle m| \hat{A} |n\rangle = \langle n| \hat{A} |m\rangle^*, \quad (5.248)$$

这就是算符本征值为实数的条件。在坐标表象下, 这个条件可以表示为

$$\int d^3x \psi_m^*(\mathbf{x}) [\hat{A}\psi_n(\mathbf{x})] = \int d^3x [\hat{A}\psi_m(\mathbf{x})]^* \psi_n(\mathbf{x}).$$

我们将等式右端的矩阵元定义为一个新的算符

$$\langle m| \hat{A}^\dagger |n\rangle = \langle n| \hat{A} |m\rangle^*. \quad (5.249)$$

直观地来看, 算符 \hat{A}^\dagger 相当于将算符 \hat{A} 取共轭转置, 我们称之为 \hat{A} 的厄密共轭。因此, 算符 \hat{A} 的本征值均为实数的条件等价于算符 \hat{A} 与其厄密共轭 \hat{A}^\dagger 相等

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger, \quad (5.250)$$

我们称这样的算符为厄密算符。这样我们就得到了结论: 量子力学系统中的可观测量将用一个厄密算符来表示。²⁵

厄密算符还有一个很好的性质, 那就是其各个本征态是正交归一且完备的。或者说, 我们总可以将厄密算符的本征态选取为一组正交归一且完备的基矢。这个结果实际上与有限维线性空

²³ 举例来说, 如果系统的能量本征值并非实数, 那么时间演化算符 $e^{i\hat{H}t/\hbar}$ 作用在本征态上后将会随时间呈指数增长, 这是非物理的。

²⁴ 此处有循环论证之嫌, 事实上这一表达式已经隐含了算符有一组正交完备基矢了, 这在数学上显然是一个过强的假设。

²⁵ 泛函分析的定理指出, 如果一个厄密算符的定义域为整个希尔伯特空间, 则算符一定是有界的。由于量子力学的算符是无界的 (例如坐标或动量的本征值可以无限地增大), 因此这样的算符的定义域不能是整个希尔伯特空间。数学上将厄密共轭的操作称为伴随, 一般来说伴随算符的定义域不小于算符自身的定义域。如果厄密算符之伴随的定义域恰好等于自身, 则称其为自伴算符, 它比厄密算符的要求要更严格一些。在物理上所说的厄密算符实际上指的是无界自伴算符。

间中厄密矩阵中的结论是一致的。归一性是容易说明的，完备性在数学上则并不显然²⁶，下面给出正交性的证明。计算厄密算符 \hat{A} 在两个不同的本征态 $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ 上的矩阵元，我们得到

$$\langle a_1 | \hat{A} | a_2 \rangle = \langle a_1 | (a_2 | a_2) \rangle = a_2 \langle a_1 | a_2 \rangle. \quad (5.251)$$

而对于算符 \hat{A}^\dagger 来说，其矩阵元为

$$\langle a_1 | \hat{A}^\dagger | a_2 \rangle = \langle a_2 | \hat{A} | a_1 \rangle^* = a_1^* \langle a_1 | a_2 \rangle = a_1 \langle a_1 | a_2 \rangle. \quad (5.252)$$

由于算符 \hat{A} 是厄密的，因此上述两式的矩阵元应当是相等的，即

$$a_1 \langle a_1 | a_2 \rangle = a_2 \langle a_1 | a_2 \rangle. \quad (5.253)$$

如果我们所考虑的是具有不同本征值的本征态，那么 $a_1 \neq a_2$ ，在这种情况下只能有 $\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$ ，即分属不同本征值的本征矢相互正交。而如果我们考虑的各个本征态所对应的本征值相同，那么我们可以利用格拉姆 (Gram)-施密特 (Schmidt) 正交化方法在这些简并本征态张成的子空间中选取一组正交基矢。这样我们就证明了厄密算符本征矢的正交性。作为最重要的例子，我们知道系统的哈密顿算符是一个力学量（即能量算符），因此是厄密算符。在这种情况下，我们立刻就可以得知哈密顿算符的本征态是正交归一且完备的。这是一个非常普遍的结果，与系统的具体性质无关。

我们举几个力学量所对应的算符例子。在坐标表象下，位置算符的形式为

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad (5.254)$$

动量算符的形式为

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla. \quad (5.255)$$

其余的一些算符可以利用位置和动量算符构造出来。例如系统的能量算符（哈密顿算符）为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}}). \quad (5.256)$$

另外我们还可以定义角动量算符

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}, \quad (5.257)$$

写成分量形式就是

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} x_j \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \quad (5.258)$$

式中对 j, k 求和。

算符之间是不对易的，不能够任意交换顺序。将坐标与动量的对易关系计算出来，我们得到

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j]_{\text{qm.}} = i\hbar \delta_{ij}, \quad (5.259)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j]_{\text{qm.}} = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_{\text{qm.}} = 0, \quad (5.260)$$

这被称为正则对易关系。我们发现，在经典力学中，各物理量之间的泊松括号有与之很相近的结果

$$[x_i, p_j]_{\text{cl.}} = \delta_{ij}, \quad (5.261)$$

$$[x_i, x_j]_{\text{cl.}} = [p_i, p_j]_{\text{cl.}} = 0, \quad (5.262)$$

事实上，如果我们从一开始就把所有的力学量看成算符，并且将所有的经典泊松括号换成量子力学中的对易子

$$[A, B]_{\text{cl.}} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]_{\text{qm.}}, \quad (5.263)$$

²⁶在泛函分析中可以证明谱分解定理：对于希尔伯特空间中任一自伴算符 \hat{P} 来说，总可以找到唯一的完备谱族 \hat{E}_i 将其分解为 $\hat{P}_i = \lambda_i \hat{E}_i$ 。在量子力学中谱族 \hat{E}_i 就相当于子空间 i 的投影算符， λ_i 就相当于在该投影算符上的本征值，而谱族的完备性就相当于所有投影算符之和恰好给出单位变换。因此，谱分解定理保证了量子力学中的力学量本征矢总是完备的。

那么我们将由经典力学过渡到量子力学。这个过程叫做正则量子化，它与前面几节中介绍的路径积分量子化一样，是从经典理论通向量子理论的阶梯之一。可以验证，与经典泊松括号一样，量子对易括号也满足如下的雅可比恒等式

$$[\hat{X}, [\hat{Y}, \hat{Z}]] + [\hat{Y}, [\hat{Z}, \hat{X}]] + [\hat{Z}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = 0. \quad (5.264)$$

因此，量子力学的数学结构在经典力学中得到了很大程度上的保留。当然需要说明的是，由于各算符之间是不对易的，因此在将力学量替换为算符后将产生算符次序的问题，即不知道哪个算符应当排在前，哪个算符应当排在后。习惯上可以将所有算符进行全对称化的处理，但具体将力学量的算符选取为什么形式，最终仍然要依靠实验来确定。

为了看出正则量子化后的量子力学与经典力学之间的关系，我们需要引入海森堡绘景。利用时间演化算符 $\hat{U}(t)$ ，我们可以将态矢的演化表示为

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle. \quad (5.265)$$

因此某力学量 \hat{A} 随时间变化的期望值就可以表示为

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle, \quad (5.266)$$

这可以以一种等价的方式写成

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi(0) | (\hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t)) | \Psi(0) \rangle. \quad (5.267)$$

这一表达式暗示我们，可以让态矢在演化中固定不动，而让算符随着时间发生演化。²⁷

像这种固定态矢而让算符演化的表述，我们称为海森堡绘景，这个绘景下的各个算符和态矢以上标 H 标记；而固定算符让态矢演化的绘景，我们称之为薛定谔绘景，这个绘景下的各个算符和态矢以上标 S 标记。在上述两个绘景中，态矢和算符之间的关系为

$$|\Psi^S(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi^S(0)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi^H\rangle \quad (5.268)$$

$$\hat{A}^H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}^H(0) \hat{U}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}^S \hat{U}(t). \quad (5.269)$$

特别地，若系统的哈密顿算符不随时间变化，那么由于

$$\hat{H}^H(t) = e^{i\hat{H}^S t/\hbar} \hat{H}^S e^{-i\hat{H}^S t/\hbar} = \hat{H}^S, \quad (5.270)$$

因此系统的哈密顿算符在薛定谔绘景和海森堡绘景下的表达式是相同的，我们不必对此做明显的区分。²⁸

在海森堡绘景下，态矢是不随时间变化的，而算符随时间的演化将满足

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}^H(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} [\hat{U}^\dagger(t) \hat{A}^S \hat{U}(t)] \\ &= \frac{\partial \hat{U}^\dagger(t)}{\partial t} \hat{A}^S \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}^S \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} + \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{A}^S}{\partial t} \hat{U}(t) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \hat{H}^H(t) \hat{A}^H(t) + \frac{1}{i\hbar} \hat{A}^H(t) \hat{H}^H(t) + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}^H(t), \end{aligned} \quad (5.271)$$

即

$$\frac{d\hat{A}^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}^H, \hat{H}^H] + \frac{\partial \hat{A}^H}{\partial t}, \quad (5.272)$$

特别地，我们有

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{H}], \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}], \quad (5.273)$$

²⁷虽然海森堡绘景中的态矢是不演化的，但是作为（演化着的）力学量算符本征态的基矢却仍然是在不断地演化的。其结果就是不论是在薛定谔表象下还是在海森堡表象下，态矢在基矢下的展开系数都是以相同的方式进行演化的。

²⁸对于更一般的算符指数来说，我们有如下的贝克 (Baker)-豪斯道夫 (Hausdorff) 公式

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

这被称为海森堡方程。从上式中可以看到，如果我们将力学量替换为相应的算符，将经典泊松括号换成量子的对易子，那么我们就由经典的泊松括号得到了量子的海森堡方程。

取海森堡方程的期望值，我们得到

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{A}\rangle. \quad (5.274)$$

由于力学量的期望值不随绘景变化，因此上述结论在任何一个绘景中都是成立的。这一结果被称为埃伦费斯特 (Ehrenfest) 定理，它意味着量子力学中力学量的期望值与经典力学中力学量的演化是类似的。

5.6 自旋

对于微观粒子来说，它除了以波函数的形式位于空间中之外，还携带着一个特殊的量，我们称之为自旋。以电子为例，如果我们对电子在某个方向上的自旋进行测量，那么将会发现电子处于“自旋向上”或者“自旋向下”的状态。这有些类似于硬币一样：投掷一枚硬币，我们会发现硬币处于正面朝上或者反面朝上的状态。不过量子系统中的电子与硬币是不一样的，一枚硬币要么处于正面向上的状态，要么处于反面向上的状态，而电子则可能处于某种自旋向上和自旋向下的叠加态。

由于测量电子的自旋分量总会得到两个结果，因此电子的自旋态可以用一个二维自旋空间中的态矢 $|\chi\rangle$ 来刻画。以 z 方向为例，电子可能处于自旋向上的状态 $|+\rangle_z$ ，或者自旋向下的状态 $|-\rangle_z$ 。我们选取这两个状态为自旋空间的基矢，它们之间满足正交归一关系

$${}_z\langle+|+\rangle_z = {}_z\langle-|-\rangle_z = 1, \quad {}_z\langle+|-\rangle_z = 0. \quad (5.275)$$

一般来说，电子的自旋态矢将处于自旋向上和自旋向下的叠加态

$$|\chi\rangle = \chi_{z+}|+\rangle_z + \chi_{z-}|-\rangle_z. \quad (5.276)$$

我们要求这个态矢满足归一化条件，即

$$\langle\chi|\chi\rangle = 1, \quad (5.277)$$

这意味着

$$|\chi_{z+}|^2 + |\chi_{z-}|^2 = 1. \quad (5.278)$$

不同于无穷维的空间态矢，电子的自旋态矢只有二维（向上或者向下），因此我们可以用一个二维矢量来表示这个自旋态矢。在 z 方向自旋的表象下，我们将两个基矢记为

$$|+\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.279)$$

因此我们可以将任意一个自旋态矢表示为

$$|\chi\rangle = \chi_{z+}|+\rangle_z + \chi_{z-}|-\rangle_z = \begin{pmatrix} \chi_{z+} \\ \chi_{z-} \end{pmatrix}, \quad (5.280)$$

将自旋态的共轭表示为

$$\langle\chi| = {}_z\langle+|\chi_{z+}^* + {}_z\langle-|\chi_{z-}^* = \begin{pmatrix} \chi_{z+}^* & \chi_{z-}^* \end{pmatrix}. \quad (5.281)$$

类似地，自旋空间中的算符也可以表示为二维矩阵的形式。我们定义 z 方向的自旋算符为

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_z {}_z\langle+| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle_z {}_z\langle-|. \quad (5.282)$$

²⁹ 与经典力学中的情况类似，我们假设系统的角动量算符（无论是自旋角动量还是轨道角动量）为系统旋转变换的生成元，即绕 $\hat{\mathbf{n}}$ 轴转动 $d\phi$ 角度的变换可以表示为 $\hat{D}(\hat{\mathbf{n}}, d\phi) = 1 - i\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{L}}d\phi/\hbar$ 。对于自旋 $1/2$ 的电子来说，其自旋态矢处于二维的线性空间，因此自旋算符实际上就是 $\text{SO}(3)$ 群或 $\text{SU}(2)$ 群生成元的二维表示。

将它作用在 z 方向的自旋本征态上, 结果为

$$\hat{S}_z|+\rangle_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_z, \quad \hat{S}_z|-\rangle_z = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle_z. \quad (5.283)$$

这意味着自旋向上的本征态 $|+\rangle_z$ 在 z 方向上的自旋为 $\hbar/2$, 而自旋向下的本征态 $|-\rangle_z$ 在 z 方向上的自旋为 $-\hbar/2$ 。一般地, 如果我们测量任意一个电子自旋态 $|\chi\rangle$ 在 z 方向上自旋的期望值, 那么我们将得到

$$\langle\chi|\hat{S}_z|\chi\rangle = \frac{\hbar}{2}|\chi_{z+}|^2 - \frac{\hbar}{2}|\chi_{z-}|^2. \quad (5.284)$$

类似地, 我们可以定义系统在 x 方向与 y 方向的自旋算符

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.285)$$

这两个方向自旋算符的本征值和本征态分别为

$$\hat{S}_x|\pm\rangle_x = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_x, \quad \hat{S}_y|\pm\rangle_y = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_y. \quad (5.286)$$

在 z 方向自旋的表象下, 这两个方向的自旋本征态可以表示为

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \quad (5.287)$$

可以看到, 在 x 方向与 y 方向上, 我们均有自旋为正和自旋为负的两个正交归一完备的本征态, 它们的本征值分别为 $\pm\hbar/2$ 。这一结果对于任意方向上的自旋都是成立的。

由于各个方向上的自旋本征态都是完备的, 因此我们可以将其中任意一组本征态作为基矢来对自旋空间中的态矢进行展开。比如, 如果将 x 方向上自旋本征矢作为基矢的话, 那么一般的自旋态矢可以表示为

$$\begin{aligned} |\chi\rangle &= \chi_{z+}|+\rangle_z + \chi_{z-}|-\rangle_z \\ &= \left(\frac{\chi_{z+} + \chi_{z-}}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle_x + \left(\frac{\chi_{z+} - \chi_{z-}}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle_x. \end{aligned} \quad (5.288)$$

对于 y 方向上自旋本征矢有类似的结果

$$\begin{aligned} |\chi\rangle &= \chi_{z+}|+\rangle_z + \chi_{z-}|-\rangle_z \\ &= \left(\frac{\chi_{z+} + i\chi_{z-}}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle_y + \left(\frac{\chi_{z+} - i\chi_{z-}}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle_y. \end{aligned} \quad (5.289)$$

虽然自旋本征态有正有负, 但其本征值的绝对值都是 $\hbar/2$ 。因此我们可以设想, 如果对自旋在某方向上取值的平方进行测量, 其结果应当总是 $\hbar^2/4$ 。这一结果不仅仅对自旋本征态成立, 而且对任意一个自旋态矢都成立, 并且实际上甚至对任意方向上的自旋都成立。我们还可以进一步将三个方向上的自旋算符视为自旋矢量算符 $\hat{\mathbf{S}}$ 的三个分量, 这样自旋平方算符 \hat{S}^2 将表示为

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4}. \quad (5.290)$$

在这里 \hat{S}^2 实际上是一个数 (或者是单位矩阵), 因此对任意的自旋态测量其总自旋的平方, 结果都应该是 $3\hbar^2/4$ 。

我们还可以计算各个方向自旋算符之间的对易关系, 结果为

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k. \quad (5.291)$$

这三个自旋算符实际上就是 $SU(2)$ 群的生成元, 它们给出了二维矩阵的无穷小么正变换。并且由于 $SU(2)$ 群和 $SO(3)$ 群同态, 因此这三个算符与三维矩阵的无穷小正交变换 (也就是三维空间中的无穷小旋转) 具有相同的结构。换句话说, 从某种程度上我们可以将这三个算符看作是二维复自旋空间中的“旋转”生成元。

写出自旋空间中的薛定谔方程，我们就可以研究粒子的自旋随时间的演化。举例来说，一个处在外磁场 \mathbf{B} 中的电子的自旋态会随着时间演化，其相互作用项可以写成

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{eg}{2m} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (5.292)$$

式中 e 为电子电荷量， m 为电子质量， g 为朗德 (Landé) g 因子，对于电子来说可以取为 2。³⁰ 为简便起见，我们接下来将在 z 方向自旋的表象下来描述系统。不妨设磁场的方向为 z ，它可以表示为

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.293)$$

因此相互作用项可以表示为

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{eg}{2m} B_0 \hat{S}_z = \frac{eB_0}{m} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.294)$$

在自旋空间中写出系统的薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\chi(t)\rangle = \hat{H} |\chi(t)\rangle, \quad (5.295)$$

我们就可以求解自旋态矢的演化。

如果我们所考虑的磁场不是来源于外场，而是来源于这个电子绕原子核运动所产生的磁场，那么相互作用项将可以写成

$$\hat{H}_{\text{int}} \propto \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (5.296)$$

这被称为自旋-轨道耦合。在不考虑自旋-轨道耦合的情况下，同一能级上的两个自旋方向相反的电子是简并的，其本征能量相同。但是在考虑了自旋-轨道耦合的情况，不同自旋的粒子能量将不同，其结果是原来简并的能级将发生分裂。由于电子运动所产生的磁场是微弱的，因此这一效应是高阶的效应。我们可以证明，它所引起的能级分裂与原有的能级间距的比值大约为³¹

$$\alpha^2 = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 \approx \left(\frac{1}{137} \right)^2, \quad (5.297)$$

式中 α 被称为精细结构常数，它是量子理论中最重要的无量纲量。³²

对于一个电子的量子态来说，它既有空间部分的态矢，也有自旋部分的态矢。由于空间部分和自旋部分的态矢处于两个独立且互相没有关联的态空间中，因此系统总的态空间就是空间部分 $|\mathbf{x}\rangle$ 和自旋部分 $|\pm\rangle$ 的“直积”（简单点说，就是直接将这两个态空间“放在一起”）。这样电子的总态矢将可以表示为

$$|\Phi\rangle = \int d^3x (\psi_+(\mathbf{x})|\mathbf{x}\rangle|+\rangle + \psi_-(\mathbf{x})|\mathbf{x}\rangle|-\rangle). \quad (5.298)$$

它的分量形式可以表示为

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (5.299)$$

特别地，如果系统的自旋部分和空间部分没有耦合，那么总态矢将可以写成两部分态矢的直积

$$|\Phi\rangle = |\psi\rangle_{\text{space}} |\chi\rangle_{\text{spin}}. \quad (5.300)$$

这个态矢的分量可以表示为

$$\Phi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}. \quad (5.301)$$

³⁰ 朗德 g 因子度量的是量子磁矩与经典磁矩之间的比值，这个因子的值可以直接从量子场论中计算出来。对于电子来说，其值只是近似地等于 2，它与 2 偏离的那部分被称为电子的反常磁矩。

³¹ 除了自旋-轨道耦合之外，还有一个效应可以产生量级相当的能级分裂，这就是电子的相对论修正。自旋-轨道耦合和相对论修正一起，给出了原子能级的精细结构。

³² 像光速、普朗克常数这样的有量纲量，它们的取值可以通过单位的变换而变化，这也是为什么在自然单位制中我们可以将它们简便地取为 1 的原因。但是对于无量纲量来说，无论我们的单位取为什么，它们的取值都不会发生改变。因此从某种意义上来说，我们可以认为这些无量纲量与人为的选择无关，它们的取值反映了我们宇宙的基本性质。对于精细结构常数来说，其取值为何接近于 $1/137$ 仍然是一个未解之谜。

在前面的讨论中, 我们认为粒子的自旋有两个分量, 且其平方的期望值为 $3\hbar^2/4$ 。这样的粒子被称为自旋 $1/2$ 的粒子 (即自旋量子数为 $1/2$ 的粒子), 这是在量子力学中最常见的情况, 电子、质子和中子都是自旋为 $1/2$ 的粒子。但是对于其他的粒子来说, 自旋量子数可以一般地取为 j , 这里 j 是一个非负的整数或者是形如 $1/2, 3/2$ 的半整数。对这样的粒子在某方向测量其自旋分量, 将可能得到 $(2j+1)$ 种不同的结果, 我们用 m 来标记不同的结果, 这里 m 取值可以为 $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ 。

我们将自旋为 j 且在 z 方向上自旋分量为 m 的量子态记为 $|j, m\rangle$ 。如果对这样的量子态测量总自旋的平方, 我们将会得到

$$\hat{S}^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle. \quad (5.302)$$

如果测量 z 方向上的自旋分量, 我们将会得到

$$\hat{S}_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle. \quad (5.303)$$

这些自旋算符都是作用在自旋态矢上的 $(2j+1) \times (2j+1)$ 维矩阵, 它们实际上是 $SU(2)$ 群的 $2j+1$ 维不可约表示。如果我们让 $j = 1/2$, 那我们就回到了之前讨论过的二分量自旋态的情况。

最后需要再次重申一下, 量子力学中的自旋是额外引入的假设, 它不能从路径积分或者是其他的量子化形式中推导出来。要想“自然”地得到粒子的自旋, 我们只能借助量子场论。如果对于标量场进行量子化, 那么我们得到的就是自旋为 0 的粒子; 如果对于旋量场进行量子化, 那么我们得到的就是自旋为 $1/2$ 的粒子; 如果对矢量场进行量子化, 那么我们得到的就是自旋为 1 的粒子, 以此类推。它们本质上代表着洛伦兹群的不同表示。

5.7 多粒子系统

我们已经给出了单粒子的路径积分表达式, 它对所有可能的路径进行加权求和, 其中每条路径的权重为路径经典作用量的复指数函数。将这一结果推广到多粒子体系的方法是直接的。假设系统中有多个粒子, 其中第 i 个粒子的路径记为 $x_i(t)$ 。这样, 体系的经典拉格朗日量就可以表示为

$$L = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2(t) - V(x_i(t)). \quad (5.304)$$

体系的几率振幅就是对所有粒子的所有可能路径的积分

$$K = \int \mathcal{D}[x_i(t)] e^{iS[x_i(t)]/\hbar}, \quad (5.305)$$

其中对路径的积分可以仿照单粒子的情况, 定义为对若干个离散时刻的各个粒子位置进行积分, 乘以归一化系数后再取连续极限。

与单粒子系统的情况类似, 多粒子系统的薛定谔方程可以表示为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}_i, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}_i, t), \quad (5.306)$$

式中

$$\hat{H} = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(\mathbf{x}_i, t) \quad (5.307)$$

为系统的哈密顿算符, ∇_i 代表只对 \mathbf{x}_i 求偏导。如果我们在时刻 t 去测量各个粒子的位置, 会发现第一个粒子位于 \mathbf{x}_1, \dots , 第 n 个粒子位于 \mathbf{x}_n 的概率为 $|\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)|^2$ 。将薛定谔方程写成算符形式, 我们可以得到

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle, \quad (5.308)$$

其中态矢 $|\Psi\rangle$ 的分量就是波函数

$$|\Psi\rangle = \int d^3x_i \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) |\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\rangle, \quad (5.309)$$

我们也可以把这里的基矢写成各个单粒子态空间基矢的直积

$$|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle \otimes |\mathbf{x}_2\rangle \otimes \dots \otimes |\mathbf{x}_n\rangle, \quad (5.310)$$

简记为

$$|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle |\mathbf{x}_2\rangle \dots |\mathbf{x}_n\rangle. \quad (5.311)$$

如果系统间的各个粒子之间没有相互作用，那么它们的演化将是独立的，其结果就是系统的波函数可以写成分离变量的形式³³

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t) = \Psi_1(\mathbf{x}_1, t) \Psi_2(\mathbf{x}_2, t) \dots \Psi_n(\mathbf{x}_n, t). \quad (5.312)$$

在算符形式下，这意味着系统的多粒子态矢可以写成各个单粒子态矢的直积

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle |\Psi_2\rangle \dots |\Psi_n\rangle. \quad (5.313)$$

像这样的态，我们称为直积态，这代表量子系统中的粒子“各行其是”，互不干扰。如果一个态不能写成各个单粒子态的直积，那么这代表不同的粒子之间在量子层面上是相互耦合、相互叠加的，我们把这样的态称为纠缠态。

如果一个二粒子系统中的第一个粒子处于 $|a_1\rangle$ 态，第二个粒子处于 $|a_2\rangle$ 态，那么总的二粒子态矢可以写成

$$|\Psi\rangle = |a_1\rangle |a_2\rangle. \quad (5.314)$$

而如果我们调转两个粒子的状态，使得第一个粒子处于 $|a_2\rangle$ 态，第二个粒子处于 $|a_1\rangle$ 态，那么总的二粒子态矢可以写成

$$|\Psi'\rangle = |a_2\rangle |a_1\rangle, \quad (5.315)$$

这与 $|\Psi\rangle = |a_1\rangle |a_2\rangle$ 是不同的两个态。在这种情况下，我们可以明确地说出哪个粒子处在哪个态上。

在量子力学中有一条基本原理，它指出同种粒子之间是完全相同、不可分辨的。我们将这种完全相同、无法分辨的粒子称为全同粒子，将这条原理称为全同性原理。如果一个系统是由两个全同粒子组成的，那么我们就不能说像前面所讨论的那样说第一个粒子处于 $|a_1\rangle$ 态，而第二个粒子处于 $|a_2\rangle$ 态，我们实际上不能够确切地说出究竟是“哪一个”粒子处在某一个态上。因此，前面用来描写二粒子系统的态矢 $|\Psi\rangle = |a_1\rangle |a_2\rangle$ 将是不合适的，我们必须寻找一个新的态矢来描述全同粒子构成的系统。

全同粒子不可分辨，意味着交换两个全同粒子不会产生任何可观测的效应。由于在量子力学中只有态矢的模平方是可观测量，因此我们容许交换两个全同粒子后至多引入一个相位的偏差。我们定义交换算符

$$\hat{P}_{12}|a_1\rangle |a_2\rangle = |a_2\rangle |a_1\rangle, \quad (5.316)$$

那么全同粒子不可分辨就意味着

$$\hat{P}_{12}|\Psi\rangle = e^{i\theta}|\Psi\rangle. \quad (5.317)$$

但是我们注意到将系统交换两次后得到的一定是原来的态，因此

$$\hat{P}_{12}^2|\Psi\rangle = e^{i2\theta}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (5.318)$$

这意味着

$$e^{i\theta} = \pm 1, \quad (5.319)$$

换句话说，交换两个全同粒子要么保持态矢不变，要么使得态矢取负号。我们把交换后态矢不变的那种粒子称为玻色 (Bose) 子，把交换后态矢取负号的那种粒子称为费米 (Fermi) 子。

³³这同时还要求系统的初始条件也必须可以写成分离变量的形式。

我们可以根据这两种情况分别构造出相应的对称态矢和反对称态矢。假设二粒子系统中有一个粒子处于 $|a_1\rangle$ 态, 有一个粒子处于 $|a_2\rangle$ 态。那么对于玻色子来说, 它在交换下对称, 因此相应的对称态矢为

$$|\Psi\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|a_2\rangle + |a_2\rangle|a_1\rangle). \quad (5.320)$$

而对于费米子来说, 它在交换下反对称, 因此相应的反对称态矢为

$$|\Psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|a_2\rangle - |a_2\rangle|a_1\rangle). \quad (5.321)$$

上面的两个态矢都是纠缠态, 也就是说两个全同粒子是“纠缠”在一起的, 无法把它们分开, 也就不能够说哪个粒子处在哪个态上。但是, 如果我们去考察相对应的态的话, 却总能发现有一个粒子处在其上。因此, 这个态矢将适用于刻画全同粒子组成的系统。

如果二粒子系统的两个粒子处在同一个态 $|a\rangle$ 上, 那么对于玻色子系统来说是没有问题的, 其对称态矢直接取为

$$|\Psi\rangle_a = |a\rangle|a\rangle. \quad (5.322)$$

但是, 如果我们考虑费米子系统, 就会发现其反对称态矢将取为零, 这实际上意味着两个全同的费米子不能处于相同的量子态上。这条原理被称为泡利不相容原理。

全同粒子的交换对称性可以引起可观测的效应。为了看出这一点, 我们在坐标表象下将二粒子的对称波函数和反对称波函数统一表示为

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\mathbf{x}_1)\psi_2(\mathbf{x}_2) \pm \psi_1(\mathbf{x}_2)\psi_2(\mathbf{x}_1)], \quad (5.323)$$

式中 $+$ 代表玻色子的对称波函数, $-$ 代表费米子的反对称波函数, $\psi_1(\mathbf{x}_2)$ 代表第 1 个粒子在 \mathbf{x}_2 处的单粒子波函数, 以此类推。现在假设两粒子间具有相互作用 $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, 那么计算两粒子间相互作用势能的期望值, 我们将得到

$$\langle\psi|V|\psi\rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = D \pm E, \quad (5.324)$$

式中

$$D = \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_1^*(\mathbf{x}_1)\psi_2^*(\mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\psi_2(\mathbf{x}_2)\psi_1(\mathbf{x}_1) \quad (5.325)$$

$$E = \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_1^*(\mathbf{x}_1)\psi_2^*(\mathbf{x}_2)V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\psi_2(\mathbf{x}_1)\psi_1(\mathbf{x}_2) \quad (5.326)$$

分别为直接积分和交换积分, $+$ 代表玻色子, 而 $-$ 代表费米子。直接积分实际上就是两个独立粒子的相互作用能量, 而交换积分代表由于全同效应引起的相互作用能量修正。如果两个全同粒子之间的相互作用是库伦排斥作用

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} > 0, \quad (5.327)$$

那么我们得到交换积分 $E > 0$ 。由于交换作用, 玻色子之间倾向于相互聚集, 因此其相互作用能量较高; 而费米子之间倾向于相互排斥, 因此其相互作用能量较低。在两个粒子距离足够远的情况下, 它们的波函数之间将几乎没有交叠, 因此交换积分将趋于零。此时我们可以放心地略去这一项, 而将它们视为没有纠缠的独立粒子。

在前面的讨论中, 我们只涉及了空间上的态矢, 然而对于真实的多粒子系统来说, 总态矢应当表示为空间态矢和自旋态矢的直积

$$|\Phi\rangle = |\Psi\rangle_{\text{space}}|\chi\rangle_{\text{spin}}. \quad (5.328)$$

我们说费米子和玻色子的态矢是对称的还是反对称的, 这是针对总态矢而言的。玻色子的总态矢是对称的, 因此由全同玻色子构成的系统有两种可能的情况: 空间态矢和自旋态矢均为对称, 或者空间态矢和自旋态矢均为反对称

$$|\Phi\rangle_s = |\Psi\rangle_s|\chi\rangle_s, \quad |\Phi\rangle_a = |\Psi\rangle_a|\chi\rangle_a. \quad (5.329)$$

而费米子的总态矢是反对称的，因此由全同费米子构成的系统有两种可能的情况：空间态矢对称而自旋态矢反对称，或者空间态矢反对称而自旋态矢对称

$$|\Phi\rangle_a = |\Psi\rangle_s |\chi\rangle_a, \quad |\Phi\rangle_a = |\Psi\rangle_a |\chi\rangle_s. \quad (5.330)$$

以双电子体系为例，电子是费米子，其自旋有两个分量，因此双电子系统可能的对称自旋态矢有三种

$$|\chi\rangle_s = \begin{cases} |+\rangle|+\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) \\ |-\rangle|-\rangle \end{cases}, \quad (5.331)$$

这样的态被称为三重态。而可能的反对称自旋态矢只有一种，那就是

$$|\chi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle), \quad (5.332)$$

这样的态被称为单重态。由于双电子系统的总态矢是反对称的，因此三重态的空间态矢是反对称的，而单重态的空间态矢是对称的。

以上我们讨论了二粒子系统的对称态矢和反对称态矢，类似地可以讨论任意多个粒子所组成的系统。如果粒子是全同的，那么粒子之间要么全部是对称的，要么全部是反对称的。假设系统有 N 个粒子，它们分别处于单粒子态 $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_N\rangle$ 上。为了写出全同粒子波函数，我们需要遍历粒子所有可能的排列，并除以所有可能的置换的数量。假设在这些粒子中有 n_i 个粒子处于 i 态，那么所有可能的交换不同粒子态的置换的数量为

$$P = \frac{N!}{\prod_i n_i!}. \quad (5.333)$$

因此系统的全对称波函数可以表示为

$$|\Phi\rangle_s = \sqrt{\frac{\prod_i n_i!}{N!}} \sum_{k_1, \dots, k_n} |a_{k_1}\rangle |a_{k_2}\rangle \dots |a_{k_n}\rangle, \quad (5.334)$$

式中 k_1, k_2, \dots, k_n 是将序列 $1, 2, \dots, n$ 的元素进行置换所得到的一个序列，并且对 k_1, k_2, \dots, k_n 取遍 $1, 2, \dots, n$ 的一切排列求和。对于费米子来说，每交换两个粒子就会产生一个负号。注意到对费米子来说各 n_i 只能等于 0 或 1，因此系统的全反对称波函数可以表示为

$$|\Phi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{k_1, \dots, k_n} (-1)^k |a_{k_1}\rangle |a_{k_2}\rangle \dots |a_{k_n}\rangle, \quad (5.335)$$

式中 k 是序列 k_1, k_2, \dots, k_n 交换的次数。³⁴

在量子力学中，粒子的全同性是作为一个假设额外加入到系统之中的，³⁵ 我们必须额外要求波函数应当满足对称或者反对称的条件。如果想“自然地”得到全同性原理，我们需要借助量子场论。在量子场论中，我们将把粒子看作是场的激发态。场的各个激发态之间并没有任何的差别，因此我们在原则上也就不可能区分出各个粒子。换句话说，微观粒子的全同性是量子场论的自然结果。除此之外，我们发现粒子的交换对称性与其自旋有关，自旋为半整数的粒子都是费米子，而自旋为整数的粒子都是玻色子。这一结果被称为自旋-统计关联，它也是量子场论的自然推论。

全同粒子的概念会带来一些概念上的困惑。比如处在地球两端的两个电子，它们之间也是完全不可分辨的吗？又或者说整个宇宙中的所有电子，难道都以一种复杂的方式反对称化，从而纠缠在一起吗？根据全同性原理来看，确实是这样的，不过这与我们的直觉相违背。出现这个问题

³⁴利用行列式记号，我们可以将多粒子系统的反对称波函数表示为 $\Phi_A(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det(\phi_i(\mathbf{x}_j))/\sqrt{N!}$ ，式中各 $\phi_i(x_j)$ 为单粒子波函数， i, j 均为独立指标，并对 i, j 取不同值所得到的矩阵求行列式。这被称为斯莱特 (Slater) 行列式。

³⁵有文献在路径积分量子化过程中利用对易的普通积分来处理玻色子系统，而利用反对易的格拉斯曼积分来处理费米子系统。但这并不能够完全地得出粒子的全同性和交换对称性。我们在后文中会利用这一做法来处理量子场论。

的原因在于,量子系统中类似于“某个粒子”这样的概念已经不再成立了。因此我们将不能像在经典物理中的那样,说“某个粒子”如何如何,而只能说“有粒子”如何如何。

一个可行的解决方案是,我们可以彻底抛弃掉“某个粒子处在某个态上”这样的看法,而只说“在某个态上有多少个粒子”。我们选取单粒子空间中的一组正交完备基 $|1\rangle, |2\rangle, \dots$, 用一个无穷维的态矢量 $|n_1, n_2, \dots\rangle$ 来代表“在态 $|1\rangle$ 上有 n_1 个粒子, 在态 $|2\rangle$ 上有 n_2 个粒子, ……”这样一个多粒子体系, 其所对应的波函数就是前面所提到的全对称波函数或者全反对称波函数。以这样一组多粒子态 $|n_1, n_2, \dots\rangle$ 为基矢的表象称为粒子数表象。一般地, 一个多粒子系统的状态可以由这些基矢的线性组合来表示

$$|\Phi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} C(n_1, n_2, \dots) |n_1, n_2, \dots\rangle, \quad (5.336)$$

式中 $C(n_1, n_2, \dots)$ 为粒子数表象下的“波函数”。若我们考虑的是具有固定粒子数 n 的系统, 则各态上的粒子数取值应当满足 $n_1 + n_2 + \dots = n$ 。

由基矢 $|n_1, n_2, \dots\rangle$ 张成的态空间被称为福克 (Fock) 空间, 它同样是一个希尔伯特空间。当然, 我们也容许所选取的基矢 $|1\rangle, |2\rangle, \dots$ 为连续谱 (比如自由粒子的平面波基矢)。对于玻色子来说, 每个态上可以包含任意多的粒子, 因此各态上的粒子数 n_i 可以取为任意的自然数。而对于费米子来说, 两个粒子不能够处于相同的量子态, 因此各态上的粒子数 n_i 只能取 0 或 1。

为了给出粒子数表象下的算符表达式, 我们可以定义一组非厄密的产生算符和湮灭算符。对于玻色子来说, 定义态 $|i\rangle$ 上的产生算符为

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle, \quad (5.337)$$

它代表算符在态 $|i\rangle$ 上增加了一个粒子。定义态 $|i\rangle$ 上的湮灭算符为

$$\hat{a}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, & n_i \neq 0 \\ 0, & n_i = 0 \end{cases}, \quad (5.338)$$

它代表算符在态 $|i\rangle$ 上减少了一个粒子。真空态 $|0\rangle$ 定义为所有态上的粒子数均为零的状态, 它可以被所有湮灭算符湮灭为零

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0. \quad (5.339)$$

任意的多粒子态都可以通过将产生算符连续作用在真空态上得到

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \prod_i \frac{(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle, \quad (5.340)$$

式中 $\sqrt{n_i!}$ 为考虑到全同性而扣除的对称化因子。对于费米子来说, 由于泡利不相容原理, 两个全同的费米子不能够占据相同的量子态, 因此我们定义态 $|i\rangle$ 上的产生算符和湮灭算符为

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \begin{cases} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle, & n_i = 0 \\ 0, & n_i = 1 \end{cases}, \quad (5.341)$$

$$\hat{a}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \begin{cases} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, & n_i = 1 \\ 0, & n_i = 0 \end{cases}, \quad (5.342)$$

其余性质与玻色子是一致的。

粒子的全同性将会为产生和湮灭算符施加额外的限制。考虑将两个产生算符 $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger$ 接连作用在任意态 $|\phi\rangle$ 上, 设先作用在系统上的算符产生的是第一个粒子, 后作用在系统上的算符产生的是第二个粒子。由于粒子的全同性, 算符作用的顺序是重要的。如果我们交换两个算符的顺序, 那么相当于在系统中交换两个粒子的位置, 结果我们将得到

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger |\phi\rangle = \pm \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger |\phi\rangle, \quad (5.343)$$

对产生算符也有类似的结果

$$\hat{a}_i \hat{a}_j |\phi\rangle = \pm \hat{a}_j \hat{a}_i |\phi\rangle, \quad (5.344)$$

式中 $+$ 代表玻色子, $-$ 代表费米子。

由于这个结果对任意态都成立, 因此我们得到算符表达式

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger = \pm \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger, \quad \hat{a}_i \hat{a}_j = \pm \hat{a}_j \hat{a}_i, \quad (5.345)$$

即对玻色子有

$$[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad (5.346)$$

而对费米子有

$$\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0. \quad (5.347)$$

这意味着玻色子的各算符间应当满足某种对易关系, 而费米子的各算符间应当满足某种反对易关系。计算出产生算符和湮灭算符的对易子 (反对易子), 我们得到

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad \text{玻色子}, \quad (5.348)$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \text{费米子}, \quad (5.349)$$

上述结果称为正则对易 (反对易) 关系。事实上, 正是由于这种对易或者反对易关系, 全同粒子体系才体现出交换对称性 (玻色子) 或者反对称性 (费米子)。

产生和湮灭算符在粒子数表象下是完备的, 我们可以利用它们组合得到任意的算符。一个重要的算符是

$$\hat{N} = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i. \quad (5.350)$$

将这个算符作用在粒子数本征态上, 我们得到

$$\hat{N} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sum_i n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle. \quad (5.351)$$

这说明粒子数本征态就是算符 \hat{N} 的本征态, 其本征值就是系统的总粒子数。我们将算符 \hat{N} 称为系统的粒子数算符。如果我们不对指标 i 求和, 那么得到的将是系统在某个态上的粒子数算符, 其本征值为某个态上的粒子数。

接下来我们来考察无相互作用多粒子系统的哈密顿算符, 在通常的坐标表象下它可以表示为

$$\hat{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots) = \sum_i \hat{H}_0(\mathbf{x}_i), \quad (5.352)$$

式中 $H_0(\mathbf{x}_i)$ 是对应于第 i 个粒子的单粒子哈密顿量。由于所有粒子都是全同粒子, 因此对于所有粒子来说 \hat{H}_0 的表达式都是相同的, 仅有坐标变量是不同的。如果我们所选取的基矢恰好为能量本征态 $|n\rangle$, 那么系统的哈密顿量将可以用粒子数算符表示为

$$\hat{H} = \sum_i E_i \hat{N}_i = \sum_i E_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \quad (5.353)$$

式中 E_i 为态 $|i\rangle$ 的能量。如果我们将这个哈密顿量作用在粒子数表象本征态上, 那么我们将得到

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots\rangle = \sum_i n_i E_i |n_1, n_2, \dots\rangle, \quad (5.354)$$

这确实恰当地给出了系统的总能量。

粒子数表象的单粒子基矢的选取是有很大的任意性的, 因此如果我们不选取能量本征态, 而是选取任意一组本征态 $|b_i\rangle$ 作为基矢, 那么新基矢下的产生和湮灭算符 $\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i$ 与旧基矢下的产生和湮灭算符之间的关系将满足

$$\hat{a}_i^\dagger = \sum_j \hat{b}_j^\dagger \langle b_j | i \rangle, \quad \hat{a}_i = \sum_j \langle i | b_j \rangle \hat{b}_j, \quad (5.355)$$

于是我们可以将系统的哈密顿量表示为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_i E_i \sum_{mn} \hat{b}_m^\dagger \langle b_m | i \rangle \langle i | b_n \rangle \hat{b}_n \\ &= \sum_{mn} \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_n \langle b_m | \left[\sum_i E_i | i \rangle \langle i | \right] | b_n \rangle.\end{aligned}\quad (5.356)$$

括号中的算符恰好是单粒子的哈密顿量 \hat{H}_0 ，于是我们可以将上式表示为

$$\hat{H} = \sum_{mn} \langle b_m | \hat{H}_0 | b_n \rangle \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_n. \quad (5.357)$$

这样我们就得到了在任意一组基矢所对应的粒子数表象下无相互作用多粒子系统的哈密顿量表达式。

对于有相互作用的多粒子系统来说，系统中将会包含两体或者多体的相互作用，此时系统的哈密顿量算符在坐标表象下将可以表示为

$$\hat{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots) = \sum_i \hat{H}_0(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \hat{V}_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \dots, \quad (5.358)$$

式中 $\hat{V}_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 代表粒子 i 与粒子 j 之间的二体相互作用算符，更高阶算符以此类推。在一般的粒子数表象下，这个多粒子哈密顿算符将可以表示为

$$\hat{H} = \sum_{ij} \langle b_i | \hat{H}_0 | b_j \rangle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \sum_{ijkl} \langle b_i b_j | \hat{V}_2 | b_k b_l \rangle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k \hat{b}_l + \dots \quad (5.359)$$

式中 $|b_k b_l\rangle = |b_k\rangle |b_l\rangle$ 为二粒子态矢。在坐标表象下，上述算符的矩阵元可以表示为

$$\langle b_i | \hat{H}_0 | b_j \rangle = \int d^3x \psi_i^*(\mathbf{x}) \hat{H}_0(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}), \quad (5.360)$$

$$\langle b_i b_j | \hat{V}_2 | b_k b_l \rangle = \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_i^*(\mathbf{x}_1) \psi_j^*(\mathbf{x}_2) \hat{V}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi_k(\mathbf{x}_2) \psi_l(\mathbf{x}_1), \quad (5.361)$$

更高阶算符的矩阵元以此类推。

在量子力学中，我们对于系统的哈密顿量有一个基本的要求，那就是它必须是厄密的。哈密顿量的厄密性保证了系统的态矢在演化的过程中始终是归一化的，换句话说原来是 n 个粒子的系统，经过一段时间的演化后仍然是 n 个粒子的系统，只是各个粒子所处的量子态发生了变化。对于通常的量子力学来说，这一性质是非常重要的。但是对于我们这里所考虑的多粒子系统来说，厄密性的条件就显得并不十分必要了。若我们引入一个非厄密的哈密顿量，则系统的粒子数将可能在演化过程中发生变化。换句话说，有些粒子在演化的过程中被产生了出来，而另一些粒子在演化的过程中消失了。这种具有粒子产生与消失的物理过程是更普遍的。

至此我们已经给出了一般的相互作用多粒子体系的哈密顿量在粒子数表象下的表达式，它可以以一种统一的方式描述多粒子体系的相互作用。若对体系的哈密顿量进行适当的扩展，则它还可以描述粒子的产生与消失。但我们还可以再大胆地前进一步。现在考虑一个一维的量子谐振子，其哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2. \quad (5.362)$$

我们将介绍一种算符方法，它可以以一种更有启发性的方式求出系统的本征值。定义两个非厄密的算符 \hat{a}, \hat{a}^\dagger ，它们满足

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (-i\hat{p} + m\omega\hat{x}). \quad (5.363)$$

根据正则对易关系，可以验证这两个算符之间的对易关系为

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (5.364)$$

利用这两个算符，我们可以将系统的哈密顿量表示为

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right), \quad (5.365)$$

式中 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 。由于 \hat{H} 仅仅是 \hat{N} 的一个线性函数，因此它们可以同时对角化，这意味着它们具有相同的本征态。也就是说，若我们能够找到算符 \hat{N} 的一系列归一化本征态 $|n\rangle$ 以及相应的本征值 n

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (5.366)$$

那么 $|n\rangle$ 将同样是 \hat{H} 的本征态，且其本征值为

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle. \quad (5.367)$$

这样，求解谐振子本征值和本征态的问题就归结为了求出算符 \hat{N} 的本征值和本征态。

为求出算符 \hat{N} 的本征态，我们来计算 \hat{N} 和 \hat{a}, \hat{a}^\dagger 的对易关系，结果为

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (5.368)$$

这意味着若 $|n\rangle$ 是 \hat{N} 的一个本征态，则将算符 \hat{a}, \hat{a}^\dagger 作用于态 $|n\rangle$ 后，得到的仍然是 \hat{N} 的本征态，且其本征值为

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle, \quad \hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle. \quad (5.369)$$

上述结果表明， $\hat{a}|n\rangle$ 的本征值相比于 $|n\rangle$ 的本征值下降了 1，而 $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ 的本征值相比于 $|n\rangle$ 的本征值升高了 1。因此，我们称算符 \hat{a}, \hat{a}^\dagger 分别为下降算符和上升算符。

$\hat{a}|n\rangle$ 以及 $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ 两个态均不是归一化的。设各 $|n\rangle$ 为 \hat{N} 的归一化本征态，计算出 $\hat{a}|n\rangle$ 以及 $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ 自身的内积，我们得到

$$\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n, \quad \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = n+1, \quad (5.370)$$

因此

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (5.371)$$

这样我们就得到了归一化的本征态。

现在设想将下降算符依次作用于本征态 $|n\rangle$ 上，我们得到

$$\hat{a}^k|n\rangle = \sqrt{n(n-1)\dots(n-k+1)}|n-k\rangle, \quad (5.372)$$

可以看到，若 n 是一个正整数，则将算符 \hat{a} 作用 $n+1$ 次后，态矢前的系数将变为零，这意味着下降算符的持续作用让这个态湮灭了。如果继续将下降算符作用于其上，则只会得到零，不会再继续下降。若 n 不是一个整数，则下降的过程将可以无限地进行下去，最终得到的态的能量将不断变低。但是对于一个真实的物理系统来说，系统的能量一定是有下界的，否则系统将会无限地跌落到越来越低的能级，从而使得整个物理世界崩溃。因此， n 非整数的态是非物理的，必须予以排除。

若所有的 n 都是整数，则我们总可以找到一个最低的本征态 $|0\rangle$ ，它可以被下降算符湮灭为零

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (5.373)$$

它就是系统的基态。然后利用产生算符相继作用于基态上，我们得到一系列归一化的激发态

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (5.374)$$

将谐振子的哈密顿算符作用于其上，我们得到

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.375)$$

这正确地给出了谐振子的本征值和本征态。³⁶

以上的推导是完全形式化的, 我们并没有预先为这一过程赋予任何的物理意义。但是我们确实可以注意到它与多体理论的相似性。若我们不将谐振子视为一个具有多个不同能级的单粒子量子体系, 而将其视为一个只有单个能级 $\hbar\omega$ 的多粒子量子体系, 那么我们将看到谐振子的本征态 $|n\rangle$ 就相当于一个具有 n 个粒子的多粒子态, 每个粒子的能量为 $\hbar\omega$ 。谐振子的升降算符 \hat{a}^\dagger, \hat{a} 实际上就相当于多粒子体系的产生和湮灭算符, 其中 \hat{a}^\dagger 使得粒子数增加 1, 而 \hat{a} 使得粒子数减少 1, 它们所满足的对易关系与多粒子体系的产生湮灭算符也是相同的。谐振子体系中的算符 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 实际上就相当于多粒子体系的粒子数算符, 将它作用在态 $|n\rangle$ 上后得到的就是该态的粒子数 n 。在这个视角下, 若一个谐振子处于第 n 激发态, 那么我们就可以说这个体系中被激发发出了 n 个粒子。若一个体系处于基态, 则其中将不存在粒子, 它所具有的能量 $\hbar\omega/2$ 被称为零点能或者真空能。

上述讨论中实际上包含着更深刻的物理思想。若我们考虑一个约束在立方体 V 中的自由场, 那么这个场的运动将可以表示为一系列分立波的集合, 这里每一个波都可以视为一个谐振子。现在我们不将每一个波的自由度视为一个量子谐振子, 而视为多粒子体系中粒子可能处于的一个态, 那么场中的每一个被激发的振动自由度, 都好像是在这个体系中产生了一系列具有确定能量的粒子一样。若我们取 $V \rightarrow \infty$ 的极限, 则分立的自由度将变为连续的自由度, 由此每一个具有确定能量的自由粒子都将与自由场中具有确定能量的平面波的激发态相对应。沿着这条道路继续前进下去, 我们将得到量子场论的正则量子化表述。我们将在后续章节中对此进行更详细的讨论。

5.8 量子统计物理

与经典力学中的情况相似, 当我们讨论由大量相同的粒子所组成的量子系统时, 我们将说它以某种随机的概率分布在各个量子态上。比如对于一束电子来说, 我们说它有 50% 几率处于自旋向上的状态, 而有 50% 几率处于自旋向下的状态。这并不是说系统处于一个形如 $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ 的叠加态 (这样的态称为纯态), 而是说它处于一个由 50% 的 $|+\rangle$ 态和 50% 的 $|-\rangle$ 态以“经典方式”混合的混合态。

诚然, 我们愿意相信任何一个物理系统都可以写成一个巨大无比的波函数, 因此本质上来说所有的态都应当是纯态, 但这是针对我们所考虑的系统 and 环境的总体来说的。在上面的例子中, 电子与仪器、观测者等等组成了一个巨大无比的纯态。但是当我们目光仅仅集中于这一束电子的时候, 我们就要将环境的部分约化掉, 剩下的就是仅仅描述粒子的一个混合态。作为一个最简单的例子, 我们可以考虑自旋纠缠态

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle).$$

当我们只关注其中一个粒子的状态时, 这个粒子就处在一个混合态上。因此, 可以说混合态来源于我们对于系统的认识不足。

³⁶ 利用上述算符方法, 我们也可以求出其归一化本征态的波函数。系统的真空态满足 $\hat{a}|0\rangle = 0$, 因此在坐标表象下, 基态波函数 $\psi_0(x)$ 应当满足

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) \psi_0(x) = 0,$$

从中我们求出归一化波函数的表达式为

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right].$$

将产生算符依次作用于基态波函数上, 我们将得到归一化的激发态波函数

$$\psi_n(x) = \frac{(2\hbar m\omega)^{-n/2}}{\sqrt{n!}} \left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right)^n \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right].$$

我们知道纯态可以用态空间中的一个态矢来描述, 其演化方式遵循薛定谔方程, 那么我们应该如何描述这种“经典混合”的状态呢? 为了看出这一点, 我们来考察混合态的力学量期望值。假设系统处于各个纯态 $|a_i\rangle$ 以比例 ρ_i 混合的混合态。如果我们测量力学量 \hat{A} 的期望值, 其结果应当是

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i \rho_i \langle a_i | \hat{A} | a_i \rangle. \quad (5.376)$$

一般来说, 我们可以用任意一组完备基 $|b\rangle$ 来表示这一期望

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i \rho_i \sum_{b', b''} \langle a_i | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \langle b'' | a_i \rangle \\ &= \sum_{b', b''} \left(\sum_i \rho_i \langle b'' | a_i \rangle \langle a_i | b' \rangle \right) \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \end{aligned} \quad (5.377)$$

接下来我们定义系统的密度矩阵算符为

$$\hat{\rho} = \sum_i \rho_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (5.378)$$

在坐标表象下, 其分量可以表示为

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}' | \hat{\rho} | \mathbf{x} \rangle = \sum_i \rho_i \psi_i(\mathbf{x}') \psi_i^*(\mathbf{x}). \quad (5.379)$$

利用这一密度矩阵算符, 我们就可以将力学量的期望值表示为

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \sum_{b', b''} \langle b'' | \hat{\rho} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}). \end{aligned} \quad (5.380)$$

上面的结果告诉我们: 力学量在某混合态下的期望值, 就等于该态的密度矩阵算符与力学量算符之积的迹。由于算符求迹的结果不依赖于表象的选取, 因此这一结果是普遍的。由此我们看到, 密度矩阵算符 $\hat{\rho}$ 携带着混合态的全部信息。以 $1/2$ 的 $|+\rangle$ 态和 $1/2$ 的 $|-\rangle$ 态所构成的自旋混合态为例, 它可以用密度矩阵简单地表示为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle \langle -| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.381)$$

计算其在任意一个力学量算符 \hat{O} 下的期望值, 结果为

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{2} \langle + | \hat{O} | + \rangle + \frac{1}{2} \langle - | \hat{O} | - \rangle, \quad (5.382)$$

这恰是两个状态力学量期望值的经典叠加。而如果一个系统处于形如 $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ 的叠加态, 那么其密度矩阵将表示为

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) (\langle +| + \langle -|) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} (|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| + |+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.383)$$

计算其在任意一个力学量算符 \hat{O} 下的期望值, 结果为

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{2} \langle + | \hat{O} | + \rangle + \frac{1}{2} \langle - | \hat{O} | - \rangle + \frac{1}{2} (\langle + | \hat{O} | - \rangle + \langle - | \hat{O} | + \rangle). \quad (5.384)$$

上式中前两项就是力学量的经典叠加, 而最后一项就是由于量子叠加效应引起的干涉项。由此我们看到, 量子叠加态和经典混合态的性质确实是不同的。

为了求出密度矩阵是如何随时间演化的, 我们需要计算密度矩阵对时间的导数。对于任意一个态矢量 $|\alpha_i(t)\rangle$ 来说, 它应当满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha_i(t)\rangle = \hat{H} |\alpha_i(t)\rangle \quad (5.385)$$

因此系统的密度矩阵对时间的导数满足

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} &= \sum_i \left[\rho_i \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a_i(t)\rangle \right) \langle a_i(t)| - \rho_i |a_i(t)\rangle \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle a_i(t)| \right) \right] \\ &= \sum_i \left[\hat{H} \rho_i |a_i(t)\rangle \langle a_i(t)| - \rho_i |a_i(t)\rangle \langle a_i(t)| \hat{H} \right] \\ &= \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}. \end{aligned} \quad (5.386)$$

于是我们可以得到密度矩阵所满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (5.387)$$

上式被称为量子刘维尔方程。

对于已经达到平衡态的系统来说，其密度矩阵不随时间变化，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = 0. \quad (5.388)$$

因此根据量子刘维尔方程，我们得到

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0. \quad (5.389)$$

这说明密度矩阵与哈密顿算符具有相同的本征矢。因此，平衡态系统的密度矩阵将可以在系统的能量表象下对角化

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |n\rangle \langle n|, \quad (5.390)$$

式中 $|n\rangle$ 为系统哈密顿量的本征态， ρ_n 代表系统处于该能级的概率。这一概率应当仅仅是该能级能量 E_n 的函数，即 $\rho_n = \rho(E_n)$ 。如果能求出 ρ_n 随能量的变化关系，那么我们就得到了热平衡系统的密度矩阵，进而也就得到了系统的热力学信息。

在经典物理之中，具有混沌性的动力学系统将体现出对初始条件的极端敏感性以及各态遍历性。这最终导致我们可以将混沌系统视为一个随机过程，认为它将以相同的概率处在各个不同的状态，并可以用统计物理的方式分析其平均性质。在量子力学中，情况将会复杂很多。这是因为虽然经典系统可以具有很强的非线性，但是量子力学的薛定谔方程却总是一个线性的方程。考虑两个初始条件非常接近的量子态 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ ，在时间演化算符 \hat{U} 的作用下开始演化。由于这一算符是一个么正的线性算符，因此它们的内积并不会随着时间的演化而发生改变

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi_1 \rangle, \quad (5.391)$$

这意味着态矢在演化的过程中并不会逐渐远离。因此，所谓对初始条件的极端敏感以及各态历经性这些概念的含义，在量子力学中都需要重新加以考虑。

不可积的量子系统将呈现出许多新奇的特性，但我们对于量子混沌的认识仍然不够充分，关于它如何导致量子的统计随机性仍然不十分清楚。不过目前大量的实验已经支持了量子统计理论的结果，这意味着基于等概率原理的量子统计物理在实验上是足够可靠的，它是一个足够有效的理论。因此，我们在这里不再过多地讨论量子统计物理的动力学基础了，感兴趣的读者可以参考量子混沌的相关专著。

如果我们假设经典系统的等概率原理对于量子系统来说仍然适用，那么这个量子系统将处于正则系综，其处于某能级的概率将正比于该能级能量的指数函数

$$\rho(E_n) \propto e^{-\beta E_n}. \quad (5.392)$$

这个结果与经典情况是相同的。因此系统的密度矩阵将可以表示为

$$\hat{\rho} = \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} |n\rangle \langle n| = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (5.393)$$

式中 Z 是一个归一化常数。由于密度矩阵满足归一化条件

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (5.394)$$

因此归一化常数 Z 的取值为

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}), \quad (5.395)$$

这被称为量子系统的配分函数。这样我们就求出了处于热平衡状态的量子系统的密度矩阵。

由此我们看到, 对于量子系统来说, 其配分函数与经典系统是相同的, 只不过我们需要将连续的能级替换成分离的能级。如果我们要计算某力学量的期望值, 只需利用下述公式计算即可

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}) = \frac{\sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}. \quad (5.396)$$

特别地, 系统内能的期望值可以表示为

$$\langle \hat{E} \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (5.397)$$

这与经典统计力学的结果是完全相同的。

在量子统计物理中, 平衡态密度矩阵的对数为

$$\ln \hat{\rho} = \sum_n (-\beta E_n - \ln Z) |n\rangle \langle n|, \quad (5.398)$$

因此其期望值可以表示为

$$\langle \ln \hat{\rho} \rangle = -\beta \langle E \rangle - \ln Z = \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} - \ln Z. \quad (5.399)$$

与热力学理论相比较, 我们发现这恰是系统的熵

$$S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}), \quad (5.400)$$

上述表达式对任意态都是适用的。如果系统的密度矩阵在某组基矢下可以表示为对角矩阵, 那么系统的熵就可以简单地表示为

$$S = -\sum_i \rho_i \ln \rho_i. \quad (5.401)$$

这个表达式体现了熵为何成为了刻画“混乱度”的标准: 熵最大的情况是系统以均等的概率处在各态上, 而这恰恰也是系统最“混乱”的情况。

作为一个简单的例子, 让我们来考察 N 个无相互作用的二分量子自旋在外磁场 B 下的热力学性质。假设每个自旋的磁矩为 μ , 则系统的总能量就可以表示为

$$E = -\mu B \sum_{i=1}^N s_i, \quad (5.402)$$

式中 s_i 为系统的自旋量子数, 它的取值为 ± 1 两种情况。要想求出系统的配分函数, 我们需要将系统所有可能的状态累加起来, 结果为

$$\begin{aligned} Z(\beta, B) &= \sum_{s_1, \dots, s_N = \pm 1} e^{\beta \mu B \sum_{i=1}^N s_i} \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{s_i = \pm 1} e^{\beta \mu B s_i} = [2 \cosh(\beta \mu B)]^N. \end{aligned} \quad (5.403)$$

有了配分函数, 我们就可以利用它来求出系统的各个热力学量。与经典统计物理类似, 系统的各个热力学量可以表示成配分函数的偏导数。我们可以依下述公式求出系统的自由能 F 、磁化强度 M 以及磁化率 χ

$$F(\beta, B) = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{N}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta \mu B)], \quad (5.404)$$

$$M(\beta, B) = -\left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_\beta = N \mu \tanh(\beta \mu B), \quad (5.405)$$

$$\chi(\beta, B) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_\beta = \beta \mu^2 [1 - \tanh^2(\beta \mu B)]. \quad (5.406)$$

从上述结果之中我们可以分析出两点结论：首先，在热力学极限 $N \rightarrow \infty$ 下，系统的各个物理量仍然保持连续，这说明系统没有发生相变；其次，当磁场 $B = 0$ 时，系统的磁化强度 $M = 0$ 。这说明系统没有产生自发磁化。

我们可以进一步考虑一个具有相互作用的二分量自旋模型。考虑一条由 N 个自旋首尾相接构成的一维自旋环，并假设只有两个最近邻的自旋之间存在相互作用 $J s_i s_{i+1}$ 。对于这样的自旋环来说，我们可以将系统的总能量写成对称的形式

$$E = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - \frac{1}{2} \mu B \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1}), \quad (5.407)$$

式中 $s_{N+1} = s_1$ 。因此它的配分函数可以表示为

$$\begin{aligned} Z(\beta, B) &= \sum_{s_1, \dots, s_N = \pm 1} e^{\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} \beta \mu B \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1})} \\ &= \sum_{s_1, \dots, s_N = \pm 1} \prod_{i=1}^N e^{\beta J s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} \beta \mu B (s_i + s_{i+1})}. \end{aligned} \quad (5.408)$$

如果我们取热力学极限 $N \rightarrow \infty$ ，那么它就等效于一个无穷长的一维相互作用自旋链。上面的这个相互作用自旋模型被称为一维伊辛 (Ising) 模型，它在统计物理中是十分重要的。伊辛模型是统计物理中寥寥可数的几个可以精确求解的相互作用系统之一，因此我们将用它来理解相互作用系统的性质。

这个配分函数的计算不是直接的，因为在求和之中各个自旋变量都耦合在一起，不能够像无相互作用的自旋那样简单地分离开来。为了计算伊辛模型的配分函数，我们可以对各个自旋变量做恰当的变换以使之“脱耦”。为了求出上述一维伊辛模型的配分函数，我们定义矩阵 P 的矩阵元为

$$\langle s_i | P | s_{i+1} \rangle = e^{\beta J s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} \beta \mu B (s_i + s_{i+1})}, \quad (5.409)$$

即

$$P = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu B)} \end{pmatrix}, \quad (5.410)$$

于是系统的配分函数可以表示为

$$\begin{aligned} Z(\beta, B) &= \sum_{s_1, \dots, s_N = \pm 1} \prod_{i=1}^N \langle s_i | P | s_{i+1} \rangle = \sum_{s_1 = \pm 1} \langle s_1 | P^N | s_1 \rangle \\ &= \text{Tr}(P^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N, \end{aligned} \quad (5.411)$$

式中 λ_1 、 λ_2 为矩阵 P 的两个本征值

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh(\beta \mu B) \pm \sqrt{e^{-2\beta J} + e^{2\beta J} \sinh^2(\beta \mu B)}. \quad (5.412)$$

取 λ_1 为两本征值中较大者，则系统的自由能可以表示为

$$F(\beta, B) = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{1}{\beta} \left(N \ln \lambda_1 + \ln \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right] \right). \quad (5.413)$$

在热力学极限下 $N \rightarrow \infty$ ，式中的第二项趋近于 0，因此系统的自由能可以表示为

$$F(\beta, B) = -NJ - \frac{N}{\beta} \ln \left[\cosh(\beta \mu B) + \sqrt{e^{-4\beta J} + \sinh^2(\beta \mu B)} \right]. \quad (5.414)$$

可以看到此时系统的热力学性质仅仅由较大的本征值决定。利用体系的自由能，我们还可以求出系统的磁化强度 $M(\beta, B)$ 以及磁化率 $\chi(\beta, B)$

$$M(\beta, B) = - \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_\beta = \frac{\mu N \sinh(\beta \mu B)}{\sqrt{\sinh^2(\beta \mu B) + e^{-4\beta J}}}, \quad (5.415)$$

$$\begin{aligned}\chi(\beta, B) &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_\beta \\ &= \frac{\beta \mu^2 \cosh(B\beta\mu)}{\sqrt{\sinh^2(B\beta\mu) + e^{-4\beta J}}} - \frac{\beta \mu^2 \sinh^2(B\beta\mu) \cosh(B\beta\mu)}{(\sinh^2(B\beta\mu) + e^{-4\beta J})^{3/2}}.\end{aligned}\quad (5.416)$$

上述结果反映了伊辛模型的热力学性质。

伊辛模型考虑处于格点上的 N 个二分量自旋在外磁场作用下的情况，并只计及最近邻自旋之间的相互作用，这个模型与铁磁体是非常相似的。铁磁体中的原子以规则的点阵形式排列，每个原子都携带着一个自旋 \mathbf{s}_i ，且两个最近邻原子之间由于交换作用所产生的能量正比于其自旋的乘积 $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$ 。因此，我们可以用伊辛模型来解释铁磁体中发生的相变现象。由于两个相邻自旋朝向相同的时候能量最低，因此自旋之间的相互作用将导致铁磁体中的自旋朝向有序排列，这一宏观的有序性将导致自发磁化现象。但随着温度的升高，无规的热运动将破坏自旋的有序性，最终自旋将完全随机排布，自发磁化现象消失。这种从有序到无序的过程称为铁磁相变，相变发生的温度称为临界温度。

通过对一维伊辛模型热力学量的分析，我们发现它在任何有限温度下无外磁场时的磁化强度均为零

$$M(T > 0, B = 0) = 0. \quad (5.417)$$

这说明在任何有限温度下，系统都不会发生自发磁化现象，也就不会在有限温度下发生铁磁相变。但是当系统处于绝对零度时，系统却在没有外磁场的情况下产生了一个非零的自发磁化强度

37

$$\lim_{T, B=0} M(T, B) = \mu N. \quad (5.418)$$

这说明从这个意义上讲，铁磁相变仍然是存在于系统之中的，而相变温度正是绝对零度。

一个发生在绝对零度的相变或许并不能够让我们满意，不过这是由于我们的模型太简单导致的结果。如果我们考虑一个二维的伊辛模型，那么它将在有限温度的地方给出相变。二维伊辛模型的严格推导非常复杂，这里从略。至于三维伊辛模型，人们尚未得到它的精确解，这是目前统计物理学之中的一个公认的难题。当然我们也可以利用平均场近似等方法对系统的统计性质进行初步分析，给出伊辛模型的主要特征。

在结束对于伊辛模型的讨论之前，我们再对相变进行一些额外的评述。所谓相变，指的就是系统的热力学量在热力学极限下发生突变或者发散的现象。比如水在从液体变成气体的时候，其体积和内能发生了突变，这就是一个相变过程。类似地，前面考虑的铁磁相变也是一个相变过程。在物理上，相变是一个极复杂的问题。我们可以设想，组成物质的每个粒子都按照其自身规律运动。但是在温度或者压强超过某个值后，系统突然间就发生了集体效应，从某一个状态突然转变成为了另一个状态，这个现象从动力学上几乎是无法理解的。从统计力学的角度来看，这件事情同样并不显然。我们知道系统的配分函数都是解析函数，并且热力学量作为配分函数的偏导数同样是解析的，因此似乎很难设想非连续的相变过程会自然地在一个解析的配分函数之中产生。

这个问题的关键在于，我们需要特别区分粒子数有限和粒子数无限的情况。定义系统的逸度为

$$z = e^{-\beta\mu}, \quad (5.419)$$

配分函数即是关于 z 的一个解析函数。在复平面上考察配分函数的性质，可以发现在体系大小有限的情况下，配分函数的零点不是正实数，但是在热力学极限下会趋近于正实轴上的某个点。这样就证明了原本没有奇异性的配分函数在热力学极限下会产生出奇异性，因此在统计物理学中确实可以用配分函数严格地描述完整的相变过程。

³⁷ 这个极限的定义并不严格。我们可以考虑这样一个过程，即令 βB 固定的情况下取 $\beta \rightarrow \infty$ 的极限，这样磁化强度将趋近于 μN 。

根据前面的讨论, 我们或许会认为经典系统的统计性质和量子系统的统计性质之间的差别仅仅是将连续的能级替换为了离散的能级而已。然而这仅仅是量子统计效应的一部分。由于量子系统中的粒子具有全同性, 因此它们与经典统计相比还会产生一些更深刻的差别。为了直观地看出这一点, 让我们来考虑 N 个无相互作用的全同粒子构成的系统。³⁸ 这样一个系统用巨正则系综来处理是比较容易的, 即假设该系统可以在保持温度和化学势恒定的情况下与热源交换粒子和能量。这样的一个系统的粒子数和能量都是可以变化的, 仿照正则系综的做法, 我们可以证明系统处在能量为 E , 粒子数为 N 的态的概率为

$$p(E, N) = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta E - \alpha N}, \quad (5.420)$$

式中

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad \alpha = -\frac{\mu}{k_B T}, \quad (5.421)$$

μ 称为系统的化学势, 而

$$\Xi = \sum_{N=1}^{+\infty} \sum_i e^{-\beta E_i - \alpha N} \quad (5.422)$$

称为系统的巨配分函数, 指标 i 代表对这个多粒子系统的状态进行求和。

由于这样一个系统的粒子数是不确定的, 因此用粒子数表象来描述该系统的状态是合适的。我们用指标 s 来标记各个单粒子态, 由于各个粒子之间是没有相互作用的, 因此多粒子态的总能量可以表示为各个粒子的能量之和

$$E(|n_1, n_2, \dots\rangle) = \sum_s n_s E_s, \quad (5.423)$$

而总粒子数将表示为各个单粒子态的粒子数之和

$$N(|n_1, n_2, \dots\rangle) = \sum_s n_s. \quad (5.424)$$

这样在粒子数表象下, 系统的巨配分函数 Ξ 将可以表示为

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{n_s} e^{\sum_s (-\beta n_s E_s - \alpha n_s)} \\ &= \prod_s \sum_{n_s} e^{-\beta n_s E_s - \alpha n_s} \\ &= \prod_s \sum_{n_s} (e^{-\beta E_s - \alpha})^{n_s}. \end{aligned} \quad (5.425)$$

定义单粒子态巨配分函数 Ξ_s 为

$$\Xi_s = \sum_{n_s=0}^1 (e^{-\beta E_s - \alpha})^{n_s}, \quad (5.426)$$

则系统的巨配分函数将可以表示为各单粒子态巨配分函数之积

$$\Xi = \prod_s \Xi_s. \quad (5.427)$$

对于费米子来说, 同一个单粒子态上最多只能包含一个粒子, 因此其单粒子态巨配分函数 Ξ_s 将表示为

$$\Xi_s = \sum_{n=0}^1 (e^{-\beta E_s - \alpha})^n = 1 + e^{-\beta E_s - \alpha}. \quad (5.428)$$

根据热力学知识, 处于该态的粒子数期望值 n_s 可以表示为 Ξ_s 的偏导数

$$n_s = - \left(\frac{\partial \ln \Xi_s}{\partial \alpha} \right)_{\beta, V} = \frac{1}{e^{\beta E_s + \alpha} + 1}, \quad (5.429)$$

³⁸ 与经典统计物理中的讨论类似, 我们在这里所讨论的并不仅限于由相同粒子构成的系统, 而是包含了更普遍的由近独立子系所构成的系统。

这里我们已经略去了期望值的符号。而对于玻色子来说，同一个单粒子态上可以包含任意多个粒子，因此其单粒子态配分函数 Ξ_s 将表示为

$$\Xi_s = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta E_s - \alpha})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta E_s - \alpha}}. \quad (5.430)$$

处于该态的粒子数期望值 n_s 将可以表示为

$$n_s = - \left(\frac{\partial \ln \Xi_s}{\partial \alpha} \right)_{\beta, V} = \frac{1}{e^{\beta E_s + \alpha} - 1}. \quad (5.431)$$

上述两个粒子数分布分别被称为费米分布和玻色分布。在经典极限下， $e^{\beta E_s + \alpha} \gg 1$ ，因此费米分布和玻色分布将自然地退化为

$$n_s = e^{-\beta E_s - \alpha}, \quad (5.432)$$

这恰是玻尔兹曼分布。

5.9 格点理论与配分函数

对于一个给定的量子系统来说，其几率振幅是很难解析地计算出来的，因此我们可以考虑利用数值方法去计算相应的路径积分。利用数值计算“化无限为有限”的思想，我们可以将连续的路径积分离散为对时空中不同点的求和。若我们采取这种方法，则连续的时空就仿佛变成了一系列离散的“格点”一样。因此，我们称这个理论为格点理论。

以粒子在一维空间中的运动为例，我们所要计算的路径积分为

$$K = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar}, \quad (5.433)$$

它对所有路径进行求和。为了对它进行数值计算，我们将把这一路径积分转变为对不同时刻的位置变量的高维积分

$$K = M \int dx_i e^{iS[x_i]/\hbar}, \quad (5.434)$$

式中 $x_i = x(t_i)$ 代表不同时刻的物体位置， M 为归一化常数。换句话说，这就相当于用一个矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来代替原来连续的路径。利用这个矢量，我们可以将路径积分简记为

$$K = M \int d\mathbf{x} e^{iS[\mathbf{x}]/\hbar}. \quad (5.435)$$

这个高维积分仍然是不能够精确计算的，因此我们还要对这个积分进行离散化。具体来说就是用对离散变量的求和来代替对连续变量的积分，这相当于让路径中的每个变量 x_i 都只能取为一系列离散化的值。因此，这里所做的离散化实际上就是相当于让路径只能在某些离散的时间点内取某些离散的值，并用这些离散的值来代替整条路径的贡献。将所有可能的离散路径的贡献累加起来，我们就得到了总的振幅。在图中把这些离散的值画出来，看起来就像是将连续的时空离散化为了一系列的“格点”，如图 5.9 所示。因此，我们将这种数值计算方法称为格点理论。

尽管上述格点理论在原则上是可行的，但是实际计算的时候就会发现它的问题。例如我们可以在计算路径积分的时候将时间均匀地分成 10 份，将整个路径积分用一个 10 维积分来代替。而对于每一个积分变量的积分，我们又将空间分成 10 份，对其中的每一个积分变量都选取 10 个值进行求和。初看起来，这是一个非常粗糙的近似，因为仅仅 10 个点的选取根本不足以给出原积分的一个可靠结果。但是，仅仅是在这样的粗糙近似之下，我们就已经考虑了多达 10^{10} 条路径的贡献。如果我们想要进行更精确的计算，那么所需要的计算量将呈指数增长。因此如果我们想要通过这种方式得到一个可靠的结果，那么它在计算上的开销将是不可承受的。

实际在计算的过程中，我们采用的是蒙特卡罗方法，即以一定的概率分布对路径进行随机采样，利用这些随机采样的结果作为所有路径之和的一个近似。可以证明，若我们以权重 $e^{iS[\mathbf{x}_i]/\hbar}$

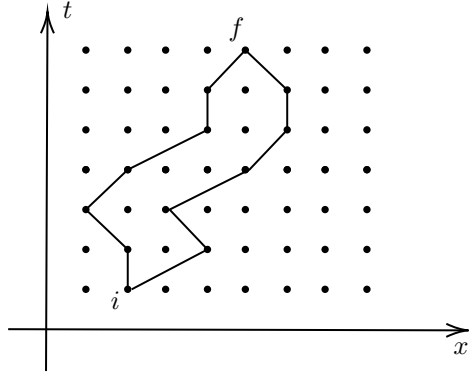


图 5.9: 将时空离散化后得到的格点。

采样一系列路径 \mathbf{x}_i , 则力学量的期望值可以简单地表示为

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{O}[\mathbf{x}_i]. \quad (5.436)$$

也就是说, 量子系统的力学量期望值就等于以 $e^{iS[\mathbf{x}_i]/\hbar}$ 分布的路径的力学量的平均值。这意味着我们不需要计算所有的路径, 而只需要按照一定的比例采样一部分的路径即可。当然, 采样的路径越多, 所得到的近似值就越接近于力学量的真实期望值。

但即使是在通过蒙特卡罗方法解决了计算量过大的问题后, 格点理论中也仍然存在着更加本质的困难。我们知道作用量 $S[\mathbf{x}_i]$ 在路径远离经典路径的时候将会迅速的增大, 因此复指数 $e^{iS[\mathbf{x}_i]/\hbar}$ 将在远离经典路径的地方以极快的速度震荡, 结果将使得数值积分不收敛而得不到任何有意义的结果。这一困难被称为格点理论中的“符号问题”, 目前尚没有很好的解决方法。

既然符号问题难以解决, 那么我们就只能退而求其次, 计算一些没有符号问题的路径积分。我们发现, 虽然几率振幅的被积函数是一个复指数, 但是如果我们让路径积分中的时间变量 t 取为一个纯虚数, 那么指数函数上的虚数单位 i 就被消去了, 路径积分也就没有了符号问题。为此我们将时间变量取为 $t = -i\tau$, 这里 τ 是一个实数, 从而作用量将变为一个实数, 可以进行路径积分。因此, 虽然“实时间”的几率振幅无法计算, 但是“虚时间”的几率振幅却是可以计算的。

在接下来的讨论中, 我们将考虑时间从负无穷到正无穷的情况。当时间取为实数 t 时, 我们所考虑的时间区间为 $(-\infty, +\infty)$, 此时系统的作用量可以表示为

$$iS[x(t)] = i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V \right], \quad (5.437)$$

路径积分表示为

$$K(x_2, +\infty; x_1, -\infty) = \int_{x(-\infty)=x_1}^{x(+\infty)=x_2} \mathcal{D}[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar}. \quad (5.438)$$

这是通常意义下的实时间路径积分, 被积函数为一个复指数函数, 存在符号问题。

现在设想将时间变量 t 由实数延拓到整个复平面上, 并将路径积分顺时针旋转 $\pi/2$ 。于是我们所考虑的时间区间变为 $(+i\infty, -i\infty)$, 此时系统的作用量变为

$$iS[x(t)] = i \int_{t=+i\infty}^{t=-i\infty} dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V \right], \quad (5.439)$$

这是沿着虚轴负向对全虚轴进行的积分。为了看出这个作用量是实的, 我们做变量代换 $t = -i\tau$, 这里 $\tau \in (-\infty, +\infty)$ 是一个实参数。因此我们可以将系统的作用量表示为

$$\begin{aligned} iS[x(-i\tau)] &= i \int_{-i\tau=+i\infty}^{-i\tau=-i\infty} d(-i\tau) \left[-\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V \right] \\ &= - \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V \right]. \end{aligned} \quad (5.440)$$

我们把这里的作用量泛函定义为 $S_E[x(\tau)]$

$$S_E[x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V \right], \quad (5.441)$$

它被称为欧几里得 (Euclid) 时空作用量。³⁹ 这是一个实数, 它实际上就是系统的能量。这个作用量是一个实数, 避免了符号问题。这样我们就得到了虚时间几率振幅的表达式

$$K(x_2, -i\infty; x_2, +i\infty) = \int_{x(\tau=-\infty)=x_1}^{x(\tau=+\infty)=x_2} \mathcal{D}[x(\tau)] e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (5.442)$$

积分中的指数是一个不断衰减的实数, 因此这确实是一个可以计算的量。

我们称这种引入虚时间的方法为维克转动。通过这种方法, 我们将积分中的复指数替换为了实数, 从而给出了数值计算路径积分的方法。不过这一做法的效果毕竟还是有限的, 因为我们能算的只有虚时间的几率振幅, 而我们需要的是实时间的几率振幅。利用数值方法计算出的虚时间几率振幅的精度是有限的, 我们无法将其精确地延拓回实轴上。因此, 这就是格点理论所能处理的限度。

为什么我们在这里要大费周章地介绍数值计算路径积分的方法呢? 毕竟我们已经有了薛定谔方程, 如果需要的话直接去数值求解薛定谔方程, 岂不是一个更简单的做法吗?⁴⁰ 在量子力学中确实是这样的, 但是在量子场论中我们将找不到类似于薛定谔方程这样的可以直接供我们求解的方程, 此时格点场论将成为最重要的非微扰方法。

此外, 引入虚时间的几率振幅可以启发我们用路径积分的观点来处理配分函数。直观地说, 路径积分是对系统所有可能的路径 (或历史) 求和, 而配分函数是对系统所有可能的状态求和, 因此可以期望它们之间具有某些紧密的联系。注意到对于量子系统来说, 其迹核函数可以表示为

$$G(t) = \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} = \text{Tr}(e^{-i\hat{H}t/\hbar}), \quad (5.443)$$

而同一个系统的配分函数可以表示为

$$Z(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}), \quad (5.444)$$

因此系统的配分函数就是以虚时间为变量的迹核函数

$$Z(\beta) = G(-i\hbar\beta) = \int dx K(x, -i\hbar\beta; x, 0). \quad (5.445)$$

将这个结果明显地写成路径积分的表达式, 我们将得到

$$Z(\beta) = \int_{x(\tau)=x(0)} \mathcal{D}[x(\tau)] e^{-S_E[x(\tau)]/\hbar}, \quad (5.446)$$

式中 $\tau = \beta\hbar$, 积分对所有起点和终点相同的路径进行。由此可见, 配分函数实际上就是虚时的路径积分。这样我们就得到了配分函数和路径积分之间的关系。

5.10 测量与诠释

测量可以说是整个量子力学体系中最神秘, 也最令人困惑的部分了。它不仅仅与我们的直觉背道而驰, 而且还与我们迄今为止所介绍的理论体系格格不入。在所有关于物理理论的哲学问题中, 量子力学的测量问题无疑是最引人注目的。在本节中我们将介绍关于测量的数学理论, 讨论在量子力学中由测量引发的种种问题。

³⁹ 闵可夫斯基时空中的矢量 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 的内积满足 $x^\mu x_\mu = t^2 - \mathbf{x}^2$, 而取虚时间后, 矢量 $x^\mu = (it, \mathbf{x})$ 的内积满足 $x^\mu x_\mu = -t^2 - \mathbf{x}^2$ 。除除去一个负号外, 这恰好给出了欧几里得时空中的矢量。事实上在相对论发展的早期, 人们使用的四矢量就是虚时间形式的 $x^\mu = (\mathbf{x}, ict)$ 。当然, 这一记号早已被现代物理学家淘汰了。

⁴⁰ 实际上应用更广泛的是一种名叫密度泛函理论的数值方法。这个理论只关心多电子系统在某点上的电子密度, 而不关心其波函数。在单粒子时这两种表述几乎是一样的, 但是在多粒子系统中电子的密度分布要比波函数简化很多。

我们已经知道在量子力学之中, 任意一个力学量 \hat{A} 都对应着一个算符。对于那些能够充当力学量的算符来说, 它将有一组在态空间中正交归一完备的本征矢

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad (5.447)$$

且各个本征值 a_n 均为实数。如果对于本征矢 $|a_n\rangle$ 测量力学量 \hat{A} 的取值, 那么我们将总是得到一个确定的结果 a_n 。而如果我们对于一般的态 ψ 测量该力学量的取值, 那么得到的将是一个随机的结果。测量得到 a_n 的概率将为 $\langle a_n|\psi\rangle$, 而测量的期望值将为 $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ 。

现在我们要问这样一个之前被我们刻意回避了的问题: 假设我们对态 ψ 测量力学量 \hat{A} 的取值, 得到的结果是 a_n , 那么在测量之后系统将处在哪个量子态? 这个问题的答案是: 测量后系统将处在 a_n 所对应的本征态 $|a_n\rangle$ 上。⁴¹ 因为如果我们在第一次测量之后立刻对力学量 \hat{A} 进行第二次测量, 那么可以肯定所测得的力学量的取值仍然是 a_n 。这就说明了无论系统被测量之前究竟处于哪个状态, 测量后的系统一定处在本征态 $|a_n\rangle$ 上。

在测量之后, 一个任意的量子态 $|\psi\rangle$ 就变成了本征态 $|a_n\rangle$, 这个过程被称为波函数的“坍缩”。或许在坐标空间中, 这个过程理解起来要更形象一些。假如我们对一个弥散在空间中的波函数测量其位置, 那么在测量之后波函数将成为坐标空间中的本征态, 也就是“坍缩”到了一个点上。

为了进一步地考察测量的独特性质, 让我们来看著名的施特恩 (Stern)-盖拉赫 (Gerlach) 实验。在这个实验中, 研究者利用了一种特殊的分束器, 当它沿着某个方向放置时, 可以测量电子在该方向上的自旋, 将并该方向上自旋为正和自旋为负的电子分成两束。⁴² 实验分三步进行, 取电子束前进的方向为 y 方向, 如图 5.10 所示。首先, 让一束电子通过沿着 z 方向放置的分束器。最初电子的状态各异, 但是通过分束器后, 它们就坍缩到 z 方向自旋态上并被分成两束, 其中的一束均处于 $|+\rangle_z$ 态, 而另一束均处于 $|-\rangle_z$ 态。如果初始状态下各个电子的态矢是均匀分布的, 那么这两束电子的数量应当是相同的。

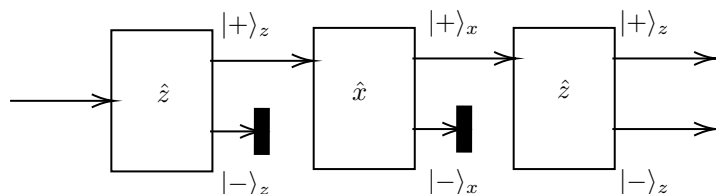


图 5.10: 施特恩-盖拉赫实验。

其次, 我们让处于 $|+\rangle_z$ 态的电子束流通过沿着 x 方向放置的分束器。在 x 方向自旋本征矢表象下, 我们可以将 $|+\rangle_z$ 表示为

$$|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x). \quad (5.448)$$

测量 $|+\rangle_z$ 态在 x 方向上的自旋, 我们将有一半的可能性得到自旋为正的结果, 有一半可能性将得到自旋为负的结果。因此, 在电子通过第二个分束器后, 它们就被分成两束, 其中的一束均处于 $|+\rangle_x$ 态, 而另一束均处于 $|-\rangle_x$ 态。这两束电子的数量应当是相同的。

最后, 我们让处于 $|+\rangle_x$ 态的电子束流通过沿着 z 方向放置的分束器。在 z 方向自旋本征矢

⁴¹从数学上说, 测量的过程相当于将投影算符 $\Lambda = |a_n\rangle\langle a_n|$ 作用在系统的量子态 $|\psi\rangle$ 上 (除去一个归一化常数)。如果量子态有简并的话, 那么系统在测量后将处在原来的态到简并态所构成的子空间的投影上, 这一过程所对应的投影算符相当于各简并态的投影算符之和。但需要注意的是, 测量本身并不能够表示为各投影算符之和, 因为测量是一个随机的过程。我们实际上只能将某个确定的坍缩过程用某个态上的投影算符来表示。

⁴²我们在这里所考虑的情况实际上是过于理想化了。在真实的施特恩-盖拉赫实验中, 分束器是由不均匀的磁场来实现的。这种磁场作用在带电粒子上会产生大尺度的偏转, 因此它不能够用于电子的分束。在原始版本的施特恩-盖拉赫实验中, 研究者采用的是中性的银原子, 避免了洛伦兹力带来的影响。

表象下，我们可以将 $|+\rangle_x$ 表示为

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z). \quad (5.449)$$

因此，在电子通过第三个分束器后，它们就被分成两束，其中的一束均处于 $|+\rangle_z$ 态，而另一束均处于 $|-\rangle_z$ 态。这两束电子的数量同样应当是相同的。

这个实验彻底显示出了经典测量过程与量子测量过程的差别。如果在施特恩-盖拉赫实验中被测的粒子是经典的粒子，那么第三个分束器中就不应当存在处于状态 $|-\rangle_z$ 的粒子，因为这样的粒子早在第一个分束器中就已经被除去了。然而，在量子系统中，我们发现当粒子通过第二个分束器时，已经被除去的 $|-\rangle_z$ 状态的粒子又重新被“产生”出来了。⁴³ 这是因为对粒子进行 x 方向的测量时，破坏了原来的量子态，使得第一次测量 S_z 的结果消失了。测量过程对于量子态的破坏是本质上的（而并非技术上的），它不能够通过对测量仪器的改进而加以消除。如果我们测量一个力学量，并确实得到了一个值，那么无论被测量之前系统的状态如何，测量之后的系统都将坍缩到相应的本征态上。

在量子力学中有一个结论：如果两个力学量没有共同的本征态，那它们就不能同时具有确定的取值。这一点是很容易解的，因为如果两个力学量没有共同的本征态，那么当系统处于其中一个力学量的本征态时，它的第二个力学量的期望值就是不确定的。诚然，我们可以对这个系统再进行一次测量，但是测量之后系统将处在第二个力学量的本征态上，从而其第一个力学量的取值就又不确定了。上述结果被称为量子力学中的“不确定性原理”。⁴⁴

在上面的施特恩-盖拉赫实验中，我们已经见到了一个例子，那就是粒子 z 方向自旋的分量 \hat{S}_z 和 x 方向自旋的分量 \hat{S}_x 不能同时具有确定的取值。一旦我们测量了其中的一个力学量，那么系统将不再处于第二个力学量的本征态上。一个更著名的例子是坐标和动量的不确定性原理，它指的是一个粒子不可能同时具有确定的坐标和动量。这个结果看似与我们的常识相矛盾，但从波函数的角度来看这是容易理解的。因为坐标本征态相当于一个 δ 函数，而动量本征态相当于一个平面波。这两种本征态天差地别，因此自然不可能存在一个量子态既具有确定的坐标也具有确定的动量。

不确定性原理的根源在于所考虑的两个力学量没有相同的本征态。我们可以设想，如果两个力学量具有相同的本征态，那么它们的取值就可以同时被确定下来了。设力学量 \hat{A} 具有非简并的本征态 $|a\rangle$ ，则当两个力学量 \hat{A}, \hat{B} 满足

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad (5.450)$$

时，我们有

$$\langle a'' | [\hat{A}, \hat{B}] | a' \rangle = (a'' - a') \langle a'' | \hat{B} | a' \rangle = 0. \quad (5.451)$$

由于本征态非简并，因此 $a'' - a' = 0$ ，于是我们得到 $\langle a'' | \hat{B} | a' \rangle = 0$ ，这意味着算符 \hat{B} 在算符 \hat{A} 的本征态下仍然是对角的。如果本征态简并，那么我们总可以在 \hat{A} 简并本征态的子空间中找到一组新的基矢，使得算符 \hat{B} 在这组基矢下是对角的。因此只要两个力学量对易，它们就有相同的本征态，换句话说两个对易的力学量的取值可以被同时确定下来。

我们可以给出一个更精确的结果。力学量的标准差定义为

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}, \quad (5.452)$$

⁴³ 读者可以将这一现象与光的偏振进行类比。取光的前进方向为 y 方向，设想令光通过一个 z 方向的偏振片，所有关于 x 方向的偏振都会被除去。然后再令光通过一个与 z, x 两轴成 45° 的偏振片，于是光的偏振方向将沿该偏振片的偏振方向。最后令光通过一个 x 方向的偏振片，原先被消除掉的 x 方向偏振又重新产生了。这个效应与电子的自旋非常相似，它也与光子的极化态相关，但它实际上可以在纯经典电动力学的层面上得到理解。

⁴⁴ 不确定性原理通常也被称作“测不准原理”。这个名字颇有误导性，看起来似乎是由于我们的实验仪器精度不够造成的。但实际上它与具体的测量过程无关，这种不确定性是量子系统的本质。

它可以用来度量某力学量的不确定程度。由于两矢量模长之积大于等于其内积的平方，因此力学量算符标准差在态上的期望值满足

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq |\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2, \quad (5.453)$$

这被称为施瓦兹 (Schwarz) 不等式。我们可以将等式右端的算符乘积拆分为对易子和反对易子之和

$$\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle = \frac{1}{2}\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle. \quad (5.454)$$

由于 $\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}$ 都是厄密算符，因此取厄密共轭后可以证明， $[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]$ 是厄密算符，而 $\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}$ 是反厄密算符。这样期望值 $\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle$ 是纯实数，而 $\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle$ 是纯虚数。

于是在计算 $\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle$ 的模平方时，交叉项将会被消除掉

$$|\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle|^2. \quad (5.455)$$

略去右端的第二项，我们得到

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]\rangle|^2. \quad (5.456)$$

由于上式对于任意的态矢都是成立的，因此力学量算符本身也将满足相同的关系

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2. \quad (5.457)$$

上述结果称为不确定性关系，这意味着两个力学量之间“越不对易”，它们之间的不确定性越强。特别地，对于坐标和动量来说有

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.458)$$

这被称为坐标-动量不确定性关系，它是量子力学中的一个非常重要的结果。⁴⁵

现在我们得到了量子系统的两种过程，它们分别是由薛定谔方程描述的“演化”，以及由测量引起的“坍缩”。借助这两种过程，我们将给出量子系统的全部运动规律：

- (1) 在一般情况下，量子系统按照薛定谔方程进行演化。
- (2) 当测量发生时，量子系统将坍缩到力学量的某个本征态上。

因此，我们可以为量子系统的演化描绘出这样一幅图像：一个量子系统从某个初始状态开始，依照薛定谔方程进行演化；突然，系统经受了一次测量，波函数随机地坍缩到了力学量的某个本征态上。然后，系统以这个本征态为初始条件，继续按照薛定谔方程进行演化；演化了一段时间之后，突然系统又经受了一次测量，又重新坍缩到了某个本征态上，以此类推。

这个过程看起来是有些奇怪的。我们或许想问：为什么测量过程在整个量子力学系统中占有如此特殊的地位？在量子力学中提到的测量究竟是什么样的一个过程？它是如何实现波函数坍缩的？等等。有这些疑问是正常的，在同一个理论之中引入这两种截然不同的描述似乎也并不是令人满意的。这些问题直指量子力学的核心，它们可以被称为量子力学的“诠释问题”。⁴⁶

但是，也许我们已经问得太多了。毕竟在基本定律的层面上，物理学只问“是什么”，而不问“为什么”。我们为什么要费尽心思去为波函数和测量的意义寻求一个解释？我们只需要知道世界是依照这种规律演化的即可，至于为什么会这样、该如何解释这一结果，那不是我们在理论物理学中需要关心的问题。但尽管如此，我们在这里仍然试图跨过实证的界限，看看我们究竟能够对量子力学说些什么。这些问题的答案将取决于我们如何来“理解”测量这一物理过程，以及我们如何去“诠释”在量子力学中出现的波函数的具体含义。

⁴⁵ 在相对论中，坐标和动量的不确定性关系可以写成一个协变的表达式 $(\Delta\hat{x}^\mu)^2(\Delta\hat{p}^\nu)^2 \geq |[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu]|^2/4$ 。其对角的空间分量给出坐标-动量不确定性关系，而对角的零分量将给出另一个不确定性关系 $\Delta t\Delta E \geq \hbar/2$ ，称为时间-能量不确定性关系。在非相对论性的量子力学中尽管也有时间-能量不确定性关系的类似结果，但其含义与相对论中的完全不同。

⁴⁶ 想要精确地说明什么是“诠释问题”，可能一点都不比解答诠释问题本身来得简单。作者在这里不打算详细地展开关于它的讨论。作为一个笼统的理解，我们可以将量子力学的数学理论看作是纯形式的理论，而所谓“诠释”就是为这个形式理论（特别是其中类似于波函数、测量这样的中间概念）找到它在经验世界中的对应。

诠释问题的一种可能的解答是：世界仍然是确定性的，粒子仍然按照一个确定的状态运动，只不过是不知道它的运动方式而已。波函数也只代表了某种统计意义上粒子运动的信息，测量过程中的这种随机性仅仅是由于我们对世界的认识不足所导致的。如果我们能够发展出一套比量子力学更完备的理论，并且探测到初态粒子的某些“隐藏信息”，那么我们就有可能将这个粒子的运动完全确定下来。这被称为“隐变量理论”，它曾经是解决量子力学诠释问题的一条重要途径。

隐变量理论可以用来解释量子力学中测量的定域性问题。这里的“定域”指的是物质的运动只由它所在的一个无限小邻域内系统的性质所决定。只要物理系统的作用量中只包含时空中的同一位置的物理量以及该位置物理量的各阶导数，那么它就是定域的。一般来说，一个非定域的理论是我们难以接受的，它将意味着在某处发生的现象不用通过时空中的传递，就可以直接地影响到另一个地方。

尽管量子力学的薛定谔方程是定域的，但测量过程却是非定域的。因为当我们测量系统状态的一瞬间，整个空间中的波函数就都发生了坍缩。我们在某处进行的测量，却会影响到另一处空间中的波函数，使其发生坍缩，这就是非定域性的体现。这种非定域性可以在 EPR(Einstein-Podolsky-Rosen) 佯谬中得到很好的展现。⁴⁷ 现在设想有一个自旋为零的 π 介子在某时刻衰变成了一对正负电子，它们以相反的速度朝着远离彼此的方向飞去。每个电子当然都具有一个自旋，但是在没测量之前，我们不知道电子的自旋是朝上还是朝下。不过由于总自旋角动量守恒，这两个粒子的自旋朝向一定是相反的。现在假设我们让这两个粒子飞行了足够远的距离（比如它们已经相距几光年之遥），然后测量其中一个粒子的自旋。我们当然会测量得到一个取值，比如说是自旋向上。一旦测量出了这个结果，我们就立刻知道了，另一个粒子的自旋一定是向下的。

问题就出在这里。按照量子力学的经典诠释，当我们测量这个系统之前，两个粒子都处在叠加态。而当我们测量其中一个粒子的自旋之后，两个粒子都将处在确定的自旋本征态上。那么现在我们要问，当对第一个粒子的自旋进行测量时，远在数光年外的第二个粒子是如何感知到测量过程的发生，并且将自身坍缩到一个相应的状态上呢？这看起来是非常违反常理的。

如果我们用隐变量理论来解释的话，就不存在这样的问题。粒子的状态本身就是确定的，它在测量之前就已经处于了一个确定的自旋态，只不过是不知道而已。诚然，我们在测量之后立刻知道了远在数光年之外的第二个粒子的状态究竟如何，但那仅仅是我们“知道”了而已。粒子的运动本身并没有受到任何的影响，也没有任何超距作用通过测量传递过去。

看起来，我们要么放弃掉量子力学的解释而支持隐变量理论，要么放弃掉物理系统的定域性而承认测量是一种超距作用。为验证量子力学与隐变量理论何者为真，贝尔 (Bell) 提出了贝尔不等式，给出了一个可以从实验上区分隐变量理论和量子力学的标准。假设我们对 EPR 佯谬中出射的电子和正电子分别在两个不同的方向 \hat{a}, \hat{b} 测量自旋，那么我们可以计算出自旋在这两个方向上乘积的期望值 $P(\hat{a}, \hat{b})$ 。贝尔证明了，任意定域的隐变量理论都将满足

$$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq 1 + P(\hat{b}, \hat{c}), \quad (5.459)$$

这被称为贝尔不等式。而与定域隐变量理论不同的是，量子力学可以给出违反不等式的预言。例如如果我们设 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 三个矢量处在同一个平面内，且 \hat{c} 与 \hat{a}, \hat{b} 的夹角均为 $\pi/4$ ，那么量子力学将给出

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = 0, \quad P(\hat{a}, \hat{c}) = P(\hat{b}, \hat{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (5.460)$$

这破坏了贝尔不等式。这说明从本质上讲，定域隐变量理论是与量子力学不相容的。⁴⁸

为了证明这两种理论哪个正确，我们可以设计一个实验来验证贝尔不等式是否成立。根据实验结果来看，量子力学得到了决定性的支持，因此我们排除了定域隐变量理论的可能性。诚然，

⁴⁷ 原始版本的 EPR 佯谬考虑的是对位置 x 和动量 p 的测量，下文中所列举的对自旋 $1/2$ 系统测量的例子来自于波姆。

⁴⁸ 当然，如果我们坚持严格的决定论，认为这个世界上根本就没有什么“随机”，一切早已是命中注定的，那么贝尔不等式也是有可能被破坏的。

物理系统遵循某种非定域隐变量理论的可能性仍然是存在的，不过它将与相对论产生矛盾。⁴⁹ 因此，我们的第一个诠释——隐变量理论现在已经几乎被否决了，我们必须为测量过程寻找一个新的诠释。

如果系统不是由隐变量刻画的，那么我们或许可以将波函数视为物理实在。粒子真实的运动状态就是以波函数形式存在的，而通常所看到的那些像质点一样运动、具有确定的位置和动量的粒子只不过是经典状态下的极限而已。⁵⁰ 如果我们将波函数作为物理实在，那么整个物理系统就仍然是决定论的。波函数将依照薛定谔方程的确定性方式演化，正如经典粒子的位移函数依照牛顿第二定律的确定性方式演化一样。⁵¹

如果真的是这样的话，那么量子系统中将没有那种特殊的测量过程的容身之地。测量过程可以从第一性原理的角度出发，由薛定谔方程中推导而出。因此，一个自然的想法就是将测量过程作为薛定谔方程演化的某种极限——它是测量仪器所构成的巨大波函数与被测系统所构成的波函数相互作用的结果。

物理学家们对测量过程的细节进行了深入的分析，结果发现在测量过程中，被测系统会迅速地测量仪器纠缠在一起，而将“量子叠加态”变为“经典叠加态”（也就是我们在量子统计理论中介绍的“混合态”）。这能部分地解释测量现象，它被称为“退相干诠释”。现在假设有一个粒子处于自旋叠加态 $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ ，并假设未与粒子相互作用的测量仪器的态矢为 $|\text{ob}.0\rangle$ 。在未测量之前，系统的总量子态将处在自旋叠加态与测量仪器的直积

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \otimes |\text{ob}.0\rangle. \quad (5.461)$$

为考察此时粒子所处的状态，我们计算出系统的密度矩阵 $\hat{\rho}$ ，并在仪器态空间对密度矩阵进行部分求迹，余下的就是粒子态空间中的子密度矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= \sum_i \langle \text{ob}.i | \hat{\rho} | \text{ob}.i \rangle = \sum_i \langle \text{ob}.i | \psi \rangle \langle \psi | \text{ob}.i \rangle \\ &= \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.462)$$

式中 $|\text{ob}.i\rangle$ 代表着仪器态空间中的一组正交归一完备基矢。由此我们看到，在测量之前粒子处于一个自旋向上和自旋向下的叠加态。

而在测量了系统的自旋 z 分量之后，被测量的自旋态将与测量仪器的态矢相互耦合。我们把与 $|+\rangle$ 耦合的仪器态记为“观测到了 $|+\rangle$ 的仪器” $|\text{ob}.+\rangle$ ，而把与 $|-\rangle$ 耦合的仪器态记为“观测到了 $|-\rangle$ 的仪器” $|\text{ob}.-\rangle$ 。因此，在测量之后，系统的量子态就可以表示为

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \otimes |\text{ob}.+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \otimes |\text{ob}.-\rangle. \quad (5.463)$$

⁴⁹需要说明的是，虽然非定域的隐变量理论与相对论不兼容，但是非定域的测量过程却与相对论是兼容的。这是因为尽管测量是非定域的，但我们却不能够利用这一效应来传递任何信息。诚然，测量得到其中一个粒子的自旋后，我们确实知道了远处另一个粒子的自旋方向，但是我们并不能够以这种方式将我们所获知的这一信息传递出去，也不能够从中获得关于远处的另外一个系统的信息。我们所观测到的仅仅是一串随机的序列而已，这其中并不包含任何有价值的信息。我们必须将两边的信息放在一起对比，才能知道系统是否已经被测量过。因此，量子测量的超距作用不能够用来传递信息，它也不会违反因果律。

⁵⁰如果波函数真的是物理实在的话，那么一个具有确定位置的经典粒子看起来就像是一个局域在空间某点处的波包一样。但如果我们让这个波包依照薛定谔方程进行演化，那么它很快就会由于色散的作用弥散在整个空间之中，其结果就是任何以经典波包方式存在的自由粒子都将迅速瓦解。但如果我们在系统中引入相互作用，那么有可能构造出不随时间弥散的波包态，如谐振子的相干态以及非线性薛定谔方程的孤子解等。物理世界中的粒子都位于定域的波包态而非非弥散，这可以由退相干理论部分地解释。此时粒子与环境的作用相当于对位置的测量，从而使得粒子能够维持在位置本征态上。

⁵¹需要注意的是，波函数不是处在真实的物理空间 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 之中，而是处在位形空间 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ 之中，这里的 \mathbf{x}_i 代表第 i 个粒子的坐标。因此，波函数并不是粒子的实际密度分布，我们至多只能说它是位形空间的某种“密度分布”。

设 $|\text{ob.}+\rangle$ 与 $|\text{ob.}-\rangle$ 两态正交，⁵² 计算出粒子态空间中的子密度矩阵，我们得到

$$\hat{\rho}'_1 = \sum_i \langle \text{ob.}i | \psi' \rangle \langle \psi' | \text{ob.}i \rangle = \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle \langle -| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.464)$$

由此我们看到，粒子在测量之后将处在自旋向上与自旋向下的经典叠加态，这个效应被称为“退相干”。

原则上来说，退相干（即由量子叠加态演化为经典叠加态的过程）是可以从动力学的角度自然地得到的。由于体系中的耗散项，密度矩阵中的非对角元会被迅速地消除，从而使得系统快速地达到形如式 (5.463) 的纠缠态。如果我们考察对位置的测量，那么这个过程可以更直观地体现出来。设系统在初始时刻处于 $|\Psi\rangle$ 态，则它会在与环境的相互作用过程中逐渐地消除掉各点之间的量子相干性，波包逐渐变得“尖锐”，从而形成一系列位置本征态的经典叠加。通过精心地选取测量仪器的结构和相互作用的形式，我们能够使得粒子演化到某组确定的本征态上，此时这个相互作用的过程就相当于对这组本征态所对应的力学量的测量。而对于一般的耗散系统来说，我们相信粒子会出于动力学的原因自发地演化到位置本征态上，从而表现为经典的点粒子。⁵³

但问题在于，即使系统的状态是经典叠加的，我们在每次测量的时候得到的都仍然是一个确定的状态，而并不是经典叠加态。在测量自旋的例子之中，测量结束后系统将以各 $1/2$ 的概率处于下面两个量子态之一

$$|\psi\rangle = |+\rangle \otimes |\text{ob.}+\rangle \quad \text{或} \quad |\psi\rangle = |-\rangle \otimes |\text{ob.}-\rangle, \quad (5.465)$$

而并不是处于如式 (5.463) 所描述的叠加态。在测量坐标的例子中，这表现为虽然退相干后的粒子以一定概率处于各个坐标本征态的经典叠加态上，但是最终我们所看到的粒子一定处在某个特定的坐标本征态上。例如在双缝干涉实验中，我们所看到的只是屏幕上的一个亮点，而非一系列亮点的经典叠加。仅仅凭借着我们在经典物理世界中的经验，我们甚至完全无法设想这种所谓的“经典叠加”究竟是一个什么状态。

看来要想得到最终的态矢，我们还需要从退相干后的各个经典状态中随机选取一个状态来作为最终的结果。然而这个过程并不能够通过薛定谔方程来得到，因为薛定谔方程是一个线性、么正和确定性的方程，而这个过程是非线性、非么正和随机的，它们之间有着本质的区别。我们似乎只能说，最后的系统还要经过某个神秘的未知过程，才能从经典的概率叠加中得到一个确定的结果。看起来退相干诠释并未完全解决测量问题，它只解释了为什么我们没有看到量子叠加态，而并不能解释为什么我们看到的不是经典叠加态，而是一个确定的态。

对这个问题一个解决方案来自于所谓的“多世界理论”（或者按照这个理论提出时的名称，称之为相对态理论）。这个理论主张，观测将使得观测者与整个系统纠缠在一起，而这个纠缠导致我们将只能观测到与自己纠缠在一起的那个量子态。现在假设态矢 $|\text{ob.}\rangle$ 包含观测者（主体）在内，并且把与 $|+\rangle$ 耦合的观测者态记为“观测到了 $|+\rangle$ 的观测者” $|\text{ob.}+\rangle$ ，而把与 $|-\rangle$ 耦合的观测者态记为“观测到了 $|-\rangle$ 的观测者” $|\text{ob.}-\rangle$ 。

作为观测者，我们将处在“观测到了 $|+\rangle$ ”和“观测到了 $|-\rangle$ ”的经典叠加之中。但不论在哪个态之中，我们所拥有的记忆都仅仅是“观测到了一个确定的量子态”。换句话说，作为身处在整个宇宙的纠缠中的观测者来说，我们体会到的要么是“观测到了 $|+\rangle$ ”这个事实，要么是“观测到了 $|-\rangle$ ”这个事实。因此我们所“看到”的量子态也是与相应的观测者态相耦合的量子态，换句话说就是一个“坍缩”了的量子态。直观（但是并不恰当）地说，在这个过程中产生了两个态矢分支，其中一个分支中的观测者观测到了自旋向上的态，一个分支中的观测者观测到了自旋向下的态。处于不同分支中的观测者将不能够认识到其他分支中的情况。

⁵² 由于仪器的尺度相比于粒子来说非常巨大，因此一个极其微小的改变就会使得仪器波函数发生较大的变化。因此在很多情况下，这是一个很好的近似。事实上在薛定谔方程的演化过程中，量子系统的相干性并不会完全消失，它只是由系统“泄漏”到了环境中，从而无法被我们观察到而已。

⁵³ 通常来说，要从动力学的角度证明粒子最终会演化到哪组本征态上是极为困难的。尽管我们相信这个结果，但是仍然难以从动力学的角度对此给出可靠的证明。这个问题被称为退相干理论中的偏好基问题。

如果我们以这个视角来看待测量问题，那么在通常的诠释中所遇到的很多困难就迎刃而解了。比如说，整个波函数的演化就是定域的，只不过我们把观测者所看到的这一部分单独割裂开来，才使得它是非定域的；系统的演化仍然是确定的，只不过我们把观测者所看到的这一部分单独割裂开来，才使得它是随机的，等等。一切的困难都源于观测者仅仅是处在整个宇宙态矢的某一个分支之中，因此不能窥见世界的全貌。如果我们能够直接把握到整个世界，那么我们就发现量子系统就是按照薛定谔方程这一确定规律演化的，没有例外。

如果我们坚持前面两种诠释（隐变量/退相干），那么测量就被更基础的理论所消解了，世界仍然是决定论的。但是，为什么我们非要坚持用决定论的方式来理解世界，而不直接承认这个世界从本质上就是非决定论的呢？承认波函数的统计性质，承认测量的本体论地位，这其实恰恰是理解量子力学的一种最简单、也是最直接的方式——毕竟，这就是我们在实验中直接看到的东西。大多数量子力学的教科书所持有的就是这种观点，我们可以称之为“正统诠释”。

但是这种看法也是有代价的，那就是我们必须从某种程度上接受这个世界是不可知的。如果我们同时拒绝了隐变量理论与退相干理论，那我们就必须承认，这个世界从底层上来说是的。我们将永远不能够对物理现象做出任何确定性的预言，而只能给出物理世界的统计性质。测量过程将是我们所能达到的界限，测量的一边是依照经典理论运动的确定性世界，而另一边则是以波函数来描述的未知的量子世界。从量子世界到经典世界的坍缩是随机的，我们将永远不能跨过它，去追求另一边的量子世界中的所谓“真实”。

除去认识论上的问题之外，它还有着的一个更加本质的困难，那就是我们无法判定什么构成一个“测量”。换句话说，我们不知道坍缩将在什么情况下发生。对于一个物理理论来说，这是非常严重的问题，因为它将使得理论不完备。目前来看，试图精确划定这条界线的尝试还没有取得成功。我们只能粗略地说，如果一个量子系统以某种方式在宏观系统中留下不可逆的记录，那么这就构成一个测量过程，量子力学中的坍缩将会发生。

在量子力学的发展初期，以冯诺依曼 (von Neumann) 和维格纳 (Wigner) 为代表的物理学家认为，量子力学的测量关键在于意识的介入。⁵⁴ 这个看法是恰当的吗？应该说不恰当的。⁵⁵ 这不仅没有解决测量的困难，反而会引起更严重的问题。首先，“什么是意识”（或者说“什么是人的意识”）这一点仍然是不明确的，这说明即使是作为一个判断测量是否发生的标准，它也是不够精确的。其次，测量只是任意态矢向本征矢坍缩的过程，人的意识并非是测量发生的必要条件。对于双缝干涉实验来说，电子打在光屏上本身就构成了一个测量过程，此时电子已经坍缩到了位置本征态上，成为了光屏上的一个亮点。我们不能说在我们没有亲眼去“看”之前，光屏和电子仍然处在一个不确定的状态，只有当我们去“看”的这一瞬间，电子一下子坍缩成了光屏上的一个点。量子力学中的测量并不等于主观唯心主义，不是因为你去“看了一眼”，这个系统才处在本征态上。

有一个很经典的思想实验，它被称为“薛定谔的猫”。我们设想有一个装置能够根据原子的衰变来释放毒药，现在将这个装置中放入少量的放射性原子，然后将它和一只猫放入一个箱子中。如果原子发生了衰变，那么装置将会释放出毒药将猫杀死；而如果原子没有发生衰变，那么猫将不会被杀死。因此，如果我们在一段时间后将箱子打开，我们就能够看到猫是死是活，进而也就能判断原子在这一段时间内是否发生衰变。现在我们要问的问题是：在我们把箱子打开之前，猫究竟处于什么状态？

初看起来，猫的状态应当与原子的状态相同。在未打开箱子之前，我们没有对系统进行观测，

⁵⁴ 冯诺依曼的论证如下：为测量一个粒子的状态，需要引入一个测量仪器与粒子发生相互作用。在测量结束后，量子的状态虽然成为了经典叠加态，但是却与仪器发生了纠缠，此时仪器和粒子的总和构成了一个新的系统。为确定此时系统的状态，我们需要引入第二个测量仪器，而这个仪器又会与粒子和第一个仪器发生新的纠缠。以此类推，我们将引入第三、第四，直至无穷多个测量仪器。这个过程是无穷尽的，直到人的主观意识介入，我们才能够得到一个确定的结果。

⁵⁵ 当然，“测量是否与意识有关”这个问题的答案的答案仍然依诠释而异。比如对于多世界理论来说，如果波函数不与人的意识耦合，那么我们就不会“观测到”系统的坍缩。因此在这个诠释下，我们可以说测量就是由意识所引发的。但是对于这里介绍的“正统诠释”来说，认为波函数坍缩是由意识造成的这一看法应当说是不恰当的。

因此原子应当属于衰变与未衰变的叠加态。因此我们可以推断，在未观测系统之前，箱子中的猫将处于一个死与活的叠加态之中。⁵⁶ 但如果我们此时将箱子打开，那么我们就对系统进行了一次观测，其结果就是猫将从叠加态坍缩到一个确定的态上——换句话说，要么是死，要么是活。

这个结果看起来似乎是荒谬的，因为我们虽然可以设想一个原子处在叠加态上，但我们却不能够设想像猫一样的宏观物体也处于某种叠加态上。⁵⁷ 此外，我们也无法接受仅仅是打开箱子“看一眼”就决定了猫的生死这件事。这个问题的关键在于：在薛定谔的猫实验中，究竟是什么时候发生了一次对量子系统的“测量”。是我们掀开箱子观察的那一瞬间吗？其实并不是这样，测量早在这之前就已经完成了。我们可以认为，对这个系统的测量发生在粒子触发毒药装置的那一瞬间。当毒药装置启动的时候，量子系统就已经完成了坍缩，毒药装置将处在一个确定的释放毒药的状态上。因此，猫是死是活其实早在我们打开箱子之前就已经注定了，原子的叠加态不会传递到猫的身上。

因此，意识并不是构成量子测量的必要条件。但是究竟什么构成了测量呢？在薛定谔的猫实验中，我们可以说粒子触发毒药装置构成一个测量，但是在许多更加微妙的情况下，我们将完全无法判断。或许我们应当放弃掉一个精确的“测量”概念，认为测量是在一个过程中逐渐发生的。这样看来，我们就要把量子力学分成三个部分，分别是由薛定谔方程刻画的量子阶段、由经典力学刻画的经典阶段、以及介于二者之间的测量阶段。这个测量阶段的总体效果，就是将量子力学中的任意一个态矢坍缩到力学量的一个本征态上。如果我们持这种视角的话，那么量子力学将仅仅是一个有效理论，它对于测量过程之中发生的事情并不能够给出预测。

我们或许会想，一旦我们得到了更加精确的理论，那么我们就可以从这个更基本的理论出发将测量过程作为一个自然的结果推导出来。不幸的是，根据目前所发展出来的理论来看，无论是量子场论还是未来可能出现的量子引力理论都无助于解决测量问题，它们所修改的仅仅是由薛定谔方程所描述的那一部分的理论。因此，如果想依靠这一条路解决诠释问题，我们至少需要某种与现有理论体系非常不同的理论。现有的物理学理论是不足以解决这一问题的。

总之，我们在这整整一节之中都在探讨测量的问题。我们介绍了测量的数学理论，并为诠释问题给出了一些可能的解答：认为量子力学不完备、需要引入其他变量来确定粒子运动的隐变量理论；认为波函数是唯一的量子实在、测量过程可以从薛定谔方程中推导出来的退相干理论；以及认为物理世界本质上是非决定论的、测量过程占有特殊地位的“正统诠释”。目前看来，每种观点都有着自己的困难，诠释问题的解决依然遥遥无期。或许在这个问题上我们还有很长的一段路要走。

5.11 相对论性量子力学

在本节中，我们将采用自然单位制，度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ， γ 矩阵将选取为狄拉克表示。

在前面的章节中，我们讨论了非相对论性粒子的量子力学。接下来我们将尝试将其推广到相对论性粒子的情况。为简便起见，我们考虑相对论性的自由粒子，其作用量为

$$S[x] = -m \int d\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}, \quad (5.466)$$

式中 x^μ 为粒子运动的路径， λ 为标记粒子运动的参数， m 为粒子质量。对于一个相对论性经典

⁵⁶ 实际上猫所处的状态是如式 (5.463) 所描述的经典叠加态，而并非是猫态矢自身所处的量子叠加态。但如果我们所考虑的是整个猫箱所构成的系统（包括猫、空气以及毒药装置），那么它的两个态矢分支将构成量子叠加态。这一点经常被人所混淆，人们所提到的“薛定谔猫态”指的实际上是猫箱的量子叠加态，而非猫的经典叠加态。我们在后文中也将采用这一说法，而不作特别的区分。

⁵⁷ 宏观叠加态确实是不可能实现的吗？目前看来还很难说。研究者们已经在越来越大的介观系统中实现了量子叠加态的制备。虽然距离真正的宏观叠加态尚有很大的距离，不过经典系统和量子系统之间的界限正在逐渐变得模糊。也许有一天，我们真的能够实现宏观叠加态，从而使得薛定谔的猫成为确凿的实验事实，而非仅仅停留在思想中的佯谬。

粒子来说, 其路径将使得上述作用量取极值

$$\delta S[x] = 0. \quad (5.467)$$

而对于一个相对论性的量子粒子来说, 它从 x_1 运动到 x_2 的几率振幅将表示为对所有可能的路径 x^μ 的路径积分

$$K(x_2, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{D}[x] e^{iS[x]}. \quad (5.468)$$

这样我们就得到了自由粒子的相对论性量子力学, 它可以描述相对论性粒子的量子性质。

我们也可以以正则量子化的方式引入相对论性量子力学。对于相对论性粒子来说, 其哈密顿量满足

$$H^2 = p^2 + m^2. \quad (5.469)$$

将力学量替换为算符, 我们得到

$$\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla, \quad (5.470)$$

即

$$\hat{p}^\mu = i \partial^\mu = i (\partial_0, -\nabla). \quad (5.471)$$

将上述力学量算符作用到波函数 ϕ 上, 我们得到

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = (-\nabla^2 + m^2) \phi, \quad (5.472)$$

即

$$(\partial^2 + m^2) \phi = 0. \quad (5.473)$$

这样我们就得到了自由标量场的克莱因-戈登方程, 它是薛定谔方程的直接推广。⁵⁸

虽然我们已经得到了相对论性量子力学, 但是它仍然存在着一些严重的问题。我们可以写出相对论性波函数 ϕ 的几率流

$$j^\mu = \frac{i}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (5.474)$$

它满足守恒流方程

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (5.475)$$

其零分量就代表了相对论性粒子的几率密度

$$j^0 = \frac{i}{2m} (\phi^* \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*). \quad (5.476)$$

但我们发现这个几率密度并不是正定的, 换句话说它既可以取为正值, 也可以取为负值。这意味着相对论性量子力学中将出现“负几率”, 这是非物理的。

为了解决这个问题, 我们可以将相对论性粒子的能量动量关系两边同时开平方

$$H = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (5.477)$$

并形式地将其结果表示为

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (5.478)$$

如果这里的各个 α^i 以及 β 是普通的复数的话, 那么相对论性能量动量关系将不能够得到满足。为了解决这一问题, 我们将各个 α^i, β 视为矩阵, 并作代换

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i \quad (5.479)$$

要想使得上述关系成立, 各 γ^μ 必须满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},$$

⁵⁸ 是否可以设想直接通过相对论性的路径积分得到克莱因-戈登方程, 就像直接通过非相对论的路径积分得到薛定谔方程一样? 也许这是可以做到的。

我们发现这恰是狄拉克矩阵的反对易关系，因此这里的各个 γ^μ 就是狄拉克矩阵。将力学量替换为算符并将其作用到波函数 ψ 上，我们将得到

$$(i\partial - m)\psi = 0, \quad (5.480)$$

这恰是自由旋量场的狄拉克方程。

对于狄拉克方程来说，其几率流可以表示为

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (5.481)$$

它满足守恒流方程

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (5.482)$$

其零分量代表旋量粒子的几率密度

$$\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi. \quad (5.483)$$

这个几率密度是正定的，因此避免了克莱因-戈登方程的负几率问题。

如果我们希望能够从路径积分中直接推导出狄拉克方程，那么我们需要将路径积分的变量从满足对易关系的普通数替换为满足反对易关系的格拉斯曼 (Grassmann) 数。这暗示我们利用克莱因-戈登方程所刻画的粒子（标量粒子）为满足对易关系的玻色子，而利用狄拉克方程刻画的粒子（旋量粒子）为满足反对易关系的费米子。我们将在后文中更详细地讨论相关的内容。

除去概率密度不正定的问题之外，相对论性量子力学还存在着一个问题，那就是会产生负能解。考虑克莱因-戈登方程和狄拉克方程，设其解具有平面波的形式

$$\psi(x) \sim e^{ip \cdot x} \sim e^{i(E_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (5.484)$$

这里 E_0 代表粒子的能量。将这个平面波的表达式代入到克莱因-戈登方程和狄拉克方程中，可以得到粒子的能量为

$$E_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (5.485)$$

上述方程的详细求解详见狭义相对论的章节。换句话说，相对论性量子力学方程不仅具有正能解，而且还具有负能解，且其能量是无下界的。

对于克莱因-戈登方程来说，这个结果是灾难性的，因为粒子将可以无限制地向负无穷的能级跃迁，从而使得整个物理世界崩溃。而对于狄拉克方程来说，可以设想负能态已经被无穷多的电子所占据，这被称为“狄拉克海”。由于泡利不相容原理，余下的电子将只能在正能态运动。若对狄拉克海施加一定的能量，则可能将一个处于负能态的电子激发到正能态，从而留下了一个可观测的电子和一个空穴。这个空穴像一个普通的电子一样运动，具有与普通电子相同的质量，只不过它带有一个相反的电荷。由此狄拉克方程预言了反粒子的存在，并为粒子的产生与湮灭给出了一个解释。当然，狄拉克海也存在概念上的困难，最严重的困难在于它完全无法解释狄拉克海中无数电子所携带的无穷大负电荷以及发散的相互作用能。

相对论性量子力学更严重的困难在于它破坏了因果性。以克莱因-戈登方程为例，其时间演化算符为

$$\hat{U}(t) = e^{-it\sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2}}. \quad (5.486)$$

在坐标表象下计算出其传播子，我们得到⁵⁹

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) &= \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t) | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \cdot e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned} \quad (5.487)$$

⁵⁹这个积分可以直接积出，结果为贝塞尔 (Bessel) 函数。

在大的类空区域 $\mathbf{x}^2 \gg t^2$, 上述传播子具有如下的渐进形式

$$G(\mathbf{x}, t; 0, 0) \sim e^{-m\sqrt{\mathbf{x}^2 - t^2}}. \quad (5.488)$$

因此这意味着在类空的两点间, 相互作用以指数衰减的形式传递。

如果我们要求相对论中的因果性不被破坏, 那么类空两点间将不可能发生任何相互作用, 其传播子应当严格为零, 即

$$G(x_2, x_1) = 0, \quad (x_1 - x_2)^2 < 0, \quad (5.489)$$

式中 x_1, x_2 为时空四矢量。但我们在前面已经看到了, 克莱因-戈登方程在这个区域给出了一个非零的传播子。因此, 相对论性量子力学理论破坏了因果性。即使我们采用狄拉克方程, 这个问题仍然不能够得到解决。只有在量子场论中, 我们才能真正解决因果性的问题, 从而构建一个自洽的相对论性量子理论。

5.12 习题

1. 路径积分

(a) 证明路径积分可以写成对于坐标和动量的路径积分

$$K = \int \mathcal{D}[x_i(t)] \mathcal{D} \left[\frac{p_i(t)}{2\pi\hbar} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p_j \dot{x}_j - H(p_k, x_k)) \right],$$

式中 $H(p_k, x_k)$ 取遍所有可能的坐标和动量变量。上述路径积分的路径微元 (积分测度) 定义为

$$\int \mathcal{D}[x_i(t)] \mathcal{D} \left[\frac{p_i(t)}{2\pi\hbar} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_i(t_j) \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{dp_i(t_j)}{2\pi\hbar} \right),$$

式中 $x_i(t_j), p_i(t_j)$ 中的指标 i 取遍所有可能的值, 而 t_j 仅为单一变量。

(b) 通过恰当的坐标变换, 给出广义坐标下的路径积分表达式。

(c) 如果系统中含有约束, 则可以将约束表示为积分测度中的 δ 函数。将这些约束积去, 给出系统的路径积分表达式。

(d) 给出弯曲空间中的路径积分表达式。

(e) 计算约束在 S^1 环上的量子粒子的行为, 并利用该模型讨论阿哈罗诺夫-玻姆效应。

2. 运动方程与守恒流

(a) 证明系统的生成泛函在变换下 $x'(t) = x(t) + \epsilon(t)$ 不变。

(b) 根据上述结果, 对生成泛函求关于源项 $J(t_i)$ 的泛函导数, 并给出系统的各关联函数之间所满足的方程。这组方程被称为施温格 (Schwinger)-戴森 (Dyson) 方程, 它是量子系统的运动方程。

(c) 证明一阶施温格-戴森方程代表的是系统的经典性质, 而更高阶的施温格-戴森方程给出的是系统的量子修正。

(d) 利用施温格-戴森方程, 给出多点关联函数的微扰展开表达式。

(e) 若系统的作用量在变换 $t' = t + \delta t, x' = x + \delta x$ 下保持不变, 试给出量子版本的诺特定理。

3. 利用路径积分方法, 计算一维无限深势阱、一维谐振子和氢原子的几率振幅, 求出其各个本征值和本征态, 证明这与我们通过求解薛定谔方程得到的结果是一致的。

4. 利用薛定谔方程, 精确求解下列一维模型的本征值和本征态。

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \infty, & \text{else} \end{cases}, \quad V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ V_0, & \text{else} \end{cases}.$$

$$V(x) = -V_0\delta(x), \quad V(x) = k|x|, \quad V(x) = -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \operatorname{sech}^2(x).$$

$$V(x) = V_0 \left(e^{-2\alpha \frac{x-x_0}{x_0}} - 2e^{-\alpha \frac{x-x_0}{x_0}} \right), \quad V(x) = -2V_0 \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \right).$$

5. 利用薛定谔方程, 精确求解下列三维球对称势的本征值和本征态。

$$V(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_0 \\ \infty, & \text{else} \end{cases}, \quad V(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_0 \\ V_0, & \text{else} \end{cases},$$

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad V(r) = kr, \quad V(r) = -V_0 e^{-r/d}, \quad V(r) = V_0 \delta(r - r_0).$$

6. WKB(Wenzel-Kramers-Brillouin) 近似

- (a) 对于一维的定态薛定谔方程来说, 我们首先考虑 $E > V(x)$ 的经典区域。将波函数的振幅和相位分离开 $\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)}$, 写出 $A(x)$ 和 $\phi(x)$ 满足的微分方程组。
- (b) 如果势能变化非常缓慢, 则略去 $A''(x)$ 项。在这个近似下, 解出系统的波函数, 并说明其物理意义。
- (c) 对于 $E < V(x)$ 的情况, 重复类似的推导, 给出此时的近似解。
- (d) 当系统的能量与势函数十分接近时, 上面的两个近似全部失效。此时可以将临界点附近的势近似地看成是一个线性势。在临界点附近求解该线性势, 并用该结果连接 $E > V(x)$ 和 $E < V(x)$ 两部分的近似解。
- (e) 如果势阱无奇异性, 且在 $x = a, x = b$ 之间满足 $V < E_n$ (即对于第 n 能级来说, 系统在 a, b 之间处于经典束缚状态), 试证明系统的本征值 (的近似值) 满足

$$\int_a^b p_n(x) dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \hbar,$$

式中 $p_n(x) = \sqrt{2m(E_n - V(x))}$ 。这个结果与玻尔-索末菲量子化相似。

- (f) 在 WKB 近似下, 求出粒子通过隧穿效应穿过势垒的概率。

7. 变分法

- (a) 对于束缚态系统来说, 证明基态能量 E_0 小于等于哈密顿量在任意态矢 $|\psi\rangle$ 下的内积 $E_0 \leq \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$, 当且仅当 $|\psi\rangle$ 为基态本征矢时取等号。
- (b) 证明第一激发态能量 E_1 小于等于哈密顿量在任意与基态正交的态矢 $|\psi'\rangle$ 下的内积 $E_1 \leq \langle \psi' | \hat{H} | \psi' \rangle$, 当且仅当 $|\psi'\rangle$ 为第一激发态时取等号。
- (c) 为利用变分法求基态本征值, 我们可以选取一组含有一系列参数 a_i 的波函数族 $|\psi(a_i)\rangle$ 。我们希望适当调整参数, 使得 $E(a_i) = \langle \psi(a_i) | \hat{H} | \psi(a_i) \rangle$ 取最小值。求出各待定参数所满足的方程。
- (d) 考虑核外有两个电子的氦原子系统。略去氦原子核的运动, 求出系统的哈密顿量, 并以

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, Z) = \frac{Z^3}{\pi a^3} e^{-Z(r_1+r_2)/a}$$

为试探波函数, 求出氦原子基态能量的上限。其中 $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ 为玻尔半径。

- (e) 考虑两个距离为 R 的质子和一个核外电子组成的氢分子离子系统。略去两个质子的运动, 设电子与两个质子的距离分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, 求出系统的哈密顿量。并以单个氢原子基态波函数 $\psi_0(\mathbf{r})$ 的线性组合为试探解

$$\psi = A[\psi_0(\mathbf{r}_1) + \psi_0(\mathbf{r}_2)]$$

计算系统基态能量的上限, 并证明电子的存在将使得氢分子离子中的两个质子形成稳定的束缚态。

8. 不含时微扰论

- (a) 假设系统的哈密顿量 \hat{H} 可以写成一个精确求解的部分 \hat{H}_0 和一个微扰部分 $\lambda\hat{H}'$ 之和 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}'$ 。将微扰系统的本征值和本征态展开为 λ 的幂级数

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \lambda^2|n^{(2)}\rangle + \dots,$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots,$$

并将之代入到本征值方程之中。如果未受微扰时的各个本征态无简并, 写出各阶 λ 所对应的方程。

- (b) 注意到各个本征态的正交归一完备性, 在未受微扰系统的能量本征态表象下, 解出系统的一阶微扰和二阶微扰的本征值和本征态。
- (c) 给出微扰理论适用的条件。
- (d) 求出非线性谐振子的一阶微扰和二阶微扰的本征值和本征态。
- (e) 如果未受微扰的各本征态是简并的, 那么对于微扰项 \hat{H}' 来说, 我们所选择的基矢将不一定是一组好的基矢。因此, 我们需要在简并基矢张成的子空间内选择一组恰当的基矢, 来使得 \hat{H}' 对角化。这组基矢就是微扰本征态, 而基矢所对应的本征值就是系统的微扰本征值。利用这一做法, 给出简并微扰体系的一阶本征值和本征态。
- (f) 利用微扰论, 计算氢原子的自旋-轨道耦合与相对论效应带来的能级分裂, 这被称为氢原子光谱的精细结构。
- (g) 如果对氢原子外加一个 z 方向的磁场 $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, 在磁场较强和磁场较弱的情况下分别选择恰当的基矢, 利用微扰论计算其能级分裂的情况。这被称为塞曼 (Zeeman) 效应。
- (h) 计算氢原子在弱外电场下的能级分裂情况, 这被称为斯塔克 (Stack) 效应。
- (i) 计算氢原子系统中, 由于质子的磁偶极矩和电四极矩引起的能级分裂, 这被称为氢原子光谱的超精细结构。
- (j) 略去质子本身的运动, 利用微扰论计算氢分子的能量随两质子距离的变化。证明由于电子的效应, 体系中产生了一个正比于 r^{-6} 的吸引相互作用。

9. 含时微扰理论

- (a) 假设系统的哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)$, 我们仍可以将系统的解表示为 \hat{H}_0 的各解的线性组合, 只不过解的系数是随时间变化的

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle e^{iE_n t/\hbar},$$

写出系数 $c_n(t)$ 所满足的方程。

- (b) 零级近似是各 $c_n(t)$ 不随时间变化, 即它们保持初始状态不变。作为一级近似, 将除了 dc_n/dt 之外的各项均换成零级近似的结果。在这个条件下将所有的 $c_n(t)$ 解出来作为一级近似的结果, 以此类推可以求出更高级的近似。试通过直接积分的方法, 给出系统任意阶近似的显式解。

- (c) 假设系统受到一个在 $t = 0$ 之后加入的常数微扰, 在一阶近似下, 求出系统在单位时间内各能级间的跃迁速率。
- (d) 假设系统受到一个正弦微扰 $\hat{H}'(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}) \cos \omega t$ 。在一阶近似下, 求出系统在单位时间内各能级间的跃迁速率。
- (e) 对于氢原子来说, 如果系统受到一个沿 z 方向, 且随时间正弦变化的均匀电场的作用 $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}} \cos \omega t$, 证明偶极跃迁的选择定则: 除非 $\Delta m = \pm 1, 0$ 以及 $\Delta l = \pm 1$, 否则跃迁不会发生。
- (f) 设系统在两个能量差为 ΔE 之间发生跃迁所需的典型时间为 Δt , 说明跃迁过程中的能量-时间不确定性关系。
- (g) 考虑原子中的两个能级之间的跃迁。在外场的作用下, 能级之间的跃迁速率为 B , 单位时间内跃迁的粒子数等于能级上的总粒子数乘以跃迁速率。除此之外, 从高能级到低能级还存在着自发跃迁, 其速率为 A 。经过足够长的时间后, 系统达到了热平衡状态。利用统计物理给出平衡态各能级的粒子数分布, 并求出系数 A, B 的值。系数 A, B 被称为爱因斯坦系数。

10. 绝热近似

- (a) 假设哈密顿量随时间变化, 则对于任何一个确定的时刻 t_0 , 都可以为该时刻的哈密顿量 $\hat{H}(t_0)$ 寻找一组正交归一完备的瞬时本征态 $|n(t_0)\rangle$ 和瞬时本征值 $E_n(t_0)$ 。假设含时薛定谔方程的解可以利用瞬时本征态表示为

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} |n(t)\rangle,$$

式中 $c_n(t)$ 是一个复数系数, 而 $\theta_n(t)$ 为瞬时本征值 $E_n(t')$ 从 0 到 t 的积分, 称为动力学相因子。试写出 $c_n(t)$ 所满足的演化方程。

- (b) 当哈密顿量变化足够慢时, 证明如果系统初始时刻处在某个瞬时本征态 $|n(t_0)\rangle$ 上, 则系统在接下来的演化中仍处在该瞬时本征态 $|n(t)\rangle$ 上, 只不过额外添加了一个相位几何相因子 $\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |n(t)\rangle$, 试给出几何相因子 $\gamma_n(t)$ 的表达式。
- (c) 给出绝热近似成立的条件。
- (d) 如果哈密顿量随时间的变化可以写成一组参数 $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ 的变化, 且经过一段时间后系统又回到其初始状态, 试给出此时系统几何相因子的表达式。这被称为贝瑞 (Berry) 相。
- (e) 证明阿哈罗诺夫-波姆效应中的干涉相位因子可以被视为几何相因子, 并且其值为 $\Delta\phi = q\Phi/\hbar$, 式中 Φ 为圆柱体内的磁通量。

11. 散射理论

- (a) 计算半径为 R 的硬球势的经典微分散射截面和经典散射截面。
- (b) 计算库伦势的经典微分散射截面, 这一结果被称为卢瑟福公式。
- (c) 在球坐标下求解球对称势, 在球坐标下将出射波分解为一系列振幅为 a_l 的球面波之和。利用分波振幅, 给出散射振幅和总散射截面的表达式。
- (d) 假设在引入势场之后, 各个分波被独立散射。因此各分波的系数不发生改变, 入射球面波也不发生改变, 只有出射球面波额外增加了一个相移 δ_l 。利用这一相移计算出散射振幅和总散射截面。
- (e) 给出分波振幅 a_l 与相移 δ_l 之间的关系。

- (f) 对于硬球散射, 计算出分波振幅 a_l 和相移 δ_l 的值, 并给出硬球散射的散射振幅和总散射截面。
- (g) 证明光学定理 $\sigma = 4\pi \text{Im}(f(0))/k$, 式中 k 入射平面波动量。
- (h) 在非弹性散射的情况下, 给出系统的分波表达式。计算此时的散射振幅, 并证明光学定理。
- (i) 证明定态薛定谔方程等价于如下的积分方程

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} V(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0) d^3r_0.$$

这被称为李普曼 (Lippmann)-施温格方程, 式中 ψ_0 为自由粒子 (即未经散射的粒子) 的波函数。

- (j) 现在将李普曼-施温格方程右端积分中的波函数 ψ 用自由粒子波函数 ψ_0 近似, 这被称为一阶玻恩 (Born) 近似。利用玻恩近似, 计算低能卢瑟福散射的微分散射截面。

12. 角动量理论

本题讨论的结果既适合自旋角动量, 也适合轨道角动量。

- (a) 我们用 $|j, m\rangle$ 来表示角动量平方算符 \hat{L}^2 以及 z 方向角动量算符 \hat{L}_z 的本征态, 它对应于两个算符的本征值分别为 $j(j+1)\hbar^2$ 以及 $m\hbar$ 。定义角动量的升降算符为 $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, 求出升降算符作用在上述本征态 $|j, m\rangle$ 上的结果。
- (b) 升降算符不能够无限制地作用于角动量本征态, 因为角动量的分量不能大于总角动量。因此, 必然存在某些角动量态, 使得升降算符作用于其上的取值为零。利用这一条件确定 j, m 两个量子数的取值范围。
- (c) 证明: 对角动量本征态 $|j, m\rangle$ 在空间中进行转动, 转动的结果不改变量子数 j 的取值。换句话说, 将空间转动 g 作用在 $|j, m\rangle$ 上时, 得到的是一系列 $|j, m'\rangle$ 的线性组合, 它们可以用转动矩阵 $\hat{D}(g)$ 表示为⁶⁰

$$|j, m\rangle^g = \hat{D}(g)|j, m\rangle = \sum_m D_{m',m}^j(g)|j, m'\rangle,$$

式中 $D_{m',m}^j(g)$ 为转动矩阵的分量。

- (d) 证明绕 $\hat{\mathbf{n}}$ 轴转动 θ 角所对应的转动矩阵可以表示为 $\hat{D}(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = e^{-i\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \theta / \hbar}$, 式中 $\hat{\mathbf{L}}$ 代表角动量算符矢量。
- (e) 利用欧拉角, 显式地给出转动矩阵 $\hat{D}^j(g)$ 的表达式。
- (f) 考虑两个角动量之和。定义 \hat{L}_1 和 \hat{L}_2 分别为作用在第一个角动量和第二个角动量上的算符, 系统总的角动量算符为两个角动量算符之和 $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$ 。⁶¹ 证明 $\hat{L}_1^2, \hat{L}_{1z}, \hat{L}_2^2, \hat{L}_{2z}$ 以及 \hat{L}^2, \hat{L}_z 是两组完备的力学量算符, 它们的共同本征态 $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ 和 $|j_1, j_2, j, m\rangle$ 构成一组正交完备归一基矢, 并给出 m, j 与 m_1, m_2, j_1, j_2 之间的关系。
- (g) 我们可以将 $|j_1, j_2, j, m\rangle$ 表示为 $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ 的线性组合, 其系数称为克莱布什 (Clebsch)-戈登系数。求出克莱布什-戈登系数的显式表达式。

13. 量子对称性与量子守恒律

- (a) 证明维格纳定理: 保持态矢量内积绝对值不变的可逆变换, 一定是么正变换或者是反么正变换。这里的反么正变换可以视为一个么正变换与一个复共轭的复合。

⁶⁰ 这里的 $\hat{D}^j(g)$ 本质上是 $\text{SO}(3)$ 群的 $(2j+1)$ 维不可约表示。

⁶¹ \hat{L}_1 和 \hat{L}_2 分别作用在不同的角动量空间上, 因此更严格的写法是 $\hat{L} = \hat{L}_1 \otimes I + I \otimes \hat{L}_2$ 。相应的角动量转动矩阵可以直接写成两部分的直积, 即 $\hat{D}(g) = \hat{D}^{j_1}(g) \otimes \hat{D}^{j_2}(g)$ 。

- (b) 在变换 \hat{A} 下, 给出力学量和态矢的变换公式。
- (c) 如果系统的哈密顿量在变换 $\hat{A} = e^{-i\varepsilon\hat{G}/\hbar}$ 下不变, 证明这等价于 $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$, 且其生成元 \hat{G} 是一个守恒量。
- (d) 假如系统的哈密顿量与对称性算符 \hat{A} 对易, 试证明如果 $|n\rangle$ 是哈密顿算符的一个本征矢, 则 $\hat{A}|n\rangle$ 也是哈密顿算符的一个具有相同能量的本征矢。特别地, 如果 $|n\rangle$ 和 $\hat{A}|n\rangle$ 不是一个态矢, 则这两个态矢简并。⁶²
- (e) 证明如果系统具有两个不对易的守恒量 \hat{F}, \hat{G} , 则除了那些使得 $[\hat{F}, \hat{G}]|\psi\rangle = 0$ 的态矢 $|\psi\rangle$ 之外, 系统的能级是简并的。
- (f) 证明如果一维系统的势函数非奇异, 则其束缚态不存在简并。
- (g) 证明如果一维系统不存在简并, 则其本征函数为实函数。
- (h) 在空间反演变换下, 符号不变的标量和矢量分别称为(普通)标量和轴矢量(赝矢量), 符号取反的标量与矢量分别称为赝标量和矢量。求出各个物理量在坐标反演变换下的情况。
- (i) 证明如果某算符具有确定宇称, 则其非简并的本征态也具有确定宇称。如果本征态简并, 则一定可以找出一组具有确定宇称的态作为基矢。
- (j) 证明宇称守恒定律: 如果系统的哈密顿量具有确定宇称, 系统的初始条件也具有确定宇称, 则系统在任意时刻的状态也具有确定宇称。
- (k) 证明宇称选择定则: 宇称为奇的算符只可能在相反宇称的态之间具有非零矩阵元, 而宇称为偶的算符只可能在相同宇称的态之间具有非零矩阵元。证明电偶极跃迁(在一阶近似下)只可能在相反宇称的态之间发生。
- (l) 证明时间反演算符⁶³是一个反幺正的算符。
- (m) 证明坐标算符在时间反演下不变, 而动量算符和角动量算符在时间反演下取负号; 电场在时间反演下不变, 而磁场和电流密度在时间反演下取负号。⁶⁴
- (n) 证明在时间反演变换下, 系统的波函数的变换规则为 $\Psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Psi^*(\mathbf{x}, -t)$ 。
- (o) 如果系统的势函数是实的, 证明薛定谔方程具有时间反演对称性。
- (p) 证明对于半整数自旋空间中的态矢来说, 连续作用两次时间反演算符将使得态矢取负号; 而对于整数自旋空间中的态矢来说, 连续作用两次时间反演算符将保持态矢不变。
- (q) 证明: 假设哈密顿量在时间反演下不变, 并且能量本征矢是非简并的, 则可以将能量本征函数取为实函数。
- (r) 证明: 假设哈密顿量在时间反演下不变, 则对于半整数的自旋系统来说, 其每一个能级都至少有二重简并。

14. 平均场近似

- (a) 在伊辛模型最低阶的平均场近似中, 我们直接将自旋之间的相互作用等价为一个作用在自旋上的平均场, 这样伊辛模型就等价为一组处在平均场和外场作用下的独立自

⁶²从数学上说, 这意味着简并态承载了系统哈密顿算符对称群的不可约表示。现在我们已经阐明了, 对称性(不论是连续的还是分立的)可以导致量子态的简并。那么这个问题的逆命题是否成立呢? 换句话说, 是不是所有的简并都是由某种对称性引起的呢? 通常的看法认为不是这样的。我们把那些由对称性引起的简并称为必然简并, 而把那些不是由对称性引起的简并称为偶然简并。

⁶³更恰当地说, 这里的“时间反演”应称为“运动倒转”。

⁶⁴这里需要特别区分一点: 如果磁场是由系统本身所产生的, 那么它在时间反演下取负号; 而如果磁场是外加于系统上的, 则它在时间反演下不变。

旋。因此可以将某自旋 s_0 的能量等价地写为 $H = -J\langle s \rangle s_0 \gamma - \mu B s_0$, 式中 $\langle s \rangle$ 为自旋期望值, 而 γ 为与该自旋发生相互作用的邻近自旋的数量 (配位数)。求出该自旋的期望值所满足的方程, 并讨论系统在什么情况下会发生自发磁化。

- (b) 计算系统的各个临界指数, 并验证其满足标度率。说明系统的各个临界指数与平均场的细节完全无关, 这被称为临界现象的普适性。
- (c) 证明当系统的空间维数 $d > 4$ 的时候, 平均场理论是一个好的近似。⁶⁵
- (d) 证明平均场近似与朗道相变理论等价。
- (e) 现在考虑平均场的更高阶近似。考虑某自旋 s_0 以及其周围的 γ 个邻近自旋 s_j 。这 $\gamma + 1$ 个自旋组成的集团的哈密顿量为

$$H = -\mu B s_0 - J \sum_{j=1}^{\gamma} s_0 s_j - \mu(B + B') \sum_{j=1}^{\gamma} s_j,$$

式中 B' 为系统中其他自旋作用于该集团上的等效场, 这被称为贝特 (Bethe) 近似。试计算该近似下的临界温度和临界指数。

15. 重整化群⁶⁶

- (a) 考虑一个具有 N 个自旋的热力学系统, 其能量可以由诸如 K_i 这样的参数来刻画。现在设想将整个系统的尺度缩小 l 倍, 系统在经过这样的尺度变换之后将仍保持原来的性质, 只不过其参数 K_i 将变为 K'_i 。现在通过对多余自旋求和的方法, 给出 $l = 2$ 时一维伊辛模型和二维伊辛模型的新旧参数变换公式。
- (b) 现在将各个 K_i 视为矢量空间中的一个矢量 \mathbf{K} , 系统在临界点处的参数应当为上述变换的不动点 $\mathbf{K}^* = R_l(\mathbf{K}^*)$ 。试利用上述关系, 求出二维伊辛模型临界温度的近似解。
- (c) 如果我们考虑参数偏离不动点的距离 $\mathbf{k} = \mathbf{K} - \mathbf{K}^*$, 那么可以将变换线性化, 相应于 \mathbf{k} 的变换可以表示为一个变换矩阵。注意到这一结果与标度理论中的表达式非常接近, 依照上述思路, 求出二维伊辛模型的临界指数的近似解。

16. 量子理想气体

- (a) 计算非相对论性理想玻色气体与理想费米气体的巨配分函数, 并求出气体的各热力学量。
- (b) 证明对于量子理想气体来说, 其动量、内能、体积满足如下关系式 $p = 2U/3V$ 。
- (c) 在弱简并极限 $e^{-\alpha} \ll 1$ 下, 将巨配分函数展开为 α 的幂级数, 并在保留至一阶的情况下求出理想玻色气体和费米气体的热力学量。
- (d) 计算强简并极限下理想费米气体的热力学量。
- (e) 对于理想玻色气体来说, 如果在热力学极限下, 其基态能量上凝聚了宏观数量的粒子, 则称气体处于玻色-爱因斯坦凝聚态。计算玻色-爱因斯坦凝聚发生的温度, 以及玻色-爱因斯坦凝聚相变两端的热力学量的取值, 并分析玻色-爱因斯坦凝聚的相变级次。
- (f) 讨论任意维度情况下的量子理想气体的性质, 并分析当气体的维度满足什么样的条件时, 玻色-爱因斯坦凝聚可能发生。

⁶⁵ 为什么刚刚说过平均场近似的结果与维数无关, 这里却又引入了对于空间维数的讨论? 答案是: 虽然近似的结果与维数无关, 但是它在维数大于 4 的情况下却可以与精确解吻合得较好。平均场近似的结果都是相似的, 而精确解则各有各的不同。

⁶⁶ 标度变换中涉及到的所有的变换实际上都是不可逆的。换句话说, “重整化群” 其实只构成一个半群。

- (g) 光子是质量为零的玻色子，它可以被视为极端相对论性粒子。试计算光子气体的巨配分函数和各热力学量，并求出在给定温度下系统的能量随频率的分布。这个结果被称为黑体辐射的普朗克公式。

17. 晶体热容理论

- (a) 求出频率为 ω 的量子振子的能级、配分函数、内能与热容。
- (b) 如果在体积为 V 的晶体中存在一系列形如 $u = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 传播的平面波，假设 \mathbf{k} 是均匀地分布在空间中的，试写出波矢的大小在态空间中分布的密度 $n(k)$ 。假设波的频率仅是波矢的大小的某个函数 $\omega = \omega(k)$ （这被称为色散关系），试写出波的频率在态空间中分布的密度 $n(\omega)$ 。
- (c) 在晶体之中，每一个波都是由晶格上的原子振动产生的。证明如果晶格上的各个原子的相互作用是线性的，那么在将系统的坐标对角化后，可以将每一个平面波与一个频率为 ω 的量子振子对应起来。我们称这些量子化的振子为声子。
- (d) 对于一般情况，如果量子振子的频率分布为 $n(\omega)$ ，计算系统的配分函数、内能与热容。给出晶格的状态方程，并分析其热膨胀性质。
- (e) 作为最简单的例子，我们来考虑爱因斯坦模型。假设晶体中的色散关系为 $\omega = \omega_0$ （即所有波矢对应的频率都是相同的），且假设体系的自由度为 N ，试求出该系统的热容。
- (f) 考虑德拜 (Debye) 模型，假设色散关系可以表示为 $\omega \propto k$ ，并且晶体中存在一个截断频率 ω_D 。给出截断频率 ω_D 的取值，并计算系统的热容在高温极限与低温极限下的取值。
- (g) 考虑一维单原子链的振动。假设只有两个最近邻的原子之间有相互作用，求出该系统的色散关系。
- (h) 我们可以将晶体中的电子近似为一系列自由电子。由于泡利不相容原理，它们将由低至高填充到系统的各个能级上。试求出这一自由电子气体的热容。

18. 晶体的能带与导电理论

考虑在晶体中运动的电子。我们假设晶体中的离子处于固定的位置上，并将所有电子之间的相互作用等效为某种周期性的势场。对于晶体来讲，它的格矢定义为 $\mathbf{R}_l = l_i \mathbf{a}_i$ 。由于晶体是由无数个晶格不断地周期排列得到的，因此在格矢上的任何两个点上，系统的物理性质都是相同的。也就是说，系统满足周期势条件 $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l)$ 。能带论的核心就是求解这种周期势下的薛定谔方程。

- (a) 定义平移算符 $\hat{T}(\mathbf{r}_0)\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$ ，证明三个平移算符 $\hat{T}(\mathbf{a}_i)$ 均与哈密顿算符 \hat{H} 对易，并且它们的共同本征态构成了一组完备基矢。
- (b) 证明布洛赫 (Bloch) 定理：哈密顿算符和平移算符的共同本征态 $\psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r})$ 一定满足 $\psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} \psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r})$ 。
- (c) 证明如果波函数满足玻恩-卡曼 (Karman) 边界条件 $\psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r} + \mathbf{R}_l) = \psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r})$ ，则波矢 \mathbf{k} 也会满足对称性 $\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{K}_h}^n(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r})$ ，式中 $\mathbf{K}_h = \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{b}_i$ 称为倒格矢。试给出 \mathbf{b}_i 与 \mathbf{a}_i 之间的关系。
- (d) 一般来说，晶体能谱 E_n 将是 \mathbf{k} 的函数。试证明对于任何倒格矢 \mathbf{K}_h 都有 $E_n(\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)$ 。通常只选取各倒格矢的最靠近原点的一组垂直平分面所构成的区域内的能谱，称为第一布里渊 (Brillouin) 区。

- (e) 证明在不考虑自旋-轨道耦合的情况下, 布里渊区内的晶体能谱与晶体点阵具有相同的对称性。
- (f) 精确求解一维周期性 δ 势, 给出其能带结构。
- (g) 求解一维周期性方势阱, 给出其能带结构。
- (h) 由于本征态是周期性的, 因此可以将其按照倒格矢的平面波展开。将这一表达式代入到周期势的薛定谔方程中, 给出 $E_n(\mathbf{k})$ 所满足的方程。在实际计算的时候, 取有限个 \mathbf{K}_h 进行截断, 就可以得到 $E_n(\mathbf{k})$ 的近似解。
- (i) 假设等效势场很小, 则可以将电子的零级近似视为平面波, 而将等效势场视为微扰, 这被称为近自由电子近似。当 \mathbf{k} 非常接近某一 \mathbf{K}_h 时, 简并微扰失效, 此时应当改用非简并微扰来处理。给出此时一维近自由电子近似的结果, 并证明这一修正导致了原本连续的能带发生了断裂, 产生了能隙。估计这一能隙的大小。
- (j) 我们可以利用某个局域在离子周围的“孤立平面波” $\phi_n(\mathbf{r}-\mathbf{R}_l)$ 对电子进行展开, 这被称为紧束缚近似。如果电子被近似地看作“束缚在”离子周围, 则可以将各个 $\phi_n(\mathbf{r}-\mathbf{R}_l)$ 近似地看作是正交归一的。因此, 我们可以将电子的实际波函数表示为孤立原子波函数 $\phi_n(\mathbf{r}-\mathbf{R}_l)$ 的线性组合, 它满足以 $u(\mathbf{r})$ 作为孤立原子势的薛定谔方程。将上述表达式代入到薛定谔方程之中, 求出 $E_n(\mathbf{k})$ 的近似解。
- (k) 利用晶体能谱 $E_n(\mathbf{k})$, 给出能带电子态密度的表达式。

19. 晶体的电磁性质

- (a) 一般地, 电子的含时波函数可以表示为 $\psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - E_n(\mathbf{k})t/\hbar)} u_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{r})$ 。实际的粒子可以近似地表示为由动量 \mathbf{k} 附近的一系列本征态构成的一个波包, 称为布洛赫电子。利用 $E_n(\mathbf{k})$ 给出布洛赫电子中心的表达式。
- (b) 在外力 \mathbf{F} 下, 求出布洛赫电子中心所演化的方程。这类似于一个粒子在外力 \mathbf{F} 下的运动, 求出布洛赫电子的等效质量。
- (c) 分析布洛赫电子在恒定电场中的准经典运动, 并证明在准经典近似下电子的运动会产生振荡。
- (d) 试证明满带电子不导电, 即如果一个晶体能带中的所有能级都已经被电子所占据, 则对系统施加一个恒定的电场, 不会导致波包的运动。
- (e) 试证明: 如果晶体中的某个能带有一个能级未被填满, 则这个未被填满的能级的运动就像是一个具有负的“有效质量”的“空穴”一样。
- (f) 利用玻尔兹曼方程, 讨论外电场作用下电子在晶体中的输运过程, 并由此计算晶体的电阻率。
- (g) 求出布洛赫电子在恒定磁场中的经典回转频率。
- (h) 求解恒定磁场中自由电子的薛定谔方程, 并求出其能量本征态。
- (i) 如果在加磁场后, 原来相邻的两个朗道能级之间的量子态都会聚集到朗道能级上, 试求出朗道能级的简并度。
- (j) 由于朗道能级的存在, 系统的磁化强度会出现振荡效应。求出磁化强度随磁场的变化, 这被称为德哈斯-范阿尔芬效应。
- (k) 考虑布洛赫电子在相互垂直的恒定电场与恒定磁场下的运动。证明电子在洛伦兹力的作用下会产生出一个横向电场, 求出这个电场的大小。这被称为霍尔 (Hall) 效应。

- (l) 计及磁场中电子的朗道能级, 给出量子霍尔效应的表达式。⁶⁷

20. 密度泛函理论

- 给出从多电子波函数 $\psi(\mathbf{x}_i)$ 求出电子密度 $\rho(\mathbf{x})$ 的方法。
- 证明霍恩伯格 (Hohenberg)-科恩 (Kohn) 第一定理: 在外势场 $V(\mathbf{x})$ 中的相互作用多电子体系的基态密度与该势场具有一一对应的关系。
- 证明基态电子密度唯一地决定了系统的全部性质, 即系统的总能量可以表示为关于电子密度的泛函 $E[\rho(\mathbf{x})]$ 。
- 证明霍恩伯格 (Hohenberg)-科恩 (Kohn) 第一定理: 系统的基态电子密度将使得系统的总能量取极值。
- 在单电子近似下, 利用能量泛函给出单电子波函数所满足的方程, 并给出求解这一方程的迭代方法。
- 唯象地给出能量泛函的表达式。

21. 格点量子力学

- 写出欧几里得空间中谐振子的路径积分表达式。
- 假设我们在虚时 $T \rightarrow \infty$ 内计算欧几里得空间上的路径积分, 试证明

$$\begin{aligned}\langle \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[x] \mathcal{O}_1(t_1) \mathcal{O}_2(t_2) e^{-S_E(x)} \\ &= \sum_{n \neq 0} \langle 0 | \hat{O}_1(t_1) | n \rangle \langle n | \hat{O}_2(t_2) | 0 \rangle e^{-E_n(t_1 - t_2)},\end{aligned}$$

式中 $|n\rangle, E_n$ 为系统的第 n 个本征态和本征能量, 并假设各算符已恰当地编序。将这个结果推广到任意多个算符相乘的情况。

- 证明系统的第一激发态能量满足公式

$$(E_1 - E_0)a = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle x(t)x(0) \rangle}{\langle x(t+a)x(0) \rangle},$$

式中 a 为格距。

- 根据上述结果, 利用格点方法编写程序, 数值地计算谐振子和包含 λx^4 项的非谐振子的第一激发态能量。

22. 相对论性量子力学 (本题采用自然单位制)

- 写出狄拉克方程的传播子, 证明它将破坏因果律, 即其传播子在类空间隔不为零。
- 利用克莱因-戈登方程和狄拉克方程的规范对称性, 写出相对论性粒子与电磁场作用的方程。
- 写出狄拉克方程的自旋角动量算符, 并证明对于狄拉克方程所描述的粒子 (自由旋量场) 来说, 轨道角动量和自旋角动量都不守恒, 但二者之和守恒。
- 定义自旋算符在运动方向上的投影为系统的螺旋度算符, 证明对于狄拉克方程所描述的粒子 (自由旋量场) 来说, 螺旋度是守恒的。
- 求解相对论性氢原子 $\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m - \alpha/r$, 式中 $\alpha = e^2/4\pi$ 为精细结构常数, $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 为狄拉克方程中的矩阵。

⁶⁷ 霍尔效应是十分复杂的。除去这里所讨论的霍尔效应和量子霍尔效应之外, 还存在分数量子霍尔效应和反常霍尔效应。理解这些现象需要考虑更复杂的相互作用, 它们已经超出了我们此处所讨论的范围。

- (f) 求解狄拉克振子 $\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - im\omega\beta\mathbf{x}) + \beta m$, 式中 $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ 为狄拉克方程中的矩阵。
- (g) 在狄拉克方程的低能近似下, 写出电磁场中的电子所满足的方程, 并求出电子的自旋磁矩表达式。

23. 超对称量子力学

定义一阶微分算符

$$\hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad \hat{A}^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x),$$

式中 $W(x)$ 为实函数, 称为超势。利用它们可以组成两个哈密顿量 $\hat{H}_1 = \hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{H}_2 = \hat{A} \hat{A}^\dagger$ 。超对称量子力学的哈密顿量定义为

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \sigma_3.$$

- (a) 引入两个超荷算符

$$\hat{Q} = \hat{A} \otimes \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^\dagger = \hat{A}^\dagger \otimes \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

证明这组算符满足如下关系

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\} = 0.$$

这被称为系统的超对称性。

- (b) 设 \hat{H}_1, \hat{H}_2 的本征值和本征态分别为 $E_n^{(1)}, \psi_n^{(1)}$ 以及 $E_n^{(2)}, \psi_n^{(2)}$ 。如果 \hat{H}_1 的基态能量为零, 证明这两组本征值和本征态之间满足超对称变换

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} \hat{A} \psi_{n+1}^{(1)}, \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \hat{A}^\dagger \psi_n^{(2)}.$$

24. 公理化量子力学

一种公理化量子力学的方案包含如下公理:

- (a) 态矢公理: 每一个系统对应于一个希尔伯特空间, 其矢量完备地描述了系统的状态。
- (b) 算符公理: 每个力学量唯一地对应于一个作用在希尔伯特空间上的自伴算符。
- (c) 概率公理: 对于一个处于 $|\psi\rangle$ 的系统来说, 对可观测量 \hat{A} 的一次测量结果处于 λ 之间的概率等于 $\hat{E}_\lambda |\psi\rangle$ 的模平方, 式中 \hat{E}_λ 为将态投影到本征态 λ 上的投影算符。
- (d) 演化公理: 态矢量 $|\psi\rangle$ 的演化由如下方程确定

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle,$$

式中算符 \hat{H} 被称为系统的哈密顿算符。

- (e) 测量公理: 对于一个处于 $|\psi\rangle$ 的系统来说, 若对可观测量 \hat{A} 的一次测量所得的结果为 λ , 则系统在测量之后的态正比于 $\hat{E}_\lambda |\psi\rangle$ 。
- (f) 全同公理: 交换两个粒子, 力学量不会发生任何变化。

试利用这些公理重建量子力学体系。

第六章 量子场论

在本章中，我们将采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$ ，同时度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ， γ 矩阵将选取为狄拉克表示。

6.1 标量场路径积分量子化

在前面关于狭义相对论的讨论中，我们已经知道了一个自洽的相对论性粒子之间的相互作用理论是不能够被构造出来的。这是因为相对论性粒子之间的相互作用是超距的，它违反了相对论中任意相互作用的传播不能超过光速的结论。为了解决这个问题，我们需要将它们之间的相互作用用一个弥散在全空间中的经典场来代替。在这种情况下，粒子的扰动在经典场中将以一个有限的速度传播，从而避免了超距的相互作用。

在相对论性量子力学中，我们遇到了类似的困难。如果我们坚持以粒子的方式来描述系统，那么计算相应的传播子就会发现超距作用的存在。最后我们发现，要想解决这个问题，我们不仅要用场来刻画粒子之间的相互作用，甚至连粒子本身都要代之以一个量子化了的场。换句话说，一个自洽的相对论性量子理论要求我们构造一个量子化的场论。沿着这条道路所发展出来的理论，就被称为量子场论。

在前面几章中，我们已经看到了从经典力学理论过渡到量子力学理论的方法。我们知道粒子的作用量可以表示为

$$S[x(t)] = \int dt L(x(t), \dot{x}(t)), \quad (6.1)$$

因此在经典力学中，粒子的运动轨迹将使得其作用量取极值

$$\delta S[x] = \delta \left(\int dt L(x, \dot{x}) \right) = 0. \quad (6.2)$$

而在量子力学中，我们需要用几率振幅来刻画粒子的运动，它表示为对粒子所有可能的路径的一个路径积分

$$\begin{aligned} K &= \int \mathcal{D}[x] e^{iS[x]/\hbar} \\ &= \int \mathcal{D}[x] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int dt L(x, \dot{x}) \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

这样我们就从经典力学过渡了量子力学。

仿照完全类似的思路，我们可以写出将经典场论转变为量子场论的方法。为简便起见，我们选取适当的单位以使得 $c = \hbar = 1$ ，这被称为自然单位制。我们知道场的作用量可以表示为

$$S[\phi(x^\mu)] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\nu \phi(x^\mu)), \quad (6.4)$$

这里 ϕ 代表所有可能的场。因此在经典场论中，场的构型将使得其作用量取极值

$$\delta S[\phi] = \delta \left(\int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) = 0. \quad (6.5)$$

要想得到量子化的场论，我们同样需要利用几率振幅来描述场的演化。量子场的几率振幅将对所有可能的场构型进行求和，且每个场构型所对应的贡献将正比于场作用量的一个复指数函数。将

之写成泛函积分的形式, 我们就得到了

$$\begin{aligned} K &= \int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]} \\ &= \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

这样我们就从经典场论过渡到了量子场论, 沿着这条思路所进行的量子化方法被称为场的路径积分量子化 (或更恰当地称为泛函积分量子化)。

与经典力学情况相似, 量子力学实际上就是零维的量子场论。因此将 5.3 节中关于路径积分的结果直接推广, 我们就可以得到量子场论中的相应结果。接下来我们将只考虑时间从负无穷到正无穷的物理过程。假设有某个力学量 \mathcal{O} , 它是场构型 $\phi(x)$ 的泛函。那么在量子场论中, 它的期望值将可以表示为¹

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{O}[\phi] e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]}}. \quad (6.7)$$

上述表达式意味着对力学量在所有可能的场构型上进行加权平均, 每个构型的权重为 $\exp(iS/\hbar)$ 。

仿照量子力学中的做法, 我们可以为系统引入一个源项 $J(x)$, 从而可以将系统的作用量表示为

$$S_J = S[\phi] + \int d^4x J(x) \phi(x). \quad (6.8)$$

该含源系统的路径积分将表示为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[i \left(S[\phi] + \int d^4x J(x) \phi(x) \right) \right]. \quad (6.9)$$

我们把上述定义的 $Z[J]$ 称为量子场的生成泛函。与量子力学中的情况相似, 利用生成泛函可以简化力学量期望值的表达式。因为附加的源项是在指数上的, 因此对 $J(x)$ 求泛函导数, 路径积分中就会多出来一个 $\phi(x)$ 。于是, 我们可以将场在某点 x^μ 处的真空期望值写成

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (6.10)$$

类似地, 场的两点关联函数可以表示为

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \frac{1}{Z[0]} [(-i\delta J_1)(-i\delta J_2) Z[J]]_{J=0}, \quad (6.11)$$

式中 ϕ_i 代表着 $\phi(x_i)$, $\delta J_1 = \delta/\delta J(x_1)$ 。以此类推, 我们可以求出系统的任意多点关联函数

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \frac{1}{Z[0]} [(-i\delta J_1) \dots (-i\delta J_n) Z[J]]_{J=0}. \quad (6.12)$$

这可以等价地表示为

$$Z[J] = Z[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \mathcal{D}[\phi_1] \dots \mathcal{D}[\phi_n] \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle J_1 \dots J_n. \quad (6.13)$$

作为最简单的情况, 我们首先考虑自由实标量场。自由实标量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (6.14)$$

其多点关联函数可以表示为

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}[\phi] \phi_1 \dots \phi_n e^{iS_0[\phi]}}{\int \mathcal{D}[\phi] e^{iS_0[\phi]}} \\ &= \frac{1}{Z[0]} (-i\delta J_1) \dots (-i\delta J_n) Z[J], \end{aligned} \quad (6.15)$$

¹更严格地说, 这里力学量 \mathcal{O} 的期望值实际上是算符 $\hat{\mathcal{O}}$ 编时乘积的真空期望值 $\langle 0|T[\hat{\mathcal{O}}]|0\rangle$ 。在计算中, 算符插入的顺序将自动保证编时乘积, 而在时间趋于无穷的情况下只有真空态的贡献是主要的。我们在后文中将对此进行更详细的讨论。

可以验证, 若系统的生成泛函可以表示为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\frac{i}{2} \phi_a A_{ab} \phi_b + i J_a \phi_a}, \quad (6.16)$$

则系统的传播子可以表示为

$$G_{12} = -i A_{12}^{-1}. \quad (6.17)$$

这与量子力学的情况是一致的, 只不过我们要将粒子的路径 $x(t)$ 替换为场的构型 $\phi(x)$ 。在弃去适当的全导数项后, 我们可以将自由标量场的拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi \quad (6.18)$$

因此其两点关联函数可以表示为

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = G(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \quad (6.19)$$

事实上这里的两点关联函数恰好是经典克莱因-戈登场的传播子²

$$(\partial^2 + m^2)G(x_1 - x_2) = -i\delta^{(4)}(x_1 - x_2). \quad (6.20)$$

仿照与量子力学中相似的过程, 我们可以求出自由标量场的四点关联函数

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle &= G(x_1 - x_2)G(x_3 - x_4) \\ &+ G(x_1 - x_3)G(x_2 - x_4) + G(x_1 - x_4)G(x_2 - x_3), \end{aligned} \quad (6.21)$$

它表示为所有可能的传播子的组合之和。对更高阶的多点关联函数有类似的结果。

上述积分实际上是发散的, 因为积分路径经过了函数的奇点。一个发散的积分是没有意义的, 因此我们必须对上述积分的定义进行修改, 以使得我们在某种程度上能够得到一个有意义的结果。我们考虑传播子中关于时间分量的积分

$$I \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{1}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2} e^{-ip^0(t_1 - t_2)}, \quad (6.22)$$

式中 $E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ 为粒子的能量。不难发现, 由于被积变量经过被积函数的奇点 $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}^2$, 因此这个积分是发散的。为了让积分收敛, 我们可以在分母上添加一个小的正虚部³

$$I \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{1}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} e^{-ip^0(t_1 - t_2)}. \quad (6.23)$$

这样定义后, 我们发现函数的奇点离开了实轴, 如图 6.1 所示。我们也可以等价地说, 在这一过程中并未移动奇点离开实轴, 而是在选择积分路径的时候从下方绕开了奇点 $p^0 = -E_{\mathbf{p}}$, 从上方绕开了奇点 $p^0 = E_{\mathbf{p}}$ 。

将费曼传播子的时间部分积去, 我们得到

$$G_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2E_{\mathbf{p}})} \left[\theta(t_1 - t_2) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} + \theta(t_1 - t_2) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \right], \quad (6.24)$$

式中 $p^\mu p_\mu = m^2$, 上述结果的推导过程详见附录 B.3。我们发现, 即使我们在计算的最后一步取 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 积分仍然是收敛的。因此我们略去求极限的符号, 把这个发散的积分定义为

$$G_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (6.25)$$

我们称以这种方式定义的传播子为费曼传播子。

需要说明的是, 上述传播子积分在实轴上有两个奇点。因此在选择积分路径的时候, 每个奇点都有从上方绕过和从下方绕过两种不同的方案。每条不同的积分路径 (或每种不同移动奇点的

²这是施温格-戴森方程的一个特例。

³事实上我们有如下结果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x),$$

式中 \mathcal{P} 为柯西主值, 上述结果在积分的意义下成立。

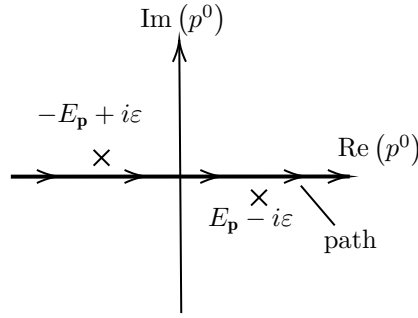


图 6.1: 费曼传播子的积分路径。

方法) 对应于不同的传播子。如果我们将两个奇点都从下方绕过, 那么这等价于两个奇点都在上半平面, 所得到的函数为超前传播子

$$G_{\text{adv}}(x_1 - x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 - i \operatorname{sgn}(p^0) \varepsilon}, \quad (6.26)$$

式中 sgn 为符号函数。如果我们将两个奇点都从上方绕过, 那么这等价于两个奇点都在下半平面, 所得到的函数为推迟传播子

$$G_{\text{ret}}(x_1 - x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i \operatorname{sgn}(p^0) \varepsilon}. \quad (6.27)$$

超前传播子仅在 $t_1 - t_2 > 0$ 时才不为零, 即它仅向未来传播; 而推迟传播子仅在 $t_1 - t_2 < 0$ 时才不为零, 即它仅向过去传播。在量子场论中, 我们只考虑费曼传播子。

接下来我们考察相互作用场。考虑一个具有自相互作用 $\lambda\phi^4$ 的量子场, 它的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (6.28)$$

这与量子力学中的非谐振子相似。为了计算四点关联函数, 我们需要计算如下的路径积分

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = \int \mathcal{D}[\phi] \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \exp \left[i \left(S_0 - \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right], \quad (6.29)$$

式中 S_0 为自由标量场的作用量, 我们已经略去了分母中的归一化泛函积分。⁴

与量子力学中的情况相似, 这一泛函积分是不能够精确地计算出来的。因此为了求解这个相互作用场的多点关联函数, 我们需要利用微扰论的办法。假设非线性项是一个小量, 我们可以对指数中的 ϕ^4 项进行级数展开

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \left(S_0 - \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right] \\ &= e^{iS_0} \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 x_a \phi_a^4 + \frac{1}{2} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 x_a d^4 x_b \phi_a^4 \phi_b^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

这一表达式等价于

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 x \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J] \\ &= \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int dt_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta J_1} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left(-i \frac{\delta}{\delta J_1} \right)^4 \left(-i \frac{\delta}{\delta J_2} \right)^4 + \dots \right] Z_0[J], \end{aligned} \quad (6.31)$$

⁴在后文中我们将会看到, 分母中的路径积分恰好抵消了分子中的全部真空图。

式中 $Z_0[J]$ 为自由场的生成泛函。⁵

取上述级数的零阶项, 结果为

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 = \int \mathcal{D}[\phi] \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 e^{iS_0}. \quad (6.32)$$

这个结果就是没有非线性微扰时的情况。取上述级数的一阶项, 我们就得到了一阶微扰的结果

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_1 = -\frac{i\lambda}{4!} \int \mathcal{D}[\phi] \int d^4x_a \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_a^4 e^{iS_0}. \quad (6.33)$$

这可以被视为一个自由标量场的八点关联函数, 其中四个点 x_1, x_2, x_3, x_4 相互独立, 另外有四个点重合于 x_a 点, 对 x_a 进行全时空的积分再乘以一个常数系数。与量子力学中的非谐振子类似, 这个积分可以用费曼图来表示, 它的结果为由四条外线和一个顶点所组成的所有可能的图形之和。这一理论的坐标空间费曼规则如下所示:

- (1) 每一条内线对应于一个连接两点的传播子。
- (2) 每一个顶点贡献一个因子 $-i\lambda/\hbar$, 并对该点进行全时间的积分。
- (3) 将上述所有项乘在一起, 就得到了该费曼图的贡献。

对于上述一阶微扰项来说, 唯一的一阶四点连通图是四条外线各与顶点所延伸出的一条线相连的图形, 如图 6.2 (a) 所示。根据费曼规则, 我们可以将这个费曼图所对应的微扰项的贡献表示为

$$I(x_1, x_2, x_3, x_4) = -i\lambda \int d^4x_a G_F(x_a - x_1) G_F(x_a - x_2) G_F(x_3 - x_a) G_F(x_4 - x_a). \quad (6.34)$$

在这里我们选取 x_1, x_2 为入射的源, 而 x_3, x_4 为出射的汇, $G_F(x_1 - x_2)$ 代表从 x_1 传播至 x_2 的粒子。由于费曼传播子是偶函数

$$G_F(x_1 - x_2) = G_F(x_2 - x_1), \quad (6.35)$$

因此各个变量的顺序其实无关紧要, 它无非代表着我们把哪个点看成是“源”、哪个点看成是“汇”而已。在动量空间中, 调换源和汇的方向实际上相当于将动量的符号取反, 这同样不会产生本质的影响。

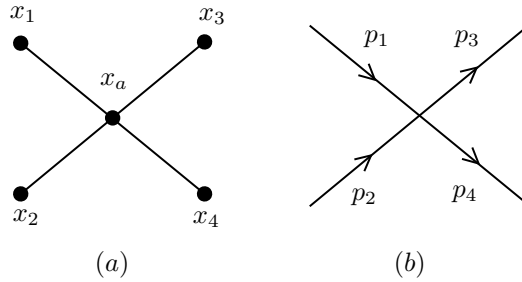


图 6.2: 坐标空间 (a) 和动量空间 (b) 中四粒子散射的最低阶费曼图。

接下来我们将显式地把费曼图所对应的积分计算出来。将传播子的具体形式代入到式 (6.34) 中, 我们得到

$$I = -i\lambda \int d^4x_a \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \times \frac{ie^{-ip_1 \cdot (x_a - x_1)}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{ie^{-ip_2 \cdot (x_a - x_2)}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{ie^{-ip_3 \cdot (x_3 - x_a)}}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{ie^{-ip_4 \cdot (x_4 - x_a)}}{p_4^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (6.36)$$

⁵更一般地, 我们有

$$\int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[i \left(S_0 + \int d^4x J\phi - \int d^4x V(\phi) \right) \right] = \exp \left[-iV \left(-i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[i \left(S_0 + \int d^4x J\phi \right) \right].$$

关于 x_a 的积分是可以直接作出的

$$\int d^4x_a e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)\cdot x_a} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3+p_4-p_1-p_2), \quad (6.37)$$

因此上述传播子变为

$$\begin{aligned} I = & -i\lambda \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{-i(-p_1\cdot x_1 - p_2\cdot x_2 + p_3\cdot x_3 + p_4\cdot x_4)} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3+p_4-p_1-p_2) \\ & \times \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

我们看到, 这个表达式类似于将坐标空间四点关联函数 $I(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 作傅里叶变换而得到了 $I(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 。取出射动量为正, 入射动量为负, 我们可以将动量空间中的四点关联函数表示为

$$\begin{aligned} I(-p_1, -p_2, p_3, p_4) = & -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3+p_4-p_1-p_2) \\ & \times \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

式中 $\tilde{\phi}(p)$ 为动量空间中的场。

将这个表达式写成动量形式经常是更有启发性的, 因为我们实际在实验中观测到的就是某些具有确定动量的粒子相互作用的情况。假设系统在初态 ($t = -\infty$) 有两个动量为 p_1, p_2 的粒子,⁶ 则它们在末态 ($t = +\infty$) 演化为两个动量为 p_3, p_4 的粒子的几率振幅 S_{fi} 将可以表示为⁷

$$S_{fi} = \langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle = \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle p_3, p_4 | \hat{U}(t', t) | p_1, p_2 \rangle, \quad (6.40)$$

式中 \hat{U} 为系统的时间演化算符, 而

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} U(t', t) \quad (6.41)$$

称为散射矩阵。现在我们要问: 这里的几率振幅 $\langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle$ 和动量空间的四点关联函数 $I(-p_1, -p_2, p_3, p_4)$ 之间究竟有什么关系?

这个问题的答案其实出乎意料地简单: 只要把 $I(-p_1, -p_2, p_3, p_4)$ 中的所有外线的贡献 $i/(p_j^2 - m^2 + i\varepsilon)$ 全部去除, 我们得到的就是几率振幅 $\langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle$ 。⁸ 换句话说, 动量空间中的一阶费曼图 6.2 (b) 所对应的几率振幅就是

$$\langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3+p_4-p_1-p_2). \quad (6.42)$$

这个结果被称为 LSZ(Lehmann-Symanzik-Zimmermann) 约化公式, 其证明详见附录 B.4。我们可以将单位矩阵从 S 矩阵之中分离出来, 并定义

$$\hat{S} = I + i\hat{T}, \quad (6.43)$$

这被称为 T 矩阵。更进一步地, 我们可以将 S 矩阵的矩阵元定义为

$$\begin{aligned} \langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle &= \langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle + \langle p_3, p_4 | i\hat{T} | p_1, p_2 \rangle \\ &= \langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3+p_4-p_1-p_2) \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

因此我们可以得到一个更简单的结果

$$i\mathcal{M} = -i\lambda. \quad (6.45)$$

⁶一个更好的假设是将初末态的各个粒子视为在空间中定域的波包, 而非无限延展的平面波。不过我们可以证明, 如果波包在动量空间中的宽度足够小, 那么振幅将仅取决于波包的中心动量, 而与其形状的细节无关。

⁷这个公式中初末的粒子态实际上并不是自由场的粒子态, 而是相互作用场的渐进态。我们暂时不显地作出这一区分。

⁸如果外线中包含自能修正的圈图, 则我们要将这些圈图一并截去。这实际上是相当于将传播子中的质量由裸质量 m_0 替换为物理质量 m_p , 并乘以一个发散的重整化因子 \sqrt{Z} 。我们在这里不打算明显地作出这些区分。

这里的 \mathcal{M} 被称为散射振幅，它包含了四个粒子之间相互作用的信息。这样，我们在一阶微扰的水平上就给出了 $\lambda\phi^4$ 场的四粒子散射振幅。由于这样一个费曼图中不包含由传播子首尾相接构成的圈，因此我们称之为树图。

依照同样的方法，我们可以讨论四粒子散射的更高阶微扰展开项。取微扰展开的二阶项，我们得到

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle_2 = \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)^2 \int \mathcal{D}[\phi] \int d^4x_a \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_a^4\phi_b^4 e^{iS_0}. \quad (6.46)$$

在二阶微扰下，四粒子散射具有两种不同的连通费曼图，如图 6.3 所示。⁹ 仿照一阶微扰的方法计算出这些图的振幅，我们得到

$$i\mathcal{M}_a = (-i\lambda)^2 \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.47)$$

$$i\mathcal{M}_b = (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.48)$$

由于这些图中都包含圈，因此我们称之为圈图。将所有图的贡献加在一起，我们就得到了散射振幅的高阶修正。

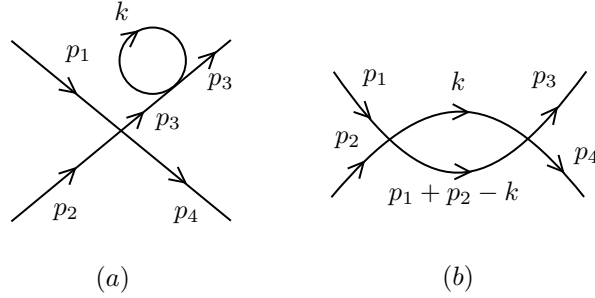


图 6.3: 四粒子散射的二阶费曼图。

我们发现，每一个动量空间的费曼图都以确定的规则同一个散射振幅 \mathcal{M} 相关联，这被称为费曼规则。利用这些费曼规则，我们可以绕过冗长的计算而直接给出散射振幅微扰展开项的取值。比较前面计算出的几个振幅与其相应的费曼图，我们可以给出 $\lambda\phi^4$ 理论的动量空间费曼规则：

(1) 画出费曼图，每个粒子用一条外线来表示，顶点的数目等于微扰的阶数。出于习惯，我们让费曼图的演化过程从左至右进行。

(2) 规定入射动量为正，出射动量为负。为每条线标注动量，保证所有顶点处的动量均是守恒的。

(3) 为每个顶点添加因子 $-i\lambda$ 。

(4) 为每条内线添加一个因子 $i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$ ，这里的 k 是该条内线的动量。

(5) 每个独立的圈将引入一个自由动量 k ，对这个动量在全空间进行积分 $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ 。

(6) 将上述的所有贡献乘在一起，就得到了这张图对应的散射振幅。

(7) 将所有图的贡献全部加在一起，就得到了总的散射振幅。

上述费曼规则与微扰展开过程的对应是直接的。对于第 n 阶微扰来说，我们需要乘以因子 $(-i\lambda)^n$ ，这对应于费曼图中 n 个顶点的贡献。每一个传播子对应于费曼图中的一条线，所有的外线都被 LSZ 约化公式截去，最后只剩下内线的贡献。每一个顶点都有一个对四动量的积分，每积去一个动量就在顶点上引入一个动量守恒的条件，而未被积去的自由动量就作为圈积分保留

⁹当然，实际上仍然存在一些拓扑不等价的图，如我们可将圈插在图 6.3 (a) 的任何一条外线上，或者可以交换图 6.3 (b) 中的某些外线顺序而得到新的图。

下来。每张费曼图对应于一个微扰展开项，将所有的微扰展开项的贡献加在一起，我们就得到了散射的总振幅。

我们可以以下面这种方式来直观地理解费曼图的物理意义。假设图中的每条线代表一个传播的粒子，而每个顶点代表着粒子之间的相互作用。对于图 6.2 (a) 来说，我们可以认为动量为 p_1, p_2 的两个粒子经历了一次相互作用之后，变成了动量为 p_3, p_4 的两个粒子。这个过程有些类似于经典的“碰撞”（或者叫散射）过程。对于图 6.3 (a) 来说，我们可以认为动量为 p_1, p_2 的两个粒子经历了一次“碰撞”之后，变成了动量为 $k, (p_1 + p_2 - k)$ 的两个虚粒子；然后这两个虚粒子又经历了一次“碰撞”，变成了动量为 p_3, p_4 的两个粒子。可以说，这个图相当于粒子之间进行了两次“碰撞”。对于图 6.3 (b) 来说，我们可以认为 p_1, p_2 两个粒子经历了一次“碰撞”之后，变成了 p_3, p_4 。只不过在此之后， p_3 在传播过程中又释放了一个动量为 k 的粒子并将之吸收。以此类推，我们可以以相同的方式来解释每个费曼图的含义。

我们似乎看到了这样一幅图景：有两个动量为 p_1, p_2 的粒子，它们在经过一段时间之后会演化成为两个动量为 p_3, p_4 的粒子。由于路径积分要求我们将所有可能的情况叠加起来，因此这两个粒子将穷尽一切可能的情况开始运动。有的时候它们之间发生了一次碰撞，有的时候它们发生了许多次碰撞；有的时候它们在运动过程中突然分裂成了别的粒子，这些粒子又可能相互碰撞和分裂成新的粒子。然后在经过一段时间的演化之后，这些粒子又被吸收掉，最终又变成了两个粒子。上述这些过程可以以难以置信的复杂方式相互组合起来，最终粒子的运动就是上述这些所有可能发生的过程的总和。

这个看法固然是直观的，但需要特别注意的是，我们并不能将费曼图看作是真实发生在物理世界的过程。实际上存在的只有两个具有相互作用的粒子，而并没有那些在空间中不断发生相互作用、不断产生而又湮灭的粒子。这些看起来不同的过程，无非是微扰论不同阶的各项的贡献而已。真正存在的只有一个非微扰的过程，微扰论的各项只不过是方便理解而人为割裂开来的。

微扰展开的各阶项究竟意味着什么？直观地看，微扰展开相当于将振幅按照耦合常数 λ 的幂次展开， n 阶展开项对应于振幅中的 λ^n 项。如果耦合常数 λ 是一个小量，那么这将是一个好的近似。¹⁰ 对于电磁相互作用来说，其在低能下的耦合常数为

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}, \quad (6.49)$$

这是一个很小的量，此时微扰展开是适用的。但强相互作用在低能下的耦合常数可以大于 1，¹¹ 此时微扰场论将失效，我们需要采用非微扰方法或者近似理论进行研究。

一个更有启发性的做法是将微扰展开视为按照普朗克常数 \hbar 的幂次展开。在计算费曼图所对应的振幅时，每个顶点将携带一个 \hbar^{-1} 的因子，而每个传播子将携带一个 \hbar 的因子，因此总的 \hbar 的幂次 N 等于费曼图外线个数 E 加内线个数 I 再减去顶点个数 V

$$N = E + I - V. \quad (6.50)$$

对于连通的费曼图来说，其内线个数减去顶点个数恰好等于圈数 L （即独立的内线动量个数）减一

$$I - V = L - 1. \quad (6.51)$$

这样圈数 L 与 \hbar 的幂次 N 之间的关系就可以表示为

$$L = N - E + 1. \quad (6.52)$$

¹⁰ 需要说明的是，此处的微扰展开级数实际上是不收敛的。截取这个级数的有限多项，在 λ 充分小的时候可以得到满意的结果。但是在任意有限大的 λ 处，如果级数的项数足够多，最终得到的结果反而会越来越发散。换句话说，这个级数展开只在 $\lambda = 0$ 处精确成立。究其原因在于 $\lambda = 0$ 是振幅的一个本性奇点，因此这个级数的收敛半径为零。因此，此处微扰展开的级数实际上并非泰勒展开，而是“渐近展开”。

¹¹ 由于重整化的缘故，量子场论的（有效）耦合常数会随着能量发生变化，这被称为跑动耦合常数。对于强相互作用来说，在能量较低的情况下其跑动耦合常数取值很大，此时系统体现为强耦合。而在能量很高的情况下，其跑动耦合常数将趋近于零，此时系统体现为渐近自由。

对于一类给定的散射过程来说，其外线数量总是固定的。因此我们说微扰展开实际上可以视为按照费曼图的圈数展开，它等价于按照 \hbar 的幂次展开。

在计算费曼图时，有几点情况需要作额外的说明。原则上来说，每一个微扰项都对应于一个费曼图，而总振幅等于所有微扰项的求和。因此在计算时应当先写出每一个微扰项所对应的费曼图（可能有重复），然后再对所有的图形求和。但实际在计算的时候通常是反过来的，即先画出所有可能的费曼图，然后再写出这些费曼图所对应的微扰项，最后对这些微扰项求和得到总振幅。有时候不同的微扰项能够给出相同的图形，因此直接通过费曼图来计算可能是有所遗漏的。我们还需要在图形所对应的振幅上乘以一个额外的对称因子才能得到它的真实贡献。

我们以图 6.3 (b) 为例来简要地说明对称因子的计算方法。首先，我们需要计算将构成费曼图的外线、内线和顶点以不同方式相连，得到同一个图的情况有多少种（或者说在微扰展开式中，有多少个不同的展开项对应于相同的费曼图）。每个顶点需要连接两条外线，因此共有 $4 \times 3 \times 4 \times 3$ 种连法。然后，将两个顶点用内线连接起来，又有两种连法。最后我们可以置换两个顶点的位置而不改变图形，这又有两种连法。因此，该图的权重为

$$4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = (4!)^2, \quad (6.53)$$

它代表着在关联函数的表达式中，有 $(4!)^2$ 项能够给出完全相同的图形。但是考虑到一阶微扰展开中有一个 $1/2$ 的因子，每一个顶点自带一个 $1/(4!)$ 的因子，因此最后该图的对称因子为

$$A = \frac{(4!)^2}{2 \times (4!)^2} = \frac{1}{2}. \quad (6.54)$$

事实上，微扰展开项的阶乘因子 $1/n!$ 可以恰好与交换 n 个传播子的对称性相抵消，并且我们总是恰当地定义耦合常数前的系数（对 $\lambda\phi^4$ 理论来说是 $1/4!$ ），使得它能够消除掉将不同外线连接到同一个顶点上的对称性。因此，我们在计算对称因子时可以只考虑除去上述两种对称性之外的内部对称性（即图本身所具有的对称性）。

通常来说，图形的内部对称性将会使得图的对称因子降低，因为这意味着对图做某种变换得到的仍然是相同的图（即对应于相同的微扰展开项）。对于图 6.3 (b) 来说，两传播子之间存在着两条相同的内线，这是图形的一个内部对称性。交换这两条内线，所得到的仍然是相同的图形（或者说这对应于同一个微扰展开项），这就使得图形的对称因子降低为了原来的 $1/2$ 。我们可以写出所有保持费曼图不变的内部变换，其个数（即费曼图内部对称群的阶数）的倒数就是费曼图的对称因子。

我们在画费曼图的时候，有时候会遇到一种没有任何外线连接、与费曼图的其他部分不连通的图，如图 6.4 (a) 所示。这种图被称为真空-真空跃迁图（真空图），它所对应的过程被称为真空涨落。不过我们能够证明，所有真空图的贡献加在一起可以被忽略掉。任何一个费曼图都可以分解为一个非真空图和一系列连通的真空图（当然也可能没有真空图）。设对于某费曼图来说，其非真空图部分的贡献为 C_i ，而真空图部分含有 n_{ij} 个贡献为 V_j 的连通真空图。对于真空图来说，交换顶点实际上并不对应于微扰展开式中的不同项。因此一个含有 n 个顶点的真空图要附带一个 $1/n!$ 的对称因子。因此我们可以将这张费曼图的贡献表示为

$$K_i = C_i \prod_j \frac{1}{n_{ij}!} (V_j)^{n_{ij}}. \quad (6.55)$$

散射过程的总振幅将表示为所有费曼图的振幅之和

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \left(C_i \prod_j \frac{1}{n_{ij}!} (V_j)^{n_{ij}} \right). \quad (6.56)$$

由于求和对所有可能的费曼图进行，因此我们可以先对具有相同非真空部分进行求和，最后再对

不同的非真空部分求和。对于每一个连通图来说，非真空部分都将取遍一切可能的取值

$$\begin{aligned} \sum_{n_j} \prod_j \frac{1}{n_j!} (V_j)^{n_j} &= \prod_i \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \\ &= \prod_j \exp(V_j) = \exp\left(\sum_j V_j\right), \end{aligned} \quad (6.57)$$

因此总振幅可以表示为

$$K = \sum_i V_i = \sum_i C_i \cdot \exp\left(\sum_j V_j\right). \quad (6.58)$$

由于任何一个可观测量 \mathcal{O} 的真空期望值都由分子和分母上的两个路径积分组成

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{O}[\phi] e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]}}, \quad (6.59)$$

式中分母部分的路径积分代表着所有真空图的贡献

$$K = \exp\left(\sum_j K_j\right), \quad (6.60)$$

而分子部分的费曼图总可以写成所有非真空图的贡献之和与所有真空图贡献的乘积

$$K = \sum_i C_i \cdot \exp\left(\sum_j V_j\right). \quad (6.61)$$

将分子与分母相除，剩下的就只有非真空图的贡献

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_i C_i \cdot \exp\left(\sum_j V_j\right)}{\exp\left(\sum_j V_j\right)} = \sum_i C_i. \quad (6.62)$$

因此我们得到结论：力学量的真空期望值等于所有非真空图的贡献之和。由此我们也看到，在前面的讨论中略去算符真空期望值的分母中的归一化路径积分，实际上就相当于略去所有真空图的贡献。

在计算费曼图的时候，我们有时会遇到图形不连通的情况。我们考虑一个 $2 \rightarrow 2$ 粒子散射的过程，它包含一张不连通的单圈图，如图 6.4 (b) 所示。不难看出，这种不连通图的贡献等于其各连通部分的贡献之积，因此我们只需讨论连通部分的散射性质即可。事实上我们可以定义连通生成泛函

$$W[J] = -i \ln Z[J], \quad (6.63)$$

对其求泛函导数就可以得到连通关联函数

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_c = \frac{\delta^n W[J]}{i^{n-1} \delta J_1 \dots \delta J_n} \Big|_{J=0}, \quad (6.64)$$

这一关联函数中只包含连通图的贡献。以四点连通关联函数为例，可以验证它与关联函数之间的关系满足

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_c = \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle \phi_1 \phi_3 \rangle \langle \phi_2 \phi_4 \rangle - \langle \phi_1 \phi_4 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle, \quad (6.65)$$

因此所有非连通图的贡献都被减去了，余下的只有连通图的贡献。

现在，唯一剩下的问题就是计算出圈图中的积分了。但是一旦我们去着手计算这些积分，就会发现它们可能是发散的。为了直观地看出这一点，让我们考察图 6.3 中的两个圈积分在高动量

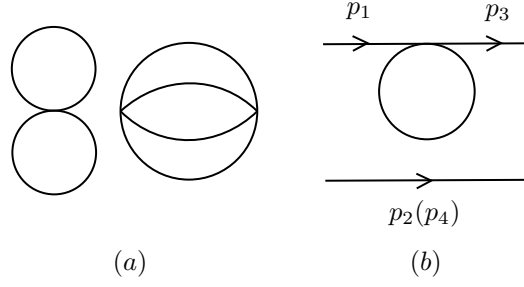


图 6.4: 真空图 (a) 与不连通图 (b)。

区 $k \rightarrow \infty$ 的极限

$$\mathcal{M}_a \sim \int d^4k \frac{1}{k^4} \sim \ln \Lambda^2, \quad (6.66)$$

$$\mathcal{M}_b \sim \int d^4k \frac{1}{k^2} \sim \Lambda^2. \quad (6.67)$$

这里的圈积分发散度 $\mathcal{M}_a \sim \ln \Lambda^2$ 的含义是：假如我们在 $k^2 < \Lambda^2$ 的区间内计算积分，那么在 Λ^2 足够大的情况下，积分的结果将具有 $\ln \Lambda^2$ 的渐进形式。因此当积分区间变为无穷大，即 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的时候，这个积分将以 $\ln \Lambda^2$ 的形式发散。¹² 这样一种在高动量区出现的发散被称为紫外发散。我们将这里通过幂次计算的方法简单分析出来的发散度称为“表观发散度”，它可以为费曼图的敛散性提供一个直观的标准。

如果理论中存在发散，那么我们将不可能得到任何有意义的结果。为了解决这个问题，我们需要在某种正规化的意义下来理解圈积分，并利用这种方法将无穷大的部分分离出来。然后，我们需要利用重整化的方法将这个无穷大的部分抵消掉。由此我们可以得到一个有限的微扰理论，它可以恰当地给出系统的微扰性质。关于重整化的细节，我们将在后续的章节中作详细的介绍。

量子场论的精确求解是极为困难的。迄今为止人们几乎没有在四维时空中精确求解出任何相互作用场论，¹³ 因此我们几乎只能借助于近似方法来研究量子场论。对于能量不是很高的散射过程来说，粒子之间的相互作用不是很强，此时我们可以利用微扰论来求解。但如果要考虑的是一个非微扰的情况，那么我们就需要花费巨大的开销，通过格点场论的方法将待求的路径积分数值地计算出来。¹⁴ 然而格点理论中的符号问题在这里仍然困扰着我们，可以说即便是采用数值计算的方法，我们对量子场论的认识仍然相当有限。

6.2 标量场正则量子化

在前面的章节中我们已经讨论过，如果将粒子的力学量视为算符，并将力学量之间的泊松括号替换成为算符之间的对易关系

$$[x, p]_{\text{cl.}} = 1 \Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}]_{\text{qm.}} = i, \quad (6.68)$$

那么我们就从经典力学过渡到了量子力学。考虑到场相当于一个无限自由度的动力学系统，即处于每一个位置 \mathbf{x} 处的场 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 都可以被视为一个以指标 \mathbf{x} 标记的随时间变化的广义坐标，因此我们可以利用同样的方法由经典场论过渡到量子场论。将场 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 和其所对应的正则动量 $\pi(\mathbf{x}, t)$ 视为算符，那么量子力学中的正则对易关系将可以自然地推广为

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.69)$$

¹²为了说出这一点，我们已经隐含地采用了正规化的思想。我们将在后文中对此进行详细的阐述。

¹³一个例外是 $SU(N)$ 规范理论，可以证明它在 $N \rightarrow \infty$ 的极限下等价于一个具有无穷多自由介子的场论，因此它在大 N 极限下是精确可解的。

¹⁴我们也可以采用量子力学中的波函数方法来处理量子场论，此时量子场所对应的波函数将成为一个关于场构型的泛函。对泛函的处理是相当困难的，因此即使利用波泛函的方法，我们也很难得到量子场论中的更多信息。

我们还要求场及其正则动量与其自身总是对易的

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (6.70)$$

为了简便起见, 我们接下来将略去场及其动量的算符记号。

设场的拉格朗日密度为 \mathcal{L} , 则场的正则动量算符将可以表示为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (6.71)$$

由此我们可以计算出场的哈密顿密度以及哈密顿量算符

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad \hat{H} = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}. \quad (6.72)$$

与量子力学的情况类似, 场及其正则动量的演化将满足如下的海森堡方程

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = i[\hat{H}, \phi(\mathbf{x}, t)], \quad (6.73)$$

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = i[\hat{H}, \pi(\mathbf{x}, t)], \quad (6.74)$$

式中各场以及正则动量均应当被视为算符, 括号应当被理解为场算符间的量子对易括号。这样我们就完成了场的量子化, 它被称为场的正则量子化方法 (或称二次量子化方法)。将海森堡方程求解出来, 我们就得到了量子场的演化。

我们应当如何来理解一个作为算符的场呢? 实际上, 在正则量子化过程中我们采用的是海森堡绘景, 而并不是薛定谔绘景。在薛定谔绘景之中, 我们固定力学量算符的取值, 而让态矢随着时间演化。但是在这里, 我们选择让场算符随着时间演化, 而让算符所作用的态矢保持不变。由于态本身和算符本身都是不可观测量, 而力学量 (换句话说就是算符在态上的期望值) 才是可观测量, 因此这两种看法是完全等价的, 它们能够给出完全相同的预言。于是, 写出场算符的演化方程 (海森堡方程), 我们就完成了量子场论的构建。

作为一个最简单的例子, 我们首先考察自由实 (厄密) 标量场的量子化。自由实标量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (6.75)$$

其正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (6.76)$$

将其哈密顿密度计算出来, 我们得到

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]. \quad (6.77)$$

对全空间积分, 我们就得到了场的哈密顿量

$$\hat{H} = \int d^3 x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3 x [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]. \quad (6.78)$$

利用场算符之间的对易关系, 我们可以计算出场算符满足的海森堡方程

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = i[\hat{H}, \phi(\mathbf{x}, t)] = \pi(\mathbf{x}, t), \quad (6.79)$$

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = i[\hat{H}, \pi(\mathbf{x}, t)] = (\nabla^2 - m^2)\phi(\mathbf{x}, t), \quad (6.80)$$

从海森堡方程中约去正则动量场, 我们将得到自由标量场算符所满足的方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\nabla^2 - m^2)\phi. \quad (6.81)$$

它与克莱因-戈登方程的形式完全相同, 只不过方程中的场应当被视为算符。

为了求解这一算符方程, 我们需要将场算符对时间的依赖明显地从算符之中分离开来。由于克莱因-戈登方程的解是平面波, 因此我们将场算符展开成平面波的形式¹⁵

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} [\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}], \quad (6.82)$$

¹⁵ 这里的平面波展开有几种不同的约定。若取积分测度为 $d^3 p / [(2\pi)^3 2E_p]$, 则算符 $\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ 是洛伦兹不变的。若取积分测度为 $d^3 p / \sqrt{(2\pi)^3 2E_p}$, 则正则对易关系将简化为 $[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ 。我们在这里采取的是一种折中的约定。

式中所有动量四矢量 p 的零分量都取为

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (6.83)$$

由于我们这里的场 ϕ 被视为了算符，而 $e^{ip \cdot x}$ 只是一个平面波，因此我们应当将这里的展开系数 $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ 看作是算符。

原则上讲，我们可以用任意一组正交归一的基矢来展开场算符，只不过对于自由场来说，利用平面波展开所得到的表达式要更加简洁。我们当然也可以选择其他的基矢，但是这些基矢在演化的过程中会相互转化，其结果就是基矢分量所对应的算符也将随着时间演化。由于平面波是克莱因-戈登方程的解，因此各个平面波分量在演化过程中互不干扰，“各行其是”，各平面波分量所对应的算符也将不随时间变化。通过将场算符的展开式代入到克莱因-戈登方程之中，我们可以验证这一点。这样我们就将量子场“求解”出来了。

对场算符求关于时间的偏导数，我们就得到了场动量算符的表达式

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (iE_{\mathbf{p}}) [-\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}]. \quad (6.84)$$

对于标量场来说，场算符和动量算符之间的对易关系可以表示为

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} (iE_{\mathbf{p}'}) \\ &\times \{ -[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] e^{-i(p \cdot x + p' \cdot x')} + [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] e^{i(p \cdot x + p' \cdot x')} \\ &+ [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] e^{-i(p \cdot x - p' \cdot x')} - [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] e^{i(p \cdot x - p' \cdot x')} \}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

要使得 $\phi(x), \pi(x)$ 之间的正则对易关系得到满足，各算符 $\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ 之间的对易关系应当满足

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (6.86)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0. \quad (6.87)$$

这就是产生湮灭算符之间的对易关系。

根据诺特定理，场的能量是对应于时间平移不变性的守恒荷，而场的动量是对应于空间平移不变性的守恒荷。对于自由标量场来说，场的能量和动量分别为

$$\hat{H} = \int d^3 x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right) = \frac{1}{2} \int d^3 x [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2], \quad (6.88)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = - \int d^3 x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \nabla \phi = - \int d^3 x \pi \nabla \phi. \quad (6.89)$$

这两个表达式可以更紧凑地合写为

$$\hat{P}^\mu = \frac{1}{2} \int d^3 x i \phi \overleftrightarrow{\partial}_0 (\partial^\mu \phi). \quad (6.90)$$

将场算符和场正则动量算符的展开式代入到能量算符和动量算符的表达式中，我们可以求出能量算符和动量算符用 $\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ 表示的结果

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} [\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}], \quad (6.91)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} [\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}]. \quad (6.92)$$

上述两个表达式可以更紧凑地合写为

$$\hat{P}^\mu = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^\mu [\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}]. \quad (6.93)$$

注意到

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0), \quad (6.94)$$

而

$$\delta^{(3)}(0) = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3}, \quad (6.95)$$

因此我们可以将系统的哈密顿算符写成另一种等价的形式

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}) + V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}. \quad (6.96)$$

对动量也有类似的结果, 不过由于对 $\mathbf{p}/2$ 全空间的积分为零, 因此表达式中的第二项被消去了, 只留下了第一项。

接下来我们将讨论系统哈密顿量算符的本征态。注意到

$$[\hat{H}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] = E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad [\hat{H}, \hat{a}_{\mathbf{p}}] = -E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (6.97)$$

因此如果态 $|a\rangle$ 是哈密顿算符的本征态

$$\hat{H}|a\rangle = E_a|a\rangle, \quad (6.98)$$

那么将 $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}}$ 作用在 $|a\rangle$ 上后, 我们将得到

$$\hat{H}(\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger|a\rangle) = (E_a + E_{\mathbf{p}})\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger|a\rangle, \quad \hat{H}(\hat{a}_{\mathbf{p}}|a\rangle) = (E_a - E_{\mathbf{p}})\hat{a}_{\mathbf{p}}|a\rangle. \quad (6.99)$$

这意味着将 $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ 作用在哈密顿算符的任意本征态 $|a\rangle$ 上后, 得到的同样是哈密顿算符的本征态, 且其能量比态 $|a\rangle$ 高 $E_{\mathbf{p}}$ 。类似地, 将 $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ 作用在态 $|a\rangle$ 上后得到的也是哈密顿算符的本征态, 且其能量比态 $|a\rangle$ 低 $E_{\mathbf{p}}$ 。¹⁶

对于真实的物理系统来说, 其能量是有下界的。换句话说, 我们不能够无限地将算符 $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ 作用在态矢上, 从而得到能量越来越低的态。这意味着存在着一个能量最低的态 $|0\rangle$, 将任意算符 $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ 作用在其上都有

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0, \quad (6.100)$$

我们称这个态为真空态。将能量算符作用在真空态上, 我们就可以计算出该态所具有的能量

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}) + V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} \right) |0\rangle \\ &= \left(V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (6.101)$$

这个态的能量是发散的, 它被称为真空能。

事实上, 自由标量场的每个 \mathbf{p} 分量自由度都可以被视为一个量子谐振子。为看出这一点, 我们首先写出自由标量场的哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2(\mathbf{x}, t) + (\nabla\phi(\mathbf{x}, t))^2 + m^2\phi^2(\mathbf{x}, t)]. \quad (6.102)$$

对场的空间坐标 \mathbf{x} (并非时空坐标 x^μ) 做傅里叶变换, 我们将得到动量空间中的哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\pi^2(\mathbf{p}, t) + (\mathbf{p}^2 + m^2)\phi^2(\mathbf{p}, t)]. \quad (6.103)$$

注意到谐振子的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2, \quad (6.104)$$

因此场的每个 \mathbf{p} 分量对应于一个能量为

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (6.105)$$

的谐振子。更一般地, 对于任意一个相互作用为二次 (对于标量场来说表现为场的空间导数为 $(\nabla\phi(\mathbf{x}, t))^2$) 的多自由度系统来说, 我们总可以通过对角化的方式将其化为一组无相互作用的

¹⁶即使 $\hat{a}_{\mathbf{p}}|a\rangle = 0$, 这个表达式也成立 (恒等于零), 并不产生矛盾。

谐振子。作代换¹⁷

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}} [E_{\mathbf{p}}\phi(\mathbf{p}, t) + i\pi(\mathbf{p}, t)], \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \sqrt{\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}} [E_{\mathbf{p}}\phi(\mathbf{p}, t) - i\pi(\mathbf{p}, t)], \quad (6.106)$$

利用算符间的对易关系，我们将得到

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} [\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2}. \quad (6.107)$$

以上是连续指标下的结果。更进一步地，我们可以取箱归一化，即首先在一个体积为 $V = L^3$ 的立方体箱中讨论场的量子化。在这种情况下取周期性边界条件，指标 \mathbf{p} 将变为分立的

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(l, m, n), \quad l, m, n \in \mathbb{N}. \quad (6.108)$$

在箱归一化下，我们可以将场 ϕ 展开为

$$\phi = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}V}} (\hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{ip \cdot x}), \quad (6.109)$$

式中各产生湮灭算符的对易关系为

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (6.110)$$

这样一个分立系统的能量为

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right), \quad (6.111)$$

式中 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。由此我们看到，系统将可以表示为一系列分立的振动模式所组成的集合，这里的每一个振动模式都可以视为一个频率为 $E_{\mathbf{p}}$ 的量子谐振子。等式右边的第一项代表了 \mathbf{p} 自由度下 N 个激发粒子的能量，而第二项代表这一自由度的零点能。由于这一系统中的振动模式是无限多的，因此对所有自由度 \mathbf{p} 求和，我们将发现零点能是发散的。在 $V \rightarrow \infty$ 的极限下，振动模式将变得连续，由此回到了通常的量子场论。

初看起来，在理论中出现了无穷大的能量是很严重的问题。不过由于只有两个态之间的能量差是可观测量，因此在量子场论中零点能的绝对数值是无关紧要的。在接下来的推导之中，我们将简单地把这个零点能视为零，即令真空态的能量为

$$\hat{H}|0\rangle = 0|0\rangle. \quad (6.112)$$

这意味着我们弃去了哈密顿算符中的第二项，而将其简单地表示为

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} \quad (6.113)$$

在粒子物理的讨论中，这通常不会引起可观测的效应。

由真空能引发的无穷大可以利用正规乘积的方式系统地消除掉。我们用 N 来表示一系列算符的正规乘积，它的做法是将乘积中的所有算符进行恰当的置换，使得湮灭算符全部出现在产生算符的右边，例如

$$N[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}] = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} = 2\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (6.114)$$

用正规乘积替换掉哈密顿量中的普通乘积，我们将得到

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} N[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (6.115)$$

利用这种方法，我们就消除了无穷大的零点能。类似地，动量算符可以利用正规乘积表示为

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} N[\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (6.116)$$

¹⁷需要注意的是，这里所定义的产生湮灭算符以一个复指数函数的形式依赖于时间，它们与前面所定义的算符并不完全一致。但这并不影响最终的结果，因为算符与其共轭的乘积将消除掉所有对于时间的依赖，最终得到的结果是不随时间变化的。

更一般地, 我们考虑一系列任意的场算符 ϕ_i 的正规乘积 $N[\phi_1 \dots \phi_n]$ 。我们可以将每个场算符分解为正频部分 ϕ_i^+ 和负频部分 ϕ_i^- , 其中正频部分只包含湮灭算符, 而负频部分只包含产生算符。对算符乘积展开式中的每一项, 都通过恰当地调转算符的顺序, 将正频部分放在负频部分的右边。特别地, 对两个算符乘积的真空期望值有

$$N[\phi_1 \phi_2] = \phi_1 \phi_2 - \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle. \quad (6.117)$$

若对等式两边取真空期望值, 则我们将自然得到 $\langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle = 0$ 。对于更多算符的正规乘积来说, 注意到

$$\langle 0 | \hat{a}^\dagger = 0, \quad \hat{a} | 0 \rangle = 0, \quad (6.118)$$

因此必然有

$$\langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle = 0, \quad (6.119)$$

即所有正规乘积的真空期望值均为零。因此, 正规乘积确实可以减除掉由于真空能引起的发散。今后在未作说明的情况下, 算符之间的乘积指的均为正规乘积。¹⁸

在某些情况下, 我们仍然能够探测到真空能的效应。例如, 如果我们在量子场中插入某些宏观物体, 那么这将为量子场附加上额外的边界条件, 其结果将引起场的真空能发生变化。这被称为卡西米尔效应, 它意味着虽然真空能本身是无限大, 但是其有限的改变却是可观测的。此外, 真空能还有可能参与引力相互作用。真空能是暗能量的一个候选者, 它可能在时空中提供一种负压强, 从而使得宇宙加速膨胀。不过理论所预言的真空能密度要远大于暗能量的实际观测值, 目前尚不知道如何解决这个问题, 我们也不知道暗能量是否真的来源于真空能。¹⁹

通过将算符作用在真空态上, 我们可以构造其他的本征态。对于任意 $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ 来说, 将其作用在真空态上

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (6.120)$$

得到的仍然是哈密顿算符的本征态

$$\hat{H}|\mathbf{p}\rangle = E_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle. \quad (6.121)$$

这里我们引入了一个归一化因子 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$, 以使得不同本征态之间满足协变的归一化条件

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (6.122)$$

特别地, 两个相同单粒子态的内积为

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x = 2E_{\mathbf{p}} V. \quad (6.123)$$

如果我们将 n_1 个 $\hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger$, n_2 个 $\hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \dots$ 等算符作用在真空态上, 那么我们将得到

$$|n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle = \prod_i \frac{(2E_{\mathbf{p}_i})^{n_i/2}}{\sqrt{n_i!}} (\hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger)^{n_i} |0\rangle, \quad (6.124)$$

由于各个算符之间是对易的, 因此它们之间的作用顺序是不重要的, 这样我们要在表达式中扣除对称因子 $\sqrt{n_i!}$ 。将哈密顿算符和动量算符作用在这个态上, 我们得到

$$\hat{H}|n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle = \sum_{i=1}^n n_i E_{\mathbf{p}_i} |n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle. \quad (6.125)$$

$$\hat{\mathbf{p}}|n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle = \sum_{i=1}^n n_i \mathbf{p}_i |n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle. \quad (6.126)$$

¹⁸事实上, 由于各算符之间是不对易的, 因此在将力学量替换为算符后将产生算符次序的问题, 即不知道在力学量的乘积中哪个算符应当排在前, 哪个算符应当排在后。若不能够恰当地处理算符次序的问题, 则会在理论中产生困难, 发散的真空能就是其中之一。正规乘积恰当地规定了算符之间的次序, 从而消除真空能的问题, 同时也为算符的次序提供了一个标准。

¹⁹如果超对称理论为真, 那么粒子与其超对称伴子之间的真空能将相互抵消, 从而可以消除掉发散的真空能。不过根据目前的观测结果, 超对称理论即便不是错误的, 也必然发生了较大程度的破缺, 因此不同粒子之间的真空能又要发生较大的偏差。至少在目前看来, 真空能问题仍然需要依靠其他方式来解决。

定义粒子数算符为

$$\hat{N} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (6.127)$$

它作用在态 $|n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle$ 上的结果为

$$\hat{N}|n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle = \sum_i n_i |n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle. \quad (6.128)$$

我们发现, 上述表达式的形式与 5.7 节末尾介绍的粒子数表象几乎是完全一致的。因此, 我们在这里将 $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ 视为产生算符, 它作用在某态上之后将产生出一个能量为 $E_{\mathbf{p}}$ 的粒子; 而将 $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ 视为湮灭算符, 它作用在某态上之后将消灭一个能量为 $E_{\mathbf{p}}$ 的粒子。在这个视角下, 态 $|n(\mathbf{p}_i) = n_i\rangle$ 就代表着一个具有 n_1 个动量为 \mathbf{p}_1 的粒子、 n_2 个动量为 \mathbf{p}_2 的粒子……的状态。由此我们看到, 量子场论中的粒子可以被视为场的激发态。²⁰ 对于自由标量场来说, 我们可以将同一个产生算符作用在真空态上任意多次, 每次作用之后都会使得系统的能量上升一次, 因此我们说这个系统容许任意多的粒子处于同一个态上。换句话说, 标量场产生的粒子是玻色子。若粒子所处的状态是各不相同的, 则我们可以将归一化本征态简记为

$$|\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^n \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle. \quad (6.129)$$

如果系统中确实存在处于相同状态的粒子, 那么我们就在表达式中额外扣除全同因子 $\sqrt{n!}$ 。

上述粒子数本征态构成了系统的一组完备基矢, 我们称这组基矢所张成的希尔伯特空间为福克空间。场的任何量子态 $|\Phi\rangle$ 都可以表示为各粒子数本征态的线性组合

$$|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3p_1 \dots d^3p_n}{(2\pi)^{3n}} C(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\rangle, \quad (6.130)$$

式中各 $C(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ 为量子场的(动量空间)波函数, 我们已选取波函数的取值使得量子场满足适当的归一化条件。由于各个粒子是对易的, 因此 $C(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ 相对于所有变量是对称的。

以上我们讨论了标量场的量子态, 但是场算符 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 本身代表着什么呢? 为了看出这一点, 我们将场算符 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 作用在真空态上, 结果为

$$\phi(\mathbf{x}, t)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip \cdot x} |\mathbf{p}\rangle.$$

将之与量子力学中动量表象下的坐标本征态类比, 我们发现态 $\phi(\mathbf{x}, t)|0\rangle$ 类似于一个具有确定时间和位置的粒子态 $|\mathbf{x}, t\rangle$ 。但是将其直接视为一个具有确定坐标的粒子仍然会产生困难, 这只有在非相对论的情况下才是可能的。

我们接下来考虑场算符之间的关联。定义两个场算符的编时乘积为

$$T[\phi(x_1)\phi(x_2)] = \theta(t_1 - t_2)\phi(x_1)\phi(x_2) + \theta(t_2 - t_1)\phi(x_2)\phi(x_1), \quad (6.131)$$

它将时间靠后的算符放在左边, 而将时间靠前的算符放在右边, 对于多个场算符的编时乘积有类似的定义。在物理上所考虑的一个重要的量就是算符编时乘积的真空期望值, 即

$$G(x_1, x_2) = \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle. \quad (6.132)$$

编时乘积相当于将 x_1 和 x_2 处的两个场算符按照时间顺序依次作用在真空态上, 然后再与真空态本身做内积。因此, 这个算符代表了 x_1 和 x_2 处的量子场之间的关联。

对于任意一个场 ϕ 来说, 我们都可以将之分解为负频部分与正频部分之和

$$\phi = \phi^- + \phi^+, \quad (6.133)$$

²⁰ 这一点似乎暗示了, 在量子场论中只有场才是最基本的, 而粒子只是场的某种附加属性而已。在这里物质和场之间的关系相比于 19 世纪的时候几乎掉转过来了——场并非是物质的某种极化状态, 恰恰相反, 物质才应当被视为场的激发态。

式中负频部分只包含产生算符，正频部分只包含湮灭算符²¹

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \hat{a}_p^\dagger e^{ip \cdot x}, \quad \phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \hat{a}_p e^{-ip \cdot x}. \quad (6.134)$$

因此我们可以将编时乘积的真空期望值表示为

$$\langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \phi^+(x_1)\phi^-(x_2) | 0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | \phi(x_2)\phi(x_1) | 0 \rangle. \quad (6.135)$$

上式中第一项代表一个粒子从 x_2 处产生，稍后在 x_1 处湮灭的过程；而第二项代表一个粒子从 x_1 处产生，稍后在 x_2 处湮灭的过程。因此，这一编时乘积的真空期望值描述了粒子在 x_1 与 x_2 两点之间传播的过程。

接下来我们明显地求出自由标量场编时乘积的期望值。对编时乘积求一次导数，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} T[\phi(x')\phi(x)] &= \delta(t' - t) [\phi(x'), \phi(x)] + T\left[\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x')\phi(x)\right] \\ &= T\left[\frac{\partial}{\partial t'} \phi(x')\phi(x)\right]. \end{aligned} \quad (6.136)$$

再求一次导数，结果为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} T[\phi(x')\phi(x)] &= \delta(t' - t) \left[\frac{\partial \phi(x')}{\partial t'}, \phi(x) \right] + T\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi(x')\phi(x)\right] \\ &= -i\delta^4(x' - x) + T\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi(x')\phi(x)\right]. \end{aligned} \quad (6.137)$$

注意以上两式均为算符表达式。考虑到克莱因-戈登方程，我们有

$$(\partial_{x'}^2 + m^2) T[\phi(x')\phi(x)] = -i\delta^4(x' - x). \quad (6.138)$$

对等式两边求真空期望值，结果为

$$(\partial_{x'}^2 + m^2) \langle 0 | T[\phi(x')\phi(x)] | 0 \rangle = -i\delta^4(x' - x). \quad (6.139)$$

这样我们就得到了编时乘积真空期望值所满足的方程。

求解出来这个方程，我们发现它恰是经典自由标量场的费曼传播子

$$\langle 0 | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = G_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (6.140)$$

事实上，编时乘积的真空期望值与路径积分中定义的多点关联函数是等价的

$$\langle 0 | T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle. \quad (6.141)$$

上述结果的推导详见附录 B.5。因此，路径积分方法与正则量子化方法实际上为量子场论提供了相同的表述。

接下来我们将考察自由复标量场的量子化。考虑非厄密的自由复标量场 ϕ ，其拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (6.142)$$

与 ϕ, ϕ^\dagger 场相对应的正则动量分别为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}. \quad (6.143)$$

因此自由复标量场的哈密顿密度将可以表示为

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^\dagger \dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L} = \pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (6.144)$$

复标量场的所满足的正则对易关系为

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.145)$$

²¹ 这里的正频与负频指的是空间分量的正负。由于一个能量为 E ，动量为 \mathbf{p} 的（粒子所对应的）平面波可以表示为 $e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$ ，因此这里的正频与负频部分实际上也就是正能与负能部分。

其余的所有场算符都是对易的。

将复标量场展开为平面波，我们得到

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left[\hat{a}_p e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right], \quad (6.146)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left[\hat{a}_p^\dagger e^{ip \cdot x} + \hat{b}_p e^{-ip \cdot x} \right]. \quad (6.147)$$

由于复标量场是非厄密的，因此算符 \hat{a}_p 与 \hat{b}_p 是不相同的。根据场算符的正则对易关系，我们可以得到各 \hat{a}_p, \hat{b}_p 之间的对易关系

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = [\hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (6.148)$$

其余所有算符都是对易的。

利用各 \hat{a}_p, \hat{b}_p 算符，我们可以将自由复标量场的四动量算符表示为

$$\hat{P}^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu [\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p], \quad (6.149)$$

粒子数算符可以表示为

$$\hat{N} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p], \quad (6.150)$$

上述算符均已表示为正规乘积的形式。由此我们看到，在复标量场中产生了 a, b 两种质量相同的粒子，其中 ϕ 场对应于湮灭 a 型粒子、产生 b 型粒子，而 ϕ^\dagger 场对应于产生 a 型粒子、湮灭 b 型粒子。系统的总能量、总动量和总粒子数将可以表示为这两种粒子的贡献之和。计算自由复标量场编时乘积的真空期望值，我们得到

$$\langle 0 | T[\phi(x_1) \phi^\dagger(x_2)] | 0 \rangle = G_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (6.151)$$

上述结果的推导与自由实标量场是类似的，这里从略。

如果我们将复标量场的实部和虚部明显地分解为两个实标量场

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (6.152)$$

那么系统的拉格朗日密度将可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (6.153)$$

这意味着一个自由复标量场相当于两个自由实标量场的组合。我们可以将实标量场展开为

$$\phi_i(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \left[\hat{a}_{ip} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{ip}^\dagger e^{ip \cdot x} \right], \quad (6.154)$$

其产生湮灭算符与复标量场的产生湮灭算符之间将满足如下关系

$$\hat{a}_p = \frac{\hat{a}_{1p} + i\hat{a}_{2p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_p^\dagger = \frac{\hat{a}_{1p}^\dagger - i\hat{a}_{2p}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad (6.155)$$

$$\hat{b}_p = \frac{\hat{a}_{1p} - i\hat{a}_{2p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_p^\dagger = \frac{\hat{a}_{1p}^\dagger + i\hat{a}_{2p}^\dagger}{\sqrt{2}}. \quad (6.156)$$

自由复标量场除了洛伦兹对称性之外，还具有全局 $U(1)$ 对称性，即拉格朗日密度在如下的全局相位变换下不发生改变

$$\phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi'^\dagger = e^{-i\alpha} \phi^\dagger. \quad (6.157)$$

这个对称性所对应的守恒流为

$$j^\mu = i\phi^\dagger \partial^\mu \phi - i(\partial^\mu \phi^\dagger) \phi, \quad (6.158)$$

守恒荷为

$$\hat{Q} = \int d^3x j^0 = \int d^3x (i\phi^\dagger \dot{\phi} - i\dot{\phi}^\dagger \phi). \quad (6.159)$$

利用复标量场的产生湮灭算符，我们可以将其表示为

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p], \quad (6.160)$$

式中我们已采用了正规乘积，以消去无穷大的真空荷。上述结果意味着 a, b 两种粒子携带着相反的守恒荷，可以互相抵消。习惯上我们称其中一个粒子为正粒子，而另一种粒子为反粒子。它们具有相同的质量以及相同的相互作用性质，但是却携带着相反的守恒荷。每种不同的内部对称性都对应于不同的守恒荷，如电荷、色荷、同位旋等。

以上我们讨论了自由标量场的性质，接下来我们将处理相互作用场论。考虑具有如下形式的哈密顿量

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_i, \quad (6.161)$$

这里 \hat{H}_0 是已经精确求解的部分（通常是自由场），它不显含时间；而 \hat{H}_i 是相互作用部分，它可以随时发生变化。考虑到 \hat{H}_0 部分已经被求解了，因此我们从薛定谔绘景出发作么正变换

$$|\phi^I(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0^S t} |\phi^S(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}^S t} |\phi^H\rangle, \quad (6.162)$$

$$\hat{O}^I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{O}^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = e^{i\hat{H}_0^S t} e^{-i\hat{H}^S t} \hat{O}^H(t) e^{i\hat{H}^S t} e^{-i\hat{H}_0^S t}, \quad (6.163)$$

这被称为相互作用绘景。与海森堡绘景的情况类似，我们有

$$\hat{H}_0^I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{H}_0^S, \quad (6.164)$$

因此自由场部分的哈密顿算符在相互作用绘景和薛定谔绘景下的表达式是相同的，我们不必对此做出明显的区分。在相互作用绘景下，相互作用哈密顿量可以表示为

$$\hat{H}_i^I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_i^S e^{-i\hat{H}_0^S t}. \quad (6.165)$$

在相互作用绘景下，算符演化方程与海森堡绘景是类似的，只是要将哈密顿量 \hat{H} 替换为 \hat{H}_0

$$\frac{d\hat{O}^I(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{O}^I(t)}{\partial t} + i[\hat{H}_0^I, \hat{O}^I(t)]. \quad (6.166)$$

而态矢的演化方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\phi^I(t)\rangle = \hat{H}_i^I |\phi^I(t)\rangle. \quad (6.167)$$

对于力学量算符的期望值来说，各绘景所得到的结果是完全相同的

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \phi^S(t) | \hat{O}^S | \phi^S(t) \rangle = \langle \phi^H | \hat{O}^H(t) | \phi^H \rangle = \langle \phi^I(t) | \hat{O}^I(t) | \phi^I(t) \rangle, \quad (6.168)$$

因此我们可以针对具体的问题选择合适的绘景。对于我们所考虑的相互作用场来说，采用相互作用绘景来求解是比较方便的。在相互作用绘景下，算符的演化依赖于 \hat{H}_0^I 部分，而态矢的演化依赖于 \hat{H}_i^I 部分。由于我们已经求解了算符在自由场哈密顿量 \hat{H}_0^I 作用下的演化，因此接下来我们只需要考虑态矢在相互作用哈密顿量 \hat{H}_i^I 作用下的演化即可。

以下我们将考虑相互作用绘景，并略去态矢与算符的角标 I 。定义相互作用绘景中的时间演化算符为²²

$$|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle, \quad (6.169)$$

它所满足的方程为

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_i(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (6.170)$$

将这个方程积分一次，我们可以得到一个等价的积分方程

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_i(t_1) \hat{U}(t_1, t_0). \quad (6.171)$$

²²根据相互作用绘景中态矢所满足的关系，时间演化算符可以表示为 $\hat{U}(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ 。然而由于 \hat{H}_0 与 \hat{H} 均为算符，因此我们不能在指数中将它们直接相减。一般来说，这个表达式可用 BCH(Baker-Campbell-Hausdorff) 公式转化为一个算符级数的指数函数。我们在后文中会给出利用 \hat{H}_i 写出的表达式。

在 $t = t_0$ 的情况下, 我们自然得到 $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$, 这是时间演化算符的初始条件。

若 \hat{H}_i 可以被视为微扰, 则上述积分方程可以利用迭代法求解。将等式右端的时间演化算符反复地利用积分方程本身替换, 我们可以得到一系列的级数

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_i(t_1) \hat{U}(t_1, t_0) \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_i(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_i(t_1) \hat{H}_i(t_2) \hat{U}(t_2, t_0) \\ &= \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_i(t_1) \dots \hat{H}_i(t_n),\end{aligned}\quad (6.172)$$

式中 $t > t_1 > \dots > t_n > t_0$ 。利用编时乘积, 我们可以将所有的积分上下限都取为 t_0 到 t

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T[\hat{H}_i(t_1) \dots \hat{H}_i(t_n)]. \quad (6.173)$$

这被称为戴森级数。我们把上述表达式形式地记为指数形式

$$\hat{U}(t, t_0) = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_i(t') \right]. \quad (6.174)$$

对于定域场来说, 哈密顿量可以写成哈密顿密度对全空间的积分

$$\hat{H}_i(t) = \int d^3x \mathcal{H}_i(\mathbf{x}, t). \quad (6.175)$$

那么场的 S 矩阵可以表示为

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} U(t', t) = T \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_i(x) \right], \quad (6.176)$$

其中积分对全时空进行。²³ 这无疑是一个简洁的表达式。尽管我们已经将 S 矩阵形式地记为了一个哈密顿密度复指数函数的编时乘积, 但是它本质上来说还是一个级数。因此, 这个级数自然就构成了微扰展开的各阶。

接下来我们以 $\lambda\phi^4$ 相互作用场论为例, 考察微扰论的计算方法。 $\lambda\phi^4$ 场论的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (6.177)$$

我们假设对这一相互作用场论来说, 正则对易关系仍然成立。取 \mathcal{H}_0 为自由标量场的哈密顿密度, 则相互作用部分的哈密顿密度可以表示为

$$\mathcal{H}_i = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (6.178)$$

由此我们可以求出 S 矩阵展开式的第一项的表达式

$$\hat{S}^{(1)} = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x_a T[\phi_a^4], \quad (6.179)$$

其中 ϕ_a 代表的是 $\phi(x_a)$ 。类似地, 展开式第二项的表达式为

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4x_a d^4x_b T[\phi_a^4 \phi_b^4]. \quad (6.180)$$

以此类推, 我们可以写出任意高阶的微扰展开式。

我们看到, 这里的每一个展开式都是一系列场算符的编时乘积。但如果要计算散射振幅的话, 我们需要计算的是场算符的正规乘积。比如, 如果我们考虑两个动量为 p_1, p_2 的粒子散射到两个动量为 p_3, p_4 的粒子, 那么我们要计算的矩阵元就是

$$\langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle = \prod_{i=1}^4 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{S} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle. \quad (6.181)$$

²³ 相互作用绘景的分解是具有任意性的。尽管上述的结论对于任意一种相互作用绘景的分解方法都是成立的, 但 S 矩阵却不一定在所有情况下都收敛。要想得到一个收敛的 S 矩阵, 我们需要适当地选取 \hat{H}_0 , 使得 \hat{H}_0 和 \hat{H} 具有相同的谱。

这一项的结果实际上就是由 S 矩阵中的正规乘积项 $\hat{a}_{\mathbf{p}_3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_4}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2}$ 的系数给出。因此为了明显地给出散射矩阵元的表达式，我们需要给出将编时乘积转化为正规乘积的方法。

编时乘积与正规乘积之间的关系可以由维克定理给出。定义两个算符 \hat{O}_1, \hat{O}_2 之间的收缩为其编时乘积的真空期望值

$$\overline{\hat{O}_1 \hat{O}_2} = \langle 0 | T[\hat{O}_1 \hat{O}_2] | 0 \rangle. \quad (6.182)$$

根据上述定义，我们可以计算自由实标量场及其各产生湮灭算符之间的收缩

$$\overline{\phi(x) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x}, \quad \overline{\hat{a}_{\mathbf{p}} \phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{ip \cdot x}, \quad (6.183)$$

$$\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (6.184)$$

维克定理表述为： n 个算符的编时乘积等于这些算符正规乘积所有可能的收缩之和。比如对于四个算符的乘积来说，我们有

$$\begin{aligned} & T[\hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3 \hat{O}_4] \\ &= N[\hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3 \hat{O}_4] \\ & \quad + N[\overline{\hat{O}_1 \hat{O}_2} \hat{O}_3 \hat{O}_4] + N[\hat{O}_1 \overline{\hat{O}_2 \hat{O}_3} \hat{O}_4] + N[\hat{O}_1 \hat{O}_2 \overline{\hat{O}_3 \hat{O}_4}] \\ & \quad + N[\hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3 \overline{\hat{O}_4}] + N[\hat{O}_1 \overline{\hat{O}_2 \hat{O}_3} \hat{O}_4] + N[\hat{O}_1 \hat{O}_2 \overline{\hat{O}_3 \hat{O}_4}] \\ & \quad + N[\hat{O}_1 \hat{O}_2 \hat{O}_3 \hat{O}_4] + N[\overline{\hat{O}_1 \hat{O}_2} \hat{O}_3 \hat{O}_4] + N[\hat{O}_1 \overline{\hat{O}_2 \hat{O}_3} \hat{O}_4]. \end{aligned} \quad (6.185)$$

上述表达式的第一行代表没有收缩的正规乘积，第二行和第三行代表有一对收缩的正规乘积，第四行代表有两对收缩的正规乘积。对更高阶的编时乘积有类似的结果，²⁴ 其证明过程参考附录 B.6。

作为示例，我们接下来考虑两个动量为 p_1, p_2 的粒子散射为两个动量为 p_3, p_4 的粒子的过程。对于一阶微扰来说，我们要计算的矩阵元为²⁵

$$\langle p_3, p_4 | \hat{S}^{(1)} | p_1, p_2 \rangle = \frac{-i\lambda}{4!} \prod_{i=1}^4 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \int d^4 x_a \langle 0 | T[\hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \phi_a \phi_a \phi_a \phi_a \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger] | 0 \rangle. \quad (6.186)$$

由于产生湮灭算符与时间无关，因此我们可以将其放入编时乘积之内，这样等式右边的真空期望值就可以表示为八个算符的编时乘积。由于正规乘积的真空期望值恒为零，因此只有那些所有算符完全收缩的项才会产生贡献。于是我们需要计算所有的算符完全收缩的情况，并对所有可能的收缩方式求和。

在考虑了所有可能的收缩后，我们发现一阶微扰下唯一的连通图就是四个场算符与四个升降算符各收缩一次的情况。由于四个场算符有 24 种完全相同的收缩情况，因此它会将相互作用系数中的 4! 项抵消掉，从而使得表达式具有更简洁的形式。这一项所对应的费曼图如图 6.5 所示，对应的积分可以表示为

$$\begin{aligned} I &= -i\lambda \prod_{i=1}^4 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \int d^4 x_a \langle 0 | N[\overline{\hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \phi_a \phi_a \phi_a \phi_a} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger] | 0 \rangle \\ &= -i\lambda \int d^4 x_a e^{-ip_1 \cdot x_a} e^{-ip_2 \cdot x_a} e^{ip_3 \cdot x_a} e^{ip_4 \cdot x_a} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \end{aligned} \quad (6.187)$$

它所对应的散射振幅为

$$i\mathcal{M} = -i\lambda, \quad (6.188)$$

²⁴我们常常考虑含有正规乘积的编时乘积，例如 $T[\phi_1 \phi_2 N[\phi_3 \phi_4] \phi_5 \dots]$ 等。这样的编时乘积仍然等于其各算符正规乘积所有可能的收缩之和，只不过我们不在正规乘积项的内部各因子之间进行收缩。这个结果被称为维克第二定理。

²⁵这里我们不将 $\lambda\phi^4$ 理论的相互作用项写成正规乘积的形式。如果我们将这一项写成正规乘积 $\lambda N[\phi^4]/4!$ ，则待计算的编时乘积为 $T[\hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{a}_{\mathbf{p}_3} N[\phi_a \phi_a \phi_a \phi_a] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger]$ 。根据维克第二定理，我们应当略去处于同一点上的所有场算符之间的收缩。

这与路径积分方法所得到的结果是一样的。

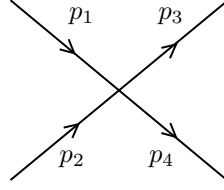


图 6.5: 四粒子散射的最低阶费曼图。

类似地，我们还可以考虑更高阶的微扰展开项。取微扰展开的二阶项，我们得到

$$\begin{aligned} \langle p_3, p_4 | \hat{S}^{(2)} | p_1, p_2 \rangle &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \prod_{i=1}^4 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \int d^4x_a \\ &\times \langle 0 | T[\hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \phi_b \phi_b \phi_b \phi_b \phi_a \phi_a \phi_a \phi_a \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.189)$$

在二阶微扰下一共有两种连通的收缩项

$$\begin{aligned} I_a &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \prod_{i=1}^4 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \int d^4x_a \\ &\times \langle 0 | N[\overbrace{\hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \phi_b \phi_b \phi_b \phi_b}^{\text{contracted}} \overbrace{\phi_a \phi_a \phi_a \phi_a}^{\text{contracted}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.190)$$

$$\begin{aligned} I_b &= \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \prod_{i=1}^4 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \int d^4x_a \\ &\times \langle 0 | N[\overbrace{\hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \phi_b \phi_b}^{\text{contracted}} \overbrace{\phi_b \phi_b \phi_a \phi_a}^{\text{contracted}} \overbrace{\phi_a \phi_a \phi_a \phi_a}^{\text{contracted}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.191)$$

可以看出，这里的计算与路径积分方法的计算是完全相同的：路径积分的多点关联函数等于所有可能的传播子之和，而正则量子化的编时乘积等于所有可能的收缩之和。在正则量子化方法的计算中，每一个内线的收缩对应于一个传播子，每一个外线的收缩对应于一个复指数因子，每一个坐标的积分给出一个四动量守恒条件。将积分明显地计算出来，我们将得到上述两个微扰项所对应的振幅

$$i\mathcal{M}_a = (-i\lambda)^2 \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.192)$$

$$i\mathcal{M}_b = (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.193)$$

它们所对应的费曼图为图 6.6。仿照类似的过程，我们可以计算出任意高阶微扰项的结果，它将给出与路径积分方法完全相同的费曼规则。因此我们说，基于正则量子化方法得到的量子场论与基于路径积分方法得到的量子场论是等价的。²⁶

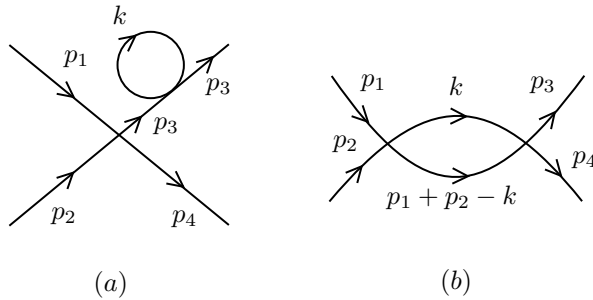


图 6.6: 四粒子散射的二阶费曼图。

²⁶这里实际上只说明了微扰场论的等价性。非微扰场论等价性的证明是比较困难的，这里从略。

在结束本节之前，我们做两个简单的评注。首先需要指出的是，我们应当将图 6.3 (a) 中外线的圈图修正同样视为外线，不计算其对振幅的贡献。事实上对于图 (a) 的费曼图来说，其内线动量满足 $p_3^2 = m^2$ (即是“在壳”的)，因此这一振幅具有奇异性。直观地说，这些外线上的圈图修正代表了自由场粒子态 $|\mathbf{p}\rangle_0$ 到相互作用场粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的演化。如同真空涨落一样，这些部分应当被排除于振幅之外。在路径积分量子化下，LSZ 约化公式同样要求我们将外线以及外线的所有圈图修正一并截去，所得到的结果是相同的。

其次，对于相互作用场论来说，我们所求出的散射振幅应当是 S 矩阵在相互作用粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 下的矩阵元，而非自由场粒子态 $|\mathbf{p}\rangle_0$ 下的矩阵元。相应地，编时乘积的真空期望值也应当是编时乘积在相互作用真空 $|\Omega\rangle$ 下的期望值，而非在自由场真空 $|0\rangle$ 下的期望值。我们可以将相互作用项修改为

$$\hat{H}_i \rightarrow e^{-\varepsilon|t|} \hat{H}_i, \quad (6.194)$$

这意味着在 $t = -\infty$ 的初态没有相互作用，之后绝热地加入相互作用，在 $t = +\infty$ 的末态再绝热地去除相互作用，因此初末态均可视为自由场真空。事实上对于相互作用场真空期望值来说，通过对时间附加一个小的虚部，我们可以证明它和自由场真空期望值之间的关系为

$$\langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[\phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \exp \left(-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_i(t) \right) \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[\exp \left(-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_i(t) \right) \right] | 0 \rangle}. \quad (6.195)$$

这一结果与路径积分中的表达式是类似的，其中分子上的编时乘积展开后可得微扰论的各项，分母上的真空期望值意味着我们要在计算微扰论的时候除去所有真空图的贡献。对相互作用场真空 $|\Omega\rangle$ 和自由场真空 $|0\rangle$ 更严格的处理详见本章习题。

6.3 标量场重整化

我们在前面已经发现了，费曼图中的圈积分可能会出现发散的情况。以图 6.6 (b) 为例，我们需要计算的是这样一个圈积分

$$\Gamma(p^2) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.196)$$

式中 $p = p_1 + p_2$ 为入射两粒子的动量之和，圈积分前的系数 $1/2$ 来自拓扑权因子。在大动量极限下，我们有

$$\Gamma \sim \int d^4 k \frac{1}{k^4} \sim \ln \Lambda^2, \quad (6.197)$$

因此这个积分是发散的。

我们发现，正是因为传播子中的动量可以取得任意高，才出现了发散的情况。尽管在大动量级限下，圈积分迅速减小，大约呈 $1/\Lambda^4$ 的量级，但是相空间的体积却迅速增大呈 Λ^4 的量级。因此即便传播子在高动量区的贡献很小，也会因为相空间的体积无限而呈现出发散的情况。

一个发散的理论是不完备的。既然在高动量区出现了无穷大的情况，那么量子场论在高动量区将只是一个有效理论。如果我们考察真实的物理世界的话，那么在高动量区域将可能存在着某种量子场论之外的修正效应，它将使得传播子的贡献进一步压低而导致总振幅收敛。因此，量子场论只在某个截断能标以下才是一个可靠的理论。如果我们一定要将量子场论应用到任意高能标之下的情况，那么理论就会失效，其结果就是在圈积分的计算中出现了无穷大。

但是这是否意味着我们的理论就一无是处了呢？其实并不是这样。我们发现，尽管圈积分 $\Gamma(p^2)$ 本身是一个无穷大的量，但是在恰当地分离掉某些发散项后，圈积分中余下的部分却可能是有限的。定量地看，我们会发现 $\Gamma(p^2)$ 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma(p^2) &= \frac{p_\mu}{2p^2} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma(p^2) \\ &= -\frac{\lambda^2}{p^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{-ip \cdot (p-k)}{[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]^2} \sim \text{finite}, \end{aligned} \quad (6.198)$$

这确实是一个有限的值。由于对变量求导数会使得分母的幂次进一步增加，因此 $\Gamma(p^2)$ 的任意高阶导数都是收敛的。这意味着如果我们在某个参考动量 p_0^2 处将圈积分 $\Gamma(p^2)$ 展开为泰勒级数

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(p_0^2) + (p^2 - p_0^2)\Gamma'(p_0^2) + \frac{1}{2}(p^2 - p_0^2)^2\Gamma''(p_0^2) + \dots, \quad (6.199)$$

那么除了展开式中的第一项 $\Gamma(p_0^2)$ 之外，其余的部分都是收敛的。于是，我们可以将圈积分改写为

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(p_0^2) + \tilde{\Gamma}(p^2), \quad (6.200)$$

其中 $\Gamma(p_0^2)$ 是发散的，而 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 是有限的，且满足

$$\tilde{\Gamma}(p_0^2) = 0. \quad (6.201)$$

由量子场论得到的圈积分 $\Gamma(p^2)$ 是发散的，因此是非物理的。但幸运的是，在除去发散项 $\Gamma(p_0^2)$ 后，圈积分的有限部分 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 在物理上是可靠的，它将能够给出物理上有意义的预言。因此，如果我们能够设法测出（或者通过实验数据拟合出） $\Gamma(p_0^2)$ 的取值

$$\Gamma(p_0^2) = \Gamma_0, \quad (6.202)$$

那么将圈积分中的有限部分 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 加到 Γ_0 之上，我们将得到物理上有意义的结果

$$\Gamma_R(p^2) = \Gamma_0 + \tilde{\Gamma}(p^2). \quad (6.203)$$

我们称这一有限的振幅为重整化振幅 Γ_R （或物理振幅 Γ_p ），它将是真实振幅的一个好的近似。

初看起来，量子场论所预言的圈积分 Γ 是发散的。因此如果不人为地强行规定发散项 $\Gamma(p_0^2)$ 等于实验上测得的取值 Γ_0 ，那么我们似乎就无法直接得到有限的物理结果 Γ_R 。但这个问题实际上是可以解决的。为看出这一点，我们明显地写出重整化振幅 Γ_R 中所包含的耦合常数

$$\Gamma_R = \Gamma_0 + \tilde{\Gamma}(p^2, \lambda_R), \quad (6.204)$$

式中耦合常数 λ_R 称为“重整化耦合常数”（或物理耦合常数 λ_p ），它是直接出现在重整化振幅 Γ_R 之中的参数，其取值是有限的。而与此同时，我们假设量子场论自身所包含的参数为“裸耦合常数” λ_0 ，利用裸参数计算出来的裸振幅为

$$\Gamma = \Gamma(p^2, \lambda_0). \quad (6.205)$$

需要注意的是，在这里裸耦合常数 λ_0 和重整化耦合常数 λ_R 不必是相同的。但如果我们希望量子场论所预言的振幅 Γ 实际上就是重整化振幅 Γ_R ，那么我们就需要恰当地选择裸耦合常数 λ_0 的取值，使其满足

$$\Gamma(p^2, \lambda_0) = \Gamma_0 + \tilde{\Gamma}(p^2, \lambda_R). \quad (6.206)$$

由于圈积分 Γ 本身是发散的，因此要想使得上式成立，我们就需要令裸耦合常数 λ_0 发散。在这种情况下，发散的裸参数将有可能恰好抵消掉圈积分自身的发散，从而得到一个有限的重整化振幅。在量子场论中，我们将这种令裸参数发散，从而消除圈积分发散的过程称为“重整化”。

重整化参量和裸参量之间的关系可以做如下的直观理解。考虑一个物体，它的质量为 m_0 。现在将这一物体放入水中，我们发现它所受到的阻力变大了，它的运动变得更加困难，就好像是这个物体的质量变化为了一个更大的等效质量 m 了一样。在这里 m_0 就相当于物体的“裸质量”，它是理论本身所具有的参量；而等效质量 m 就相当于物体的“重整化质量”，它是物体“看起来”所具有的质量，体现在物理效应之中。对于场论来说，我们所考虑的情况是裸参量是发散的，而圈积分的修正也是发散的，二者之和给出了一个有限的重整化参量，并被我们观察到。但实际上重整化并不仅仅出现在圈积分发散的情况。即使圈积分是有限的，它也会对理论中的（此时是有限的）裸参量提供一个有限大小的修正，从而得到重整化的物理参量。

我们应当如何理解两个发散的量相互抵消，从而得到一个有限结果的过程呢？毕竟，无穷大之间是不能够直接做减法的，只有两个有限大小的数才能做减法。因此，我们需要首先将 $\Gamma(p^2)$ 变成一个有限大小的值。由于发散总是出现在高动量区，因此一个直观的想法是我们可以用某种

方法将这个发散的积分在某个大动量区域 Λ^2 处进行截断, 使得积分 $\Gamma(p^2, \Lambda^2)$ 是一个有限的值, 并且当截断参数趋于无穷大时, 截断的积分可以回到原积分

$$\lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} \Gamma(p^2, \Lambda^2) = \Gamma(p^2). \quad (6.207)$$

在进行截断后, 裸耦合常数 λ_0 也将是截断参数 Λ^2 的函数, 因此我们得到

$$\Gamma(p^2, \lambda_0(\Lambda^2), \Lambda^2) = \Gamma_0 + \tilde{\Gamma}(p^2, \lambda_R). \quad (6.208)$$

在计算的最后, 我们令 $\Lambda^2 \rightarrow \infty$, 于是圈积分和裸耦合常数都将趋于无穷大, 且最终留下的重整化振幅是有限的。通过这样一种方法, 我们就成功地使得发散的裸参数抵消掉了圈积分中的发散。在量子场论中, 我们将这种将圈积分进行截断, 使得其变得有限的过程称为“正规化”。

正规化的方法有很多种, 实际上也不仅仅局限于狭义的“截断”。最简单也是最直接的正规化方法就是对积分区间直接截断, 也就是说只计算 $k^2 < \Lambda^2$ 区域内的积分

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k^2) \rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k^2) \theta(\Lambda^2 - k^2). \quad (6.209)$$

截断掉大于 $p^2 > \Lambda^2$ 的动量区间后, 积分将是收敛的, 因此积分中的发散部分将被正规化参数 Λ^2 分离出来。但是这种直接截断的做法破坏了理论的洛伦兹协变性, 这并不是我们想见到的。因此我们需要选择一种更好的正规化方法。

另一种正规化的方法被称为泡利-维拉斯 (Villars) 正规化, 它的做法是在被积函数中恰当地减去具有巨大质量的传播子。例如我们可以对圈积分中的传播子作如下的代换

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \left(\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \right). \quad (6.210)$$

在 $k^2 \ll \Lambda^2$ 的时候, 第二项几乎没有贡献; 而在 $k^2 \gg \Lambda^2$ 的时候, 第二项几乎将第一项完全抵消掉了。换句话说, 这个正规化的方法相当于将 $k^2 \gg \Lambda^2$ 的部分减除掉。如果我们将右端的被积函数通分, 那么我们将得到

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = \frac{m^2 - \Lambda^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}. \quad (6.211)$$

这将使得整个积分的维数降低。如果减除后积分仍是发散的, 那么就再重复进行类似的减除操作, 这样下来我们总可以使得积分最终收敛。在进行这样一种正规化之后, 积分中的发散部分将被正规化参数 Λ^2 分离出来。这种方法的优势在于它可以保持圈积分的协变性, 因此它比直接减除的方法要更合适。

我们以泡利-维拉斯正规化为例给出截断的结果。我们要计算的是对数发散的圈积分

$$\Gamma(p^2) = -\frac{\lambda_0^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (6.212)$$

利用泡利-维拉斯正规化方法, 我们将积分中的第二项 $i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$ 替换为

$$\begin{aligned} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} &\rightarrow \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{i}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i(m^2 - \Lambda^2)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (6.213)$$

在 $\Lambda^2 \gg m^2$ 的情况下, 我们略去分子中的 m^2 项, 这样圈积分变为

$$\begin{aligned} \Gamma(p^2) &= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon](k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (6.214)$$

为了计算这个圈积分, 我们将 $\Gamma(0)$ 从积分中分离出来

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2), \quad (6.215)$$

式中第一项为

$$\Gamma(0) = -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^2 (k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}, \quad (6.216)$$

这一项在 $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ 的极限下是发散的。第二项为

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(p^2) &= \Gamma(p^2) - \Gamma(0) \\ &= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{((k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon)} - \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right] \\ &= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k \cdot p - p^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^2 (k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon) [(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon]}.\end{aligned}\quad (6.217)$$

这一项在 $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ 的极限下仍是收敛的，因此我们取 $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ 的极限

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k \cdot p - p^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^2 [(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon]}.\quad (6.218)$$

可以看出， $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 代表了圈积分的有限部分，而 $\Gamma(0)$ 代表了圈积分的发散部分。这里选择在 $p^2 = 0$ 处展开是为了简便起见，我们也可以在任意一个 $p^2 = p_0^2$ 处将圈积分展开为

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(p_0^2) + \tilde{\Gamma}(p^2),\quad (6.219)$$

其中 $\Gamma(p_0^2)$ 仍是发散的，而 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 是收敛的。这两种展开仅仅在圈积分的有限部分和无限部分之间相差一个常数项。

接下来我们要分别将这两个积分计算出来。首先我们计算 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 。这个积分中的分母是数个传播子之积，这是不方便处理的。因此我们采用如下的费曼参数化公式，将所有的传播子合并为一个

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 \frac{dz_1 \dots dz_n}{(a_1 z_1 + \dots + a_n z_n)^n} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n z_i\right)\quad (6.220)$$

利用费曼参数化公式，我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(p^2) &= \lambda^2 \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{2k \cdot p - p^2}{\{(1-\alpha)(k^2 - m^2 + i\varepsilon) + \alpha[(k-p)^2 - m^2 + i\varepsilon]\}^3} \\ &= \lambda^2 \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k \cdot p - p^2}{[(k-\alpha p)^2 - \Delta + i\varepsilon]^3},\end{aligned}\quad (6.221)$$

式中

$$\Delta = m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2.\quad (6.222)$$

作代换 $k \rightarrow k + \alpha p$ ²⁷ 并弃去分子中关于 k 的线性项，结果为

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = \lambda^2 \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2\alpha-1)p^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}.\quad (6.223)$$

积分是对闵可夫斯基时空中的矢量进行的，这是不方便的。为此我们对积分进行维克转动，以将闵可夫斯基时空中的矢量转化为通常的欧几里得时空中的矢量。可以证明，对闵可夫斯基时空中的矢量 k 的积分与对欧几里得时空中的矢量 l 的积分之间的关系为

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2m}}{(k^2 - D + i\varepsilon)^n} = (-1)^{m-n} i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^{2m}}{(l^2 + D)^n},\quad (6.224)$$

于是我们得到

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = -i\lambda^2 \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(2\alpha-1)p^2}{(l^2 + \Delta)^3}.\quad (6.225)$$

²⁷ 严格地说，在未做正规化之前，我们不能进行这种积分变量的平移变换。例如，若我们选取直接截断正规化，则积分变量的平移将不再成立，因为对动量的积分将仅在一个有限的空间中进行。有时我们必须极为小心地处理圈积分中的变量平移，这与量子反常密切相关。

对于形如上式的积分来说, 我们有如下的高维积分公式

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^a}{(l^2 + D)^b} = \frac{D^{-(b-a-d/2)}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(b-a-d/2)\Gamma(a+d/2)}{\Gamma(b)\Gamma(d/2)}. \quad (6.226)$$

利用这一公式, 我们可以计算出关于 l 的积分

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(p^2) &= -i\lambda^2 \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \frac{(2\alpha-1)p^2}{32\pi^2 \Delta} \\ &= \frac{-i\lambda^2 p^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{(1-\alpha)(2\alpha-1)}{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}. \end{aligned} \quad (6.227)$$

最后, 我们直接计算出关于 α 的积分。在 $p^2 > 4m^2$ 的情况下, 结果为

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[2 + \sqrt{\frac{p^2 - 4m^2}{p^2}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{(p^2 - 4m^2)/p^2}}{1 + \sqrt{(p^2 - 4m^2)/p^2}} \right) + i\pi \right], \quad (6.228)$$

式中 $p = \sqrt{p^2}$ 。这就是圈积分的有限结果, 它与截断无关。

接下来我们计算 $\Gamma(0)$ 。利用费曼参数化公式, 我们得到

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2 (k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \\ &= -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{2(1-\alpha)}{[\alpha(k^2 - \Lambda^2) + (1-\alpha)(k^2 - m^2)]^3} \\ &= -\lambda^2 \Lambda^2 \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - D + i\epsilon]^3}, \end{aligned} \quad (6.229)$$

式中

$$D = (1-\alpha)m^2 + \alpha\Lambda^2. \quad (6.230)$$

接下来利用维克转动得到

$$\Gamma(0) = i\lambda^2 \Lambda^2 \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + D)^3}. \quad (6.231)$$

式中 l 是欧几里得时空中的矢量。利用高维积分公式, 我们可以计算出关于 l 的积分

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \frac{i\lambda^2 \Lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{1-\alpha}{D} \\ &= \frac{i\lambda^2 \Lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)m^2 + \alpha\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (6.232)$$

最后, 我们直接计算出关于 α 的积分, 结果为

$$\Gamma(0) = \frac{i\lambda^2 \Lambda^2}{32\pi^2} \left[\frac{1}{m^2 - \Lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{(m^2 - \Lambda^2)^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right]. \quad (6.233)$$

这一项依赖于截断, 并且当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时, 它是对数发散的, 这与我们通过分析被积函数幂次得到的结果是一致的。这样我们就完成了这个圈积分的计算。在计算上述圈积分时利用的三个引理的证明详见附录 B.7。

以上我们给出了振幅 $\Gamma(p^2)$ 的有限部分和发散部分的精确表达式。这一结果使用起来是不方便的, 为简便起见我们将计算 p_0^2 很大时, $\Gamma(p_0^2)$ 的渐进表达式

$$\Gamma(p_0^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p_0^2). \quad (6.234)$$

在 $m^2/p^2 = 0$ 处进行泰勒展开, 我们有

$$\frac{1 - \sqrt{(p^2 - 4m^2)/p^2}}{1 + \sqrt{(p^2 - 4m^2)/p^2}} = \frac{m^2}{p^2} + O\left(\frac{m^4}{p^4}\right). \quad (6.235)$$

因此在 $p_0^2 \gg m^2$ 的极限下, 略去常数项, 我们可以将 $\tilde{\Gamma}(p_0^2)$ 表示为

$$\tilde{\Gamma}(p_0^2) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{p_0^2} \right). \quad (6.236)$$

而取 $\Lambda \rightarrow \infty$ 的极限并略去常数项，圈积分的发散部分可以表示为

$$\Gamma(0) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right). \quad (6.237)$$

因此我们得到

$$\Gamma(p_0^2) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2}{p_0^2} \right) \right] = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2} \right). \quad (6.238)$$

事实上若我们考虑的是一个无质量的标量粒子，则将它所对应的圈积分计算出来，我们可以直接得到这个结果。

圈积分 $\Gamma(p^2)$ 对应于 $\lambda\phi^4$ 理论中的四粒子散射过程。设两个动量为 p_1, p_2 的粒子散射为两个动量为 p_3, p_4 的粒子的振幅为 $i\mathcal{M}$ 。在准至单圈阶的情况下，我们需要计算如图 6.7 所示的一个树图和三个单圈图。完整地考虑了三张单圈图的贡献后，我们可以将振幅表示为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(p^2) &= -i\lambda_0 + \Gamma(s) + \Gamma(t) + \Gamma(u) \\ &= -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{s} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{t} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{u} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.239)$$

式中

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (6.240)$$

为曼德尔施塔姆 (Mandelstam) 变量。为简便起见，我们只考虑图 (a) 的树图和图 (b) 的一个单圈图的贡献，此时的振幅应当表示为这两张图之和，且只是 $p^2 = (p_1^2 + p_2^2)$ 的函数

$$i\mathcal{M}(p^2) = -i\lambda_0 + \Gamma(p^2, \lambda_0, \Lambda^2) = -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{p^2} \right). \quad (6.241)$$

这就是量子场论预言的振幅随碰撞能量的变化关系。

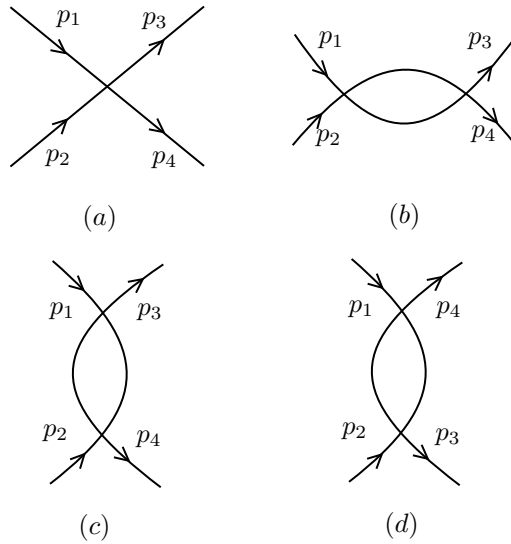


图 6.7: 准至单圈的四粒子散射费曼图，我们不考虑树图外线自能修正的情况。为简便起见，我们只考虑图 (a) 的树图和图 (b) 的一个单圈图的贡献。

为完成重整化过程，我们需要将圈积分利用实验结果进行定标。假设实验中已经测得粒子在动量为 p_0^2 时的振幅为 $i\mathcal{M}_0$

$$i\mathcal{M}(p_0^2) = i\mathcal{M}_0, \quad (6.242)$$

这就是我们为四粒子散射振幅所选取的重整化条件。利用这一重整化条件，我们可以求得裸耦合

常数 λ_0 所满足的表达式²⁸

$$i\mathcal{M}_0 = -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right) + o(\lambda_0^2). \quad (6.243)$$

那么理论的重整化耦合常数应该等于多少呢？初看起来，在圈积分中的重整化耦合常数是比复杂的，我们不能直接地说出重整化耦合常数究竟等于多少。但是在树图阶的情况下，测量得到的重整化散射振幅就等于耦合常数的负值。因此我们不妨就令入射粒子动量之和为 p_0^2 时测量得到的散射振幅 $i\mathcal{M}$ 为场的重整化耦合常数 λ_R

$$i\mathcal{M}_0 = -i\lambda_R. \quad (6.244)$$

因此在准至二阶的情况下，重整化耦合常数 λ_R 与裸耦合常数 λ_0 之间的关系为

$$-i\lambda_R = -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right) + o(\lambda_0^2). \quad (6.245)$$

从中我们可以反解出 λ_0 准至 λ_R 二阶的结果²⁹

$$\begin{aligned} -i\lambda_0 &= -i\lambda_R - \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right) + o(\lambda_0^2) \\ &= -i\lambda_R - \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right) + o(\lambda_R^2). \end{aligned} \quad (6.246)$$

将上述结果代入到散射振幅的表达式之中，我们就得到了

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(p^2) &= -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p^2}\right) + o(\lambda_0^2) \\ &= -i\lambda_R - \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right) + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p^2}\right) + o(\lambda_R^2) \\ &= -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{p^2}\right) + o(\lambda_R^2). \end{aligned} \quad (6.247)$$

这就是用重整化耦合常数 λ_R 写出的振幅表达式。从上述表达式中我们可以看到，散射振幅中非物理的裸耦合常数 λ_0 以及非物理的截断能标 Λ 已经被消去了，余下的只有重整化耦合常数 λ_R 以及参考点的动量 p_0^2 。

对于 $\lambda\phi^4$ 理论来说，其中的耦合常数为裸耦合常数，因此其拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4, \quad (6.248)$$

式中 \mathcal{L}_0 为自由场的拉格朗日密度，裸耦合常数 λ_0 是发散的。由于在振幅中出现的并非是裸耦合常数 λ_0 ，而是重整化耦合常数 λ_R ，因此我们可以利用重整化耦合常数 λ_R 将场的拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi^4 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi^4, \quad (6.249)$$

其中 δ_λ 是一个发散项，其准至二阶微扰的表达式为

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right). \quad (6.250)$$

从上述表达式中我们可以看出，场的裸耦合常数可以被分为两部分，一部分是有限的重整化耦合常数 λ_R ，一部分是包含截断的发散项 δ_λ 。这个发散项在振幅中给出了一个无穷大的贡献，而它

²⁸若我们考虑场重整化 $\phi_0 = \sqrt{Z_\phi} \phi_R$ ，则对于这里的四粒子散射过程来说，裸振幅与物理振幅之间的关系为 $i\mathcal{M}_0 = iZ_\phi^2 \mathcal{M}_p$ 。理论中计算出来的是裸振幅，而物理上测量得到的是物理振幅。在准至单圈阶的情况下，场重整化参数为 $Z_\phi = 1$ ，因此我们在这里可以不明显地写出场重整化对振幅的影响。

²⁹如果完整地考虑三个单圈图的贡献，则裸耦合常数 λ_0 和重整化耦合常数 λ_R 之间的关系将成为

$$-i\lambda_0 = -i\lambda_R - \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{s_0}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) \right] + o(\lambda_R^2),$$

式中 s_0, u_0, t_0 为标定重整化耦合常数的散射所对应的曼德尔施塔姆变量。

恰好将圈图中的无穷大抵消掉，最终只留下了重整化耦合常数 λ_R 的贡献。这样我们就利用四粒子散射的振幅完成了耦合常数的重整化。

我们接下来考虑传播子自能的重整化。传播子自能图指的是在标量粒子的传播子中插入高阶的圈图所得到的图形，如图 6.8 所示。完整的传播子自能应当包含全部可能的传播子圈图修正，一般来说这可能包含许多极其复杂的图形。但总的来说，这些复杂的图形实际上是由一些更加简单的图形组合起来得到的。如果一个自能图中，断开其中的任意一条线都不能使其分成两张图，那么我们称之为单粒子不可约图。图 6.8 中的两个传播子自能图都是单粒子不可约图，而每个不是单粒子不可约的图都可以看成是由一系列单粒子不可约图的“串联”起来的，如图 6.9 所示。

设所有单粒子不可约图的总振幅为 $-i\Sigma(p^2)$ ，所有传播子自能图的总振幅为 $i\Delta(p^2)$ ，它们之间的关系为

$$\begin{aligned} i\Delta(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Sigma(p^2)}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \right)^n \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2) + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.251)$$

因此，在接下来的计算中，我们只需要考虑所有的单粒子不可约图。

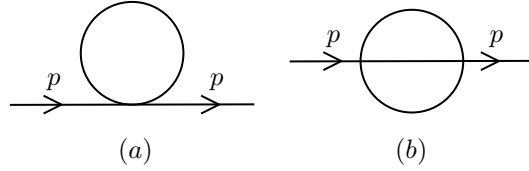


图 6.8: 单粒子不可约的传播子自能图。

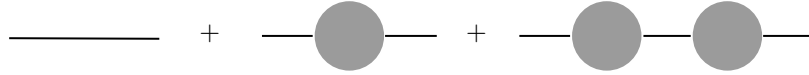


图 6.9: 单粒子不可约图串联起来得到总的传播子自能图。

我们可以对 $\Sigma(p^2)$ 在某质量 $p^2 = m^2$ 处作泰勒展开，结果为

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(m^2) + (p^2 - m^2)\Sigma'(m^2) + \frac{1}{2}(p^2 - m^2)^2\Sigma''(m^2) + \dots \quad (6.252)$$

分析各项的发散度，我们得到

$$\Sigma(m^2) \sim \Lambda^2, \quad \Sigma'(m^2) \sim \ln \Lambda^2, \quad \Sigma''(m^2) \sim \text{finite}. \quad (6.253)$$

换句话说，这个积分只有前两项可能是发散的，其中第一项是二次发散的，而第二项是对数发散的。因此我们可以把传播子中其余的所有项写进一个收敛的项 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 中

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(m^2) + (p^2 - m^2)\Sigma'(m^2) + \tilde{\Sigma}(p^2). \quad (6.254)$$

真正能够引起物理效应的只有最后一项 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ ，它满足

$$\tilde{\Sigma}(p^2)|_{p^2=m^2} = 0, \quad \left. \frac{d}{dp^2} \tilde{\Sigma}(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0. \quad (6.255)$$

将这个单粒子不可约的传播子代入到总的传播子中，我们就可以得到

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(m^2) - (p^2 - m^2)\Sigma'(m^2) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}. \quad (6.256)$$

习惯上我们选取展开点 m^2 满足

$$m_0^2 + \Sigma(m^2) = m^2, \quad (6.257)$$

因此传播子可以表示为

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{(p^2 - m^2)(1 - \Sigma'(m^2)) - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}. \quad (6.258)$$

这就是量子场论所预言的发散的传播子。

那么实验上我们测得的是什么呢？我们会发现，传播子在某个 $p^2 = m_R^2$ 的地方存在着一个极点，换句话说就是我们测量得到的“重整化质量”为 m_R （或者称为物理质量 m_p ）。³⁰ 在这种情况下，系统的传播子在动量非常接近极点 m_R^2 处可以表示为

$$i\Delta(p^2) \sim \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\varepsilon}. \quad (6.259)$$

更严格地说，我们要求传播子满足如下的重整化条件

$$\Delta^{-1}(p^2)|_{p^2=m_R^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Delta^{-1}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=m_R^2} = 1. \quad (6.260)$$

要想实现重整化，我们需要将裸参量恰当地分离为发散项和有限的重整化参量，并使得发散项抵消掉圈积分中的无穷大，从而使得重整化条件得到满足。

接下来我们将利用上述重整化条件给出裸参量与重整化参量之间的关系。对于质量的重整化是较为直接的，由于振幅的展开点 m^2 实际上就是极点处的重整化质量 m_R^2 ，因此我们立刻得到

$$m_0^2 = m_R^2 - \Sigma(m_R^2). \quad (6.261)$$

这样就满足了第一个重整化条件。而对于第二个重整化条件来说，我们可以定义“重整化场” ϕ_R （或称为物理场 ϕ_p ）与“裸场” ϕ_0 之间相差一个归一化系数

$$\phi_0 = \sqrt{Z_\phi} \phi_R, \quad (6.262)$$

实验上测得的传播子为重整化场的传播子 $i\Delta_R$ ，而利用场论计算出来的传播子为裸场的传播子 $i\Delta_0$ ，它们相差一个归一化常数 Z_ϕ ³¹

$$\begin{aligned} i\Delta_0(p^2) &= \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0 | T[\phi_0(x) \phi_0(0)] | 0 \rangle \\ &= Z_\phi \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0 | T[\phi_R(x) \phi_R(0)] | 0 \rangle = iZ_\phi \Delta_R(p^2). \end{aligned} \quad (6.263)$$

因此，裸传播子在动量非常接近重整化质量 m_R^2 处可以表示为

$$i\Delta_0(p^2) \sim \frac{iZ_\phi}{p^2 - m_R^2 + i\varepsilon}. \quad (6.264)$$

于是，我们可以利用这个归一化系数写出场的重整化关系³²

$$Z_\phi = \frac{1}{1 - \Sigma'(m_R^2)} \sim 1 + \Sigma'(m_R^2). \quad (6.265)$$

这样我们就利用重整化参数和发散的圈积分给出了裸参数的表达式。

利用恰当的正规化方法把这些项依赖于截断参数的具体表达式计算出来，我们就完成了重整化。在计算圈积分的过程中，耦合常数 λ 与质量 m 均应当被视为重整化后有限的 λ_R 以及 m_R 。在单圈阶，我们要考虑的费曼图如图 6.8 (a) 所示，它所对应的圈积分为

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (6.266)$$

这一表达式实际上与外动量 p^2 无关，积分中的 k^2 为内线动量。在计算圈积分的过程中，我们要将表达式中的参数视为重整化参数而非裸参数。

³⁰有文献中区分了“物理质量”和“重整化质量”。物理质量指的是传播子的极点处的质量，而重整化质量是从裸质量中减掉发散项后余下的质量，它与重整化方案有关。物理参数和重整化参数之间的区别体现出了重整化过程的任意性，我们在这里不打算对这两个概念进行详细的区分。

³¹更一般地，场的 n 粒子散射振幅（ n 点关联函数）的裸传播子和物理传播子之间相差 $Z_\phi^{n/2}$ 。

³²虽然 $\Sigma'(m_R^2)$ 可能是发散的，但是在重整化之后它将成为一个有限大小的量，因此仍然可以按照耦合常数的幂次展开。

要使得这个积分给出有限的结果，我们需要在被积函数上减去两个传播子

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \left(\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{iC_1}{k^2 - \Lambda_1^2 + i\varepsilon} + \frac{iC_2}{k^2 - \Lambda_2^2 + i\varepsilon} \right), \quad (6.267)$$

为了计算简便，我们选取 C_1, C_2 为

$$C_1 = \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}, \quad C_2 = \frac{\Lambda_1^2 - m^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}, \quad (6.268)$$

这样积分将变为

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \frac{(\Lambda_1^2 - m^2)(\Lambda_2^2 - m^2)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda_1^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda_2^2 + i\varepsilon)}. \quad (6.269)$$

在上式中取 $\Lambda_1, \Lambda_2 \rightarrow \Lambda$ ，我们得到

$$-i\Sigma(p^2) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\Lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)^2}, \quad (6.270)$$

这个积分确实是收敛的。我们发现除了个别参数的取值之外，这个圈积分的形式与 $\Gamma(0)$ 是完全相同的。将这个积分计算出来，我们得到

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p^2) &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\Lambda^2 - m^2)^2}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)^2} \\ &= \frac{-i\lambda(\Lambda^2 - m^2)^2}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{xdx}{x\Lambda^2 + (1-x)m^2} \\ &= \frac{-i\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right], \end{aligned} \quad (6.271)$$

即

$$\Sigma(p^2) = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right]. \quad (6.272)$$

这样我们就完成了标量粒子自能准至单圈的正规化。

从上述单圈正规化的结果中，我们可以求出

$$\Sigma(m_R^2) = \frac{\lambda_R}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_R^2 - m_R^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_R^2} \right) \right], \quad \Sigma'(m_R^2) = 0. \quad (6.273)$$

上述结果的推导过程详见附录 B.7。因此对于泡利-维拉斯正规化方法来说，准至单圈的裸参数和重整化参数之间的关系就可以表示为

$$Z_\phi = 1, \quad (6.274)$$

$$m_0^2 = m_R^2 - \frac{\lambda_R}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_R^2 - m_R^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_R^2} \right) \right]. \quad (6.275)$$

这样我们就完成了传播子自能的单圈重整化。

现在我们回到 $\lambda\phi^4$ 理论本身。利用未经重整化的裸量 m_0, λ_0 和裸场 ϕ_0 ，我们可以将其拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4. \quad (6.276)$$

定义裸参量与重整化参量之间的关系为

$$\phi_0 = \sqrt{Z_\phi} \phi_R, \quad m_0^2 = Z_m Z_\phi^{-1} m_R^2, \quad \lambda_0 = Z_\lambda Z_\phi^{-2} \lambda_R, \quad (6.277)$$

并定义

$$\delta_\phi = Z_\phi - 1, \quad \delta_m = (Z_m - 1)m_R^2, \quad \delta_\lambda = (Z_\lambda - 1)\lambda_R, \quad (6.278)$$

我们可以将拉格朗日密度表示为重整化后的拉格朗日密度与抵消项两部分之和

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} Z_\phi \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} Z_m m_R^2 \phi_R^2 - \frac{1}{4!} Z_\lambda \lambda_R \phi_R^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_\phi \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi_R^4,\end{aligned}\tag{6.279}$$

式中的各项都是用重整化参量和重整化场表达出来的。我们看到，重整化后的各个重整化量均为有限大小的量，它们的取值是通过实验确定下来的。抵消项前的系数是一个发散的量，它们的作用是抵消掉圈图中的无穷大。将两部分加和之后，拉格朗日密度中的各个裸量都是发散的。它们刚好可以抵消掉圈图中的无穷大，从而使得理论可以给出有限的结果。

除了图 6.6 中的两种发散的单圈图外，其余的单圈图要么是有限，要么包含这两种发散的单圈图作为子图。因此我们通过引入了三个抵消项，并利用三个重整化条件进行定标，成功地抵消掉了 $\lambda\phi^4$ 理论的所有单圈发散。通过上述讨论，我们就完成了 $\lambda\phi^4$ 理论的单圈重整化。由此在单圈图的层面上， $\lambda\phi^4$ 理论将是一个有限的理论，我们可以从中得到物理上有意义的预言。

6.4 重整化群与可重整性

对于量子场论的重整化来说，另一种有启发性的看法是：我们从一开始就将量子场论视为真实理论在低动量下的有效理论，并将截断视为这个有效理论的一部分。量子场论的紫外发散是由于其在高动量区失效所导致的，而真实的物理世界在高动量区将会有有一个未知的修正。这种修正会将量子场论在大动量区的贡献压低，从而使得理论给出一个有限的结果。

既然如此，那么我们不妨就承认我们对于高动量区的物理是一无所知的。量子场论从头至尾就是一个有效理论，它只能描述低动量区的物理。至于高动量的区域发生了什么，那不是现在的我们所要关心的。我们至始至终的目的就是建立一个低能量下的有效理论（相对于可能的统一理论），它只需要能够很好地解释发生在加速器里的实验现象就足够了。

既然量子场论的高能部分是非物理的，那么对于一个有效理论来说，一个最好的做法就是将这些不再适用的部分从理论中截断掉。以泡利-维拉斯正规化方法为例，它将理论中高于截断能标 Λ^2 的贡献消除了，由此理论成功地给出了一个有限的预言。这里我们不再把正规化方法看作是量子场论中分离掉发散项的手段，而将它看成是这个有效理论定义中的一部分——这个场论本身就只考虑了 $p^2 \ll \Lambda^2$ 区域的贡献。

有效理论固然是精确理论的一个近似，但如果我们允许有效理论中的各个系数发生变化，那么有效理论至少可以在极大的程度上接近于精确理论。我们发现，虽然量子场论的预言结果与截断能标 Λ^2 相关，但只要我们让场的参数也随 Λ^2 发生变化，并用实验结果将其定标，那么即使量子场论是一个有效理论，我们也可以从中获得可靠的结果。需要注意的是，这时裸耦合常数 λ_0 不再是场的“真实”耦合常数，裸质量 m_0 也不再是场的“真实”质量，它们仅仅是有效理论参数而已，其取值要通过实验确定下来。通过适当地选取有效参数的形式，我们可以使得这个振幅与（非物理的）截断能标无关

$$i\mathcal{M}(\lambda_0(\Lambda^2), m_0(\Lambda^2), \Lambda^2) = i\mathcal{M},\tag{6.280}$$

从而使得理论的预言与实验结果相一致。

我们以粒子散射的重整化为例来考察这一过程。在大动量 p^2 下， $\lambda\phi^4$ 理论给出准至二阶的粒子散射振幅为

$$i\mathcal{M}(p^2) = -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p^2}\right),\tag{6.281}$$

式中 λ_0 是理论的有效参数，它是截断能标 Λ^2 的函数。要想给出这个有效参数的具体表达式，我

们需要将之与实验结果进行对比。假设我们已经测得系统在 p_0^2 处的振幅为

$$i\mathcal{M}(p_0^2) = i\mathcal{M}_0, \quad (6.282)$$

那么我们就可以得到有效耦合常数的表达式

$$i\mathcal{M}_0 = -i\lambda_0 + \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right). \quad (6.283)$$

从中我们可以求解出 λ_0 随截断能标 Λ^2 准至二阶的变化

$$\lambda_0 = -\mathcal{M}_0 + \frac{\mathcal{M}_0^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right). \quad (6.284)$$

在 (6.281) 式中, 我们仍感到有一个地方不满意, 那就是散射振幅的表达式仍然是用非物理的截断能标 Λ^2 和有效耦合常数 λ_0 写出来的。如果可以的话, 我们希望直接用实验所测定出的结果来给出振幅的表达式, 从而去除掉理论中一切非物理的部分。为此我们定义“重整化耦合常数” λ_R 为

$$i\mathcal{M}_0 = -i\lambda_R. \quad (6.285)$$

将耦合常数 λ_0 反解出来, 我们可以得到准至 λ_R 二阶的结果

$$\lambda_0 = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right). \quad (6.286)$$

将这个表达式代入到散射振幅 (6.281) 之中, 我们发现表达式中非物理的截断能标 Λ^2 和耦合常数 λ_0 都消去了, 余下的只有通过实验得到的重整化耦合常数 λ_R 以及一个用来定标的参量 p_0^2

$$i\mathcal{M}(p^2) = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{p^2}\right). \quad (6.287)$$

这样我们就给出了量子场论的预言, 它确实不依赖于截断能标的取值。

把这个结果带回到量子场论的拉格朗日密度中, 我们就可以得到用重整化参量给出的拉格朗日密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \\ &= \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi^4 - \frac{\delta\lambda}{4!} \phi^4, \end{aligned} \quad (6.288)$$

式中 $\delta\lambda$ 准至 λ_R 二阶的表达式为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{p_0^2}\right). \quad (6.289)$$

由此我们看到, 虽然场的振幅依赖于 Λ^2 , 场的有效参数 λ_0 也依赖于 Λ^2 , 但是它们之间相互抵消, 最终只剩下了一个不依赖于 Λ^2 的重整化耦合常数。这样我们就完成了量子场论的重整化, 它可以给出与实验相符的结果。

需要注意的是, 我们在这里自始至终都没有涉及到发散的情况——在这里, 没有什么发散, 我们唯一拥有的仅仅是一个带有截断的有效场论而已。我们从未把它看作是一个基本理论, 也从未认为截断能标 Λ^2 真的可以取到无穷大。因此, 尽管它所给出的结果与前面所讨论的完全相同, 但是其底层的思维和视角都是不同的。

一个更有启发性的做法是考察重整化耦合常数 λ_R 随参考点动量 p^2 的变化。我们将 λ_R 视为参考点动量 p^2 的函数, 在某个参考点 p_0^2 处的重整化耦合常数可以表示为

$$i\mathcal{M}(p_0^2) = -i\lambda_R(p_0^2). \quad (6.290)$$

而如果我们一般性地选取某个动量 p^2 为参考点, 则其对应的重整化耦合常数可以表示为

$$i\mathcal{M}(p^2) = -i\lambda_R(p^2). \quad (6.291)$$

由于在准至二阶的情况下, 不同动量处的散射振幅之间的关系为

$$i\mathcal{M}(p^2) = i\mathcal{M}(p_0^2) + \frac{i\mathcal{M}^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{p^2}\right), \quad (6.292)$$

因此不同动量处的重整化耦合常数之间的关系为

$$-i\lambda_R(p^2) = -i\lambda_R(p_0^2) + \frac{i\lambda_R^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{p^2}\right), \quad (6.293)$$

这意味着

$$\lambda_R(p^2) = \lambda_R(p_0^2) + \frac{\lambda_R^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right). \quad (6.294)$$

这就是准至二阶的重整化耦合常数随参考点动量的变化关系。

由此我们看到，在给定的截断方案和截断参数下，我们确实可以说系统的“裸耦合常数”等于多少，它实际上就是作为有效理论的量子场论中的有效参数。但是我们却不能说系统的“重整化耦合常数”等于多少，因为它直接关联于观测得到的散射振幅，它强烈地依赖于参考点的动量。从上述表达式中我们可以看出，随着减除点动量的增加，重整化耦合常数的取值也在不断变大。我们称这一变化的重整化耦合常数为跑动耦合常数。

为了进一步看出重整化耦合常数的物理意义，让我们考察不同能标下 $\lambda\phi^4$ 理论的四粒子散射振幅。设散射振幅的参考点动量为 p_0^2 ，则系统在 p^2 处的振幅为

$$i\mathcal{M}(\lambda_R(p_0^2), p^2) = -i\lambda_R(p_0^2) + \frac{i\lambda_R^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{p^2}\right). \quad (6.295)$$

现在我们将系统的入射动量扩大 σ 倍，即作代换 $p^2 \rightarrow \sigma^2 p^2$ ，并保持参考点动量不变，则散射振幅变为

$$i\mathcal{M}(\lambda_R(p_0^2), \sigma^2 p^2) = -i\lambda_R(p_0^2) + \frac{i\lambda_R^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{\sigma^2 p^2}\right), \quad (6.296)$$

此时系统的散射性质显然不同于 $i\mathcal{M}(\lambda_R(p_0^2), p^2)$ 。但如果我们在将入射动量代换为 $p^2 \rightarrow \sigma^2 p^2$ 的同时，也令参考点动量变为 $p_0^2 \rightarrow \sigma^2 p_0^2$ ，则此时系统的散射振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(\lambda_R(\sigma^2 p_0^2), \sigma^2 p^2) &= -i\lambda_R(\sigma^2 p_0^2) + \frac{i\lambda_R^2(\sigma^2 p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\sigma^2 p_0^2}{\sigma^2 p^2}\right) \\ &= -i\lambda_R(\sigma^2 p_0^2) + \frac{i\lambda_R^2(\sigma^2 p_0^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p_0^2}{p^2}\right), \end{aligned} \quad (6.297)$$

这意味着在动量扩大 σ 倍的情况下，一个重整化耦合常数等于 $\lambda_R(p_0^2)$ 的场的散射性质，等价于一个重整化耦合常数为 $\lambda_R(\sigma^2 p_0^2)$ 的场的散射性质

$$i\mathcal{M}(\lambda_R(p_0^2), p^2) \sim i\mathcal{M}(\lambda_R(\sigma^2 p_0^2), \sigma^2 p^2). \quad (6.298)$$

我们将动量扩展为 σ 倍的变换 $p^2 \rightarrow \sigma^2 p^2$ 称为重整化变换，习惯上将这种变换的集合称为重整化群。³³ 由此可见，系统的重整化耦合常数实际上就是对应于系统的耦合强度在某个给定的能标下“看起来”是多少。在准至单圈阶的情况下，重整化耦合常数随能标的变化为

$$\lambda_R(\sigma^2 p_0^2) = \lambda_R(p_0^2) + \frac{\lambda_R^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln \sigma^2, \quad (6.299)$$

因此随着能标的提高， $\lambda\phi^4$ 理论的跑动耦合常数也不断地提高，也就是说场的耦合常数在高能标下“看起来”变得越来越大。

一个更加系统性地研究跑动耦合常数随能标变化的方法是重整化群方程。考虑一个以 p^2 为参考动量、入射动量为 k^2 的四粒子散射振幅 $i\mathcal{M}(\lambda_R(p^2), k^2)$ 。这个振幅的取值不应当随参考点动量 p^2 发生变化，因此我们有

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p^2} = 0. \quad (6.300)$$

³³ 重整化群实际上只构成一个半群，因为只有从高能标到低能标的变换是可能的。从高能标到低能标的变换相当于将高能部分“积去”，这是可能做到的；而从低能标到高能标的变换相当于将被积去的信息“还原出来”，这在原则上是不能做到的。一个高能理论中可能包含一系列在低能量下贡献逐渐消失的无关算符，它们所携带的信息在低能标下已经消失了，只剩下那些在低能标下仍然有显著贡献的相关算符。对于我们这里所考虑的例子来说，高能理论是精确已知的，因此从低能标到高能标的变换也是可能的。

在准至 λ_R^2 的情况下, 振幅 $\mathcal{M}(\lambda_R(p^2), k^2)$ 与 $\lambda_R(p^2)$ 之间的关系为

$$\mathcal{M}(\lambda_R(p^2), k^2) = -\lambda_R(p^2) + \frac{\lambda_R^2(p^2)}{32\pi^2} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) + o(\lambda_R^2), \quad (6.301)$$

因此我们得到重整化耦合常数 $\lambda_R(p^2)$ 所满足的方程

$$-\frac{\partial \lambda_R}{\partial p^2} + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \frac{1}{p^2} + \frac{\partial \lambda_R}{\partial p^2} \frac{\lambda_R}{16\pi^2} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) + o(\lambda_R^2) = 0. \quad (6.302)$$

若我们取参考点动量 p^2 就是外动量 k^2 , 则上述方程将简化为

$$-\frac{\partial \lambda_R}{\partial p^2} + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \frac{1}{p^2} + o(\lambda_R^2) = 0, \quad (6.303)$$

即

$$p^2 \frac{\partial \lambda_R}{\partial p^2} = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} + o(\lambda_R^2), \quad (6.304)$$

我们称这一方程为跑动耦合常数的重整化群方程, 它刻画了在准至单圈阶的情况下, 跑动耦合常数是如何随参考点动量变化的。³⁴

我们将重整化群方程的初始条件选取为某参考动量 p_0^2 处已知的重整化耦合常数 $\lambda_R(p_0^2)$ 。将这一方程求解出来, 我们得到

$$\lambda_R(p^2) = \frac{\lambda_R(p_0^2)}{1 - \frac{\lambda_R(p_0^2)}{32\pi^2} \ln \frac{p^2}{p_0^2}}. \quad (6.305)$$

在 $p^2/p_0^2 \rightarrow 1$ 的极限下, 我们可以将 $\lambda_R(p^2)$ 展开为

$$\lambda_R(p^2) = \lambda_R(p_0^2) + \frac{\lambda_R^2(p_0^2)}{32\pi^2} \ln \frac{p^2}{p_0^2} + o(\lambda_R^2), \quad (6.306)$$

这与我们此前所得到的结果是一致的。

如果 (6.305) 式对于任意的动量 p 都是成立的, 则在

$$p^2 = p_0^2 \exp\left(\frac{32\pi^2}{\lambda_R^2(p_0^2)}\right) \quad (6.307)$$

处, 重整化耦合常数 $\lambda_R(p^2)$ 将是发散的, 我们称其为 $\lambda\phi^4$ 理论的朗道极点。上述重整化群方程对于能量比较低的情况是适用的。如果能量进一步提高, 则我们需要计及高圈效应。在考虑到这些效应后, 重整化群方程将可以一般性地表示为

$$p^2 \frac{\partial \lambda_R}{\partial p^2} = \beta(\lambda_R), \quad (6.308)$$

式中 $\beta(\lambda_R)$ 可以展开为 λ_R 的幂级数, 高圈效应将对应于级数中幂次更高的项。因此在高能量下, 跑动耦合常数将偏离单圈图的结果。但是朗道极点仍然存在, 只不过其具体位置会发生变化。朗道极点的存在是非物理的, 因此它意味着 $\lambda\phi^4$ 理论 (或者至少是微扰的 $\lambda\phi^4$ 理论) 在这一能标之上将失效。

在以上的讨论中, 我们考察了 $\lambda\phi^4$ 理论的单圈重整化, 我们自然想问上述重整化方法对于 $\lambda\phi^4$ 理论的任意圈是否都成立。为了讨论这一点, 我们接下来将分析 $\lambda\phi^4$ 理论的发散性。对于 $\lambda\phi^4$ 理论来说, 如果一张图的外线数量为 E , 内线数量为 I , 顶点数量为 V , 圈的数量为 L , 则由于一个圈积分贡献 d^4p , 一条内线贡献 $1/p^2$, 因此这张图的表现发散度为

$$D = 4L - 2I. \quad (6.309)$$

这里的表现发散度 D 指的是在仅考虑幂次计数的情况下, 圈积分 $I(p^2)$ 满足

$$I(p^2) = \begin{cases} \Lambda^D, & D > 0 \\ \ln \Lambda^2, & D = 0 \\ \text{finite}, & D < 0 \end{cases}. \quad (6.310)$$

³⁴在完整地计及单圈阶的三张散射图的情况下, 若我们选取参考点动量为 $s = t = u = p^2$ (实际上这在物理上是不可达到的), 则重整化群方程中 λ_R^2 项的系数应当修正为 $3/32\pi^2$ 。

如果 $D \geq 0$, 则该图是表观发散的, 且其取值越高, 表观发散度越大。反之该图是表观收敛的。

上述四个量并不是独立的。顶点数目与内线数量和外线数量之间的关系为

$$4V = 2I + E, \quad (6.311)$$

而圈的数目满足

$$L = I - V + 1. \quad (6.312)$$

将这两个表达式代入到发散度的计算公式中, 我们得到

$$D = 4 - E. \quad (6.313)$$

换句话说, $\lambda\phi^4$ 理论费曼图的表观发散度只取决于其外线的数目。因此对于传播子自能图来说, 不论其中含有多少个圈图, 由于它们只有两条外线, 因此它们总是 (表观) 二次发散的。对于四粒子散射图来说, 不论其中含有多少个圈图, 由于它们只有四条外线, 因此它们总是 (表观) 对数发散的。而对于有更多条外线的费曼图来说, 它们总是表观收敛的。在给定外线条数的情况下, $\lambda\phi^4$ 理论费曼图的表观发散度不会随着图形的复杂程度而发生变化。由于每条线有两个端点, 而理论中所有顶点都只能连接偶数个顶点, 因此有奇数条外线的费曼图是不可能作出的。因此, 在 $\lambda\phi^4$ 理论中只有两种类型的表观发散图, 如图 6.10 所示。

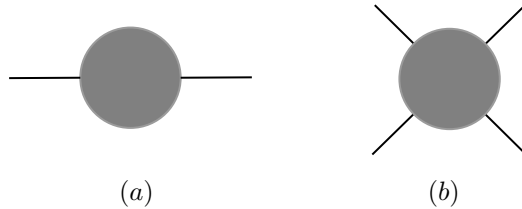


图 6.10: $\lambda\phi^4$ 理论中所有的表观发散图, 图 (a) 为粒子自能图, 图 (b) 为四粒子散射图。

为系统性地处理 $\lambda\phi^4$ 理论的高圈发散, 我们在这里将采用重整化微扰论的视角。在重整化微扰论中, 我们假设系统起初只存在由有限的重整化场和重整化参量构成的重整化拉格朗日密度

$$\mathcal{L}^0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (6.314)$$

式中我们已略去重整化场和重整化参量的角标 R 。根据前面的讨论, $\lambda\phi^4$ 理论中共存在两类发散图, 分别为粒子自能图 6.10 (a) 以及四粒子散射图 6.10 (b)。为消除掉这些发散的圈图, 我们需要在理论中引入不同的发散的抵消项。将这些抵消项与有限项加在一起, 我们就得到了完整的理论。

粒子自能 $\Sigma(p^2)$ 对应于 $\lambda\phi^4$ 理论的两点关联函数 $\langle\phi\phi\rangle$, 根据幂次分析可知它是二次发散的。我们可以将粒子自能的单粒子不可约振幅 $\Sigma(p^2)$ 在 $p^2 = 0$ 处展开为

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + p^2\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p^2), \quad (6.315)$$

式中 $\Sigma(0)$ 以及 $\Sigma'(0)$ 是发散的, 而 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 是收敛的。为简便起见, 我们将振幅的有限部分全部吸收到 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 之中, 这样在引入抵消项的时候我们可以只关心对发散部分的减除, 而不用关心实验定标对抵消项系数的有限修正。

为除去振幅中的发散部分, 我们在理论中引入抵消项

$$\Delta\mathcal{L}_\Sigma = \frac{1}{2}\delta_Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\delta_m\phi^2, \quad (6.316)$$

式中抵消项系数 δ_Z, δ_m 是发散的。在考虑到这一抵消项后, 我们可以将传播子表示为

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + \delta_Z p^2 - \delta_m + i\varepsilon}. \quad (6.317)$$

要使得传播子中的所有发散项都能够得到消除, 我们可以将抵消项系数选取为

$$\delta_Z = \Sigma'(0), \quad \delta_m = -\Sigma(0), \quad (6.318)$$

因此抵消项可以表示为

$$\Delta\mathcal{L}_\Sigma = \frac{1}{2}\Sigma'(0)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\Sigma(0)\phi^2. \quad (6.319)$$

在考虑到抵消项的贡献后, 粒子自能的发散将被消除, 只剩下一个有限的振幅

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) + i\varepsilon}. \quad (6.320)$$

四粒子散射 $\Gamma(p^2)$ 对应于 $\lambda\phi^4$ 理论的四点关联函数 $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$, 根据幂次分析可知它是对数发散的。因此, 我们可以一般性地将四粒子散射振幅 $\Gamma(p^2)$ 展开为

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2), \quad (6.321)$$

式中 $\Gamma(0)$ 是发散的, 而 $\tilde{\Gamma}(p^2)$ 是收敛的, 且已经包含了振幅中所有的有限部分。为除去振幅中的发散部分, 我们在理论中引入抵消项

$$\Delta\mathcal{L}_\Gamma = -\frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4, \quad (6.322)$$

在计及抵消项的贡献之后, 四粒子散射振幅将可以表示为

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2) - i\delta\lambda. \quad (6.323)$$

为消除振幅中的发散部分, 我们可以将抵消项选取为

$$\delta\lambda = -i\Gamma(0), \quad (6.324)$$

因此抵消项可以表示为

$$\Delta\mathcal{L}_\Gamma = \frac{i}{4!}\Gamma(0)\phi^4. \quad (6.325)$$

在考虑到抵消项的贡献后, 四粒子散射顶点的发散将被消除, 只剩下一个有限的振幅

$$\Gamma(p^2) = \tilde{\Gamma}(p^2), \quad (6.326)$$

这样我们就抵消了四粒子散射的发散。将上述两部分的抵消项加在一起, 我们就得到了 $\lambda\phi^4$ 理论的全部抵消项

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{L}_\Sigma + \Delta\mathcal{L}_\Gamma = \frac{1}{2}\Sigma(0)\phi^2 + \frac{1}{2}\Sigma'(0)(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{i}{4!}\Gamma(0)\phi^4. \quad (6.327)$$

这些抵消项的费曼规则如图 6.11 所示。

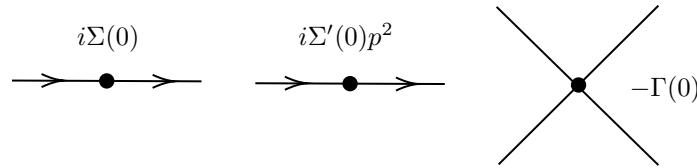


图 6.11: $\lambda\phi^4$ 理论抵消项的费曼规则。

将这些抵消项与有限项加在一起, 我们就得到了完整的拉格朗日密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}^0 + \Delta\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \\ &\quad + \frac{1}{2}\Sigma(0)\phi^2 + \frac{1}{2}\Sigma'(0)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{i}{4!}\Gamma(0)\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \Sigma'(0))\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 - \Sigma(0))\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\left(1 - \frac{i}{\lambda}\Gamma(0)\right)\phi^4. \end{aligned} \quad (6.328)$$

这与未重整化的拉格朗日密度具有相同的结构。更进一步地, 如果我们令

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi, \quad (6.329)$$

$$Z_\phi = 1 + \Sigma'(0), \quad (6.330)$$

$$m_0^2 = (m^2 - \Sigma(0)) Z_\phi^{-1}, \quad (6.331)$$

$$\lambda_0 = \lambda \left(1 - \frac{i}{\lambda} \Gamma(0) \right) Z_\phi^{-2}, \quad (6.332)$$

则系统的拉格朗日密度将可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{m_0^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4, \quad (6.333)$$

这恰是未重整化的裸拉格朗日密度。由此可见, 这一方法与通常的重整化方法是等价的。

通常我们都是逐阶进行重整化的。我们从树图阶 $\mathcal{L}^{(0)}$ (也就是重整化后的拉格朗日密度 \mathcal{L}^0) 开始, 计算其单圈图的所有发散, 然后引入相应的单圈抵消项 $\Delta\mathcal{L}^{(1)}$ 。将它们加在一起, 我们就得到了准至单圈阶的重整化场论

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} + \Delta\mathcal{L}^{(1)}, \quad (6.334)$$

这一理论在单圈阶是有限的。接下来在 $\mathcal{L}^{(1)}$ 的基础之上, 计算所有的二阶发散并给出相应的二圈抵消项 $\Delta\mathcal{L}^{(2)}$, 将它们加在一起就得到了准至二圈阶的理论

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \Delta\mathcal{L}^{(2)}, \quad (6.335)$$

这一理论直到二圈都是有限的。以此类推, 我们就得到了准至任意圈的 $\lambda\phi^4$ 重整化。上述重整化方法被称为 BPH(Bogoliubov-Parasiuk-Hepp) 重整化。

实际的情况比我们此前的讨论要更加复杂, 因为很多时候费曼图真正的发散度与其表观发散度是不同的。例如, 当一个费曼图包含更加发散的子图时, 其发散度可能高于表观发散度; 而如果一个费曼图包含某种额外的对称性, 则积分中的各项可能相互抵消, 从而使得其发散度低于表观发散度。³⁵ 因此我们需要考虑一些更加复杂的情况, 例如表观收敛但是其子图发散的费曼图, 以及由数个表观发散的费曼图经过组合、嵌套、交缠得到的更加复杂的发散图等。

对上述各种情况的详细讨论是复杂的, 但我们确实可以证明, 若一个理论中所有表观发散的顶点都存在相应的抵消项, 则理论中所有的紫外发散都可以被这些抵消项完全抵消。这一结论被称为 BPHZ(Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman) 定理。除此之外我们还可以问, 尽管每个发散图都是可重整的, 但是对这些发散图逐阶求和所得到的级数本身是否收敛。³⁶ 这些问题已经超出了本讲义的范围, 我们在此将不做详细的讨论。

对于 $\lambda\phi^4$ 理论来说, 我们仅仅引入了几个抵消项 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \phi^2, \phi^4$ 就消除了理论中所有的发散。用一种更有启发性的说法, 我们可以说 $\lambda\phi^4$ 量子场论所对应的有效理论中只有 $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \phi^2, \phi^4$ 这几项前的系数不为零。换句话说, $\lambda\phi^4$ 场论不依赖于高能区域物理的细节。无论在高能区域的理论是什么样子的, 它在低能下都可以利用有限的几个参数来完全表示。³⁷

但是我们也可以设想一种情况: 对于某个场论来说, 其圈图的发散性质有可能极为复杂, 以至于我们必须引入无限多个抵消项才能够消除掉所有的发散。或者我们也可以说, 有效理论中

³⁵ 不过我们至少可以知道: 如果一个费曼图是表观收敛的, 并且它的所有子图都是表观收敛的, 那么这个费曼图将是收敛的。这个结果被称为温伯格 (Weinberg) 定理。

³⁶ 这一收敛性与费曼图的渐近展开密切相关。考虑振幅 \mathcal{M} 作为耦合常数 g 的函数, $g=0$ 实际上是 $\mathcal{M}(g)$ 的本性奇点, 这意味着展开式 $\mathcal{M}(g)$ 在 $g=0$ 的情况下是精确成立的, 而在 $g \neq 0$ 的情况下是发散的。在实际计算中, 对于一个有限的 g 来说, 取费曼图展开的前几项可以得到一个较好的近似, 但是随着展开式项数的逐渐增加, 所得到的结果会偏离得越来越大。渐近级数的发散是微扰量子场论的本质问题, 不过我们仍然可以采用一些办法来改进级数的收敛性。例如, 我们可以选取恰当的重整化能标, 使得级数更容易收敛。我们也可以考虑改变级数的求和顺序, 对某些发散较快的项先进行求和, 这被称为重求和方法。

³⁷ 作为一个类似的例子, 我们可以将量子场论视为高能理论, 而将量子力学视为低能理论。我们发现, 无论量子场论的相互作用有多么复杂, 它在量子力学的层面上总可以用诸如质量、电荷、磁矩等有限的几个参数来完全描述。因此高能标的理论将与低能标脱耦, 低能标的理论将不依赖于高能标的细节。

有无限多项的系数都不为零。在这种情况下，我们称理论是不可重整的，也就是说对这样的理论作重整化在操作的意义上是不可能实现的。这样的理论也不能够被视为一个足够“有效”的有效理论。

如果一个理论是不可重整的，那么它只有在低能状态下才能给出较为可靠的结果。当系统的外线动量较小时，树图在振幅中占据了压倒性的优势，因此我们可以略去所有的发散圈图，而将树图近似作为有效的理论。一旦外线动量变大，那么圈图将开始参与贡献，并且各种复杂的圈图将在理论中提供无限多的发散项。此时我们将不能够把发散的部分从振幅中分离开来，因此理论失去了预言的意义。

我们自然想问，什么样的理论是可以重整的。直观地来看，如果一个圈图的表现发散度会随着图形的复杂性增加而变得越来越高，那么当我们考虑了所有无限复杂的圈图之后，我们将得到无数个发散度极高的发散项，这样的理论将是不可重整的。如果圈图的表现发散度不随着图形的复杂性而增加，那么这种图形中发散的种类是确定的，我们可以以一种统一的方式将这些发散都消除掉，这样的理论将是（临界）可重整的。而如果圈图越复杂，表现发散度越低，那么这个理论的发散项数目将是有限的，这意味着我们只需要引入有限的抵消项就可以消除掉这些发散，这样的理论将是超可重整的。

在一些文献中，“可重整性”的要求要更高一些，即只有那些所有的紫外发散都能够通过重新定义拉格朗日密度中的参数吸收掉的理论才是可重整的。这一要求意味着，只有那些所有抵消项都与未重整化的项具有相同形式的理论才是可重整的。若抵消项中出现了原拉格朗日密度中不存在的项，则它将不能够通过重新定义参数的方法吸收掉，因此这些理论被排除在了可重整化的要求之外。而我们这里的要求要更宽松一些，即只要求抵消项的个数有限即可。至于抵消项的形式是否与未重整化的项相同，则是无关紧要的。

不失一般性地，我们考虑 d 维空间中的 $\lambda\phi^n$ 理论。此时系统的表现发散度变为

$$D = dL - 2I, \quad (6.336)$$

而顶点数目与内线数量和外线数量之间的关系为

$$nV = 2I + E. \quad (6.337)$$

圈的数量仍然满足

$$L = I - V + 1. \quad (6.338)$$

因此费曼图的发散度可以表示为

$$D = d + \left(1 - \frac{d}{2}\right)E - aV, \quad (6.339)$$

式中

$$a = n + d - \frac{1}{2}nd \quad (6.340)$$

为相互作用顶点对发散度的贡献。在这种一般性的情况下我们看到，费曼图的表现发散度不仅仅与外线的数量有关，还可能与图中顶点的数目有关。如果 $a < 0$ ，那么随着费曼图的复杂度提高，图中顶点的数量会越来越多，振幅将会变得越来越发散，这样的理论是不可重整的。如果 $a > 0$ ，那么随着费曼图的复杂度提高，图中顶点的数量会越来越多，振幅将会变得越来越收敛，从而使得圈积分中只有有限个发散项，这样的理论是超可重整的。而如果 $a = 0$ ，那么振幅不随费曼图的复杂性发生变化，从而使得圈积分中只有有限种发散项，这样的理论是（临界）可重整的。

量子场论的可重整性可以与耦合常数的量纲联系在一起，上面定义的 a 实际上就是相互作用耦合常数的量纲。由于在自然单位制中我们取 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$ ，因此自然单位制中仅剩下一个量纲，我们将之取为能量量纲。我们用能量量纲的幂次来代表物理量的量纲，则各物理量的量纲与能量量纲之间的关系为

$$[E] = [m] = 1, \quad [L] = [T] = -1, \quad (6.341)$$

场的作用量是处在路径积分的指数上的，因此它一定是一个无量纲量

$$[S] = 0. \quad (6.342)$$

位移四矢量的量纲为

$$[x^\mu] = -[E] = -1. \quad (6.343)$$

由于积分相当于乘以一个微分体积元，而微分相当于除以一个位移，因此积分算符和微分算符的量纲分别为

$$[d^d x] = -d, \quad [\partial_\mu] = [\partial^\mu] = 1. \quad (6.344)$$

这样我们就得到了拉格朗日密度的量纲

$$[\mathcal{L}] = d. \quad (6.345)$$

由于拉格朗日密度中的任何一项都要满足这个量纲，因此我们有

$$[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = [m^2 \phi^2] = [\lambda \phi^n] = d. \quad (6.346)$$

我们把上述关系式看成是 $[\phi], [m], [\lambda]$ 的一个线性方程组，将之求解出来可以得到各个物理量以及场的量纲

$$[\phi] = \frac{d-2}{2}, \quad [m] = 1, \quad [\lambda] = n + d - \frac{1}{2}nd. \quad (6.347)$$

因此我们可以将费曼图的表现发散度表示为

$$D = d - [\lambda]V - [\phi]E. \quad (6.348)$$

由此可见，理论是否可重整刚好取决于耦合常数 λ 量纲的符号。如果耦合常数量纲为正，那么理论是超可重整的；如果耦合常数量纲为负，那么理论是不可重整的；而如果耦合常数量纲为零，那么理论是临界可重整的。对于四维时空中我们感兴趣的大多数量子场论来说，其耦合常数一般都是无量纲量，换句话说它们都是临界可重整的。以上我们针对 $\lambda \phi^n$ 标量理论进行了讨论，实际上这个结果对于包含旋量场和矢量场的其他相互作用也是成立的。如果理论中存在质量量纲为负的耦合常数，则理论就是不可重整的，费曼图的发散度会随着圈数的增加而无限提高。而如果理论中所有耦合常数的质量量纲均非负，则理论就是可重整的，我们可以利用有限多个抵消项消除掉理论中的全部发散。³⁸

为什么耦合常数的量纲会与理论的可重整性联系起来呢？这是因为费曼图是按照耦合常数的幂次展开来得到的。费曼图中的每个顶点都携带了一个耦合常数，因此费曼图越复杂，耦合常数的幂次就越高。对于给定的外线数量和时空维数，一个散射振幅的量纲总应当是一个常数。而耦合常数的量纲的存在，导致它将会“平衡”积分中动量的幂次。

具体地说，在圈积分中 $\lambda k^{-[\lambda]}$ 项为一个无量纲量，因此它们总是会在积分中共同出现。如果 $[\lambda] > 0$ ，那么随着圈图中顶点数量的增加，积分中动量的幂次会越来越低。因此在费曼图足够复杂的情况下，这个积分一定是收敛的，这样的理论就是超可重整化的。如果 $[\lambda] < 0$ ，那么随着图形复杂度增加，积分一定是越来越发散的，这样的理论就是不可重整的。如果 $[\lambda] = 0$ ，那么这样的理论中只有有限多种发散项，它将是（临界）可重整化的。需要说明的是，这里通过量纲分析得到的仅仅是可重整性的必要条件，而非充要条件。即使一个理论的耦合常数满足上述重整化条件，它也未必真的是可重整的。要想判断理论是否可重整，还需要进行严格的数学证明。

相比于不可重整化的场论来说，可重整化的场论的性质要更好，因此我们自然希望一个量子场论是可重整化的。但如果它是不可重整化的，是否意味着它就是不可接受的呢？目前看来并不是这样的。从某种程度上来说，量子场论仅仅是描述“真实”世界的有效理论。对于不可重整化的场论来说，它的有效程度可以达到树图阶；而对于可重整化的理论来说，它的有效程度可以达到圈图阶。或者说对于可重整的场论而言，更深层次的理论的能标要远远高于场论的能标；而对

³⁸更严格地说，耦合常数量纲非负为可重整的必要条件。

于不可重整的场论而言，更深层次的理论的能标并不远远高于场论的能标。因此，不可重整化的理论仍然是可接受的，只不过它不那么“有效”而已。我们在 6.8 节末尾将讨论一个示例，在那里有质量矢量场的低能有效理论将给出一个不可重整的场论，但它仍然在树图阶反映了弱相互作用的性质。

6.5 旋量场和矢量场的量子化

通过将路径积分推广为对场所有可能的构型进行的泛函积分，我们得到了标量场的量子场论。仿照类似的做法，我们可以得到旋量场与矢量场的量子场论。假设某个场论的作用量可以表示为某些标量场 ϕ 、旋量场 ψ 、矢量场 A^μ 的泛函

$$S = S[\phi, \psi, \bar{\psi}, A^\mu], \quad (6.349)$$

那么整个场的几率振幅将可以表示为对所有场的所有可能构型进行的泛函积分

$$K = \int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[A^\mu] e^{iS[\phi, \psi, \bar{\psi}, A^\mu]}. \quad (6.350)$$

注意这里的泛函积分要对 ψ 和 $\bar{\psi}$ 分别进行，换句话说要将它们看成独立的场。如果理论中存在着各个不同的场（比如有数个不同的旋量场 ψ_i 同时出现在场论中，它们可以代表不同种类的粒子，其质量和耦合常数也可能各不相同），那么在计算路径积分的时候就要对每个场分别进行泛函积分。

上面的定义看起来非常自然，但是当我们实际将它们应用在场论之中的时候会产生一些其他的问题。先讨论旋量场的情况。如果直接将标量场的路径积分方法应用于旋量场，那么理论中会产生一些严重的困难，如能量无下界、违反微观因果性等，我们在后文中会对此进行更详细的讨论。因此，我们必须对路径积分方法进行修改。回忆在路径积分的过程中，每个场的构型在振幅中贡献一个正比于作用量复指数的贡献，而总振幅要将所有场构型的贡献求和。由于在路径积分中出现的所有场都是经典场，因此调换两个场乘积的顺序对结果没有影响

$$\phi(x_1)\phi(x_2) = \phi(x_2)\phi(x_1), \quad (6.351)$$

这似乎是一个再自然不过的要求。但如果我们希望旋量场的路径积分仍然能得出正确的结果，那么我们就需要将上述原理修改为

$$\psi(x_1)\psi(x_2) = -\psi(x_2)\psi(x_1), \quad (6.352)$$

这意味着在路径积分中，交换两个旋量场的乘积会额外产生出一个负号。

但是这样一来，旋量场将不再是普通的数了，它将成为某种具有反对易数学结构的特殊变量，我们称之为格拉斯曼数。由于格拉斯曼数特殊的反对易关系，我们需要重新定义它们的积分，以使得运算不出现矛盾。根据格拉斯曼数的定义，两个格拉斯曼数之间满足反对易关系

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i. \quad (6.353)$$

根据这条性质，我们立刻可以得到 $\theta_i^2 = 0$ ，即两个相同的格拉斯曼数的乘积等于零。除此之外，我们还要求格拉斯曼数与普通数是对易的，即 $a\theta = \theta a$ 。对于任何一个格拉斯曼数的函数 $f(\theta)$ ，我们总可以将之展开成幂级数

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n, \quad (6.354)$$

式中所有 a_n 都是普通数。根据格拉斯曼数的反对易性质，这个展开式中只有前两项不为零

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \theta. \quad (6.355)$$

对格拉斯曼函数求导数，我们得到

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = a_1. \quad (6.356)$$

接下来我们讨论格拉斯曼函数的积分。我们知道, 普通函数的积分有如下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x+c). \quad (6.357)$$

类似地, 我们假设格拉斯曼函数的积分也具有类似的性质

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta f(\theta + \xi), \quad (6.358)$$

其中 θ, ξ 都是格拉斯曼数。现在将等式两边作差, 并将 $f(\theta)$ 的一般形式代入, 我们得到

$$\int d\theta [f(\theta + \xi) - f(\theta)] = \int d\theta a_1 \xi = a_1 \xi \int d\theta = 0, \quad (6.359)$$

这意味着

$$\int d\theta = 0. \quad (6.360)$$

另一方面, 我们定义归一化的格拉斯曼积分为

$$\int d\theta \theta = 1. \quad (6.361)$$

因此, 任意一个格拉斯曼函数的积分就可以表示为

$$\int d\theta f(\theta) = a_1, \quad (6.362)$$

这正好是一次项前的展开系数。由此可见对于格拉斯曼函数来说, 微分和积分得到的结果实际上是相同的。

接下来我们考虑一个具有 n 个变量的格拉斯曼函数 $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ 。与单变量的情况类似, 任何两个相同变量的乘积都将取为零, 因此多变量格拉斯曼函数可以展开为

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n) = a + b_i \theta_i + \frac{1}{2} c_{i_1 i_2} \theta_{i_1} \theta_{i_2} + \dots + \frac{1}{n!} n_{i_1 \dots i_n} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_n}. \quad (6.363)$$

如果我们将格拉斯曼数的乘积进行反对称化

$$\theta_1 \theta_2 = \frac{1}{2} (\theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_1), \quad (6.364)$$

那么上述展开式中的各个系数将同样是反对称化的。

类似地, 我们定义不同格拉斯曼变量之间的积分关系为

$$\int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij}. \quad (6.365)$$

由于格拉斯曼数之间具有反对易关系, 因此格拉斯曼数的积分与顺序有关, 例如

$$\int d\theta_1 \theta_1 \theta_2 = \theta_2, \quad \int d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = - \int d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = -\theta_1. \quad (6.366)$$

我们定义 n 个变量的高维格拉斯曼数积分的顺序为

$$\int d^n \theta = \int d\theta_n \dots d\theta_1. \quad (6.367)$$

将 $f(\theta_i)$ 的一般形式代入上述积分中, 我们得到

$$\int d^n \theta f(\theta_i) = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} n_{i_1 \dots i_n}, \quad (6.368)$$

这就是多变量格拉斯曼函数积分的结果。

在恰当地定义了格拉斯曼数的运算之后, 我们就可以写出自由旋量场的路径积分和生成泛函

$$K = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[i \int d^4 x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \right], \quad (6.369)$$

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[i S_0[\bar{\psi}, \psi] + i \int d^4 x (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right], \quad (6.370)$$

式中 S_0 为自由旋量场的作用量。上述结果在形式上与通常的路径积分是一致的, 但是式中的各场 $\psi, \bar{\psi}, \eta, \bar{\eta}$ 均应当理解为格拉斯曼旋量场, 并且积分也应当理解为对格拉斯曼数进行的积分。

对于两点关联函数来说, 旋量场和标量场的结果是类似的。为了计算出格拉斯曼场的泛函积分, 我们首先考虑格拉斯曼变量的指数积分。考虑两个独立的复格拉斯曼数 $\theta, \bar{\theta}$, 我们可以得到

$$\int d\theta d\bar{\theta} e^{m\bar{\theta}\theta} = \int d\theta d\bar{\theta} (1 + m\bar{\theta}\theta) = m. \quad (6.371)$$

更一般地, 我们可以考虑一个多变量的格拉斯曼指数函数的积分

$$I = \int d^n\theta d^n\bar{\theta} e^{\bar{\theta}_i M_{ij} \theta_j}, \quad (6.372)$$

将其对角化后, 我们得到³⁹

$$\int d^n\theta d^n\bar{\theta} e^{\bar{\theta}_i M_{ij} \theta_j} = \det(M). \quad (6.373)$$

也就是说, 旋量场自身的泛函积分满足

$$\int d\psi d\bar{\psi} e^{\bar{\psi}_a M_{ab} \psi_b} = \det(M), \quad (6.374)$$

式中 M 是一个关于旋量场的算符。

类似地, 我们有含源的复指数积分

$$\begin{aligned} & \int d^n\theta d^n\bar{\theta} e^{\bar{\theta}_j M_{jk} \theta_k + \bar{\eta}_i \theta_i + \bar{\theta}_i \eta_i} \\ &= e^{-\bar{\eta}_i (M^{-1})_{ij} \eta_j} \int d^n\theta d^n\bar{\theta} e^{(\bar{\theta}_i + \bar{\eta}_k (M^{-1})_{ki}) M_{ij} (\theta_j + (M^{-1})_{jl} \eta_l)} \\ &= \det(M) e^{-\bar{\eta}_i (M^{-1})_{ij} \eta_j}, \end{aligned} \quad (6.375)$$

式中 $\theta_i, \bar{\theta}_i, \eta_i, \bar{\eta}_i$ 都是格拉斯曼数, 而 M_{ij} 为普通数。因此若旋量场的生成泛函可以表示为

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{i(\bar{\psi}_a M_{ab} \psi_b + \bar{\eta}_a \psi_a + \bar{\psi}_a \eta_a)}, \quad (6.376)$$

则将 $\psi, \bar{\psi}$ 积去后, 我们得到

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = Z(0, 0) e^{-\bar{\eta}_a (iM^{-1})_{ab} \eta_a}. \quad (6.377)$$

对上述生成泛函求泛函导数, 我们就可以得到自由旋量场的多点关联函数。自由旋量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (6.378)$$

因此它所对应的算符为

$$\hat{M} = i\gamma^\mu \partial_\mu - m. \quad (6.379)$$

于是我们可以将自由旋量场的两点关联函数表示为

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 \bar{\psi}_2 \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \end{aligned} \quad (6.380)$$

这实际上就是自由旋量场的经典传播子

$$(i\not{\partial} - m)G(x_1 - x_2) = i\delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (6.381)$$

仿照标量场中的做法, 我们可以求出自由旋量场更高阶的多点关联函数, 它是所有可能的传播子组合之和。

接下来我们来考察矢量场的路径积分。对矢量场进行的泛函积分看似合理, 但如果我们将之计算出来, 就会发现这个结果是发散的。具体地说, 在弃去适当的全导数项后, 自由矢量场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu (\eta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu, \quad (6.382)$$

³⁹ 在计算这个积分时, 我们需要恰当地将各个积分变量调换顺序, 这会额外地引入一些正负号上的差别。在这里这些正负号是无关紧要的, 因为在计算期望值的时候, 相差的正负号总是会相互抵消, 从而不影响计算的结果。

因此在计算传播子的时候, 我们需要计算如下算符的逆

$$K_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu. \quad (6.383)$$

然而我们发现这个算符是奇异的, 其逆不存在, 因而导致了发散。这种发散来源于矢量场的规范对称性, 或者更恰当地说是一种“冗余”: 任何满足规范变换

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Gamma(x) \quad (6.384)$$

的两个场将给出完全相同的贡献, 因为在这样的变换下拉格朗日密度是不变的。换句话说, 积分中包含了非物理的自由度。在物理上相互等价的矢量场在路径积分中被计算了无数次, 因此导致了发散。

要想解决这个问题, 我们需要对于每一族相互等价的矢量场只计算一次, 这意味着我们要在积分之中引入恰当的规范条件来将所有非物理的态排除在外。因此, 我们可以先对具有特定规范的场进行积分, 然后再对所有可能的规范变换进行积分。取洛伦兹规范条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (6.385)$$

矢量场的路径积分将可以表示为

$$\begin{aligned} K &= \int \mathcal{D}[A^\mu] e^{iS} \\ &= \int \mathcal{D}[\Gamma] \int \mathcal{D}[A^\mu] \delta(\partial_\mu A^\mu) e^{iS}, \end{aligned} \quad (6.386)$$

式中 Γ 为规范项。除去一个常数因子以外, 上述结果是准确的。对规范项 Γ 的路径积分给出一个无穷大的因子, 将这一项略去, 我们就除去了路径积分中的规范冗余, 余下的路径积分将是有限的。积分中的 $\det(\partial_\mu \partial^\mu)$ 给出一个无关紧要的常数项因子, 我们可以一并将其略去。这样矢量场的路径积分就可以表示为

$$K = \int \mathcal{D}[A^\mu] \delta(\partial_\mu A^\mu) e^{iS}. \quad (6.387)$$

需要说明的是, 这里对路径积分的考虑过于简单了。如果我们考虑更复杂的情况 (例如非阿贝尔规范场论), 则规范条件不能够这样简单地添加。我们将在后文中讨论这一问题。

由于我们在积分中只考虑满足规范条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 的场, 因此我们利用拉格朗日乘数法处理这一约束体系, 即在系统的拉格朗日密度中加上一个规范固定项而不改变结果

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (6.388)$$

弃去适当的全导数项后, 我们得到

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu (\eta_{\mu\nu} \partial^2) A^\nu. \quad (6.389)$$

因此将自由矢量场的两点关联函数显式地计算出来, 结果为

$$\langle A_1^\mu A_2^\nu \rangle = G_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \int d^4 p \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \quad (6.390)$$

这是一个有限的结果。这个两点关联函数就是洛伦兹规范下自由矢量场的经典传播子

$$\partial^2 G^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = i\eta^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (6.391)$$

而更高阶的多点关联函数就是所有可能的传播子组合之和。

一个更一般的做法是将拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (6.392)$$

此时系统的传播子为

$$G_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \int d^4 p \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1 - \xi}{\xi} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + i\varepsilon} \right) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (6.393)$$

从上述表达式中可以看出, 在任意 $\xi \neq 0$ 的情况下, 传播子都是非奇异的。特别地, $\xi = 1$ 被称为费曼规范, 而 $\xi \rightarrow \infty$ 被称为朗道规范。虽然传播子的形式是规范相关的, 但如果我们考虑一个洛伦兹不变的可观测量, 例如

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T[A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)] | 0 \rangle j_\mu(x_1) j_\nu(x_2), \quad (6.394)$$

式中 $j^\mu(x)$ 为某守恒流满足 $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, 则传播子中 $p^\mu p^\nu$ 项将不会产生贡献, 从而可观测量的取值将是规范无关的。

利用正则量子化的方法, 我们同样可以完成自由旋量场和自由矢量场的量子化。自由旋量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad (6.395)$$

其正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger. \quad (6.396)$$

为了完成场的正则量子化, 我们需要将场及其正则动量视为算符, 并使其满足正则对易关系。与路径积分量子化方法类似, 如果我们希望避免旋量场量子化过程中所产生的困难, 我们需要令旋量场算符间满足反对易关系, 而非通常的对易关系

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.397)$$

$$\{\pi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = 0. \quad (6.398)$$

式中 α, β 代表旋量场的分量。

将旋量场及其共轭展开成平面波的形式, 我们得到

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s [\hat{a}_p^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}], \quad (6.399)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s [\hat{b}_p^s \bar{v}^s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_p^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}]. \quad (6.400)$$

这里的 u^s, v^s 代表着一组线性独立的旋量基矢, 它们需要满足狄拉克方程。展开式中的 \hat{a}, \hat{b} 均为算符, 并且不随时间变化。根据旋量场的反对易关系, 我们可以写出这些算符之间满足的反对易关系

$$\{\hat{a}_p^s, \hat{a}_{p'}^{s'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^s, \hat{b}_{p'}^{s'\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ss'}, \quad (6.401)$$

其余所有算符的反对易关系均为零。上述结果与标量场是类似的, 详细的推导过程从略。利用上述产生湮灭算符之间的反对易关系, 我们可以将旋量场的四动量算符表示为

$$\hat{P}^\mu = i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \partial^\mu \psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \sum_s (\hat{a}_p^{s\dagger} \hat{a}_p^s + \hat{b}_p^{s\dagger} \hat{b}_p^s), \quad (6.402)$$

式中我们已应用正规乘积。需要注意的是, 由于旋量场的反对易性质, 在对旋量场施加正规乘积时要额外添加一个负号

$$N[\hat{a}_p^s \hat{a}_{p'}^{s'\dagger}] = -\hat{a}_{p'}^{s'\dagger} \hat{a}_p^s. \quad (6.403)$$

旋量场具有 U(1) 内部对称性, 即在全局相位变换 $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ 下, 旋量场的拉格朗日密度保持不变。根据诺特定理, 这个对称性所对应的守恒流为

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (6.404)$$

对其零分量 j^0 进行全时空的积分, 我们将得到守恒荷算符

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_p^{s\dagger} \hat{a}_p^s - \hat{b}_p^{s\dagger} \hat{b}_p^s) = \hat{N}_a - \hat{N}_b. \quad (6.405)$$

式中我们已经应用了正规乘积。由于旋量场的反对易性质, 在正规乘积中调换两个旋量场的产生湮灭算符, 也要额外添加一个负号。从上述表达式中我们可以看出, 场中出现了两种粒子 a, b , 每

个粒子都贡献一个四动量 p^μ ，并且每一个 a 粒子提供一个正的守恒荷，而每一个 b 粒子提供一个负的守恒荷。习惯上我们将 a 粒子称为正粒子，而将 b 粒子称为反粒子。在这种情况下， \hat{a}^\dagger, \hat{a} 算符分别可以产生和湮灭一个正粒子，而 \hat{b}^\dagger, \hat{b} 算符分别可以产生和湮灭一个反粒子。入射的正粒子和反粒子的旋量基矢分别为 u 和 v ，而出射的正粒子和反粒子的旋量基矢分别为 \bar{u} 和 \bar{v} 。

由于产生和湮灭算符都是反对易的，因此如果我们将相同的产生算符连续两次作用在真空态上的话，我们将会得到

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle = 0. \quad (6.406)$$

这说明旋量粒子是费米子，且满足泡利不相容原理：两个全同的费米子不能够处在相同的量子态上。由于旋量场的反对易性质，它的编时乘积要多出一个负号

$$T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)] = \theta(t_1 - t_2)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) - \theta(t_2 - t_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1). \quad (6.407)$$

这说明在编时乘积中，旋量场仍然是反对易的。将自由旋量场的传播子计算出来，我们得到

$$\langle 0|T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \quad (6.408)$$

这与路径积分方法得到的结果是一致的。这个场算符的关联函数同样等价于场算符编时乘积的真空期望值

$$\langle \psi_1 \bar{\psi}_2 \rangle = \langle 0|T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]|0\rangle. \quad (6.409)$$

我们也可以给出自由矢量场的正则量子化，不过在这个过程中会引入新的问题。自由矢量场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (6.410)$$

因此矢量场的共轭动量可以表示为

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\rho} = F^{\rho 0}. \quad (6.411)$$

我们希望矢量场可以与其共轭动量满足对易关系

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = i\eta^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.412)$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (6.413)$$

但由于正则动量的零分量为 $\pi^0 = F^{00} = 0$ ，因此实际上上述正则量子化条件是不能够得到满足的。

出现上述矛盾的原因是矢量场具有规范对称性，它包含了非物理的自由度。从而我们不能够简单地将矢量场的四个分量按照四个实标量场的方式逐一进行量子化，而需要利用规范条件将规范对称性予以排除。一个简单的解决方法是选取辐射规范

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (6.414)$$

在这个规范条件下， $A^0 = 0$ 将与 $\pi^0 = 0$ 不产生矛盾。又因为对平面波而言有 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$ ，因此量子化将只对 \mathbf{A} 的横向方向进行。但是这个规范条件破坏了理论的协变性，它是不能够令我们满意的。为此我们需要寻找新的量子化方法。

接下来我们将采用明显协变的洛伦兹规范条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (6.415)$$

来对矢量场进行量子化。为处理这一有约束的体系，我们可以采用拉格朗日乘数法，即在自由矢量场的拉格朗日密度中添加规范固定项的贡献

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (6.416)$$

在计算的最后, 我们再将规范固定条件添加到系统上, 从而得到物理的结果。根据上述拉格朗日密度, 我们可以求出系统的正则动量

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\rho} = F^{\rho 0} - \eta^{\rho 0}(\partial_\mu A^\mu), \quad (6.417)$$

从而使得

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = -(\partial_\mu A^\mu) \neq 0, \quad (6.418)$$

前述矛盾消失。

我们将矢量场算符展开成平面波

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^3 [\hat{a}_p^\lambda \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_p^{\lambda\dagger} \varepsilon_\mu^{\lambda*}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}], \quad (6.419)$$

式中 $p^\mu p_\mu = 0$ 。 $\varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p})$ 是一组正交归一的极化矢量, 习惯上我们选取这样一组极化矢量作为基矢: 选择 ε^0 平行于时间轴 \hat{t} , 称之为标量极化矢量; 选择 $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ 垂直于 $\hat{t}, \hat{\mathbf{p}}$ 且相互正交, 称之为横向极化矢量; 选取 ε^3 处于 $\hat{t}, \hat{\mathbf{p}}$ 所张成的空间中且与 \hat{t} 垂直, 称之为纵向极化矢量。这组矢量满足如下关系

$$\varepsilon_\mu^{*\lambda} \varepsilon^{\lambda'\mu} = \eta^{\lambda\lambda'}, \quad \eta^{\lambda\lambda'} \varepsilon_\mu^{*\lambda} \varepsilon_\nu^{\lambda'} = \eta_{\mu\nu}. \quad (6.420)$$

特别地, 在 $\hat{\mathbf{p}}$ 沿 z 轴的情况下, 满足这些关系的一组极化矢量可以简单地选取为

$$\varepsilon^0 = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \varepsilon^1 = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \varepsilon^2 = (0, 0, 1, 0)^T, \quad \varepsilon^3 = (0, 0, 0, 1)^T.$$

根据矢量场之间的对易关系, 我们可以写出各个算符之间的对易关系

$$[\hat{a}_p^\lambda, \hat{a}_{p'}^{\lambda'\dagger}] = -\eta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (6.421)$$

$$[\hat{a}_p^\lambda, \hat{a}_{p'}^{\lambda'}] = [\hat{a}_p^{\lambda\dagger}, \hat{a}_{p'}^{\lambda'\dagger}] = 0. \quad (6.422)$$

上述结果的证明与标量场的情况是类似的, 这里从略。利用正规乘积计算系统的哈密顿量, 我们得到

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p \left(-\hat{a}_p^{0\dagger} \hat{a}_p^0 + \sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}_p^{\lambda\dagger} \hat{a}_p^\lambda \right), \quad (6.423)$$

这说明 $\lambda = 0$ 的粒子能量为负, 而 $\lambda = 1, 2, 3$ 的粒子能量为正。

哈密顿量中的负能态会使得系统的能量无下界, 然而更严重的问题在于此时系统的态空间将是非正定的。将自由矢量场单粒子态的内积计算出来, 我们得到

$$\langle \mathbf{p}, \lambda | \mathbf{p}', \lambda' \rangle = \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_{p'}} \langle 0 | \hat{a}_p^\lambda \hat{a}_{p'}^{\lambda'\dagger} | 0 \rangle = 2E_p (-\eta^{\lambda\lambda'}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (6.424)$$

这意味着 $\lambda = 0$ 的态模值为负数。⁴⁰ 为排除掉这些非物理的状态, 我们需要利用洛伦兹规范条件。我们或许希望能够直接将洛伦兹规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 添加到系统中, 从而排除掉冗余的自由度。但由于此时正则动量 $\pi^0 = 0$, 因此正则对易关系将被破坏, 这说明算符方程 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 对系统的限制过强了。因此我们退而求其次, 不要求算符 $\partial_\mu A^\mu$ 恒等于零, 而是要求这个算符对于任意一个物理上可能的态 $|\psi\rangle$ 的期望值都等于零

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0, \quad (6.425)$$

它可以被视为洛伦兹规范条件在量子场论中的推广。

上面的条件意味着 $\partial_\mu A^\mu$ 的正频部分 (即包含湮灭算符的部分) 要湮灭掉 $|\psi\rangle$ 。在这个情况下, 我们可以写出 \hat{a} 所满足的关系式

$$\sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}_p^\lambda \varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) p^\mu | \psi \rangle = 0. \quad (6.426)$$

⁴⁰ 对于矢量场的态矢的内积来说, 更恰当的做法是使用不定度规方法, 即引入厄密度规算符 $\hat{\eta}$ 满足 $\hat{\eta}^2 = 1$, 然后将态矢间的内积定义为 $\langle \psi | \hat{\eta} | \psi \rangle$ 。在这种情况下, 力学量的期望值定义为 $\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{\eta} \hat{F} | \psi \rangle / \langle \psi | \hat{\eta} | \psi \rangle$, 力学量算符的厄密 (自伴) 条件变为 $\hat{F} = \hat{\eta}^{-1} \hat{F}^\dagger \hat{\eta}$ 。

注意到我们所选取的极化矢量满足

$$p \cdot \varepsilon^1 = p \cdot \varepsilon^2 = 0, \quad p \cdot \varepsilon^0 = -p \cdot \varepsilon^3 = E_{\mathbf{p}}, \quad (6.427)$$

因此

$$(\hat{a}_{\mathbf{p}}^0 - \hat{a}_{\mathbf{p}}^3)|\psi\rangle = 0, \quad (6.428)$$

这意味着

$$\langle\psi|\hat{a}_{\mathbf{p}}^{0\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}^0 - \hat{a}_{\mathbf{p}}^{3\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}^3|\psi\rangle = 0. \quad (6.429)$$

由此可见, 若 $|\psi\rangle$ 是一个满足洛伦兹规范条件的物理态, 则其中所包含的纵向粒子和标量粒子的数量必须相同。将上述结果代入到哈密顿算符期望值的表达式中, 我们得到哈密顿算符在物理态上的期望值

$$\begin{aligned} \langle\hat{H}\rangle &= \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left(\sum_{\lambda=1}^2 \langle\psi|\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\lambda}|\psi\rangle \right)}{\langle\psi|\psi\rangle} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \left(\sum_{\lambda=1}^2 N_{\mathbf{p}}^{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (6.430)$$

式中 $N_{\mathbf{p}}^{\lambda}$ 为系统中动量为 \mathbf{p} , 极化为 λ 的粒子数。这意味着对于任何一个可能的物理态来说, 其标量极化的部分与纵向极化的部分总是抵消掉, 只有横向极化的两个自由度是有贡献的。这也与经典电动力学中的结果相符合: 在经典电磁场中, 光的偏振方向同样只有两种, 对应于两个横向极化自由度。对于物理态 $|\psi\rangle$ 来说, 其性质只由其横向部分决定, 而纵向和标量部分仍然有很大的任意性, 这种任意性来源于矢量场取洛伦兹规范后残余的规范对称性。

由于我们以对易量子化方式处理矢量场, 因此我们可以将任意数量的产生算符作用在量子态上, 这意味着矢量场所对应的粒子为玻色子。将自由矢量场的传播子计算出来, 我们得到

$$\langle 0|T[A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)]|0\rangle = \int d^4p \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (6.431)$$

上述编时乘积的真空期望值同样等价于路径积分中的两点关联函数

$$\langle A_1^{\mu} A_2^{\nu} \rangle = \langle 0|T[A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)]|0\rangle, \quad (6.432)$$

这与路径积分方法得到的结果是一致的。

现在我们已经完成了标量场、矢量场和旋量场的量子化。由于粒子是场的激发态, 因此我们自然想问这些场究竟对应于什么样的粒子。不失一般性地, 设场 ϕ_r 在无穷小洛伦兹变换下的变化为

$$\delta\phi_r = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S[J^{\mu\nu}]_{rs}\phi_s(x), \quad (6.433)$$

式中 r, s 为场分量的指标, $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为无穷小变换参量, $J^{\mu\nu}$ 为洛伦兹变换生成元, $S[J^{\mu\nu}]$ 为洛伦兹变换生成元的表示。根据前文中的讨论我们已经知道, 如果理论在上述洛伦兹变换下不发生改变, 则如下的广义角动量守恒

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x \left(T_{0\lambda}x_{\nu} - T_{0\nu}x_{\lambda} - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)}S[J_{\nu\lambda}]_{rs}\phi_s \right). \quad (6.434)$$

这一角动量由两部分构成, 分别为坐标在洛伦兹变换下的贡献和场本身在洛伦兹变换下的贡献, 前者称为轨道角动量, 后者称为自旋角动量。定义自旋角动量矢量 \mathbf{S} 为

$$S_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)} (-iS[J_{ij}]_{rs})\phi_s. \quad (6.435)$$

由于各场在洛伦兹变换下的性质各不相同, 因此洛伦兹群生成元的表示 $S[J^{\mu\nu}]$ 对于不同的场来说也是不同的。这意味着不同的场将具有不同的自旋性质。

在量子理论中, 力学量应当用相应的算符来代替。我们定义量子场的自旋角动量算符为

$$\hat{s}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{S}[J_{ij}]. \quad (6.436)$$

为看出场所对应的粒子自旋角动量，最简单的方式是计算场的自旋角动量算符的平方。在量子力学中我们已经知道，每种粒子具有确定的自旋量子数 s ，这里 s 可以取为非负的整数或者半整数（如 $1/2, 3/2$ 等）。若一个粒子的自旋量子数为 s ，则计算其自旋角动量算符的平方，我们得到

$$\hat{s}^2 = s(s+1), \quad (6.437)$$

因此，计算出场的自旋角动量算符的平方，我们将得到不同场所对应的粒子的自旋量子数。

现在我们考察量子场的角动量算符。标量场所对应的洛伦兹群生成元的表示为

$$S[J_{\mu\nu}] = 0, \quad (6.438)$$

因此其自旋角动量算符为

$$\hat{s} = 0. \quad (6.439)$$

计算出其角动量算符的平方，我们得到

$$\hat{s}^2 = 0, \quad (6.440)$$

因此我们得到结论，标量场所对应的粒子的自旋为 0。旋量场所对应的洛伦兹群生成元的表示为

$$S[J^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (6.441)$$

因此其自旋角动量算符为

$$\hat{s} = \frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2}\gamma_5\gamma^0\gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (6.442)$$

计算出其角动量算符的平方，我们得到

$$\hat{s}^2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1\right), \quad (6.443)$$

因此我们得到结论，旋量场所对应的粒子的自旋为 $1/2$ 。矢量场所对应的洛伦兹群生成元的表示为

$$(S[J^{\mu\nu}])_{\alpha\beta} = i\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right), \quad (6.444)$$

式中 μ, ν 两个指标标记不同的生成元， α, β 两个指标标记表示矩阵的矩阵元。计算出其角动量算符的平方，我们得到

$$\hat{s}^2 = 2 = 1 \times (1 + 1), \quad (6.445)$$

因此我们得到结论，矢量场对应于自旋为 1 的粒子。

以此类推，如果我们写出洛伦兹群的更高阶的表示，则它所对应的粒子将具有更高的自旋量子数。例如，一个 n 阶张量场所对应的粒子自旋量子数就是 n 。若要一般性地考察场的自旋性质，则可以考虑泡利-鲁邦斯基四矢量

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{\rho\sigma}. \quad (6.446)$$

在量子化后，它将成为算符。计算泡利-鲁邦斯基四矢量的平方，我们得到

$$\hat{W}^\mu \hat{W}_\mu = -m^2 \hat{s}^2 = -m^2 s(s+1), \quad (6.447)$$

这样就求出了场的自旋量子数。取 $t = (1, 0, 0, 0)^T$ 为时间轴，由四动量 p^μ 可定义类空单位矢量

$$\hat{n}^\mu = \left(\frac{p \cdot t}{m^2} p^\mu - t^\mu\right) \frac{m}{|\mathbf{p}|}, \quad (6.448)$$

自旋角动量算符在 \mathbf{p} 方向的投影可以表示为

$$\hat{S} = -\frac{\hat{W} \cdot \hat{n}}{m}. \quad (6.449)$$

将它作用到在该方向上具有确定自旋的单粒子态上，我们就可以得到场的自旋量子数，这同样可以验证场的自旋性质。

我们知道自旋为整数的粒子是玻色子，它们之间满足对易关系；而自旋为半整数的粒子为费米子，它们之间满足反对易关系，这一结果被称为自旋-统计关系。而我们在量子场论中对于标量场和矢量场选取的是对易量子化，而对于旋量场选取的是反对易量子化，这与自旋-统计关系是一致的。现在我们要问：场论中的这种量子化方法究竟是我们人为选取的，还是一个可以从场论中“自然”得出的结果？换句话说，自旋-统计关系可以从量子场论中先验地推导出来吗？

对于量子场论来说，物理上所考虑的许多可观测量 \hat{O} 都可以表示为两个场所组成的双线性型

$$\hat{O}(x) = \varphi_a(x)\varphi_b(x), \quad (6.450)$$

式中我们用 φ_a, φ_b 来指代所有可能的场。我们对理论的一个基本要求就是满足微观因果性，即在类空的区域内观测量之间应该是没有关联的。换句话说，处于类空的两点 x, x' 上的观测量应当是对易的

$$[\hat{O}(x), \hat{O}(x')] = 0, \quad (x - x')^2 < 0. \quad (6.451)$$

上述表达式成立的条件要么是场在类空的两点间的对易子等于零

$$[\varphi_a(x), \varphi_b(x')] = 0, \quad (x - x')^2 < 0, \quad (6.452)$$

要么是场在类空的两点间的反对易子等于零

$$\{\varphi_a(x), \varphi_b(x')\} = 0, \quad (x - x')^2 < 0. \quad (6.453)$$

这意味着若系统满足微观因果性，则量子场论的量子化方法只有两种选择，一种是对易量子化，一种就是反对易量子化。

对于一个量子场来说，对易的量子化方法似乎总是最自然的，因为它可以在非相对论极限下回到普通数（而非格拉斯曼数）。但是对于旋量场来说，如果我们选取对易的量子化关系，那么它将会出现一些严重的困难。假设我们以通常的对易量子化方法来量子化旋量场

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.454)$$

$$[\pi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)] = [\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (6.455)$$

那么旋量场的哈密顿算符将可以表示为

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (\hat{a}_p^{s\dagger} \hat{a}_p^s - \hat{b}_p^{s\dagger} \hat{b}_p^s), \quad (6.456)$$

式中我们已取正规乘积。这意味着系统的能量将没有下界，这样的物理系统是不稳定的。而假如我们以反对易量子化方法来量子化旋量场

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.457)$$

$$\{\pi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = 0, \quad (6.458)$$

那么旋量场的哈密顿算符将可以表示为

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (\hat{a}_p^{s\dagger} \hat{a}_p^s + \hat{b}_p^{s\dagger} \hat{b}_p^s), \quad (6.459)$$

这个系统是稳定的。因此，旋量场不能够采用对易量子化方法来进行处理，而只能够利用反对易量子化方法来处理。

除了能量无下界之外，对旋量场进行对易量子化还会破坏其因果性质。也就是说，如果我们按照正则对易（反对易）关系计算场的不等式对易子（反对易子），那么不满足自旋-统计关联的对易子（反对易子）在类空区域将不为零。按照通常的做法，如果我们对旋量场进行反对易量子化

$$\{\hat{a}_{\mathbf{p}}^r, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}\} = \{\hat{b}_{\mathbf{p}}^r, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{rs}, \quad (6.460)$$

那么旋量场的不等时反对易子将可以表示为

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = (i\partial_x + m)\Delta(x - y), \quad (6.461)$$

式中

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [e^{-ip \cdot (x-x')} - e^{ip \cdot (x-x')}], \quad (6.462)$$

它在洛伦兹变换下是不变的。如果 $x^0 = x'^0$, 则

$$\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0) = 0, \quad (6.463)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0) = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0) = 0, \quad (6.464)$$

因此对于 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ 的两点来说, 我们有

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)\} = (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 \quad (6.465)$$

由于任意类空的两点都可以通过洛伦兹变换转变为等时的两点, 因此对于类空间隔来说, 旋量场的不等时反对易子将满足

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0, \quad (x - x')^2 < 0 \quad (6.466)$$

这意味着在反对易量子化下, 旋量场的因果性得以保留。

而假设我们对旋量场进行对易量子化

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}^r, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}] = [\hat{b}_{\mathbf{p}}^r, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{rs}, \quad (6.467)$$

那么旋量场的不等时对易子将可以表示为

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')] = (i\partial_x + m)\Delta_1(x - x'), \quad (6.468)$$

式中

$$\Delta_1(x - x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [e^{-ip \cdot (x-x')} + e^{ip \cdot (x-x')}], \quad (6.469)$$

它在洛伦兹变换下是不变的。因此对于 $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ 的两点来说, 我们有

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)] = (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \Delta_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 \quad (6.470)$$

如果 $x^0 = x'^0$, 则

$$\Delta_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} 2 \cos[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \neq 0, \quad (6.471)$$

由于任意类空的两点都可以通过洛伦兹变换转变为等时的两点, 因此对于类空间隔来说, 旋量场的不等时对易子将满足

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] \neq 0, \quad (x - x')^2 < 0 \quad (6.472)$$

这意味着在对易量子化下, 旋量场的因果性被破坏。

对于标量场可以进行类似的讨论。如果我们对标量场进行反对易量子化

$$\{\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (6.473)$$

那么我们将得到

$$\{\phi(x), \phi(x')\} = \Delta_1(x - x'), \quad (6.474)$$

这意味着对于类空间隔来说, 标量场的不等时反对易子将满足

$$\{\phi(x), \phi(x')\} \neq 0, \quad (x - x')^2 < 0 \quad (6.475)$$

因果性将被破坏。而如果我们对标量场进行对易量子化

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (6.476)$$

那么我们将得到

$$[\phi(x), \phi(y)] = \Delta(x - x'), \quad (6.477)$$

这意味着对于类空间隔来说, 标量场的不等时对易子将满足

$$[\phi(x), \phi(x')] = 0, \quad (x - x')^2 < 0 \quad (6.478)$$

因果性将得到保留。因此, 量子场论的因果性使得我们必须用对易方法量子化标量场, 而用反对易方法量子化旋量场。这意味着自旋-统计关系能够自然地由量子场论本身得出, 而并不需要人为引入这一假设而改变场的量子化方法。⁴¹

仿照与 $\lambda\phi^4$ 标量场相似的过程, 我们可以建立含有标量场、矢量场和旋量场相互作用的微扰论。与标量场论类似, 我们可以为每一个微扰项指定一个费曼图。在这些图中, 每条外线代表着一个入射或者出射的粒子, 每条内线代表一个传播子, 每个顶点代表一个相互作用项, 顶点的数目就代表了微扰展开的阶数。每一张费曼图对应于一个振幅, 最终的总振幅要将所有可能的费曼图的振幅全部累加起来得到。

对于不同的相互作用场论来说, 其微扰论的推导是完全类似的, 它们之间的唯一区别就是顶点的形式。我们将包含标量场、矢量场和旋量场的费曼规则完整地写在下面。利用这些规则, 我们就可以写出任意一种相互作用场论的微扰展开结果:

(1) 画出费曼图, 用虚线代表标量粒子, 实线代表旋量粒子, 波浪线代表矢量粒子, 如图 6.12 所示。出于习惯, 我们让费曼图的演化过程从左至右进行。

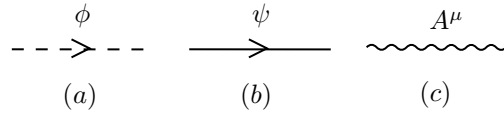


图 6.12: 费曼图中的标量粒子 (a)、旋量粒子 (b) 和矢量粒子 (c)。

(2) 规定入射动量为正, 出射动量为负。为每条线标注动量, 并保证所有顶点处的动量均是守恒的。

(3) 每一个由内线围成的圈中含有一个未受四动量守恒限制的自由动量 k , 对这个动量在全动量空间进行积分 $\int d^4k/(2\pi)^4$ 。

在正则量子化框架下, 旋量场与矢量场的外线规则由场与产生湮灭算符的收缩给出。计算出旋量场、矢量场与各产生湮灭算符之间的收缩, 我们得到

$$\overline{\psi(x)}\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}u^s(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, \quad \overline{\hat{a}_{\mathbf{p}}^s}\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\bar{u}^s(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}, \quad (6.479)$$

$$\overline{\psi(x)}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}v^s(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}, \quad \overline{\hat{b}_{\mathbf{p}}^s}\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\bar{v}^s(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, \quad (6.480)$$

$$\overline{A_\mu(x)}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, \quad \overline{\hat{a}_{\mathbf{p}}^\lambda}A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\epsilon_\mu^{*\lambda}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}. \quad (6.481)$$

式中的 $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ 会被矩阵元前的系数吸收掉。在路径积分框架下, 我们可以得到类似的结果, 只不过对于旋量场和矢量场来说, LSZ 约化公式在截去外线时会保留某些旋量基矢或者极化矢量。于是我们得到了粒子的外线规则:

⁴¹事实上还可以找到一些其他的自旋-统计关联成立的理由。我们希望场在量子层面上仍然满足庞加莱对称性, 这意味着平移生成元 $\hat{U}(a)$ 以及洛伦兹变换生成元 $\hat{J}^{\mu\nu}$ 和场算符的对易关系应当满足

$$[\hat{P}^\mu, \psi(x)] = -i\partial^\mu \psi(x), \quad [\hat{J}^{\mu\nu}, \psi(x)] = -[i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + S^{\mu\nu}]\psi(x).$$

要想使得上述结果成立, 我们就必须按照对易方式量子化标量场, 而以反对易方式量子化旋量场。也就是说, 如果我们想让庞加莱对称性不出现量子反常, 则自旋-统计关联就必须得到满足。

(4) 外线规则：每个标量粒子贡献因子 1；每个初态旋量正粒子和反粒子分别贡献旋量因子 $u^s(\mathbf{p}), \bar{v}^s(\mathbf{p})$ ，每个末态旋量正粒子和反粒子分别贡献旋量因子 $\bar{u}^s(\mathbf{p}), v^s(\mathbf{p})$ ；每个初态或末态的矢量粒子分别贡献极化因子 $\varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}), \varepsilon_\mu^{\lambda*}(\mathbf{p})$ 。正粒子的动量方向与其运动方向相同，而反粒子的动量方向与其运动方向相反。也就是说，一个指向顶点的旋量外线可以代表一个入射的正粒子或出射的反粒子，而一个指离顶点的旋量外线可以代表一个入射的反粒子或出射的正粒子。

将两个旋量场或者两个矢量场收缩，我们得到自由矢量场或旋量场的费曼传播子

$$\overline{\psi_1 \psi_2} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \quad (6.482)$$

$$\overline{A_1^\mu A_2^\nu} = \int d^4 p \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, \quad (6.483)$$

这一结果与标量场的情况是类似的。于是我们得到粒子的内线规则：

(5) 内线规则：每个标量内线贡献因子 $i/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$ ，每个旋量内线贡献因子 $i/(\not{p} - m + i\varepsilon)$ ，每个矢量内线贡献因子 $-i\eta^{\mu\nu}/(p^2 + i\varepsilon)$ 。

每一个相互作用项在理论中贡献一个顶点，顶点所连接的线的个数与相互作用项中场的个数相同。一个稍特殊的情况是相互作用项中含有偏导数的情况。注意到偏导数项与编时乘积可交换

$$\langle 0 | T [\partial^\mu \phi(x) \phi^\dagger(x')] | 0 \rangle = \partial_x^\mu \langle 0 | T [\phi(x) \phi^\dagger(x')] | 0 \rangle, \quad (6.484)$$

因此对于指向相互作用顶点的动量 p 的粒子来说，时空偏导数 ∂^μ 在动量空间费曼规则里贡献一个 $-ip^\mu$ 因子

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \langle 0 | T [\phi(x) \phi^\dagger(x')] | 0 \rangle &= \partial_x^\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x')} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x')} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} (-ip^\mu). \end{aligned} \quad (6.485)$$

除此之外，如果这一顶点已排成了正规乘积，则同一顶点的内线不能连接于自身。因此我们得到顶点规则：

(6) 顶点规则：假设相互作用项是由 a 个标量场、 b 个旋量场、 c 个矢量场构成，则它所对应的顶点将连接 a 条标量线、 b 条旋量线、 c 条矢量线。并且这个顶点贡献一个因子，它等于 i 乘以这个顶点的耦合常数。图 6.13 中列举了几个常见的顶点。

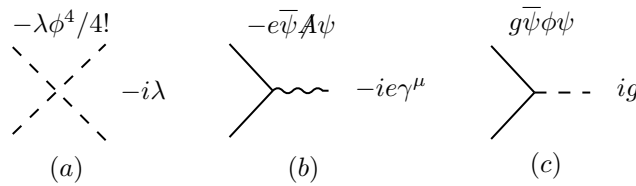


图 6.13: 费曼图中的 $\lambda\phi^4$ 顶点 (a)、量子电动力学顶点 (b) 以及汤川顶点 (c)。

由于振幅是一个数，因此对于每一个费米子圈来说，最终我们要对所有的旋量自由度首尾求和。设 Γ 是任意一个旋量矩阵，则我们有

$$\bar{\psi}\Gamma\psi = -\text{Tr}[\Gamma\psi\bar{\psi}]. \quad (6.486)$$

在这一过程中交换了旋量场的顺序，因此产生了额外的负号。因此我们得到费米子圈所满足的费曼规则：

(7) 对于每一个由费米子内线组成的圈，要沿费米子线将一系列的矩阵顺次相乘，并额外求迹 $-\text{Tr}$ 。

由于费米子的反对易性质，若我们考虑旋量场的维克定理，则每一个收缩项会多出一些正负因子，这是因为在收缩的时候需要对旋量场交换顺序，而每交换一次顺序都会产生一个符号。若

交换粒子的外线，则意味着交换了一对收缩的末端，其中一个收缩将会额外跨过一个旋量场，由此产生了一个额外的负号。由于可观测量仅仅是散射振幅的模方，因此振幅本身的符号是无足轻重的。但是，两张不同的图之间的相对符号仍然有可观测的效果。因此我们得到如下的费曼规则：

(8) 如果两张图相差一个旋量场的外线交换，则它们的散射振幅之间相差一个负号。

如果费曼图具有某种内部对称性，则应当在振幅中乘以某些对称因子。对称因子的主要计算规则为：如果一个传播子首尾连在一个顶点上，那么首尾交换后不变，额外贡献对称因子 $1/2$ ；如果两个点之间连着 n 个全同传播子，那么交换这些传播子不改变图形，这额外贡献对称因子 $1/n!$ ；如果图形具有一个 n 阶旋转对称轴，那么可以交换这些顶点不改变图形，这个轴额外贡献对称因子 $1/n!$ ；如果图形具有一个反射对称轴，那么交换对称轴的两边不会改变图形，这个轴额外贡献一个因子 $1/2$ 。需要注意的是，这些对称性是需要固定在固定外线的条件下成立的。因此我们得到对称因子的计算规则：

(9) 根据费曼图的对称性质为每张图乘以一个对称因子。

总的贡献是所有微扰项的贡献之和，因此我们得到：

(10) 将上述所有结果乘起来，即得到费曼图所对应的散射振幅 $i\mathcal{M}$ 。

(11) 将所有图的贡献加起来，我们就得到了总的散射振幅。

利用上述费曼规则，我们就可以一般性地讨论含有旋量场和矢量场的相互作用微扰场论。

6.6 量子电动力学

前面我们对 $\lambda\phi^4$ 相互作用场论进行了一些初步的探讨。从这个简单的例子之中，我们看到了处理微扰相互作用场论的基本方法。有了这个例子之后，我们就可以着手去研究那些更加复杂的相互作用场论了。

在经典场论中，电磁效应是通过带电粒子与电磁场的相互作用而得到的。在量子场论中，带电粒子被量子化为旋量场，而电磁场被量子化为矢量场。因此，这种电磁相互作用将通过旋量场与矢量场的耦合得到，体现在物理上就是自旋为 $1/2$ 的带电粒子和自旋为 1 的光子的相互作用。

这个相互作用的形式是什么呢？我们发现它恰好就是具有 $U(1)$ 规范对称性的旋量场

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{\text{EM}}} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}.\end{aligned}\quad (6.487)$$

其中相互作用项可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\mathbf{A}\psi. \quad (6.488)$$

换句话说，将代表电子的旋量场的对称性由全局 $U(1)$ 对称性扩展到局域 $U(1)$ 规范对称性，我们将自然而然地引入一个规范场 A^μ 。这个规范场恰好对应于光子场，并且它的相互作用形式恰好与电磁相互作用的形式相吻合。我们把这个相互作用理论称为量子电动力学 (QED)，它将给出量子层面电磁相互作用的描述。

现在让我们来考虑电子-质子散射过程 $e^- + p \rightarrow e^- + p$ ，它可以用量子电动力学来描述。假设一个动量为 p_1 的电子与一个动量为 p_2 的质子发生相互作用，散射成为一个动量为 p_3 的电子与一个动量为 p_4 的质子。我们画出这两个粒子之间相互作用最低阶的费曼图，如图 6.14 所示。直观地来看，我们可以将这个过程视为电子和质子通过交换光子而改变了它们之间的动量。根据

费曼规则，我们可以直接写出这个相互作用的振幅⁴²

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2 + i\varepsilon} \bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma^\nu u(\mathbf{p}_2). \quad (6.489)$$

式中我们已经略去了各个粒子的旋量指标 s, s' 等。这个过程被称为卢瑟福 (Rutherford) 散射。

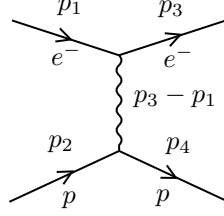


图 6.14: 电子-质子散射的最低阶费曼图。

前面我们讨论了散射振幅的计算方法，但实际上散射振幅是不能够在实验中直接观测到的。那么，我们在实验上能够观测到的量是什么呢？要想回答这个问题，我们需要先了解粒子物理的实验是什么样的。要想看到量子场论的效应，我们通常需要很高的能量，而要想产生极高能量的最好方法就是依靠粒子加速器。⁴³ 我们将两束带电粒子加速到接近光速的地步，然后让它们相向而行，发生对撞。在这个过程中，粒子之间发生了复杂的相互作用，生成的新粒子将沿着各个不同的方向继续前进。这些粒子在空间中运动一段时间后，将被加速器中的探测器接收到。因此，在粒子物理实验中，我们能够观测到的，仅仅是两束粒子发生对撞，然后散射出了一系列粒子而已。我们能够探测到各出射粒子的动量，但是对于碰撞过程中所发生的细节，我们是完全不知道的。

假设我们使用一束速度为 v ，粒子数密度为 ρ 的粒子轰击一个固定靶，在时间 T 内观测到有 N 个粒子发生了散射，那么我们可以定义该过程的总散射截面 σ ⁴⁴ 为

$$\sigma = \frac{N}{Tv\rho}, \quad (6.490)$$

这是一个可观测量。如果我们在这一段时间内观测到产生了 n 个粒子、且这 n 个粒子的动量分别处于区间 $d^3p_1 \dots d^3p_n$ 的事件数为 dN ，那么我们可以定义微分散射截面⁴⁵

$$\frac{d\sigma}{d^3p_i} = \frac{1}{Tv\rho} \frac{dN}{d^3p_i}, \quad (6.491)$$

这同样是一个可观测量。由于截面是洛伦兹不变的，因此上述表达式并不仅限于固定靶的情况。对于特定的碰撞过程来说，将上述表达式计算出来，我们就得到了微分散射截面的公式。特别地，如果末态粒子为两粒子，且散射前后所有粒子的质量都相等，那么在质心系中，微分散射截面将可以简单地表示为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} |\mathcal{M}|^2, \quad (6.492)$$

式中 $d\Omega$ 为立体角微元， E_{CM} 为质心系能量。上述结果的推导详见附录 B.8。

⁴²更严格地说，电子-质子散射中出现了两种旋量场，它们分别是质量为 m_e 的电子场 ψ_e ，以及质量为 m_p 的质子场 ψ_p 。这里我们已将质子视为一个点粒子，用旋量场来表示。系统的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_p (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_p) \psi_p + \bar{\psi}_e (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) \psi_e - e\bar{\psi}_p \gamma^\mu A_\mu \psi_p - e\bar{\psi}_e \gamma^\mu A_\mu \psi_e.$$

基矢 $u(\mathbf{p}_1), \bar{u}(\mathbf{p}_3)$ 实际上是质量为 m_e 的电子场的基矢，而 $u(\mathbf{p}_2), \bar{u}(\mathbf{p}_4)$ 实际上是质量为 m_p 的质子场的基矢。在计算卢瑟福散射的振幅时，我们将明显地看到具有不同质量的旋量基矢之间的差别。

⁴³实际上并不是所有的量子场论效应都需要很高的能量。兰姆移位和电子反常磁矩都体现了量子场论效应，而它们仅仅是通常能标下的物理现象。除此之外，也并不是所有高能下的物理过程都只能利用加速器来得到，宇宙射线、中子星、早期宇宙等都可以为我们提供极高的能量。不过至今为止探测量子场论效应最有效的手段还是利用粒子物理加速器。

⁴⁴我们之所以将这个量称为散射截面，是因为它具有面积量纲。类似地，我们将单个粒子衰变为多个粒子的对应量称为衰变宽度，这是因为这个量具有长度量纲。

⁴⁵这个微分散射截面不应当被视为导数，因为总散射截面并非动量的函数。它应当被视为某种“密度”或者“分布”，也就是一个散射截面的微元除以一个动量空间的微元。

由此我们可以看到,微分散射截面正比于散射振幅的模平方,这才是一个可观测量。⁴⁶ 在实际的计算中,我们通常不考虑粒子极化和自旋的取向问题,因此我们要将计算的结果对初态光子极化和电子自旋求和、对末态光子极化和电子自旋求平均。在这样的一种意义下求平均之后,我们可以求出卢瑟福散射的散射振幅模平方

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2} (p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34} - m_p^2 p_{13} - m_e^2 p_{24} + 2m_e^2 m_p^2), \quad (6.493)$$

式中 $p_{ij} = p_i \cdot p_j$, 而 $t = (p_1 - p_3)^2$ 。在质子质量远大于电子质量且入射电子速度远小于光速的情况下,卢瑟福散射的微分散射截面可以近似地表示为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 m_e^2}{64\pi^2 p^4 \sin^4(\theta/2)}, \quad (6.494)$$

式中 θ 为初态电子动量和末态电子动量的夹角,这个结果被称为卢瑟福公式,上述结果的推导详见附录 B.9。由此我们给出了利用量子场论来计算散射截面的方法,它可以直接通过实验来进行测量。

我们接下来讨论量子电动力学的重整化。在四维时空中,作用量与拉格朗日密度的量纲分别为

$$[S] = 0, \quad [\mathcal{L}] = 4, \quad (6.495)$$

因此我们得到

$$[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi] = [m\bar{\psi}\psi] = [F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = [e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi] = 4. \quad (6.496)$$

从中我们可以求解出旋量场、矢量场的量纲

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2}, \quad [A^\mu] = [A_\mu] = 1, \quad (6.497)$$

进而可以得到耦合常数 e 的量纲

$$[e] = 0. \quad (6.498)$$

这是一个无量纲量,因此量子电动力学是临界可重整的。

根据量纲分析可知,如果耦合常数的量纲为零,那么费曼图的表现发散度将仅仅与外线的数量有关。如果一个费曼图中的光子外线数量为 B , 电子外线为 F , 那么该费曼图的表现发散度可以表示为

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F. \quad (6.499)$$

由于外线数量越多,费曼图的表现收敛度就越高,因此量子电动力学中只有有限的几种费曼图是发散的。若费曼图中仅有两条光子外线,则费曼图的表现发散度为 $D = 2$ 。这对应于如图 6.15 (a) 所示的真空极化图,我们将其振幅记为 $iD^{\mu\nu}(p^2)$ 。若费曼图中仅有两条电子外线,则费曼图的表现发散度为 $D = 1$ 。这对应于如图 6.15 (b) 所示的电子自能图,我们将其振幅记为 $iS(p)$ 。若费曼图中包含两条电子外线和一条光子外线,则费曼图的表现发散度为 $D = 0$ 。这对应于如图 6.15 (c) 所示的顶点修正图,我们将其振幅记为 $-ie\Gamma^\mu(p^2)$ 。

若费曼图中包含四条光子外线,则费曼图的表现发散度为 $D = 0$, 这对应于四光子散射图。但由于对称性的缘故,四光子散射图实际上是收敛的。证明这一结果需要利用瓦德-高桥恒等式,详见附录 B.10。由于量子电动力学满足电荷共轭不变性,而光子的电荷共轭宇称为 $C = -1$, 因此若对仅含奇数个光子外线的图取电荷共轭(即反转所有电子线),则所得到的新图的贡献恰好与原图相反。这意味着所有仅含奇数个光子外线的图的贡献之和为零,这一结果被称为法雷(Furry)定理。因此,这一结果排除了单光子顶点图和三光子顶点图的贡献。除此之外的所有费曼图都是表现收敛的,因此我们看到,量子电动力学中仅仅存在三种发散的费曼图,如图 6.15 所示。

⁴⁶有作者认为,散射截面是场论中唯一的可观测量,其他的可观测量本质上都是从散射截面的数据中提取出来的。这一说法可能是不准确的。例如,电子的反常磁矩是一个场论中的可观测量,它对应于电磁相互作用顶点的圈图效应。它可以通过电子在磁场中的拉莫尔(Larmor)进动效应进行测量,而并不一定需要通过某一个具体的散射过程的截面得到。

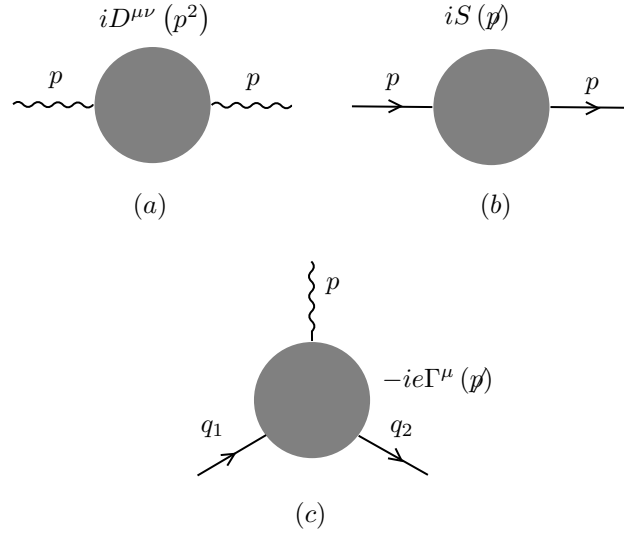


图 6.15: 量子电动力学中的表观发散图, 分别为 (a) 真空极化, (b) 电子自能, (c) 顶点修正。

在链近似下, 我们可以将电子传播子 $iS(p)$ 表示为一系列单粒子不可约自能图 $i\Sigma(p)$ 的串联, 如图 6.16 (a) 所示。在链近似下, 电子传播子可以表示为

$$iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(p) + i\varepsilon}. \quad (6.500)$$

对于光子传播子 $iD^{\mu\nu}(p^2)$ 来说, 我们同样可以将其表示为一系列单粒子不可约图 $i\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ 的串联, 如图 6.16 (b) 所示。我们首先要将 $i\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ 中的张量部分和标量部分分离开来

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = i\Delta^{\mu\nu} p^2 \Pi(p^2), \quad (6.501)$$

其中张量部分为

$$\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}. \quad (6.502)$$

因此, 链近似下光子传播子可以表示为

$$iD^{\mu\nu}(p^2) = \frac{i\Delta^{\mu\nu}}{p^2(1 - \Pi(p^2)) + i\varepsilon}. \quad (6.503)$$

由此我们看到, 虽然 $\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ 是表观二次发散的, 但 $\Pi(p^2)$ 的发散度已被降为了对数发散。⁴⁷ 类似地, 我们可以将顶点修正 $\Gamma^\mu(p^2)$ 表示为

$$\Gamma^\mu(p^2) = F_1(p^2)\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2(p^2), \quad (6.504)$$

式中 $F_1(p^2)$ 和 $F_2(p^2)$ 是两个标量函数。这里计算出的振幅均为裸振幅。上述结果对于任意圈都是成立的, 其推导详见附录 B.11。

我们在实验上观测到电子具有重整化质量 m_R , 光子质量仍然为零, 并且我们希望在动量为零时的顶点函数为 $i\gamma^\mu$ 。因此, 实验上我们采用如下条件对振幅进行定标

$$iS(p) \sim \frac{i}{\not{p} - m_R}, \quad (\not{p} \rightarrow m_R), \quad (6.505)$$

$$iD^{\mu\nu}(p^2) \sim \frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}, \quad (p^2 \rightarrow 0), \quad (6.506)$$

$$-ie\Gamma^\mu(p^2) \sim -ie\gamma^\mu, \quad (p^2 \rightarrow 0). \quad (6.507)$$

这里的振幅均为物理振幅。由此我们得到了如下的重整化条件

$$\Sigma(m_R) = 0, \quad \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(p) \right|_{\not{p} = m_R} = 0, \quad (6.508)$$

⁴⁷ 实际上在量子电动力学中, 电子自能的真实发散度也是对数发散。通过恰当积分变量平移变换, 我们可以证明线性发散项的贡献为零, 因此电子自能仅为对数发散。

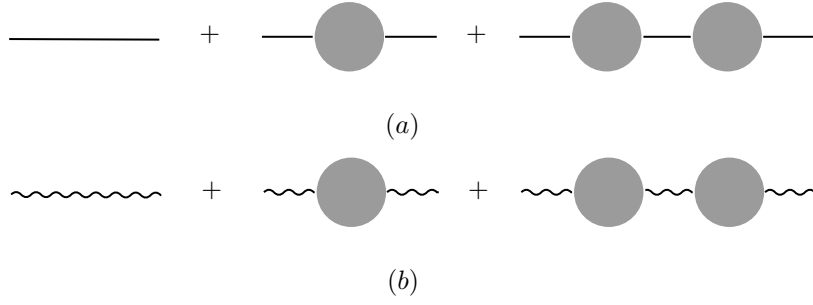


图 6.16: 单粒子不可约图串联得到总振幅, (a) 电子自能, (b) 真空极化。图中灰色的圈代表 • 所有单粒子不可约图的贡献。

$$F_1(0) = 1, \quad \Pi(0) = 0. \quad (6.509)$$

要想使得圈积分满足上述条件, 我们需要使得理论中的裸场和裸参数发散, 以将圈积分中发散的部分抵消掉。量子电动力学的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_0\partial\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0\mathbf{A}_0\psi_0, \quad (6.510)$$

式中各量均为裸量。要想完成重整化, 我们需要写出各个裸量和重整化参量之间的变换关系

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi_R, \quad A_0^\mu = \sqrt{Z_3}A_R^\mu, \quad (6.511)$$

$$m_0 = Z_m m_R, \quad e_0 = Z_e e_R, \quad (6.512)$$

式中角标为零的量均为裸量, 而角标为 R 的量均为重整化参量。并且我们额外定义一个重整化参数

$$Z_1 = Z_e Z_2 \sqrt{Z_3}. \quad (6.513)$$

这样, 我们就可以将拉格朗日密度用重整化场和重整化参量表示出来

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}Z_3 F_{R\mu\nu}F_R^{\mu\nu} + iZ_2\bar{\psi}_R\partial\psi_R - Z_2Z_m m_R\bar{\psi}_R\psi_R - Z_1 e_R\bar{\psi}_R\mathbf{A}_R\psi_R \\ &= -\frac{1}{4}F_{R\mu\nu}F_R^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_R\partial\psi_R - m_R\bar{\psi}_R\psi_R - e_R\bar{\psi}_R\mathbf{A}_R\psi_R \\ &\quad -\frac{1}{4}\delta_3 F_{R\mu\nu}F_R^{\mu\nu} + i\delta_2\bar{\psi}_R\partial\psi_R - (\delta_m + \delta_2)m_R\bar{\psi}_R\psi_R - e_p\delta_1\bar{\psi}_R\mathbf{A}_R\psi_R, \end{aligned} \quad (6.514)$$

式中

$$Z_1 = 1 + \delta_1, \quad Z_2 = 1 + \delta_2, \quad Z_3 = 1 + \delta_3, \quad Z_m = 1 + \delta_m. \quad (6.515)$$

上式中第一行代表用重整化参量写出的拉格朗日密度, 第二行代表各个抵消项, 抵消项的费曼规则如图 6.17 所示。圈积分是发散的, 抵消项也是发散的, 但是二者之和会将所有的发散项抵消掉, 最终只剩下有限的振幅。

我们将量子电动力学中发散的圈积分展开为

$$F_1(p^2) = F_1(0) + \tilde{F}_1(p^2), \quad (6.516)$$

$$\Pi(p^2) = \Pi(0) + \tilde{\Pi}(p^2), \quad (6.517)$$

$$\Sigma(p) = \Sigma(m_R) + (\not{p} - m_R)\tilde{\Sigma}'(m_R) + \tilde{\Sigma}(\not{p}), \quad (6.518)$$

$$F_2(p^2) = \tilde{F}_2(p^2), \quad (6.519)$$

式中 $\tilde{F}_1(p^2), \tilde{\Pi}(p^2), \tilde{\Sigma}(\not{p}), \tilde{F}_2(p^2)$ 是有限的, 且满足

$$\tilde{F}_1(0) = 0, \quad \tilde{\Pi}(0) = 0, \quad \tilde{\Sigma}(m_p) = \tilde{\Sigma}'(m_p) = 0, \quad (6.520)$$

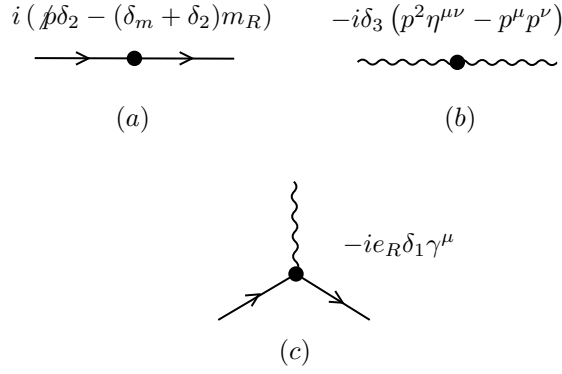


图 6.17: 量子电动力学抵消项的费曼规则, 分别为 (a) 电子自能, (b) 真空极化, (c) 顶点修正。

其余部分是发散的。在这里我们采用重整化微扰论的视角, 利用重整化参数计算出所有的振幅, 然后引入适当的抵消项消除圈积分中的无穷大。在引入链近似下的抵消项后, 完整的传播子和顶点函数将可以表示为

$$iS(p) = \frac{i}{p' - m_R + \Sigma(p) + p\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m_R + i\varepsilon}, \quad (6.521)$$

$$iD^{\mu\nu}(p^2) = \frac{i\Delta^{\mu\nu}}{p^2(1 - \Pi(p^2) + \delta_3) + i\varepsilon}, \quad (6.522)$$

$$\Gamma^\mu(p^2) = [F_1(p^2) + \delta_1]\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_R}p_\nu F_2(p^2). \quad (6.523)$$

重整化条件要求圈积分与抵消项的贡献之和应当满足

$$\Sigma(p) + p\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m_R = \tilde{\Sigma}(p), \quad (6.524)$$

$$F_1(p^2) + \delta_1 = 1 + \tilde{F}_1(p^2), \quad (6.525)$$

$$\Pi(p^2) - \delta_3 = \tilde{\Pi}(p^2). \quad (6.526)$$

这意味着

$$\Sigma(m_R) + (p' - m_R)\Sigma'(m_R) + \tilde{\Sigma}(p) + p\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m_R = \tilde{\Sigma}(p), \quad (6.527)$$

$$F_1(0) + \tilde{F}_1(p^2) + \delta_1 = 1 + \tilde{F}_1(p^2), \quad (6.528)$$

$$\Pi(0) + \tilde{\Pi}(p^2) - \delta_3 = \tilde{\Pi}(p^2). \quad (6.529)$$

利用上述各式, 我们可以求出抵消项的取值为

$$\delta_1 = 1 - F_1(0), \quad \delta_2 = -\Sigma'(m_R), \quad (6.530)$$

$$\delta_m = \frac{1}{m_R}\Sigma(m_R), \quad \delta_3 = \Pi(0). \quad (6.531)$$

余下的有限项将给出传播子和顶点的圈图修正

$$iS(p) = \frac{i}{p' - m_R + \tilde{\Sigma}(p) + i\varepsilon}, \quad (6.532)$$

$$iD^{\mu\nu}(p^2) = \frac{i\Delta^{\mu\nu}}{p^2(1 - \tilde{\Pi}(p^2)) + i\varepsilon}, \quad (6.533)$$

$$\Gamma^\mu(p^2) = [1 + \tilde{F}_1(p^2)]\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_R}p_\nu \tilde{F}_2(p^2), \quad (6.534)$$

将振幅中的发散部分计算出来, 我们就得到了抵消项的取值。在单圈图的层面上, 我们需要考虑如图 6.18 所示的三个发散图, 它们所对应的圈积分分别为

$$i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p-k)^2 + i\varepsilon}, \quad (6.535)$$

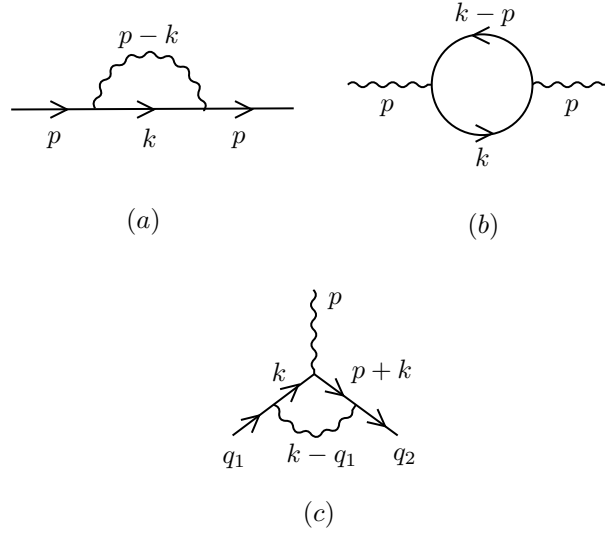


图 6.18: 量子电动力学的单圈发散图, 它们分别代表电子自能 (a)、真空极化 (b) 和顶点修正 (c)。

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - \not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \right], \quad (6.536)$$

$$-ie\Gamma^\mu(p^2) = (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta_{\nu\alpha}}{(k - q_1)^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \times \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\alpha, \quad (6.537)$$

式中各量均为有限的重整化参量。接下来我们要采用恰当的正规化方法, 将这些圈积分计算出来。

在计算 $\lambda\phi^4$ 理论正规化的时候, 我们采用的是泡利-维拉斯正规化的方法, 即从理论中减去一个具有巨大质量的传播子来压低紫外区间的发散。这是一个相对直观的做法, 但是它并非我们的最佳选择。一个更加恰当的做法是使用维数正规化方法来处理发散的积分。特别是若我们考虑非阿贝尔规范场论, 则泡利-维拉斯正规化将不再适用, 因为这个方法会破坏掉理论的规范对称性。此时维数正规化可以同时保持洛伦兹不变性和规范对称性, 因此它是我们的最佳选择。⁴⁸

以对数发散的圈积分为例, 我们注意到发散的原因是由于被积函数为 $1/k^4$, 而积分体积元为 k^4 。如果我们想让这个积分收敛, 那么我们不仅可以增大分母的幂次, 也可以试图降低被积时空的维数。举例来说, 假如我们在某种意义下对整个时空作 d 维的积分, 那么积分之后的结果将变为

$$\Gamma(d) \sim \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4}. \quad (6.538)$$

⁴⁸ 尽管有作者宣称维数正规化是**唯一**可以同时保持洛伦兹不变性和(非阿贝尔)规范对称性的正规化方法, 但实际上确实有其他的正规化方法可以做到这一点。考虑在非阿贝尔规范场论中引入高阶导数项

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left[F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} (D^2 F_{\mu\nu}^a) (D^2 F^{a\mu\nu}) \right] - \frac{1}{2\xi} [f(\Box) \partial^\mu A_a^\alpha]^2,$$

式中 D 为协变导数, $f(\Box)$ 是规范固定项。这一理论的规范场传播子为

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = -i\delta^{ab} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{p^2 (1 + \Lambda^{-4} p^4)} + \frac{\xi}{p^2 f^2(-p^2)} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right].$$

取 $f(-p^2) = 1 + p^2/\Lambda_L^2$, 则 $D_{\mu\nu}^{ab}(p) \sim p^{-6}$, 因此费曼图的发散程度将大大降低。对于余下的发散图, 采用泡利-维拉斯正规化方法进行恰当的处理即可。

这里的时空维数 d 不必为正整数。令 $\varepsilon = 4 - d$ ，在 $\varepsilon > 0$ 的情况下，这个积分是收敛的。事实上，不论圈积分的发散度如何，只要积分的维度 $\varepsilon \notin \mathbb{Z}$ ，那么这些圈积分都将是非奇异的。在改变时空维数的过程中，量纲发生了变化，因此我们需要额外引入一个具有动量量纲的参数 μ 来平衡量纲。一般地，在维数正规化下，我们所做的代换为

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \quad (6.539)$$

在进行这样一种正规化之后，在非整数维度的情况下，积分将是有限的，而在 $\varepsilon = d - 4 \rightarrow 0$ 的极限下，积分中的发散部分将以 ε 极点形式分离出来。

我们应当如何理解这样一个 d 维的积分呢？我们已经知道了 $\Gamma(d)$ 在 d 为整数的时候是有良好定义的，它实际上就是普通的积分。现在所谓非整数维的积分，实际上就是将 $\Gamma(d)$ 的自变量（即空间维数 d ）解析延拓到整个复平面上。换句话说，我们需要找到一个函数，它在整个复平面上是解析的，而在 d 为整数的情况下又回到通常的 $\Gamma(d)$ 的定义。⁴⁹ 将这个解析延拓恰当地写出来，我们就实现了圈积分的正规化。在大多数的情况下，我们在复分析的意义上将积分中的时空维数从 4 直接替换为 d 就可以完成这个正规化。⁵⁰

接下来我们将采用维数正规化方法来计算量子电动力学的单圈正规化。我们首先来计算顶点函数的单圈修正，它所对应的圈积分为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^\mu &= -ie\bar{u}(\mathbf{q}_2)\Gamma^\mu u(\mathbf{q}_1) \\ &= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta_{\nu\alpha}}{(k - q_1)^2 + i\varepsilon} \bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma^\nu \\ &\quad \times \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha u(\mathbf{q}_1) \\ &= -e^3 \bar{u}(\mathbf{q}_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu}{[(k - q_1)^2 + i\varepsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon][k^2 - m^2 + i\varepsilon]} u(\mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (6.541)$$

利用费曼参数化公式，我们可以将积分中的所有分母合并为一个

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k - q_1)^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{1}{[(k + yp - zq_1)^2 - \Delta + i\varepsilon]^3} \end{aligned} \quad (6.542)$$

式中

$$\Delta = -xyp^2 + (1 - z)^2 m^2. \quad (6.543)$$

由于对 k 的积分是对全时空进行的，因此作代换

$$k^\mu \rightarrow k^\mu - yp^\mu + zq_1^\mu, \quad (6.544)$$

上述积分将简化为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k - q_1)^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{1}{[k^2 - \Delta + i\varepsilon]^3}. \end{aligned} \quad (6.545)$$

⁴⁹在复平面上存在着许多条不同的路径可以定义导数。如果某点处的所有路径所对应的导数存在且相等，则我们说复变函数在该点是解析的。将复数表示为 $z = x + iy$ ，复变函数表示为 $f = u(x, y) + iv(x, y)$ ，这里 x, y, u, v 均为实数或实函数。若 f 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.540)$$

则 f 为解析函数，这被称为柯西 (Cauchy)-黎曼方程。我们也可以将 f 表示为 z, z^* 的函数 $f(z, z^*)$ 。我们还可以证明，若函数 f 仅是 z 的函数，即 $\partial f / \partial z^* = 0$ ，则 f 同样是解析的。

⁵⁰一个稍特殊的情况是对 γ 矩阵的处理。在维数正规化下，我们仍可以选取 4 个不同的 γ 矩阵满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$ 来作为 γ 矩阵的定义，而无需对时空维数本身进行延拓。为进行正规化，我们只需要将出现在 γ 矩阵乘积以及各求迹公式中的时空维数从 4 替换为 d 即可。但 γ^5 矩阵在进行延拓的过程中会产生矛盾，这与手征反常相关，我们在此不做更深入的讨论。

圈积分的分子为

$$\begin{aligned} N^\mu &= \bar{u}(\mathbf{q}_2) \gamma^\nu (\not{p}' + \not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k}' + m) \gamma_\nu u(\mathbf{q}_1) \\ &= -2\bar{u}(\mathbf{q}_2) [\not{k}' \gamma^\mu \not{p}' + \not{k}' \gamma^\mu \not{k}' + m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu + p^\mu)] u(\mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (6.546)$$

作代换 $k^\mu \rightarrow k^\mu - yp^\mu + zq_1^\mu$, 我们得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N^\mu &= \bar{u}(\mathbf{q}_2) [(\not{k}' - y\not{p}' + z\not{q}_1') \gamma^\mu \not{p}' + (\not{k}' - y\not{p}' + z\not{q}_1') \gamma^\mu (\not{k}' - y\not{p}' + z\not{q}_1')] u(\mathbf{q}_1) \\ &\quad + \bar{u}(\mathbf{q}_2) [m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu - 2yp^\mu + 2zq_1^\mu + p^\mu)] u(\mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (6.547)$$

利用戈登恒等式, 我们得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N^\mu &= \left[-\frac{1}{2}k^2 + (1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right] \bar{u}(\mathbf{q}_2) \gamma^\mu u(\mathbf{q}_1) \\ &\quad + imz(1-z)p_\nu \bar{u}(\mathbf{q}_2) \sigma^{\mu\nu} u(\mathbf{q}_1) \\ &\quad + m(z-2)(x-y)p^\mu \bar{u}(\mathbf{q}_2) u(\mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (6.548)$$

若考虑到瓦德-高桥恒等式, 则上式可以进一步进行简化。

将之与顶点函数的一般表达式相比较, 我们得到形状因子 F_2 准至单圈的表达式

$$\begin{aligned} F_2(p^2) &= \frac{2m}{e} (4ie^3 m) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{z(1-z)}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}, \end{aligned} \quad (6.549)$$

这个积分是收敛的。利用维克转动将关于 k 的积分计算出来, 我们得到

$$F_2(p^2) = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xyp^2}. \quad (6.550)$$

特别地, 在 $p^2 = 0$ 时我们有

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \delta(x+y+z-1) \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (6.551)$$

这一结果与电子的反常磁矩密切相关。

对于另一个形状因子 F_1 来说, 我们定义 $f(p^2)$ 的表达式为

$$F_1(p^2) = 1 + f(p^2), \quad (6.552)$$

这样重整化条件将使得 $f(0) = 0$ 。 $f(p^2)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} f(p^2) &= -2ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \frac{k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}, \end{aligned} \quad (6.553)$$

式中

$$\Delta = -xyp^2 + (1-z)^2 m^2. \quad (6.554)$$

这个积分是发散的。

如果传播子的质量 $m^2 = 0$, 则圈积分在动量 k^2 很小的区域内也有可能是发散的, 这被称为红外发散。为处理理论中的红外发散, 我们可以令光子具有一个非常微小但是不为零的质量, 在计算的最后令这个质量趋于零, 从而将发散项从圈积分中分离出来。⁵¹ 由于积分中存在红外

⁵¹ 红外发散并不能够用重整化方法抵消, 而是应当利用末态软光子辐射过程消除掉。我们在此不打算详细地讨论红外发散的细节。

发散，因此我们需要为光子赋予一个小质量 m_γ 。在加入光子质量后，积分中的 Δ 项变为

$$\Delta = (1-z)^2 m^2 - xyp^2 + zm_\gamma^2. \quad (6.555)$$

在维数正规化下， $f(p^2)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} f(p^2) = & -2ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ & \times \frac{(2-4/d)k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}. \end{aligned} \quad (6.556)$$

上式中 k^2 项是紫外发散的，它的结果为

$$\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-4/d)k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \mu^{4-d} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(2-4/d)d/4}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right). \quad (6.557)$$

注意到在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限下，我们有

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (6.558)$$

式中 $\gamma_E = 0.577\dots$ 为欧拉常数，因此圈积分中发散部分的渐进表达式为

$$\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-4/d)k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} - 1 \right), \quad (6.559)$$

式中 $\tilde{\mu}^2 = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2$ 。其余部分为紫外收敛（而红外发散）的，因此我们可以简单地取 $d=4$ 将积分计算出来

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \\ & = i \frac{p^2(1-x)(1-y) + m^2(1-4z+z^2)}{16\pi^2 \Delta}. \end{aligned} \quad (6.560)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} f(p^2) = & \frac{e^2}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \right. \\ & \times \left. \left(\frac{p^2(1-x)(1-y) + m^2(1-4z+z^2)}{\Delta} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.561)$$

特别地，在 $p^2 = 0$ 处，我们有

$$\begin{aligned} f(0) = & \frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + \int_0^1 dz(1-z) \left[\frac{m^2(1-4z+z^2)}{(1-z)^2 m^2 + zm_\gamma^2} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{(1-z)^2 m^2 + zm_\gamma^2} \right] \right) \\ = & \frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} + \frac{5}{2} + \ln \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (6.562)$$

这样我们就完成了顶点修正的单圈正规化。

为了让顶点函数收敛，我们需要引入一个抵消项 δ_1 来消除掉积分中出现的无穷大。顶点修正的重整化条件为

$$\Gamma^\mu(0) = \gamma^\mu, \quad (6.563)$$

因此抵消项要把圈图中 $f(0)$ 的效应消去，即

$$\delta_1 = -f(0). \quad (6.564)$$

将这个结果与维数正规化方法相比较，我们得到抵消项的取值为

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} + \frac{5}{2} + \ln \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right). \quad (6.565)$$

这样我们就完成了顶点修正的单圈重整化。

接下来我们计算电子自能的单圈修正

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) = & (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p-k)^2 + i\varepsilon} \\ = & (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{-i}{(k-p)^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.566)$$

根据费曼参数化公式, 我们得到

$$i\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2\not{k} - 4m}{[(k^2 - m^2)(1-x) + (p-k)^2 x + i\varepsilon]^2}. \quad (6.567)$$

作代换 $k \rightarrow k + px$, 结果为

$$i\Sigma(p) = 2e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{x\not{p} - 2m}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}, \quad (6.568)$$

式中

$$\Delta = (1-x)(m^2 - p^2 x). \quad (6.569)$$

在维数正规化下, 真空极化的圈积分表示为

$$i\Sigma(p) = 2e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx (x\not{p} - 2m) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}. \quad (6.570)$$

将这个积分计算出来, 我们得到

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi} \int_0^1 dx (x\not{p} - 2m) \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right). \quad (6.571)$$

如果我们进一步假设光子有一个微小的质量 m_γ , 那么圈积分分母中的 Δ 的取值为

$$\Delta = (1-x)(m^2 - p^2 x) + xm_\gamma, \quad (6.572)$$

此时电子自能积分将变为

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi} \int_0^1 dx (x\not{p} - 2m) \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x) + xm_\gamma^2} \right). \quad (6.573)$$

这样我们就完成了电子自能的单圈正规化。

电子自能的重整化条件为

$$\Sigma(m) = 0, \quad \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(p) \right|_{\not{p}=m} = 0, \quad (6.574)$$

因此抵消项应当满足

$$\delta_2 = - \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(p) \right|_{\not{p}=m}, \quad \delta_m = \frac{1}{m} \Sigma(m). \quad (6.575)$$

将上述条件与维数正规化的结果相比较, 我们得到抵消项的取值为

$$\delta_2 = - \frac{e^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} + \frac{5}{2} + \ln \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right), \quad (6.576)$$

$$\delta_m = - \frac{e^2}{8\pi} \left(\frac{3}{\varepsilon} + \frac{3}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} + \frac{5}{2} \right). \quad (6.577)$$

这样我们就完成了电子自能的单圈重整化。

最后我们计算真空极化的单圈修正

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p^2) &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - \not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \right] \\ &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p-k)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \\ &\quad \times \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)]. \end{aligned} \quad (6.578)$$

注意到

$$\begin{aligned} &\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)] \\ &= 4 [-p^\mu k^\nu - k^\mu p^\nu + 2k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} (-k^2 + p \cdot k + m^2)], \end{aligned} \quad (6.579)$$

因此我们得到

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} (-k^2 + p \cdot k + m^2)}{[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon][k^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \quad (6.580)$$

作代换 $k \rightarrow k + p(1-x)$ 并略去所有的 p^μ, p^ν 项, 我们得到

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{2k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu}[k^2 - x(1-x)p^2 - m^2]}{k^2 + p^2x(1-x) - m^2}. \quad (6.581)$$

在维数正规化下, 真空极化的圈积分表示为

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -4e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{2k^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu}[k^2 - x(1-x)p^2 - m^2]}{k^2 + p^2x(1-x) - m^2}. \quad (6.582)$$

将这个积分计算出来, 我们得到

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} (p^2 \eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \mu^{4-d} \\ &\quad \times \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{1}{m^2 - p^2x(1-x)}\right)^{2-\frac{d}{2}}, \end{aligned} \quad (6.583)$$

因此

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) &= -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \mu^{4-d} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{1}{m^2 - p^2x(1-x)}\right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &= -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2x(1-x)}\right) + O(\varepsilon)\right]. \end{aligned} \quad (6.584)$$

这样我们就完成了真空极化的单圈正规化。

真空极化的重整化条件为

$$\Pi(0) = 0, \quad (6.585)$$

因此抵消项应当满足

$$\delta_3 = \Pi(0). \quad (6.586)$$

将上述条件与维数正规化的结果相比较, 我们得到抵消项的取值为

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2}\right). \quad (6.587)$$

这样我们就完成了真空极化的单圈重整化。

至此我们已经利用维数正规化方法得到了量子电动力学单圈重整化的全部结果, 并求出了所有准至单圈的抵消项系数⁵²

$$\delta_1 = \delta_2 = -\frac{e_R^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2} + \frac{5}{2} + \ln \frac{m_\gamma^2}{m_R^2}\right), \quad (6.588)$$

$$\delta_3 = -\frac{e_R^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2}\right) \quad (6.589)$$

$$\delta_m = -\frac{e_R^2}{8\pi} \left(\frac{3}{\varepsilon} + \frac{3}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_R^2} + \frac{5}{2}\right), \quad (6.590)$$

式中 $\varepsilon = 4 - d$ 为维数正规化中积分维数与 4 的差值, $\tilde{\mu}^2 = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2$, $\gamma_E = 0.57721\dots$ 为欧拉常数, μ 为维数正规化中平衡量纲的参数, m_γ 为红外正规化中光子的小质量。有时我们仅仅减除掉理论的发散项, 而将其余的有限部分保留在理论中, 这被称为最小减除方案 (MS 方案)。在最小减除下, 量子电动力学维数正规化的单圈抵消项系数可以简单地表示为

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{e_R^2}{16\pi^2} \left(-\frac{2}{\varepsilon}\right), \quad \delta_3 = \frac{e_R^2}{16\pi^2} \left(-\frac{8}{3\varepsilon}\right), \quad \delta_m = \frac{e_R^2}{16\pi^2} \left(-\frac{6}{\varepsilon}\right). \quad (6.591)$$

若将常数 $\ln 4\pi - \gamma_E$ 一并减除, 则称为修正的最小减除方案 ($\overline{\text{MS}}$ 方案)。

在重整化过程中, 如果我们考虑的是一个截断能标为无限大的理论, 那么不论是裸参数还是抵消项都将是无穷大的。但是实际上量子场论在高能标下将会失效, 因此其截断能标并不是无限

⁵² 抵消项系数 $\delta_1 = \delta_2$ 并非是巧合, 它对于任意圈的修正都成立。这是瓦德-高桥恒等式的自然推论。

大，而是一个有限的取值。这样，实际的裸参数和抵消项都是有限大的。为了更好地估计出抵消项的大小，让我们采用泡利-维拉斯正规化方法。以电子的质量重整化为例

$$m = m_0 - \delta_m m, \quad (6.592)$$

式中 m_0 代表裸质量， m 代表物理质量（重整化质量）， $\delta_m m$ 代表由圈积分给出的抵消项。电子质量是对数发散的，设系统的截断能标为 Λ ，则其抵消项的取值可以表示为

$$\delta_m \sim -\frac{3\alpha}{4\pi} \ln \Lambda^2. \quad (6.593)$$

对于量子场论来说，一个合适的截断能标为普朗克能标

$$\Lambda \sim 10^{19} \text{GeV}, \quad (6.594)$$

而电磁相互作用的精细结构常数为

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \sim \frac{1}{137}. \quad (6.595)$$

因此可以看到，这些抵消项的取值不仅没有变为无穷大，甚至还是一个相对较小的量。上述表达式实际上意味着更高能标下的理论中的一个并不十分大的（等效的）质量参数 m_0 ，在低能下经过了一个并不十分大的修正 $\delta_m m \sim \ln \Lambda^2$ 以后，变为了一个并不十分大的被观测到的物理质量 m^2 。这一过程是自然的。

这种自然性实际上来自于电子质量是对数发散这一事实。如果电子质量是平方发散的，那么抵消项的量级将变为

$$\delta_m \sim \Lambda^2. \quad (6.596)$$

若取截断能标 $\Lambda \sim 10^{19} \text{GeV}$ ，那么这一抵消项将变得极为巨大。要使得我们能够在低能标下看到现在的电子质量，我们就必须使得基本理论中存在着一个极为巨大的质量参数 m_0 ，在低能下经过了极为巨大的修正 $\delta_m m \sim \Lambda^2$ 以后，恰好得到了一个微小的物理质量 m 。尽管我们在理论上可以设想这一点，但这是十分不自然的。在后文中将看到，希格斯粒子的质量是平方发散的（可以类比 $\lambda\phi^4$ 理论中粒子质量的平方发散），由它所引发的自然性困难被称为等级问题。等级问题并不是必须解决的，但我们确实希望能够将这种平方发散消除掉，从而为希格斯粒子的质量提供一个更自然的解释。

在维数正规化下，裸耦合常数 e_0 和无量纲的重整化耦合常数 e_R 之间的关系为

$$e_0 = \mu^{\varepsilon/2} Z_e e_R. \quad (6.597)$$

裸耦合常数 e_0 应当不随 μ 发生变化，因此

$$\mu \frac{de_0}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} (\mu^{\varepsilon/2} e_R Z_e) = 0. \quad (6.598)$$

由于我们已经求出了单圈的重整化常数 Z_e 的取值，因此根据上式我们可以给出准至单圈的重整化耦合常数 e_R 随 μ 的变化关系

$$\mu \frac{de_R(\mu)}{d\mu} = \frac{e_R^3}{12\pi^2}. \quad (6.599)$$

于是精细结构常数 $\alpha(\mu) = e_R^2(\mu)/4\pi$ 满足

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{2}{3\pi} \alpha^2, \quad (6.600)$$

这就是精细结构常数的重整化群方程。将这个方程求解出来，我们得到

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{2\alpha(\mu_0)}{3\pi} \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)}, \quad (6.601)$$

这被称为量子电动力学的跑动耦合常数。

跑动耦合常数中的参数 μ 是一个具有动量量纲的量，我们将其选取为系统的特征动量 p 。我们发现随着系统能量的增加，跑动耦合常数 $\alpha(\mu)$ 的取值也会随之增大，因此场的相互作用强度

“看起来”就变得更大了。这一点可以作如下的直观理解：在真空中时刻都会涨落出一系列的正负电子对，这些电子对中的正电子会被吸引而朝向空间中的电子，在该电子的周围产生了某种“屏蔽效应”，从而使得电子的电荷量看起来要小于其自身的电荷量（这也是“真空极化”一词的来源）。如果系统的能量越高，则所能够达到的尺度越小，因而屏蔽作用越弱，从而使得电子的电荷量看起来变得更大。因此，跑动耦合常数将随着能标的增加而变大。

在目前粒子物理对撞机所能达到的能量上，跑动耦合常数随能量的变化通常极为微弱。不过我们可以预想，在能量极高的时候，跑动耦合常数将会有明显的变化。如果上述重整化群方程对任意高的能量都成立，那么当

$$\mu = \mu_0 \exp \left[\frac{3\pi}{2\alpha(\mu_0)} \right] \quad (6.602)$$

时，跑动耦合常数将变为无穷大，此时量子电动力学（或者至少是微扰的量子电动力学）将会失效。这被称为量子电动力学的朗道极点。上述重整化群方程对于能量比较低的情况是适用的。如果能量进一步提高，则我们需要计及高圈效应，以及各种其他带电费米子对于跑动耦合常数的贡献。在这种情况下，重整化群方程将变为

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = \beta(\alpha), \quad (6.603)$$

式中 $\beta(\alpha)$ 可以展开为 α 的幂级数， n 圈效应的修正体现为 α^{n+1} 项的系数。在考虑到这些效应后，朗道极点仍然存在，只不过其具体位置会发生变化。不过，这个能量已经远远超过目前我们所能够达到的极限了。

6.7 量子色动力学

在量子场论的层面上，电磁相互作用是由旋量场的 $U(1)$ 规范对称性来描述的。通过将 $U(1)$ 对称性推广到局域，我们引入了一个规范矢量场，它恰好描述了光子的行为，并且规范场与物质场的耦合恰好描述了电磁相互作用的情形。

除了电磁相互作用之外，在粒子物理中还有一个重要的相互作用，那就是强相互作用。我们知道原子核是由质子和中子构成的，而质子和中子又是由夸克构成的。如果这些粒子之间的的相互作用仅仅由电磁相互作用来描述的话，那么它们所带的电荷会让它们迅速远远地排斥开来，从而一切物质都将以极快的速度解体。因此，在电磁作用之外，必然还存在着一个更强的作用将它们紧紧地结合在一起，这个作用就是强相互作用。

描述强相互作用的方法与电磁作用非常相似，只不过电磁作用是将电子的全局 $U(1)$ 对称性推广到局域 $U(1)$ 对称性，而强相互作用是将夸克在色空间中的全局 $SU(3)$ 对称性推广到局域 $SU(3)$ 对称性。经过这样的推广后，我们引入了八个不同的规范矢量场，它们被称为胶子，负责传递强相互作用，并且夸克与胶子之间的相互作用项正好给出了强相互作用的形式。这个理论被称为量子色动力学（QCD）。

接下来让我们考察强相互作用的具体形式。在量子色动力学中，我们用一个具有三个内部自由度的旋量场

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \quad (6.604)$$

来描述夸克。 $\psi(x)$ 的三个分量 ψ_1, ψ_2, ψ_3 分别被称为“红色 (r)”、“绿色 (g)”和“蓝色 (b)”，它

们构成了一个三维的线性空间，我们称之为色空间。⁵³ 它的共轭定义为

$$\bar{\psi}(x) = (\bar{\psi}_1(x), \bar{\psi}_2(x), \bar{\psi}_3(x)). \quad (6.605)$$

这个场 $\psi(x)$ 的各个分量在坐标空间的洛伦兹变换下按照旋量来变化，而在色空间的旋转变换下按照矢量来变化。因此，我们说 $\psi(x)$ 是坐标空间中的旋量，同时是色空间中的矢量。

自由夸克场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \sum_{i=1}^3 \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_i. \quad (6.606)$$

式中 i 代表各个色分量。可以验证，自由夸克场具有一个全局对称性。假设对场的各个分量做如下的线性变换

$$\psi'(x) = \hat{U}\psi(x), \quad (6.607)$$

只要在变换前后场在色空间中的“内积”不变

$$\bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\hat{U}^\dagger\hat{U}\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (6.608)$$

那么系统的拉格朗日密度就是不发生改变的。这要求这个 3×3 的变换矩阵 \hat{U} 是幺正的

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1. \quad (6.609)$$

由于在理论中只有场的相对相位是有意义的，因此我们额外要求变换矩阵 \hat{U} 的行列式为 1⁵⁴

$$\det(\hat{U}) = 1. \quad (6.610)$$

满足上述两个条件的变换矩阵 \hat{U} 构成一个群，我们称之为 $SU(3)$ 群，相应的对称性称为 $SU(3)$ 对称性。它是量子电动力学中的 $U(1)$ 对称性在三维色空间中的拓展。

如果 \hat{U} 是一个行列式为 1 的幺正矩阵，那么它总可以写成另一个矩阵 A 的复指数函数

$$\hat{U} = e^{iA}. \quad (6.611)$$

注意到

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = e^{-iA^\dagger}e^{iA}, \quad \det(\hat{U}) = e^{i\text{Tr}(A)}, \quad (6.612)$$

因此满足条件的 A 一定是一个无迹的厄密矩阵，即

$$A = A^\dagger, \quad \text{Tr}(A) = 0, \quad (6.613)$$

这样的矩阵 A 构成了一个线性空间。对于我们这里所考虑的 $SU(3)$ 群来说， A 一共有 9 个复元素，因此有 18 个（实）参数。但是由于 $A = A^\dagger$ 给出了九个约束条件， $\text{Tr}(A) = 0$ 给出了一个约束条件，因此 A 所构成的线性空间是八维的，它含有八个自由参数。习惯上我们将 A 的八个基矢 T^a 选取为 $T^a = \lambda^a/2$ ，各 λ^a 在色空间中的表示为

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.614)$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.615)$$

⁵³这并不是说夸克真的具有颜色，它只是一种形象的称呼。在自然界中是不存在自由夸克的，所有的夸克都以介子或者重子的形式组合成为束缚态。对于介子来说，它由一个红色夸克和一个反红色夸克组成（其他颜色类似）；对于重子来说，它由一个红色夸克、一个绿色夸克和一个蓝色夸克（或者是它们的叠加态）组成。因此我们可以很方便地说，由夸克组成的束缚态一定是无色（白色）的。

⁵⁴要求变换矩阵的行列式等于 1 的条件大致意味着我们在 $U(3)$ 群中约化掉了一个 $U(1)$ 群。即原来我们只要求 $|\det(U)| = 1$ ，这样 U 的行列式可以一般性地取为 $e^{i\theta}$ ，而现在它只能取为 1。用李群的语言来说，我们有 $(SU(3) \otimes U(1))/Z_3 \cong U(3)$ ，它意味着一个 $SU(3)$ 群与一个 $U(1)$ 群直积后再约化掉一个 Z_3 群，得到的群与 $U(3)$ 群同构。

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (6.616)$$

它们被称为盖尔曼 (Gell-mann) 矩阵。

因此, 任意一个厄密且无迹的三阶矩阵 A 都可以写成上述基矢的线性组合

$$A = T^a \theta^a, \quad (6.617)$$

式中 θ^a 是线性空间中相应基矢的分量。所有满足上述条件的矩阵 A 的集合实际上就是矩阵 U 所对应的 $SU(3)$ 群的李代数, 而各个 λ_i 矩阵实际上就是群的生成元。相应地, 任意一个 $SU(3)$ 群群元所对应的矩阵 U 都可以表示为

$$\hat{U} = e^{-iT^a \theta^a}. \quad (6.618)$$

我们把这八个 θ^a 取为 $SU(3)$ 群的八个自由参数。因此, 对于色空间中的自由旋量场来说, 它在

$$\psi'(x) = e^{iT^a \theta^a} \psi(x) \quad (6.619)$$

的变换下总是不变的。

可以验证 $SU(3)$ 群的各个群元是不对易的, 也就是说对于两个不同的变换 U_1, U_2 来说, 一般有 $U_1 U_2 \neq U_2 U_1$ 。这种不对易性同样体现在生成元上。由于任意两个李代数中元素的对易子仍在这个李代数中, 因此我们可以把两个生成元的对易子写成其他生成元的线性组合

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (6.620)$$

式中 f 称为群的结构常数, 它相对于所有的指标都是反对称的, 其非零分量为

$$f^{123} = 1, \quad f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = \frac{1}{2}, \quad (6.621)$$

$$f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2}, \quad f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6.622)$$

这个结构常数体现了群的对易性质。

接下来我们要将全局 $SU(3)$ 对称性推广为局域 $SU(3)$ 对称性

$$\psi'(x) = \hat{U}(x) \psi(x) = e^{iT^a \theta^a(x)} \psi(x), \quad (6.623)$$

即我们要求变换参数 θ^a 可以在不同的时空点取为不同的值。在这种变换下, 自由旋量场的拉格朗日密度将不再是不变的, 因此我们需要将其中的导数 ∂_μ 替换为协变导数 D_μ

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (6.624)$$

由于 $SU(3)$ 变换有八个自由度, 因此我们需要在协变导数中引入 8 个规范矢量场 A_μ^a

$$D_\mu = \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a, \quad (6.625)$$

式中 g 为强相互作用耦合常数, 规范矢量场 A_μ^a 被称之为胶子场。

要使得系统在局域 $SU(3)$ 变换 $U(x)$ 下不变, 我们需要让协变导数在变换下满足

$$D'_\mu = \hat{U}(x) D_\mu \hat{U}^{-1}(x), \quad (6.626)$$

这意味着规范场在变换下的性质为

$$T^a A'_\mu^a(x) = U(x) \left(A_\mu^a(x) T^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^\dagger(x) \quad (6.627)$$

若我们只考虑系统在无穷小局域 $SU(3)$ 变换

$$\hat{U}(x) = 1 + iT^a \theta^a(x) \quad (6.628)$$

下的性质, 那么协变导数需要满足

$$\partial_\mu - ig T^a A_\mu^a = (1 + iT^a \theta^a) (\partial_\mu - ig T^b A_\mu^b) (1 - iT^c \theta^c). \quad (6.629)$$

因此规范矢量场在无穷小变换下的性质为

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) - f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x). \quad (6.630)$$

最后, 我们还要为规范矢量场添加一个在局域 SU(3) 变换下不变的动能项。定义规范场强张量为

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (6.631)$$

这一规范场强张量满足

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a T^a. \quad (6.632)$$

它在 SU(3) 变换下的性质为

$$T^a F_{\mu\nu}^{a'} = U(x)(T^a F_{\mu\nu}^a)U^{-1}(x). \quad (6.633)$$

特别地, 它在无穷小局域 SU(3) 变换下的性质为

$$F_{\mu\nu}^{a'} = F_{\mu\nu}^a - f^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c. \quad (6.634)$$

与阿贝尔规范场论类似, 我们将规范矢量场 A_μ^a 的动能项表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (6.635)$$

由于结构常数 f^{abc} 的全反对称性, 这一动能项在局域 SU(3) 变换下是不变的。

将上述结果总结在一起, 我们就得到了 SU(3) 规范理论的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (6.636)$$

式中

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a, \quad (6.637)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (6.638)$$

T^a 为 SU(3) 群的生成元, f^{abc} 为群的结构常数, $a = 1, \dots, 8$ 。它在如下的变换下保持不变

$$\psi'(x) = \psi(x) + iT^a\theta^a(x)\psi(x), \quad (6.639)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) - f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x). \quad (6.640)$$

这一变换被称为 SU(3) 规范变换。

我们可以进一步定义

$$A_\mu = T^a A_\mu^a, \quad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad (6.641)$$

$$F_{\mu\nu} = T^a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (6.642)$$

注意到

$$\begin{aligned} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] &= F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{Tr}[T^a T^a] \\ &= F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \frac{\delta^{ab}}{2} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.643)$$

因此我们可以将量子色动力学的拉格朗日密度改写为更紧凑的形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (6.644)$$

上述 SU(3) 规范理论正确地给出了强相互作用的形式。

除了上述结果之外, 我们还可以在理论中引入一个 θ 项

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a. \quad (6.645)$$

这一项可以保持理论的洛伦兹对称性和规范对称性, 因此并未被对称性所禁止。由于 θ 项可以写成全导数的形式, 因此对于微扰论的任意阶都没有贡献。但是它却在理论中有非微扰的贡献,

例如它破坏了强相互作用的电荷共轭-空间反演联合对称性 (CP 对称性)。实验上并未观测到强相互作用中由 θ 项引起的 CP 对称性破坏, 因此我们暂时不考虑这一项的贡献。⁵⁵ 我们在后文中将更详细地讨论量子场论中的分立对称性。

类似地, 我们可以写出具有任意规范对称性的场论。只要我们给出一个规范群 G , 那么我们就能够得到一个相应的规范场论, 理论中所需的规范玻色子的数目等于群生成元的数目。这种规范场论被称为杨 (Yang)-米尔斯 (Mills) 理论。由于这里考虑的变换群都是不对易的 (非阿贝尔群), 因此我们也称这样的场论为非阿贝尔规范场论。当然, 并不是所有的李群都可以作为规范群。如果我们希望规范理论的能量是正定的, 那么规范群的李代数只可能是半单李代数。⁵⁶ 我们可以证明, 所有可能的半单李代数只由 $A_n = \mathfrak{su}(n)$, $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$, $C_n = \mathfrak{usp}(2n)$, $D_n = \mathfrak{so}(2n)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 以及它们的直和所构成。这就是我们所考虑的规范理论的所有可能的李代数。

我们在这里顺便给出非阿贝尔规范场论的微分形式表述。一个具有 n 个下指标的全反对称张量称为 n 阶微分形式, 简称 n 形式, 它可以表示为

$$A = \frac{1}{n!} A_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (6.646)$$

式中 \wedge 为外积, 它的定义为

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = n! dx^{[\mu_1} \dots dx^{\mu_n]}. \quad (6.647)$$

式中指标上的中括号意味着对所有指标取全反对称操作。 m 阶微分形式 A 与 n 阶微分形式 B 之间的外积为一个 $(m+n)$ 形式

$$A \wedge B = \frac{(m+n)!}{m!n!} A_{\mu_1 \dots \mu_m} B_{\nu_1 \dots \nu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_n}, \quad (6.648)$$

外微分 d 为一个从 n 形式到 $(n+1)$ 形式的映射, 它的分量定义为

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} = (n+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{n+1}]}. \quad (6.649)$$

n 维流形上的霍奇对偶 $*$ 为一个从 p 形式到 $(n-p)$ 形式的映射, 它的分量定义为

$$(*A)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (6.650)$$

在流形上可以定义微分形式的积分, 特别地我们有如下的斯托克斯定理

$$\int_M dA = \int_{\partial M} A, \quad (6.651)$$

这说明在流形 M 上对 dA 的积分, 等于在 M 的边界 ∂M 上对 A 的积分。

利用微分形式, 我们可以极大地简化许多理论的表述。对于非阿贝尔规范理论来说, 我们定义 1 形式矢量场为

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (6.652)$$

则 2 形式场强张量可以表示为

$$F = dA + A^2, \quad (6.653)$$

此时规范场的作用量可以利用微分形式表示为

$$S = - \int \text{Tr}[F \wedge *F] = - \frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}]. \quad (6.654)$$

⁵⁵ 量子色动力学中不存在 θ 项的问题被称为强 CP 问题。对此的一个解释是我们可以理论中额外引入一个 $U(1)$ 对称性, 称为皮塞 (Peccei)-奎恩 (Quinn) 对称性。如果这个对称性发生了破缺, 则可以通过手征转动将戈德斯通玻色子移入 θ 之中, 从而消除掉 θ 项。这一理论只是一种可能的猜想, 目前尚未得到标准模型的证实。相对于这一破缺真空的激发态被称为轴子, 它是暗物质的候选者之一。

⁵⁶ 如果李代数 X 的子代数 Y 满足对任意 $x \in X$, $y \in Y$ 都有 $[x, y] \in Y$, 则称 Y 为 X 的理想。如果一个李代数没有非平凡的理想, 则称这样的李代数为单李代数。由单李代数直和得到的李代数称为半单李代数。

特别地, 若我们考虑的是阿贝尔规范场, 则其规范势的对易子 A^2 为零, 因此我们可以将场强张量简化为

$$F = dA. \quad (6.655)$$

在这种情况下, 规范场所满足的经典运动方程可以表示为

$$dF = 0, \quad *d * F = J, \quad (6.656)$$

这就是微分形式下的麦克斯韦方程组。

接下来我们要将 SU(3) 规范理论量子化, 从而得到一个恰当的描述强相互作用的量子理论。我们可以把量子色动力学的振幅表示为对场所有可能的构型的路径积分

$$K = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[A_\mu^a] e^{iS}, \quad (6.657)$$

式中 S 是 SU(3) 规范理论的作用量。旋量场的量子化是容易的, 它可以表示为对格拉斯曼旋量场的路径积分。对于矢量场来说, 它在如下的规范变换下保持不变

$$A_{\theta\mu}^a(x) = A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) - f^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x). \quad (6.658)$$

因此路径积分是发散的。我们试图仿照自由矢量场的量子化方法, 选取洛伦兹规范条件

$$\partial^\mu A_\mu^a = 0, \quad (6.659)$$

然后在积分之中引入规范固定条件以排除掉所有非物理的状态。但是对于非阿贝尔规范场来说, 情况要更加复杂一些。其原因在于, 我们在将对场的积分转换为对群参数的积分的过程中, 需要引入一个雅可比行列式, 因此规范条件所满足的恒等式为

$$\int \mathcal{D}[\theta^a] \delta(\partial_\mu A_\mu^a) \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab}\right) = 1, \quad (6.660)$$

式中 θ^a 为群参数, 而

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A_\mu^c. \quad (6.661)$$

将这一表达式插入到路径积分中, 我们得到

$$\begin{aligned} K &= \int \mathcal{D}[A_\mu^a] e^{iS} \\ &= \int \mathcal{D}[\theta^a] \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab}\right) \delta(\partial^\mu A_\mu^a) e^{iS}, \end{aligned} \quad (6.662)$$

上述结果的推导详见附录 B.12。将对规范项 θ 的积分略去

$$K = \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab}\right) \delta(\partial^\mu A_\mu^a) e^{iS}, \quad (6.663)$$

我们就除去了路径积分中的规范冗余, 路径积分将是有限的。不过与 U(1) 规范理论不同的是, D_μ^{ab} 实际上与矢量场 A_μ^a 有关, 因此 $\det(\partial^\mu D_\mu^{ab})$ 项将不能够简单地提取到泛函积分的外边, 这为量子化带来了困难。

如何解决这个问题呢? 我们注意到对于格拉斯曼数的积分有如下的结果

$$\int d\theta d\bar{\theta} e^{\bar{\theta} M \theta} = \det(M), \quad (6.664)$$

因此如果我们将 M 视为一个无限维的矩阵 (也就是一个作用在场上的算符), 那么它的行列式就可以定义为如下的泛函积分

$$\det(M) = \int dcd\bar{c} \exp\left[\int d^4x \bar{c} M c\right]. \quad (6.665)$$

这里 c 与 \bar{c} 是两个格拉斯曼标量场。因此, 我们可以在原路径积分的基础上引入对于一系列格拉斯曼标量场 c^a 与 \bar{c}^a 的路径积分, 从而将积分中的行列式也统一表示为路径积分中的形式

$$K = \int \mathcal{D}[c^a] \mathcal{D}[\bar{c}^a] \mathcal{D}[A_\mu^a] e^{iS} \exp\left[-i \int d^4x \bar{c}^a (\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b\right], \quad (6.666)$$

式中我们已作代换 $c^a \rightarrow \sqrt{-ig}c^a$ ，以消去算符中的常数系数。⁵⁷

因此，非阿贝尔规范场的规范固定条件实际上要求我们在拉格朗日密度中额外引入两组满足反对易关系的格拉斯曼标量场 c^a 与 \bar{c}^a ，⁵⁸ 并将拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \bar{c}^a(\partial^\mu D_\mu^{ab})c^b. \quad (6.667)$$

这些新引入的场 c^a 与 \bar{c}^a 被称为法捷耶夫 (Faddeev)-波波夫 (Popov) 鬼场，它们是满足反对易关系的标量场。它虽然出现在拉格朗日密度之中，但其作用是为规范矢量场提供规范固定条件，它并不参与真实的物理过程。在引入了这一项后，我们就得到了量子色动力学的完整形式。⁵⁹

接下来我们要写出量子色动力学的费曼规则。我们用实线代表夸克，用螺旋线代表胶子，用虚线来代表鬼粒子，如图 6.19 所示。我们为每条胶子线和鬼粒子线的两端标上色指标 a, b ，为每条夸克线的两端标上色指标 i, j 。考虑自由场部分（即不与强耦合常数 g 相耦合的部分），我们在洛伦兹规范下为胶子场引入一个规范固定项

$$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (6.668)$$

在弃去适当的全导数项后，上述自由胶子场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L}_G^0 = \frac{1}{2}A^{a\mu}(\delta^{ab}\eta_{\mu\nu}\partial^2)A^{b\nu}. \quad (6.669)$$

类似地，自由夸克场和自由鬼场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L}_F^0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (6.670)$$

$$\mathcal{L}_{\text{FP}}^0 = \bar{c}^a(-\delta^{ab}\partial^2)c^b. \quad (6.671)$$

因此夸克 ψ 、胶子 g 以及鬼粒子 c 的传播子分别为

$$S(p) = \frac{i\delta^{ij}}{\not{p} - m + i\varepsilon}, \quad (6.672)$$

$$D^{ab\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon}, \quad (6.673)$$

$$D^{ab}(p) = \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon}, \quad (6.674)$$

式中 a, b 代表胶子线和鬼粒子线两端的色指标， i, j 代表夸克线两端的色指标。上述表达式指出，一条内线两端的色指标一定是相同的。换句话说，在粒子传播的过程中，其色指标是不会发生改变的。

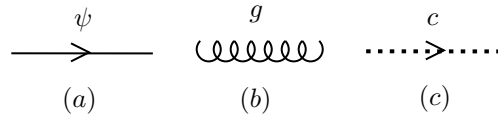


图 6.19: 费曼图中的夸克 ψ (a)、胶子 g (b) 以及鬼粒子 c (c)。

量子色动力学的外线规则与量子电动力学是类似的。每个初态正夸克线和反夸克线分别贡献旋量因子 $u^s(\mathbf{p}), \bar{v}^s(\mathbf{p})$ ，每个末态正夸克线和反夸克线分别贡献旋量因子 $\bar{u}^s(\mathbf{p}), v^s(\mathbf{p})$ ；每个初态或末态的胶子线分别贡献极化因子 $\varepsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}), \varepsilon_\mu^{\lambda*}(\mathbf{p})$ 。鬼粒子是非物理的，因此不出现在外线中。

⁵⁷在一般的代换 $c^a \rightarrow \kappa c^a$ 下，鬼场传播子将变为 $G \rightarrow \kappa^{-2}G$ ，鬼粒子-胶子顶点将变为 $\Gamma \rightarrow \kappa^2\Gamma$ 。由于鬼场只出现在内线中，因此鬼场传播子的数量将与鬼场顶点的数量相同，这意味着上述代换将不会改变振幅的结果。

⁵⁸这似乎违反了自旋-统计关联，不过由于鬼粒子是非物理的，它不会出现在任何外线中作为物理态存在，因此这一破坏是无关紧要的。

⁵⁹对于非阿贝尔规范场论来说，鬼场的存在并不是必要的。例如，若我们选取轴规范 $A_3^a = 0$ ，则算符行列式将与规范场无关，因此可以像阿贝尔规范场的情况那样简单地略去。不过这样一种量子化方法会破坏掉理论的协变性，这是不希望看到的。

将量子色动力学的拉格朗日密度展开, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}_i(i\not{\partial} - m)\psi_i \\ & - \bar{c}^a \not{\square} c^a - g f^{abc}(\partial^\mu A^{\nu a}) A_\mu^b A_\nu^c \\ & - \frac{1}{4}g^2(f^{eab}A^{\mu a}A^{\nu b})(f^{ecd}A_\mu^c A_\nu^d) \\ & + g A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j + g f^{abc}(\partial^\mu \bar{c}^a) A_\mu^b c^c,\end{aligned}\quad (6.675)$$

这意味着各场之间存在相互作用。将相互作用项前的系数读出来, 我们就得到了量子色动力学的顶点规则。量子色动力学中一共有四种顶点, 如图 6.20 所示。最简单的耦合方式是夸克-胶子顶点 (a) 以及鬼粒子-胶子顶点 (b), 它们的贡献分别为

$$ig\Gamma_a = ig\gamma^\mu T_{ij}^a, \quad (6.676)$$

$$ig\Gamma_b = gf^{abc}p^\mu. \quad (6.677)$$

此外, 展开式中还包含着胶子场的三次项或者四次项, 这代表着胶子场存在着自相互作用。相应的费曼图中将包含三胶子顶点 (c) 和四胶子顶点 (d), 它们的贡献分别为⁶⁰

$$ig\Gamma_c = gf^{abc}[\eta^{\mu\nu}(k^\rho - p^\rho) + \eta^{\nu\rho}(p^\mu - q^\mu) + \eta^{\rho\mu}(q^\nu - k^\nu)], \quad (6.678)$$

$$\begin{aligned}ig\Gamma_d = & -ig^2 \times [f^{abe}f^{cde}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace}f^{bde}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade}f^{bce}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma})].\end{aligned}\quad (6.679)$$

式中 μ, ν 等为张量指标, a, b 等为色指标, i, j 等为夸克指标。为简便起见, 我们已经略去了顶点 Γ 中的所有指标。

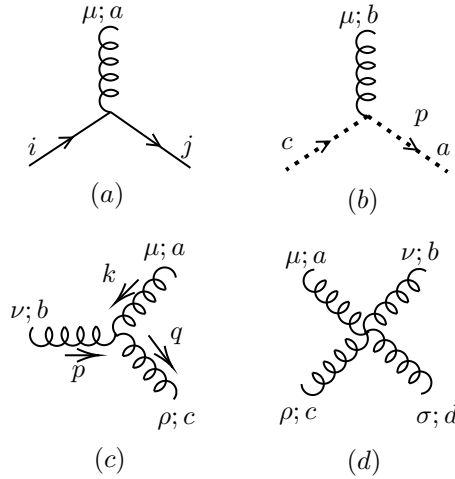


图 6.20: 量子色动力学中的夸克-胶子顶点 (a)、鬼粒子-胶子顶点 (b)、三胶子顶点 (c) 和四胶子顶点 (d)。

在计算散射振幅的时候, 我们需要对初态的胶子极化、夸克旋量与色指标求和, 对末态的胶子极化、夸克旋量与色指标求平均。由于鬼粒子是非物理的, 因此它不可能出现在外线之中, 而只能出现在内线中。对于每一个鬼粒子圈, 我们都要额外加上一个负号, 这是因为鬼粒子虽然是标量粒子, 但却满足反对易关系。此外, 在计算胶子自作用的时候需要特别考虑拓扑权因子, 这与 $\lambda\phi^4$ 理论是一致的。

⁶⁰这里四个顶点的相互作用系数, 在不同的文献中的约定是不相同的。

与量子电动力学类似，量子色动力学的圈积分中同样存在发散的问题，因此我们需要对理论进行重整化处理。利用量纲分析，我们可以知道量子色动力学的耦合常数是无量纲的，因此量子色动力学是临界可重整的理论。可以证明，通过对夸克场振幅、胶子场振幅、鬼粒子场振幅、夸克质量、耦合常数这五个参量进行重整化，我们就可以成功地消除掉量子色动力学中的所有紫外发散。量子色动力学详细的重整化过程从略，请读者参考规范场论的相关专著。

接下来我们来考察量子色动力学中的跑动耦合常数。与量子电动力学中的精细结构常数类似，我们定义强耦合常数 α_s 为

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (6.680)$$

在计算出耦合常数的重整化系数之后，我们可以证明，在准至单圈的情况下，它与动量 μ 的依赖关系为

$$\mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_s^2, \quad (6.681)$$

式中

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f, \quad (6.682)$$

N_f 为夸克味数。对于真实的物理世界来说，夸克味数 $N_f = 6$ ，因此 $\beta_0 = 7$ 。上述重整化群方程的解为

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}}, \quad (6.683)$$

式中 Λ_{QCD} 为量子色动力学的朗道极点，我们已将所有的常数项归入其中。这一结果只在 $\mu > \Lambda_{\text{QCD}}$ 的情况下才是成立的。观察这个方程可以发现，相互作用的能量越高，跑动耦合常数的取值就越小，这代表着在高能下（或者小尺度下）受强作用支配的粒子“看起来”是近似于自由的。因此在能量很高的情况下，我们可以利用微扰理论来研究强相互作用。

另一方面，如果我们将两个夸克之间的距离拉大，那么它们之间的相互作用将会变强。⁶¹ 原则上说，分开一对正反夸克需要无穷大的能量。当我们施加的能量达到一定地步的时候，真空中将重新产生出一对新的正反夸克，并与原来的两个正反夸克结合成为一对强子。由于夸克的这种性质，在实验上我们将不能够观察到自由存在的夸克，而只能观察到以束缚态（无色粒子）形式存在的夸克，这被称为“夸克禁闭”。威尔逊利用格点理论证明了在强耦合极限下，夸克禁闭是确实存在的。除此之外，各种实验证据和唯象模型也都验证了夸克禁闭的性质。不过至少在目前看来，从理论上严格证明量子色动力学的这一奇特性仍然是很困难的。

6.8 电弱统一理论

在前面的章节中，我们用 U(1) 规范理论描述了电磁相互作用，用 SU(3) 规范理论描述了强相互作用。类似地，对于粒子物理中的第三种相互作用——弱相互作用，我们也可以利用规范理论来描述。但是规范理论存在一个问题，那就是所有的规范玻色子必须都是无质量的。因为如果我们在规范理论中加入规范场的质量项

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu, \quad (6.684)$$

那么它将破坏掉理论的局域规范不变性。但实际上，弱相互作用中的规范玻色子是具有质量的。对于这个问题我们应该如何处理？答案是我们需要额外引入一个场，并令其发生自发对称性破缺。如果让它与规范场耦合，那么这个破缺之后的场将为规范场提供一个质量项。

⁶¹ 根据唯象模型的预言，在距离较大的情况下，夸克之间的等效势可以近似地视为线性势，它们之间的等效相互作用可以近似地视为恒力。

在 3.8 节中, 我们考虑了一个带有负质量项以及四次方相互作用的实标量场的自发对称性破缺, 它破坏了原有理论的 \mathbb{Z}_2 对称性 (左右对称性)。接下来我们将把实标量场换成复标量场, 从而考虑如下系统的自发对称性破缺⁶²

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (6.685)$$

其势函数为

$$V = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (6.686)$$

作出势函数的图像, 我们会发现在 $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ 的情况下, 系统在任意⁶³

$$|\langle \phi \rangle| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \quad (6.687)$$

处都有极小值, 如图 6.21 所示。这个系统在变换

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{-i\theta} \phi^\dagger \quad (6.688)$$

下是不变的, 因此这个系统具有 U(1) 对称性。将复标量场的分量定义为

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2), \quad (6.689)$$

式中 ϕ_1, ϕ_2 均为实标量场, 则上述拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (6.690)$$

系统的极小值点满足

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} = v^2, \quad v > 0. \quad (6.691)$$

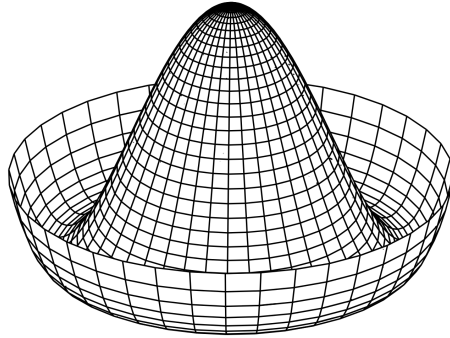


图 6.21: 复标量场自发对称性破缺的势函数。图源网络。

如果场不随时间演化且在空间各点均匀, 那么场的期望值将位于势函数的极小值点处。由于 U(1) 对称性的存在, 各个极小值点是等价的。但是实际的场总要“选择”这一系列极小值点中的一个, 从而使得对称性发生了破缺。⁶⁴ 为简便起见, 我们令破缺后场的真空期望值取为

$$\langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0, \quad (6.692)$$

⁶²实际上我们可以更普遍地将复标量场的势能项写为 $V(\phi)$ 。由于任何一个解析函数都可以在原点处展开为幂级数, 因此我们只要求 $V(\phi)$ 在 $\phi = 0$ 处泰勒级数展开式的二次项小于零, 而四次项大于零。我们本质上需要的只是形如“墨西哥帽”一样的势能, 因此任何一个满足上述条件的函数都可以产生自发对称性破缺。

⁶³量子场基态的真空期望值实际上就是经典场势函数的极小值点

$$\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \int \mathcal{D}[\phi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]} \phi = v.$$

因此我们在这里可以放心地利用经典场论来讨论量子场论中的对称性自发破缺。从上述表达式中也可以看到, 理论中存在着一系列简并的真空态 (基态), 并且经典场论中所说的场的破缺实际上是真空态的破缺。若系统破缺到了另一个真空态 $|\Omega'\rangle$, 则破缺后场的期望值将变为 $\langle \Omega' | \phi | \Omega' \rangle = v'$, 式中 $|v'| = |v|$ 。

⁶⁴这里的对称性自发破缺实际上是通过量子涨落产生的。量子涨落将使得场的期望值偏离不稳定的平衡点, 而落入稳定的极小值处。

即

$$\langle \phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (6.693)$$

然后我们做变量代换

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\rho(x)), \quad (6.694)$$

式中 η, ρ 均为实标量场。在进行这样一个代换后, η, ρ 场的真空期望值将均为 0, 看起来就像是“没有破缺”一样。将这个表达式代入到拉格朗日密度之中, 我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \mu^2 \eta^2 \\ & - \lambda v \eta (\rho^2 + \eta^2) - \frac{\lambda}{4} (\eta^2 + \rho^2)^2 + \text{else}. \end{aligned} \quad (6.695)$$

这样我们就给出了破缺之后场的表达式。

从上述拉格朗日密度中我们可以看出, η 场是一个有质量的场, 而 ρ 场是一个无质量的场

$$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}, \quad m_\rho = 0. \quad (6.696)$$

因此在自发对称性破缺之后, 这样一个复标量场破缺为了一个有质量的实标量场和一个无质量的实标量场。这个结果是不会随着我们选取自由度的方式而改变的。例如我们可以选取两个实标量场 $\rho(x)$ 和 $\theta(x)$ 而将 ϕ 场改写为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)]e^{i\theta(x)/v}. \quad (6.697)$$

在自发对称性破缺之后, 我们同样将得到一个有质量的实标量场 r 和一个无质量的实标量场 θ

$$m_r \neq 0, \quad m_\theta = 0, \quad (6.698)$$

这与我们前面得到的结果是一致的。

上述结果并不是巧合, 我们可以证明: 假设系统的对称群在破缺之前有 N 个生成元, 在破缺之后有 N' 个生成元, 那么破缺后将会产生出 $N - N'$ 个无质量的实标量粒子。这被称为戈德斯通定理, 相应的粒子被称为戈德斯通粒子。对于我们在这里考虑的例子来说, 破缺前系统的对称群 $U(1)$ 有一个生成元, 在破缺之后这个对称性消失了, 同时系统产生了一个质量为零的实标量粒子。

接下来我们要将这个场与规范玻色场耦合起来。我们要求理论不破坏局域规范对称性, 因此我们将标量场的导数 ∂_μ 替换成相应的协变导数 D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad (6.699)$$

式中 g 为耦合常数。这样系统的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2. \quad (6.700)$$

注意到在如下的局域规范变换下

$$\phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha(x), \quad (6.701)$$

协变导数满足

$$D'_\mu \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}D_\mu \phi(x), \quad (6.702)$$

因此这一理论确实满足规范对称性。

假设复标量场的真空态破缺为

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (6.703)$$

那么我们可以在拉格朗日密度中作代换

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)]e^{i\theta(x)/v}, \quad (6.704)$$

式中 ρ, θ 场为两个实标量场, 它们的真空期望值为 0。这两个场的物理意义是明确的: ρ 场代表了 ϕ 场偏离极值点的程度, θ 场代表了 ϕ 场的相角。注意到

$$(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi + \text{else}, \quad (6.705)$$

因此在破缺后, 等式右端第二项变为

$$e^2 A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi \rightarrow \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu, \quad (6.706)$$

系统的拉格朗日密度变为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \text{else}. \quad (6.707)$$

于是这个自发对称性破缺过程为原来无质量的规范矢量场 A 赋予了一个有限大小的质量

$$m_A = ev. \quad (6.708)$$

从上述讨论中我们看到, 通过将规范矢量场与一个发生自发对称性破缺的标量场耦合起来, 我们就成功地得到了有质量的规范玻色子。

在规范理论发生自发对称性破缺之后, 规范玻色子获得了质量, 同时无质量的戈德斯通粒子将会消失。为了明确地看出这一点, 我们做如下的规范变换

$$\phi'(x) = e^{-i\theta(x)/v} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \rho(x)], \quad (6.709)$$

$$B_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{gv} \partial_\mu \theta(x), \quad (6.710)$$

并将 ρ 场和 B^μ 场作为新的自由度, 这被称为么正规范。在么正规范下, θ 场的自由度将被吸收到 B^μ 场中。在未发生对称性破缺之前, 复标量场 ϕ 具有两个自由度, 而无质量规范场 A^μ 具有两个自由度。在对称性破缺发生之后, 有质量的实标量场 ρ 具有一个自由度, 而有质量规范场 B^μ 具有三个自由度。由此我们看到, 在对称性破缺发生之后, 无质量的戈德斯通粒子和无质量的矢量粒子结合为了一个有质量的矢量玻色子, 它恰好具有三个自由度。原来的无质量实标量场自由度 θ 被规范场 A^μ “吸收”了, 从而使得规范场获得了质量, 理论中也因此不再存在无质量的戈德斯通粒子。

利用类似的方法, 我们也可以为旋量粒子赋予质量。考虑一个无质量的旋量场与一个发生自发对称性破缺的复标量场的耦合。若要求相互作用项是可重整的, 则应当将各场以汤川形式进行耦合, 其拉格朗日密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu)\psi + (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi \\ & - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - g\bar{\psi}\phi\psi. \end{aligned} \quad (6.711)$$

假设复标量场的真空态破缺为

$$\langle \phi \rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (6.712)$$

在破缺后, 汤川相互作用项将会变成

$$g\bar{\psi}\phi\psi \rightarrow \frac{gv}{\sqrt{2}} \bar{\psi}\psi, \quad (6.713)$$

因此破缺得到的旋量粒子的质量为

$$m_\psi = \frac{gv}{\sqrt{2}}. \quad (6.714)$$

接下来我们考虑电弱统一理论的自发对称性破缺。描述电弱统一理论的规范群为 $SU(2) \times U(1)$ 。我们引入三个对应于 $SU(2)$ 变换的 W_μ^a 场, 引入一个对应于 $U(1)$ 变换的 B_μ 场。令 W_μ^a, B_μ 对应的规范场强张量为 $W_{\mu\nu}^a, B_{\mu\nu}$, 它们的表达式分别为

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (6.715)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (6.716)$$

式中 g 为 $SU(2)$ 规范场的耦合常数, ε^{abc} 为 $SU(2)$ 群的结构常数, 其非零矩阵元为 $\varepsilon^{123} = 1$ 。这样电弱统一理论的拉格朗日密度就可以表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \quad (6.717)$$

然后, 我们引入一个二分量的复标量场

$$H(x) = \begin{pmatrix} H_1(x) \\ H_2(x) \end{pmatrix}, \quad (6.718)$$

这个场被称为希格斯场, 我们希望它能够发生自发对称性破缺, 从而为各个粒子赋予质量。原则上来说, 我们可以为希格斯场的势能选取为任意的形式, 只要它在 $H \neq 0$ 处具有极小值, 能够发生对称性自发破缺即可。但是如果我们要求理论是可重整的, 那么希格斯场的势能最多只能包含四次方项, 因此我们将它选取为

$$\mathcal{L} = (D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) + m^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (6.719)$$

式中 $m^2 > 0, \lambda > 0$, 协变导数为

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'B_\mu Y \\ &= \partial_\mu - i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'B_\mu Y & \frac{1}{2}g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{1}{2}g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'B_\mu Y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.720)$$

其中 $T^a = \sigma^a/2$ 是 $SU(2)$ 群的三个生成元, g, g' 分别为 $SU(2)$ 规范场以及 $U(1)$ 规范场的耦合常数。我们称 $SU(2)$ 对称性所对应的守恒荷为 (弱) 同位旋 \mathbf{T} , 称 $U(1)$ 对称性所对应的守恒荷为 (弱) 超荷 Y , 对于希格斯粒子有 $Y = 1/2$ 。⁶⁵

我们取希格斯场的真空期望值为

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}. \quad (6.721)$$

在自发对称性破缺后, 矢量场的质量项为

$$(D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) \rightarrow g^2 \frac{v^2}{8} \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + \left(\frac{g'}{g} B_\mu - W_\mu^3 \right)^2 \right]. \quad (6.722)$$

破缺之后得到的质量项并不是对角化的, 这说明粒子的质量本征态并非是我们所引入的规范场 W_μ^a, B_μ 。将质量矩阵对角化之后, 我们可以得到如下的一组质量本征态⁶⁶

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (6.723)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu, \quad (6.724)$$

$$A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu, \quad (6.725)$$

式中 θ_w 为弱作用相角, 其取值为

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g}. \quad (6.726)$$

各个规范玻色子的质量为

$$m_{W^+} = m_{W^-} = \frac{v}{2}g, \quad m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}, \quad m_A = 0, \quad (6.727)$$

⁶⁵ 与弱同位旋和弱超荷类似, 我们还可以定义强同位旋和强超荷。在强相互作用唯象模型中, 我们可以假设质子与中子具有相同的质量, 这样体系将具有 $SU(2)$ 对称性 (对应于 u, d 两种夸克质量相等), 质子和中子也可构成一组二重态。这个强 $SU(2)$ 对称性所对应的守恒荷就是强同位旋。与弱同位旋和弱超荷类似, 强同位旋、强超荷和强子电荷之间也有类似的盖尔曼-西岛关系。当然, 各夸克的质量实际上并不完全相同, 强 $SU(2)$ 对称性也仅仅是近似成立的。

⁶⁶ 由于 W^1, W^2 是一组简并的本征态, 因此我们可以在这两个态所张成的子空间中选择任意一组正交的态作为质量本征态。在后文中将看到, 这里所选取的 W^\pm 是具有确定电荷数的本征态, 因此使用起来是更方便的。

其中 W^\pm, Z 是三个有质量的粒子, 它们在自发对称性破缺之后传递弱相互作用; 而 A 是一个无质量的粒子, 它实际上就是传递电磁相互作用的光子 γ 。由此可见, 在自发对称性破缺的过程中, 原来的 $SU(2) \otimes U(1)$ 的对称性被破坏掉了, 余下的只有一个 $U(1)_{\text{em}}$ 群

$$SU(2) \otimes U(1) \rightarrow U(1)_{\text{em}}, \quad (6.728)$$

它对应于电磁相互作用。由于破缺前的群有四个生成元, 破缺后的群有一个生成元, 因此破缺的过程产生了三个无质量的戈德斯通粒子。将这三个粒子与规范场耦合起来, 我们就得到了三个有质量的规范玻色子 W^\pm, Z , 余下的一个 $U(1)_{\text{em}}$ 群所对应的规范玻色子 A 仍然是无质量的。

在对称性自发破缺后, 我们可以将协变导数的 Z^μ 场与 A^μ 场部分表示为

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - igW_\mu^3 T^3 - ig'B_\mu Y \\ &= \partial_\mu - ieA_\mu (T^3 + Y) - ieZ_\mu (\cot \theta_w T^3 - \tan \theta_w Y), \end{aligned} \quad (6.729)$$

式中

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w. \quad (6.730)$$

由于 A_μ 为承载电磁相互作用的规范场, 因此上述表达式中的 e 实际上就是电磁相互作用的耦合常数。与电磁相互作用相对应的守恒荷为电荷, 它可以表示为

$$Q = T^3 + Y, \quad (6.731)$$

我们称 Q 为电荷, 这一结果被称为盖尔曼-西岛 (Nishijima) 关系。⁶⁷ 在上述表达式中, Q, T^3 以及 Y 均应当视为算符, 它们对于不同的粒子 (表示) 具有不同的取值。

在对称性自发破缺后, 我们可以将希格斯场表示为

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(2i \frac{\pi^a(x) T^a}{v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (6.732)$$

在么正规范下, 我们取 $\pi^a = 0$, 于是希格斯粒子可以表示为

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (6.733)$$

将上述表达式带入到希格斯粒子的势能项, 我们得到

$$V(H) = -m^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 = \lambda v^2 h^2 + \text{else}, \quad (6.734)$$

即希格斯粒子的质量为

$$m_h^2 = 2m^2 = 2\lambda v^2. \quad (6.735)$$

这样我们就求出了电弱统一理论中各玻色子的质量。

接下来我们要将上述规范场与旋量场耦合起来。电弱统一理论的规范群为 $SU(2) \otimes U(1)$, 为了承载这个规范对称群, 我们需要一个二分量的旋量空间

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (6.736)$$

它所对应的协变导数为

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig'Y B_\mu, \quad (6.737)$$

其中 $T^a = \sigma^a/2$ 是 $SU(2)$ 群的三个生成元, g, g' 分别为 $SU(2)$ 规范场以及 $U(1)$ 规范场的耦合常数。

对于真实的电弱相互作用来说, 左手场和右手场的规律是不一样的。现在我们来考察手征场的性质。每一个旋量场 ψ 都可以分解为左手部分 ψ_L 和右手部分 ψ_R 之和

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (6.738)$$

⁶⁷ 另一种常见的约定是将所有粒子的超荷扩大为原来的二倍, 这样盖尔曼-西岛关系将变为 $Q = T^3 + Y/2$, 规范理论中与 $U(1)_Y$ 相对应的协变导数项将变为 $-ig'Y B_\mu/2$ 。

它们的定义分别为⁶⁸

$$\psi_L = \hat{P}_L \psi = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_R = \hat{P}_R \psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad (6.739)$$

式中 $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, 而

$$\hat{P}_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \quad (6.740)$$

分别为左手旋量和右手旋量的投影算符。我们称 ψ 为狄拉克旋量, 而 ψ_L, ψ_R 为外尔旋量。作为一个最简单的例子, 我们可以写出有质量狄拉克旋量的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (6.741)$$

注意到外尔旋量满足正交条件

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = 0, \quad (6.742)$$

$$\bar{\psi}_R \psi_R = \bar{\psi}_L \psi_L = 0, \quad (6.743)$$

因此我们可以将上述拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L (i\partial\!\!\!/)\psi_L + \bar{\psi}_R (i\partial\!\!\!/)\psi_R - m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L). \quad (6.744)$$

在上述表达式中, 偏导数项为左手旋量和右手旋量的贡献之和, 而等式右端的质量项为左手旋量和右手旋量的交叉项, 我们称之为狄拉克质量项。

在电弱统一理论中, 用手征场写出的拉格朗日密度与上述表达式的形式是类似的。我们用一个二维旋量

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (6.745)$$

来承载弱相互作用, 这里的每个分量 ψ_1, ψ_2 都是四分量的旋量场。对于真实的电弱统一理论来说, SU(2) 规范场只作用于左手场, 而不作用于右手场上。于是, 我们可以将费米子场的拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i(\partial\!\!\!/ - igW^a T^a - ig'Y_L \mathcal{B})\psi_L + \bar{\psi}_R i(\partial\!\!\!/ - ig'Y_R \mathcal{B})\psi_R, \quad (6.746)$$

式中 Y_L, Y_R 分别为左右手费米子场的超荷。在宇称变换下, 左右手场将互相交换, 因此弱相互作用并不是宇称守恒的。

我们可以利用一种更加紧凑的方式来表示 SU(2) 规范场的相互作用项。SU(2) 相互作用项仅作用于左手旋量场上, 而不作用于右手旋量场上。由于左右手旋量是正交的, 因此这一相互作用项可以表示为

$$-ig\bar{\psi}_L W_\mu^a \gamma^\mu T^a \psi_L = -ig\bar{\psi} W_\mu^a \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} T^a \psi. \quad (6.747)$$

由于在宇称变换下, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 项按照矢量变化, 而 $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ 按照赝矢量变化, 因此这两项具有相反的宇称。真实的相互作用是这两项相减得到的, 我们称之为 $V - A$ 相互作用 (矢量 - 赝矢量相互作用)。当然, 实际的左右手场的超荷是不同的, 因此我们并不能够将左右手的电弱统一理论简单地合写在一起。⁶⁹

接下来我们具体地考察旋量场的协变导数项, 给出费米子场与规范玻色场的相互作用。计算出费米子场与规范场 Z^μ 以及 A^μ 的相互作用项, 我们得到

$$\mathcal{L} = \frac{e}{\sin\theta_w} Z^\mu J_\mu^Z + eA^\mu J_\mu^{\text{EM}}, \quad (6.748)$$

式中 $J_\mu^Z, J_\mu^{\text{EM}}$ 分别为与 Z 玻色子耦合的中性流以及与光子耦合的电磁流, 其表达式为

$$J_\mu^Z = \cos\theta_w J_\mu^3 - \frac{\sin^2\theta_w}{\cos\theta_w} J_\mu^Y = \frac{1}{\cos\theta_w} (J_\mu^3 - \sin^2\theta_w J_\mu^{\text{EM}}), \quad (6.749)$$

⁶⁸ 左手旋量场和右手旋量场其实分别只有两个独立的变量, 这在外尔表示下要看得更加明显。在外尔表示下, 左手旋量场只有前两个分量不为零, 而右手旋量场只有后两个分量不为零。它们合在一起, 正好给出了原来的旋量场。

⁶⁹ 除非我们在协变导数中引入两个不同的手征投影算符, 或者引入一个超荷算符, 它作用于不同粒子上给出不同的超荷。这反而更加繁琐了。

$$J_\mu^Y = Y_L \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L + Y_R \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R = J_\mu^{\text{EM}} - J_\mu^3, \quad (6.750)$$

$$J_\mu^3 = \bar{\psi}_L \gamma_\mu T^3 \psi_L, \quad (6.751)$$

$$J_\mu^{\text{EM}} = Q (\bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R), \quad (6.752)$$

ψ_L, ψ_R 分别代表弱作用二重态的左手部分和右手部分。计算出费米子场与规范场 $W^{\pm\mu}$ 的相互作用项, 我们得到

$$\mathcal{L} = \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} (W^{+\mu} J_\mu^+ + W^{-\mu} J_\mu^-), \quad (6.753)$$

式中 J_μ^\pm 称为带电弱流, 其表达式为

$$J_\mu^+ = \bar{\psi}_L \gamma_\mu T^+ \psi_L = \bar{\psi}_{1L} \gamma_\mu \psi_{2L}, \quad (6.754)$$

$$J_\mu^- = \bar{\psi}_L \gamma_\mu T^- \psi_L = \bar{\psi}_{2L} \gamma_\mu \psi_{1L}, \quad (6.755)$$

ψ_1, ψ_2 分别为弱作用二重态的上分量和下分量, T^\pm 的表达式为

$$T^\pm = \frac{1}{2} (T^1 \pm iT^2). \quad (6.756)$$

由于在真实的标准模型中, 弱作用二重态的上分量场的电荷总是比下分量场电荷大 1, 因此若要求每个顶点处的电荷守恒的话, 则每个 W^+ 粒子都将携带一个正电荷, 而每个 W^- 粒子都将携带一个负电荷。若理论中存在着数个不同的费米子二重态, 则应当对所有这些费米子的贡献求和。

在电弱统一理论中, 所有的费米子场都是无质量的。为了使得费米子场获得质量, 我们需要利用汤川相互作用将它们与希格斯场耦合起来

$$\mathcal{L} = -g_1 \bar{\psi}_L H \psi_{1R} - g_2 \bar{\psi}_L \tilde{H} \psi_{2R} + \text{h.c.}, \quad (6.757)$$

式中 $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$ 为希格斯场的电荷共轭, h.c. 为厄密共轭, g_1, g_2 分别为希格斯场与上分量旋量和下分量旋量的耦合常数。在希格斯场发生破缺后, 我们将得到如下的狄拉克质量项

$$\mathcal{L} = -\frac{g_1 v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{1L} \psi_{1R} - \frac{g_2 v}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{2L} \psi_{2R} + \text{h.c.}, \quad (6.758)$$

于是费米子场的质量为

$$m_1 = \frac{g_1 v}{\sqrt{2}}, \quad m_2 = \frac{g_2 v}{\sqrt{2}}, \quad (6.759)$$

这为旋量二重态的上下分量赋予了不同的质量。通过这种方式, 我们就利用 $\text{SU}(2) \otimes \text{U}(1)$ 的自发对称性破缺得到了弱相互作用和电磁相互作用。

人们最初设想物理世界应当满足空间反演对称性, 即若将空间坐标取反

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x}^\mu = (t, -\mathbf{x}), \quad (6.760)$$

则物理规律应当不发生变化。在将空间反演变换 (宇称变换) P 作用在系统上后, 它会将左手场变为右手场, 因此系统的空间反演对称性将不再能够得到保持。如果连续将两次空间反演变换相继作用在量子态上, 则量子态将回到自身

$$\hat{P}^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad (6.761)$$

这意味着若一个态是宇称本征态, 则它要么在宇称变换下保持不变 (偶宇称), 要么在宇称变换下取负号 (奇宇称)

$$\hat{P} |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle. \quad (6.762)$$

因此系统在空间反演变换下的本征态给出了一个量子数, 称为宇称, 偶宇称态的宇称量子数为 1, 而奇宇称态的宇称量子数为 -1。若系统满足空间反演对称性, 则系统的宇称在演化过程中将不发生改变, 换句话说系统的宇称量子数是守恒的。

对于量子电动力学和量子色动力学来说, 空间反演对称性是得到了满足的, 系统的宇称是守恒的。但是对于弱相互作用来说, 空间反演对称性遭到了破坏, 宇称是不守恒的。这是因为只有

左手场参与弱相互作用，而右手场不参与。空间反演对称性会将左手场变为右手场，而将右手场变为左手场。我们可以验证空间反演变换作用在旋量二次型上的结果

$$\hat{P}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\hat{P}^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \hat{P}(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)\hat{P}^{-1} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad (6.763)$$

将其作用在 $V - A$ 相互作用项上得到

$$\hat{P}[\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi]\hat{P}^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\psi. \quad (6.764)$$

因此，空间反演变换改变了系统的性质，系统的宇称在演化过程中将可能发生变化（例如从一个奇宇称态可以自发地演化为一个偶宇称态）。

我们还可以考虑电荷共轭变换 C ，它可以将粒子变换为其反粒子，并改变所有相加性守恒荷的取值

$$\hat{C}\hat{a}_p\hat{C}^{-1} = \hat{C}\hat{b}_p\hat{C}^{-1}, \quad \hat{C}\hat{b}_p\hat{C}^{-1} = \hat{C}\hat{a}_p\hat{C}^{-1}. \quad (6.765)$$

可以验证，电荷共轭变换作用在旋量场上得到

$$\hat{C}\psi\hat{C}^{-1} = C\bar{\psi}^T, \quad C = i\gamma^0\gamma^2. \quad (6.766)$$

对于量子电动力学和量子色动力学来说，正粒子和反粒子在其中的地位是相等的，因此电荷共轭变换不会改变系统的性质。对于弱相互作用来说，电荷共轭变换会将左手场变为右手场，右手场变为左手场，因此弱相互作用在电荷共轭变换下也是会发生改变的。我们可以验证电荷共轭变换作用在旋量二次型上的结果

$$\hat{C}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\hat{C}^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \hat{C}(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)\hat{C}^{-1} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad (6.767)$$

将其作用在 $V - A$ 相互作用项上得到

$$\hat{C}[\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi]\hat{C}^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\psi, \quad (6.768)$$

因此系统确实发生了变化。但我们发现，若将空间反演变换与电荷共轭变换联合作用于系统之上，则左手场仍是左手场，右手场仍是右手场， $V - A$ 相互作用变为

$$\hat{C}\hat{P}[\bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi]\hat{P}^{-1}\hat{C}^{-1} = \bar{\psi}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\psi. \quad (6.769)$$

因此虽然弱相互作用的空间反演对称性 P 和电荷共轭对称性 C 都遭到了破坏，但是系统的电荷共轭-空间反演联合对称性 CP 仍然得到了保持，对称性在更高的层面上得到了恢复。

更深入的讨论表明，弱相互作用仍然破坏了 CP 对称性，即弱相互作用在电荷共轭-空间反演联合变换下仍然不是不变的。但若我们引入一个新的分立变换，即时间反演变换 T

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}) \rightarrow -\tilde{x}^\mu = (-t, \mathbf{x}), \quad (6.770)$$

则在电荷共轭-空间反演-时间反演联合变换下

$$\hat{I} = \hat{C}\hat{P}\hat{T}, \quad (6.771)$$

弱相互作用仍然是不发生改变的事实。事实上我们可以证明一个更强大的定理，即任何一个定域、厄密、洛伦兹协变、拉格朗日密度存在且满足自旋-统计关系的场论都在 CPT 联合变换下不变，这被称为 CPT 定理。 CPT 定理是我们对于自然界对称性的最强大的保证。如果 CPT 对称性被破坏，则量子场论的基础将遭到严重的挑战，整个物理体系都需要进行重大的修改。

在结束本节之前，我们将讨论弱相互作用的低能有效理论，并对理论的可重整性给出一个评注。为简便起见，我们利用一个含有有质量玻色子的理论来代替真实的弱相互作用

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g_W J_\mu W^\mu, \quad (6.772)$$

式中 W^μ 场的质量为 m_W ，而 J^μ 为费米子流

$$J^\mu = \sum \bar{\psi}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_j, \quad (6.773)$$

ψ_i 代表所有可能出现在流中的费米场，求和对理论中可能出现的所有费米子流进行，这一理论被称为中间玻色子理论。有质量矢量场的传播子为

$$\Delta_{\mu\nu}(p^2) = \frac{-i(\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m_W^2)}{p^2 - m_W^2 + i\varepsilon}. \quad (6.774)$$

因此如图 6.22 (a) 所示的四费米子顶点 $i\Gamma(p^2)$ 的表达式为

$$i\Gamma(p^2) = (-ig_W J^\mu) \frac{-i(\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m_W^2)}{p^2 - m_W^2 + i\varepsilon} (-ig_W J^\nu). \quad (6.775)$$

现在考虑上述理论在低能量极限下的形式。取 $p^2 \rightarrow 0$ 的极限，四费米子顶点将可以表示为

$$i\Gamma(p^2) = -\frac{ig_W^2}{m_W^2} J^\mu J_\mu. \quad (6.776)$$

我们发现在低能量下，这个顶点的行为与如下的相互作用顶点是相同的

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum [\bar{\psi}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_j] [\bar{\psi}_k \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_l], \end{aligned} \quad (6.777)$$

式中耦合常数满足

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{m_W^2}, \quad (6.778)$$

求和对所有可能的流进行。这被称为四费米子理论，它是描述弱相互作用的有效理论，其费曼图如图 6.22 (b) 所示。由此可见，在低能量的极限下，相互作用顶点失去了细节，由一个有质量的玻色传播子变为了一个没有内部结构的相互作用顶点。

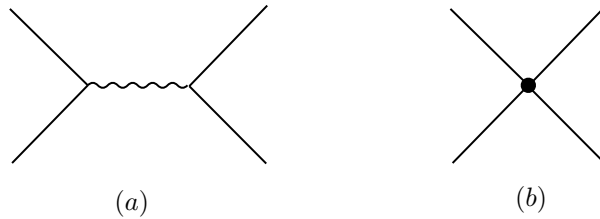


图 6.22: (a) 中间玻色子理论的四粒子顶点以及 (b) 四费米子理论的四粒子顶点。

由于旋量场的质量量纲为 $3/2$ ，而拉格朗日密度的量纲为 4 ，因此费米耦合常数 G_F 的量纲为 -2 。这意味着上述四费米子理论是不可重整的，理论中存在着无法消除的紫外发散，它将在圈图阶失效。然而根据前面的讨论我们看到，四费米子理论可以视为电弱统一理论的低能有效理论，此时四费米子间的相互作用将由一个发生对称性自发破缺的有质量矢量场来传递，因而是可重整的。⁷⁰ 也就是说，通过取可重整理论的低能有效理论，我们得到了一个不可重整的理论。前者是一个完备的理论，因此是自洽的；而后者只能够描述低能下的行为，在理论中产生了矛盾。

电弱统一理论仍然是在场论框架之内的，其能标并不远远高于四费米子理论。因此当我们考虑高能效应时，四费米子理论将变得不够有效，相互作用的细节将逐渐在理论中体现出来。这一点在理论自身中也有所体现，那就是当能量达到圈图阶时，四费米子理论将出现无法克服的发散，从而失去预言能力。但是若我们仅仅考虑足够低能量下的情况，则四费米子理论仍然可以给出可靠的预言，因此它仍然是可接受的。这样一种不可重整的理论也是不完备的，在理论失效的能标下一定存在超出有效理论的新物理，对于我们这里所讨论的例子来说就是电弱统一理论中的有质量玻色子。

⁷⁰ 需要注意的是，若我们仅考虑通常的有质量玻色子理论，则它也是不可重整的。要想使得理论可重整，我们需要让无质量玻色子经过希格斯机制发生自发对称性破缺。当然希格斯粒子的效应要在更高的能标下才能明显地看到，这也是一个低能有效理论不可重整的例子。

6.9 粒子物理标准模型

至此我们已经完成了大部分的工作。将上面讨论的所有内容结合在一起，我们就得到了现今粒子物理学的标准模型。它包含了人们目前已知的所有相互作用，并且给出了所有基本粒子的种类。标准模型是一个规范理论，它的规范群是量子色动力学规范群和电弱统一理论规范群的直积，即 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 。这里的指标 C 代表 $SU(3)$ 群作用在强相互作用的色空间上，指标 L 代表 $SU(2)$ 群作用在弱作用二重态的左手分量上，指标 Y 代表 $U(1)$ 群所对应的守恒荷为超荷。在自发对称性破缺之后，它将给出强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用，并为所有的粒子赋予质量。接下来我们就来着手将标准模型的拉格朗日密度显式地写出来。

标准模型的第一部分是规范场的动能项，它由 $SU(3)_C$ 规范场 A_μ^a 、 $SU(2)_L$ 规范场 W_μ^a 和 $U(1)_Y$ 规范场 B_μ 三部分组成，其拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (6.779)$$

式中 A_μ^a 是胶子场，它所对应的场强张量为 $F_{\mu\nu}^a$ ， $a = 1, \dots, 8$ ； W_μ^a 所对应的场强张量为 $W_{\mu\nu}^a$ ， $a = 1, \dots, 3$ ； B_μ 所对应的场强张量为 $B_{\mu\nu}$ ，它和 W_μ^a 场一起构成了电弱统一理论的规范玻色子，并在破缺之后成为 W^\pm 玻色子场、 Z 玻色子场和光子场。各场强张量与规范场之间的关系为

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (6.780)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (6.781)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (6.782)$$

式中 g_s 以及 g 分别为 $SU(3)_C$ 规范理论以及 $SU(2)_L$ 规范理论的耦合常数， f^{abc} 以及 ε^{abc} 分别为 $SU(3)_C$ 规范群以及 $SU(2)_L$ 规范群的结构常数。

标准模型的第二部分是费米子项。在标准模型中，我们总共需要考虑 12 种费米子，分别为六种夸克以及六种轻子。但 $SU(3)_C$ 、 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 这三个规范群并不是同时作用在上述所有的粒子之上的。我们发现，强作用 $SU(3)_C$ 群只作用在夸克上， $SU(2)_L$ 群只作用在左手旋量场上，而 $U(1)_Y$ 群同时作用在所有的左手和右手旋量场上。因此，我们将所有的费米子分成四组，它们分别为左手夸克、右手夸克、左手轻子和右手轻子。左手夸克 Q_L^i 、左手轻子 L_L^i 均为弱作用二重态，我们将其分量标记为

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}, \quad L_L^i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix}. \quad (6.783)$$

式中 u_L^i 称为上夸克， d_L^i 称为下夸克， ν_L^i 称为中微子， e_L^i 称为电子。（我们在这里用第一代粒子的名字来笼统地指代所有三代粒子。）右手夸克包含右手上夸克 u_R^i 和右手下夸克 d_R^i ，而右手轻子包含右手电子 e_R^i 和右手中微子 ν_R^i ，它们都是弱作用单态。

夸克场 u^i, d^i 均为色空间中的三分量旋量场，而轻子场 ν^i, e^i 不参与强相互作用，它们均为单分量旋量场。所有的费米子场本身都是无质量的，它们的质量要通过自发对称性破缺来获得。将不同的费米子与相应的协变导数耦合起来，我们就得到了标准模型的费米子项

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Fermion}} = & \bar{Q}_L^i(i\mathcal{D})Q_L^i + \bar{L}_L^i(i\mathcal{D})L_L^i \\ & + \bar{u}_R^i(i\mathcal{D})u_R^i + \bar{d}_R^i(i\mathcal{D})d_R^i + \bar{e}_R^i(i\mathcal{D})e_R^i + \bar{\nu}_R^i(i\mathcal{D})\nu_R^i. \end{aligned} \quad (6.784)$$

式中协变导数 D_μ 对于不同的场来说具有不同的形式。⁷¹

左手夸克的规范群为 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ，因此其协变导数可以表示为

$$D_\mu Q_L^i = \left[\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a - ig \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig' Y_Q B_\mu \right] Q_L^i, \quad (6.785)$$

⁷¹用群论的语言来说，这意味着各个粒子对应于规范群的不同表示。

式中 $\lambda^a/2, \sigma^a/2$ 分别为 $SU(3)_C$ 群和 $SU(2)_L$ 群的生成元, 它们分别只作用在色空间和弱空间上。 g_s, g, g' 分别为 $SU(3)_C, SU(2), U(1)_Y$ 群的耦合常数, I 为单位矩阵, Y_Q 为左手夸克对应的超荷。右手夸克的规范群为 $SU(3)_C \otimes U(1)_Y$, 因此其协变导数可以表示为

$$D_\mu u_R^i = \left[\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a - ig' Y_u B_\mu \right] u_R^i, \quad (6.786)$$

$$D_\mu d_R^i = \left[\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a - ig' Y_d B_\mu \right] d_R^i, \quad (6.787)$$

式中 Y_u, Y_d 为右手夸克对应的超荷。左手轻子的规范群为 $SU(2) \otimes U(1)_Y$, 因此其协变导数可以表示为

$$D_\mu L_L^i = \left[\partial_\mu - ig \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig' Y_L B_\mu \right] L_L^i, \quad (6.788)$$

式中 Y_L 为左手轻子对应的超荷。而右手轻子的规范群只有 $U(1)_Y$, 因此其协变导数可以表示为

$$D_\mu e_R^i = [\partial_\mu - ig' Y_e B_\mu] e_R^i, \quad (6.789)$$

$$D_\mu \nu_R^i = [\partial_\mu - ig' Y_\nu B_\mu] \nu_R^i, \quad (6.790)$$

式中 Y_e, Y_ν 分别为右手电子以及右手中微子所对应的超荷。

在标准模型中, 不同的粒子携带着不同的超荷。各夸克场的超荷分别为

$$Y_Q = \frac{1}{6}, \quad Y_u = \frac{2}{3}, \quad Y_d = -\frac{1}{3}, \quad (6.791)$$

而各轻子场的超荷分别为

$$Y_L = -\frac{1}{2}, \quad Y_\nu = 0, \quad Y_e = -1. \quad (6.792)$$

注意此处所说的 Y_Q, Y_L 为左手场的超荷, 它们已经两两结合为了弱作用二重态, 而 Y_u, Y_d, Y_ν, Y_e 为相应的右手场的超荷, 它们未形成弱作用二重态。根据盖尔曼-西岛关系, 电荷 Q 与超荷 Y 之间的关系为

$$Q = T_3 + Y, \quad (6.793)$$

式中是 T_3 为同位旋的第三分量, 对于左手费米子弱作用二重态的上分量来说有 $T_3 = 1/2$, 对于下分量来说有 $T_3 = -1/2$, 对于未形成弱作用二重态的右手费米子有 $T_3 = 0$ 。利用上述关系计算出各粒子的电荷, 我们得到

$$Q_e = -1, \quad Q_\nu = 0, \quad Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}, \quad (6.794)$$

可以看到, 左右手粒子的电荷是相同的。需要特别注意的是, 右手中微子的超荷为零, 因此它不参与强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用中的任意一种。实验上观察到的所有中微子都是左手中微子。

标准模型的第三部分是希格斯场的自发对称性破缺, 它的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) - V(H^\dagger H), \quad (6.795)$$

式中 H 为一个二分量的复标量场, 称为希格斯场, $V(H^\dagger H)$ 是以 $H^\dagger H$ 为变量的势函数。我们要求希格斯场在 $\langle H \rangle \neq 0$ 处存在稳定的平衡点, 从而发生对称性自发破缺。不失一般性地, 我们可以将势函数 $V(H^\dagger H)$ 展开为 $H^\dagger H$ 的级数, 其前两项可以表示为

$$V(H^\dagger H) = -m^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 + \dots, \quad (6.796)$$

其中 $m^2 > 0, \lambda > 0$ 。如果我们要求这个势函数是可重整的, 那么它最多只能包含希格斯场的四次方项。希格斯场的协变导数 D_μ 为

$$D_\mu H = \left[\partial_\mu - ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig' Y_H B_\mu \right] H, \quad (6.797)$$

式中

$$Y_H = \frac{1}{2} \quad (6.798)$$

为希格斯粒子的超荷。在破缺之后，它将产生出三个有质量的弱作用玻色子 W^\pm 和 Z ，以及一个无质量的光子 γ 。

标准模型的第四部分是旋量场与希格斯场之间的汤川耦合，在自发对称性破缺后它们将给出各个旋量粒子的质量项。它的拉格朗日密度可以表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & -Y_{ij}^d \bar{Q}_L^i H d_R^j - Y_{ij}^u \bar{Q}_L^i \tilde{H} u_R^j + \text{h.c.} \\ & -Y_{ij}^e \bar{L}_L^i H e_R^j - Y_{ij}^\nu \bar{L}_L^i \tilde{H} \nu_R^j + \text{h.c.},\end{aligned}\quad (6.799)$$

式中 Y^d, Y^u, Y^e, Y^ν 均为 3×3 的矩阵，各个 i, j 取值均为 $1, 2, 3$ ，并且对所有 i, j 求和。 H 为二分量的希格斯标量场， $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$ 为希格斯场的电荷共轭，h.c. 代表对该行的其余项取厄密共轭。

这些旋量场不是单独与希格斯场耦合，而是相互之间交叉地耦合，因此标准模型的质量矩阵在自发对称性破缺之后将不再是对角的。在自发对称性破缺后，夸克的质量项可以表示为

$$\mathcal{L}_{q^2} = -\frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d \bar{d}_L^i d_R^j - \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u \bar{u}_L^i u_R^j + \text{h.c.} \quad (6.800)$$

我们可以将这个质量项对角化，从而得到夸克的质量本征态 u^i 和 d^i

$$\mathcal{L}_{q^2} = -m_i^d \bar{d}_L^i d_R^i - m_i^u \bar{u}_L^i u_R^i + \text{h.c.}, \quad (6.801)$$

式中对指标 i 求和， m_i^d, m_i^u 分别为矩阵 $vY^d/\sqrt{2}, vY^u/\sqrt{2}$ 的本征值。我们将这些质量本征态命名为不同的夸克

$$u^i = \{u, c, t\}, \quad d^i = \{d, s, b\}. \quad (6.802)$$

在质量本征态下，夸克的质量项是对角化的，但是夸克与 W 玻色子的相互作用项将不再是对角化的。一般地，我们可以将这个相互作用项表示为

$$\mathcal{L}_{qW} = \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{u}_L^i \gamma^\mu V_{\text{CKM}}^{ij} d_L^j + W_\mu^- \bar{d}_L^i \gamma^\mu V_{\text{CKM}}^{\dagger ij} u_L^j \right), \quad (6.803)$$

这里 V_{CKM} 是一个 3×3 的幺正矩阵，它被称为 CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) 矩阵。在经过恰当的幺正变换后，CKM 矩阵中将包含四个独立的实参数，一般我们将之选取为

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.804)$$

式中

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad (6.805)$$

而 δ 是一个相角。可以证明，CKM 矩阵（以及后文中的 PMNS 矩阵）中的 $e^{i\delta}$ 项破坏了理论的电荷共轭-空间反演联合对称性（CP 对称性）。

轻子项与夸克项的形式是非常接近的。在自发对称性破缺后，轻子的质量项可以表示为

$$\mathcal{L}_{l^2} = -\frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^e \bar{e}_L^i e_R^j - \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^\nu \bar{\nu}_L^i \nu_R^j + \text{h.c.}, \quad (6.806)$$

式中 e^i, ν^i 均为弱作用本征态，我们将弱作用本征态 ν^i 命名为不同的中微子

$$\nu^i = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}. \quad (6.807)$$

我们可以将这个质量项对角化，从而得到轻子的质量本征态 e^i 和 ν^i 。我们将质量本征态 e^i 命名为不同的轻子

$$e^i = \{e, \mu, \tau\}. \quad (6.808)$$

与夸克的情况类似，在质量本征态下轻子的质量项是对角化的，但是轻子与 W 玻色子的相

相互作用项将不再是对角化的。实际的中微子都是左手中微子⁷²，这些左手中微子的质量本征态 ν^i 与 W 玻色子耦合的方式为

$$\mathcal{L}_{\nu W} = -\frac{g}{\sqrt{2}} U_{\text{PMNS}}^{ij} (\bar{e}_L^i W \nu_L^j + \text{h.c.}) \quad (6.809)$$

式中 U_{PMNS} 是一个 3×3 的幺正矩阵，它被称为 PMNS(Pontecrovo-Maki-Nagakawa-Sakata) 矩阵，其参数化方式与 CKM 矩阵是一致的。⁷³ 由于中微子的弱作用本征态和质量本征态是不相同的，因此中微子会随着时间推移在三个弱作用本征态 ν_e, ν_μ, ν_τ 之间不断变化。该现象被称为中微子振荡。

将上述四个部分加在一起，我们就得到了粒子物理标准模型的拉格朗日密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} &= \mathcal{L}_{\text{Gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &\quad + \bar{Q}_L^i (i\not{D}) Q_L^i + \bar{L}_L^i (i\not{D}) L_L^i \\ &\quad + \bar{u}_R^i (i\not{D}) u_R^i + \bar{d}_R^i (i\not{D}) d_R^i + \bar{e}_R^i (i\not{D}) e_R^i + \bar{\nu}_R^i (i\not{D}) \nu_R^i \\ &\quad + (D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) - V(H^\dagger H) \\ &\quad - Y_{ij}^d \bar{Q}_L^i H d_R^j - Y_{ij}^u \bar{Q}_L^i \tilde{H} u_R^j - Y_{ij}^e \bar{L}_L^i H e_R^j - Y_{ij}^\nu \bar{L}_L^i \tilde{H} \nu_R^j + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (6.810)$$

这个模型中包含了人类目前已知的所有基本粒子和除了引力之外的所有相互作用，它是我们迄今为止描述世界最为精确和最强有力的模型。

上述表达式中的场可以分成两类，一种是构成物质的场，一种是传递相互作用的场。传递相互作用的场都是规范矢量场，对应的粒子为相应的规范玻色子。其中强相互作用由八个胶子场 g 传递，弱相互作用三个规范玻色场 W^\pm, Z 这传递，而电磁相互作用由光子场 γ 传递。构成物质的场都是旋量场，分别为六个夸克场 u, d, c, s, t, b 、三个轻子场 e, μ, τ 和三个中微子场 ν_e, ν_μ, ν_τ 。我们可以将这 12 个费米子分成三组，分别为第一代费米子 u, d, e, ν_e ，第二代费米子 c, s, μ, ν_μ 和第三代费米子 t, b, τ, ν_τ 。这三代粒子除了质量不同之外，没有任何区别。除此之外，我们还有自发对称性破缺的标量希格斯场，它所对应的粒子是希格斯玻色子。这就是我们迄今为止已经发现的所有基本粒子。

标准模型中还有一系列参数，它们分别为六个夸克的质量、六个轻子的质量、 g_s, g, g' 三个耦合常数、希格斯粒子的两个参数（可以推出 W, Z, H 三个玻色子的质量）、CKM 矩阵的四个参数和 PMNS 矩阵的四个参数。在考虑到可能存在的 θ 项之后，标准模型中一共有 26 个参数（如果不计中微子质量的话一共是 19 个参数），它们的具体取值列在附录 C.1 之中。

在 20 世纪 70 年代中叶，破缺的电弱统一理论和量子色动力学已经基本发展成熟，“粒子物理标准模型”这一说法就是在那时被提出的。随着研究的逐渐深入，粒子物理标准模型的细节被逐渐丰富，最终形成了一个具有三代费米子和三种相互作用的完备理论，此后它只在中微子质量方面有过一次重大的修改。随着希格斯粒子的发现，标准模型的所有部分都已经得到了实验的验证。可以说到目前为止，标准模型已经是一个非常成熟的理论了，它包含了人们目前已知的所有粒子和所有相互作用，粒子物理学中的几乎所有实验结果都与标准模型相符合。当然，不论是在

⁷² 缺失的右手中微子可以用于解决中微子的微小质量问题。在狄拉克表象下，我们选取左手旋量和右手旋量为 $\psi_R = (i\sigma_2 \nu_R^*, \nu_R)^T$, $\psi_L = (\nu_L, i\sigma_2 \nu_L^*)^T$ 。在引入一个很大的马约拉纳质量项后，我们可以将中微子的质量项表示为

$$\mathcal{L}_\nu = -m \bar{\psi}_L \psi_R - \frac{M}{2} \bar{\psi}_R \psi_R.$$

将这一质量项对角化后，我们就可以得到中微子的质量本征态。在 $M \gg m$ 的情况下，两个质量本征态可以表示为 $m_1 = M, m_2 = m^2/M$ 。在这里质量为 m_2 的本征态就是通常的质量很小的中微子，而质量为 m_1 的本征态是一种新的大质量中微子，我们称之为惰性中微子。这一机制被称为跷跷板机制，即随着惰性中微子质量 m_2 的增大，通常中微子的质量 m_1 逐渐减小。它只是一种可能的猜想，目前尚未得到标准模型的证实。惰性中微子是暗物质的候选者之一。

⁷³ 如果我们在理论中引入马约拉纳质量项 $\mathcal{L} = -iM_{ij} (\nu_R^i)^c \nu_R^j$ （式中 $\nu^c = \nu^T \sigma_2$ 为 ν 场的电荷共轭），则我们要在 PMNS 矩阵中额外引入两个相角 α_{12}, α_{13} ，并将其参数化为 $U' = U \text{diag}(1, e^{i\alpha_{12}/2}, e^{i\alpha_{13}/2})$ 。

标准模型内部还是在标准模型之外都还有许多悬而未决的问题，我们将在后续章节中作更详细的讨论。

6.10 引力场量子化

在本节中，我们仍将度规张量选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ，与量子场论中的约定保持一致。

在前面的章节中我们给出了平直时空中的量子场论，将它推广到弯曲时空之中是直接的。回忆我们在广义相对论中的做法，我们要做的就是将积分体积元 d^4x 变为协变体积元 $\sqrt{-g}d^4x$ ，将导数 ∂_μ 变为协变导数 ∇_μ ，将平直空间中的度规 $\eta^{\mu\nu}$ 替换为弯曲空间中的度规 $g^{\mu\nu}$ 。除此之外，将旋量场推广到弯曲时空中需要利用标架表述。例如，弯曲时空中标量场的作用量可以表示为

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right), \quad (6.811)$$

这里我们明显地写出了协变导数 ∇_μ 的表达式，以说明这一作用量是定义在弯曲时空的。对于一个给定的弯曲时空来说，场的振幅可以表示为在该度规下对所有可能场构型的泛函积分

$$K = \int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]}. \quad (6.812)$$

这样我们就得到了弯曲时空量子场论，它可以描述引力场下量子场的演化规律。

接下来我们要在量子层面上写出引力场 $g^{\mu\nu}$ 的演化规律。在广义相对论中，自由引力场的作用量为

$$S_g[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (6.813)$$

经典引力场将使得上述作用量泛函取极值

$$\frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (6.814)$$

有了量子力学的经验，我们自然会想到用一个泛函积分来代替泛函极值。换句话说，我们将假设度规张量 $g^{\mu\nu}$ 可以取遍一切可能的取值，而其中的每个度规将为总振幅提供一个正比于作用量复指数的贡献。这样，自由引力场的泛函积分就可以表示为

$$K = \int \mathcal{D}[g^{\mu\nu}] e^{iS_g[g^{\mu\nu}]}. \quad (6.815)$$

将引力场与物质场 ϕ^a 耦合在一起，并写出物质部分的泛函积分，我们就得到了一个完整的量子引力理论

$$K = \int \mathcal{D}[g^{\mu\nu}] \mathcal{D}[\phi^a] e^{iS[g^{\mu\nu}, \phi^a]}, \quad (6.816)$$

其中系统的作用量可以表示为

$$S[g^{\mu\nu}, \phi^a] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \mathcal{L}_m, \quad (6.817)$$

式中我们用 ϕ^a 来代表所有可能出现的物质场。为处理旋量场，我们也可以将对度规场的泛函积分等价地转换为对标架场的泛函积分。

如果我们进一步地假设引力场非常微弱，那么度规张量将与平直时空只有一个微小的区别，此时我们可以将引力视为一个“微扰”。将度规张量的平直部分分解出来

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (6.818)$$

将拉格朗日密度展开为 h 的级数，保留至二阶项并略去适当的全导数项，我们就得到了线性化后的引力场拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32\pi G} \mathcal{I} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (6.819)$$

式中

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h - \partial_\lambda h^{\lambda\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu} + \partial^\nu h \partial^\mu h_{\mu\nu} \quad (6.820)$$

为自由微扰引力场的拉格朗日密度, $T^{\mu\nu}$ 为平直时空中物质场的能量动量张量, $h = h^\mu_\mu = h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}$ 。微扰引力场的作用量将可以表示为

$$S[h^{\mu\nu}, \phi^a] = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (6.821)$$

而相应的泛函积分应当对 $h^{\mu\nu}$ 进行

$$K = \int \mathcal{D}[h^{\mu\nu}] \mathcal{D}[\phi^a] e^{iS[h^{\mu\nu}, \phi^a]}. \quad (6.822)$$

这样我们就得到了线性化的微扰引力理论。⁷⁴

从这个线性化的理论中我们可以看到, 引力场是无质量且自旋为 2 的张量场。在如下的无穷小的坐标变换下

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (6.823)$$

引力场 $h^{\mu\nu}$ 将变换为

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu, \quad (6.824)$$

此时系统的拉格朗日密度是不发生改变的, 这意味着引力场也具有规范自由度。通常我们取谐和规范条件⁷⁵

$$\partial_\mu h^\mu_\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu h. \quad (6.825)$$

在这个规范条件下, 引力场的拉格朗日密度将进一步简化为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{64\pi G} \left(\partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \right) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (6.826)$$

事实上在一定的约束条件下我们可以先验地证明, 对于一个自由的二阶张量场来说, 唯一可能的拉格朗日密度就是

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial_\alpha h^{\nu\alpha} + h \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} h \square h + \frac{1}{2} m^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2), \end{aligned} \quad (6.827)$$

至多相差一个常数系数和一个全导数项。取质量 $m = 0$ 以及谐和规范条件并弃去适当的全导数项, 我们就得到了微扰引力场的拉格朗日密度。这实际上说明了一个更深刻的结果, 即任何一个无质量的二阶张量场看起来都像引力一样。

弃去适当的全导数项后, 我们可以将微扰引力场的拉格朗日密度表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32\pi G} h^{\mu\nu} K_{\mu\nu\lambda\sigma} (-\partial^2) h^{\lambda\sigma}, \quad (6.828)$$

式中

$$K_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}). \quad (6.829)$$

注意到

$$K_{\mu\nu\rho\omega} K_{\rho\omega\lambda\sigma} = I_{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (6.830)$$

式中

$$I_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda}), \quad (6.831)$$

⁷⁴ 由于引力场仍然具有规范冗余, 因此上述路径积分中将包含无穷大。为了消除掉这个无穷大, 我们需要利用法捷耶夫-波波夫方法将其转变为对鬼场的积分。关于这个问题的详细讨论从略。

⁷⁵ 在非微扰情况下, 这个规范条件将表示为 $\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$ 。另外与矢量场的规范条件类似, 谐和规范条件同样没有消除掉全部的规范自由度。不难验证, 对于由满足 $\square \xi^\mu = 0$ 的 ξ^μ 所连接的两个度规张量来说, 如果 $h^{\mu\nu}$ 满足谐和规范条件, 那么 $h'^{\mu\nu}$ 也将满足谐和规范条件。

因此张量 K 的逆就是其自身

$$K = K^{-1}. \quad (6.832)$$

这样自由引力子的费曼传播子将可以表示为

$$G_F^{\mu\nu\lambda\sigma}(x' - x) = \frac{1}{64\pi G} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x' - x)}. \quad (6.833)$$

进一步，只要计算出物质场的能量动量张量，我们就可以写出引力场与物质场耦合的规律。比如电磁场与引力场的相互作用项可以表示为

$$h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} h F^2 - h^{\mu\nu} F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu}. \quad (6.834)$$

根据这些相互作用项，我们就可以写出顶点规则，进而计算引力子与光子的相互作用。如果我们在拉格朗日密度中保留引力场 $h^{\mu\nu}$ 的更高阶项，那么我们还可以进一步地计算微扰引力场的自相互作用。

对上述微扰引力进行量纲分析可知， $h^{\mu\nu}$ 与度规张量 $g^{\mu\nu}$ 一致，均为无量纲量

$$[h^{\mu\nu}] = [g^{\mu\nu}] = 0, \quad (6.835)$$

而能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ 为拉格朗日密度对度规张量的泛函导数，它的量纲与拉格朗日密度的量纲是相同的

$$[T^{\mu\nu}] = [\mathcal{L}] = 4. \quad (6.836)$$

因此，我们可以求出引力耦合常数的质量量纲，结果为

$$[G] = -2. \quad (6.837)$$

注意到引力耦合常数 G 的质量量纲为复数，因此这个理论的圈图将会随其复杂性的提高而变得越来越发散。换句话说，这个理论是不可重整的。一个理论不可重整代表着它只是一个有效理论，它只在树图阶是有效的。如果我们考虑的能量远低于理论的能标，那么树图将给出压倒性的贡献，这时不可重整的理论仍然可以给出有意义的预言。但是如果我们考虑的能量超过了这个理论的能标，那么圈图的贡献将会变得越来越明显而使得理论彻底失效。

从实用主义的角度来说，一个不可重整的理论并非是不能够接受的，我们只需要将它应用在低能的情况下就可以了。粗略地说，量子引力的能标大约为普朗克质量

$$m_p = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2, \quad (6.838)$$

相应的尺度大约为普朗克长度

$$l_p = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}, \quad (6.839)$$

这当然远远超过了通常的极限。因此对于我们所考虑的几乎所有过程来说，前文中所讨论的引力理论都是适用的。但是，既然我们的目标是找到一个“统一理论”，那么一个不可重整化的理论就不会是我们的终点。理论的不可重整性代表了它将在圈图阶产生新物理，我们必须超越它，然后才能正确地看待世界。

目前对量子引力效应的检测非常困难，因为最低阶的树图效应描述的就是经典引力理论（广义相对论）的结果，而真正蕴含着量子引力的圈图效应又由于能量太高而几乎无法被实验所探测到。⁷⁶ 诚然，我们相信本节所给出的量子引力理论（度规场的直接量子化）应当是真实理论的一个低能近似，不过迄今为止还没有对量子引力效应的直接探测结果。因此，我们尚无法确定量子引力的真正形式。

⁷⁶关于量子系统中的引力，一个值得注意的实验结果是引力诱导干涉效应。设将一束粒子分成两部分，在空间中经过不同的路径后又汇聚到同一点上。由于引力场的存在，这两束粒子在传播过程中会产生相位差并发生干涉。实验观测到了这一相位差与粒子的质量 m 有关，这与薛定谔方程的预言相符。这个结果可能意味着量子系统中的引力并非纯几何的效应。

6.11 习题

1. 利用量纲分析, 给出从自然单位制恢复到国际单位制的一般方法, 并给出自然单位制中的能量单位 eV 与国际单位制下各个单位之间的变换关系。

2. 量子电动力学效应

- 计算如下量子电动力学过程的树图阶散射振幅和微分截面: 电子-电子散射 (穆勒 (Moller) 散射)、电子-正电子散射 (巴巴 (Barbar) 散射)、电子-光子散射 (康普顿散射)、电子- μ 子散射以及正负电子湮灭。
- 光子-光子散射 $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ 的最低阶费曼图是单圈图。试将相应的圈积分计算出来并对所有单圈图求和, 证明这个结果是有限的。
- 计算量子电动力学的有效势, 证明在低能近似下得到的恰好是库伦势。
- 若光子具有质量, 计算相应的有效势, 这被称为汤川势。
- 考虑电子在外电磁场中的运动, 给出此时量子电动力学相应的费曼规则。
- 给出准至单圈的真空极化对库伦势的修正, 并计算由此引起的电子能级劈裂。这个现象被称为兰姆 (Lamb) 移位。
- 在低能近似下写出电子在外电磁场中演化的方程, 在树图阶证明电子的自旋磁矩为 2。
- 证明电子的 g 因子的取值与顶点的电磁形状因子的关系为 $g = 2 + 2F_2(0)$ 。
- 电子的 g 因子与 2 的偏离被称为电子反常磁矩。试在单圈图的层面上给出电子反常磁矩的取值。
- 考虑正负电子散射的过程, 计算其极化散射截面 (不对初末态电子极化求和)。
- 计算卢瑟福散射和康普顿散射的单圈修正, 并给出准至单圈阶的振幅。
- 计算卢瑟福散射和康普顿散射树图阶的非极化振幅和非极化截面。
- 计算量子电动力学的二圈重整化。

3. 红外发散与因子化

- 考虑量子电动力学中 $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$ 的散射过程。由于光子传播子中包含 $1/k^2$, 因此在光子能量足够低的情况下, 积分中将会出现发散, 这被称为红外发散。试在恰当的正规化下, 计算顶点修正所引起的红外发散。
- 考虑量子电动力学中 $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu + \gamma$ 的散射过程。如果末态光子能量足够低, 那么这个过程将不能够与 $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$ 的散射过程区分开来。因此在光子能量足够低的情况下, $e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu + \gamma$ 的将同样会出现红外发散。试在恰当的正规化下计算由于光子辐射引发的红外修正, 并证明这个红外发散恰好将顶点修正的红外发散抵消掉了。
- 证明微扰量子电动力学与是微扰量子色动力学红外有限的。
- 证明 KLN(Kinoshita-Lee-Nauenberg) 定理: 对于任意一个么正的理论来说, 通过对初态和末态的所有软辐射求和, 可以消除掉理论中的所有红外发散。
- 证明因子化定理: 强子散射过程可以分解为

$$\frac{d\sigma}{dO} = \sum_{ab} \int_0^1 dx_a dx_b \sum_F \int d\Phi_F f_a^1(x_a) f_b^2(x_b) \frac{d\sigma_{ab \rightarrow F}}{dO},$$

式中 O 是任一力学量, $d\Phi_F$ 为末态相空间, a, b 为组分, $\sigma_{ab \rightarrow F}$ 为组分之间的散射振幅, $f_a^1(x_a)$ 为部分子分布函数, 代表强子 1 中具有动量为总体系的 x_a 倍的组分 a 所占的比重。换句话说, 强子散射可以分解为组分散射的硬过程, 它可以用微扰方法来计算; 以及组分的部分子分布函数, 它与碰撞过程无关, 需要通过实验拟合。

- (f) 通过将红外发散吸收到部分子分布函数的方法, 证明强子散射过程是红外有限的。这被称为共线因子化方法。
4. 在真空中平行放置两个无限大的平板, 计算板间的真空态及其真空能, 给出单位面积上真空能随板间距离的变化关系 $E(r)$ 。选用适当的正规化方法消除掉紫外发散, 并计算平板间距离变化所产生的作用力, 这被称为卡西米尔效应。

5. 运动方程与守恒流

- (a) 证明系统的生成泛函在变换 $\phi'(t) = \phi(t) + \varepsilon(t)$ 下不变。
- (b) 根据上述结果, 对生成泛函求关于源项 $J(x_i)$ 的泛函导数, 并给出系统的各关联函数之间所满足的方程。这组方程被称为施温格 (Schwinger)-戴森 (Dyson) 方程, 它是量子系统的运动方程。
- (c) 证明一阶施温格-戴森方程代表的是系统的经典性质, 而更高阶的施温格-戴森方程给出的是系统的量子修正。
- (d) 利用施温格-戴森方程, 给出多点关联函数的微扰展开表达式。
- (e) 若系统的作用量在如下的变换下保持不变 $x' = x + \delta x, \phi'_a = \phi_a + \delta \phi_a$, 试给出量子版本的诺特定理。

6. 非微扰定理

- (a) 证明量子场论的交叉对称性: 任意一个散射过程的 S 矩阵, 等于将其初态一个动量为 p 的粒子替换为末态的一个动量为 $k = -p$ 的反粒子所得到的 S 矩阵。⁷⁷
- (b) 利用瓦德-高桥恒等式, 证明量子电动力学重整化参数 $Z_1 = Z_2$ 对微扰论的任意阶都成立。
- (c) 在非微扰的层面上证明法雷定理: 在量子电动力学中, 只有奇数个外光子参与的过程的贡献之和为零。
- (d) 证明朗道-杨定理: 在量子电动力学中, 自旋为 1 的粒子不能够衰变为双光子。
- (e) 在为非阿贝尔规范场论引入鬼场后, 给出规范对称性的推广, 这被称为 BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) 对称性。
- (f) 给出瓦德-高桥恒等式在非阿贝尔规范场论中的推广, 这被称为 (Slavnov)-泰勒恒等式。并利用这一结果证明非阿贝尔规范场论的么正性。
- (g) 对于量子场论中的么正过程, 证明如下结论

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(i \rightarrow f) - \mathcal{M}^*(f \rightarrow i) \\ &= i \sum_X \int d\Pi_X (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_X) \mathcal{M}(i \rightarrow X) \mathcal{M}^*(f \rightarrow X), \end{aligned}$$

式中 X 为所有可能的中间态。

- (h) 证明向前散射振幅的虚部正比于总散射截面, 这一结果被称为光学定理。

⁷⁷ 需要注意的是, 这两个过程不能够在物理上同时成立, 因为粒子的能量必须满足 $p^0 > 0$, 同时反粒子的能量必须满足 $k^0 > 0$ 。不过由于振幅是解析的, 因此我们可以通过解析延拓的方法从一个振幅得到另一个振幅。

- (i) 利用光学定理证明费曼图的切割规则：费曼图的虚部正比于以一切可能的方式将费曼图切割成两部分的贡献之积的总和，如图 6.23 所示。需要注意的是，我们只能对内线进行切割，并且被切割开的内线要满足质壳条件。

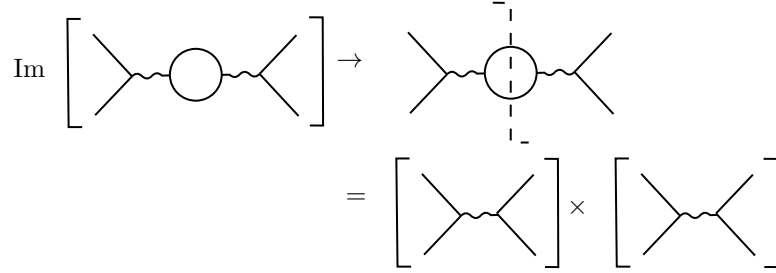


图 6.23: 费曼图的切割规则。

7. S 矩阵理论

- (a) 考虑海森堡绘景下的相互作用实标量场 ϕ ，证明其演化方程为

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = J(x),$$

式中

$$J(x) = \frac{\delta H_i}{\delta \phi(x)}.$$

- (b) 利用海森堡绘景下的场 ϕ 定义渐近场

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle = \sqrt{Z} \langle \beta | \phi_{\text{in}}(x) | \alpha \rangle,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \beta | \phi(x) | \alpha \rangle = \sqrt{Z} \langle \beta | \phi_{\text{out}}(x) | \alpha \rangle,$$

式中 Z 为重整化因子，上式对任意态矢 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 都成立。⁷⁸ 证明上述渐近场 $\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{out}}(x)$ 均满足自由标量场的演化方程，且满足与自由标量场相同的对易关系。

- (c) 证明

$$\phi(x) = \frac{\phi_{\text{in/out}}(x)}{\sqrt{Z}} + \int d^4y \Delta_{R/A}(x-y) J(y),$$

式中 $\Delta_{R/A}(x-y)$ 分别为自由标量场的推迟传播子和超前传播子。

- (d) 我们可以将场 $\phi(x)$ 利用平面波基矢展开为各算符 $\hat{a}_{\mathbf{p}}(t)$ 的组合。由于相互作用项的存在，各算符都将随时间变化。给出 $\hat{a}_{\mathbf{p}}(t)$ 与渐近场的展开算符 $\hat{a}_{\text{in/out}}(\mathbf{p})$ 之间的关系。

- (e) 证明渐近场展开算符 $\hat{a}_{\text{in/out}}(\mathbf{p})$ 满足

$$\sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}) - \hat{a}_{\text{in}}(\mathbf{p})) = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial^2 + m^2) \phi(x).$$

- (f) 设由渐进产生算符的到的初末状态分别为 $|i, \text{in}\rangle, |f, \text{out}\rangle$ ，它们是自由场的本征态。证明 S 矩阵元可以表示为

$$S_{fi} = \langle f, \text{out} | i, \text{in} \rangle = \langle f | \hat{S} | i \rangle.$$

⁷⁸ 我们不能说在时间趋近于正无穷或者负无穷的情况下，场算符 $\phi(x)$ 自身趋近于渐进场算符 $\sqrt{Z} \phi_{\text{out/in}}(x)$ ，这个条件过强了。我们称矩阵元意义下的趋近为弱收敛条件。

(g) 证明实标量场的 LSZ 约化公式

$$\begin{aligned} \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle &= \prod_{j=1}^m \left[-\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 x_j e^{-ip_j \cdot x_j} (\square_j + m^2) \right] \\ &\times \prod_{j=m+1}^{m+n} \left[\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4 x_j e^{ip_j \cdot x_j} (\square_j + m^2) \right] \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{m+n}) \} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

(h) 仿照类似的过程, 推导复标量场、旋量场和矢量场的 LSZ 约化公式。

(i) 通过在表达式中插入完备基矢 $|n\rangle$ (包含所有可能的多粒子态和束缚态) 的方式, 证明相互相互作用实标量场的关联函数 $\Delta'_F(x-x')$ 的傅里叶变换可以表示为

$$\Delta'_F(k^2) = - \int_0^\infty dm_n^2 \frac{\sigma(m_n^2)}{m_n^2 - k^2},$$

式中 $\rho(q) = \theta(q_0) \sigma(q^2)$, 而

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^{(4)}(q - p_n) |\langle 0 | \phi(0) | n \rangle|^2.$$

上述结果被称为凯伦 (Kallen)-莱曼 (Lehmann) 谱表示。

(j) 我们可以将 $\Delta'_F(k^2)$ 延拓到整个复平面 s 上, 证明在正实轴的割线两侧有

$$\Delta'_F(k^2 + i\varepsilon) - \Delta'_F(k^2 - i\varepsilon) = 2\pi i \theta(k^2) \sigma(k^2).$$

(k) 证明两点关联函数的色散关系

$$\Delta'_F(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds' \frac{\text{Im} \Delta'_F(s')}{s - s' - i\varepsilon}.$$

这意味着传播子可以表示为其不连续性的积分。

(l) 设复变函数 $f(z)$ 除实轴上 $z > z_R$ 的部分之外都是解析的, 证明一次减除的色散关系

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{\pi} \int_{z_R}^\infty dz' \frac{\text{Im} f(z')}{(z' - z_0)(z' - z)},$$

并以此类推, 给出任意阶减除的色散关系。

(m) 仿照类似的过程, 推导复标量场、旋量场和矢量场的谱表示与色散关系。

(n) 将散射矩阵进行分波展开, 讨论分波矩阵元的性质。

8. 低能有效理论

(a) 考虑 $\lambda\phi^4$ 理论的低能有效理论, 我们可以将 ϕ 场的低能部分 ϕ 与高能部分 $\hat{\phi}$ 明显地分离开来, 这样其作用量可以表示为 $S[\phi, \hat{\phi}]$ 。将泛函积分中的 $\hat{\phi}$ 积去, 并将其表示为有效作用量 $S_{\text{eff}}[\phi]$ 。

试将 $\hat{\phi}$ 作为微扰, 给出低能有效作用量 S_{eff} 的表达式。

(b) 作标度变换 $\Lambda \rightarrow b\Lambda$, 则有效作用量中各项的系数都将发生改变。这个变换实际上将不同能标下的低能有效理论联系在了一起, 我们称这个变换构成的群为重整化群。试证明自由标量场是重整化群变换的一个不动点。

(c) 在不动点的邻域内考察重整化群变换, 给出系统的有效拉格朗日密度中各项随参数 b 的依赖关系。并证明在四维时空之中, 除去 $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \phi^2, \phi^4$ 之外的所有项在低能下都将变得越来越不重要。换句话说, 在低能下我们只需要 $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \phi^2, \phi^4$ 三项就可以足够好地刻画 $\lambda\phi^4$ 理论的性质。

(d) 求出有效理论中 $\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \phi^2, \phi^4$ 三项的系数随截断能标 Λ 的变换关系, 这是重整化群方程的一个例子。

9. 重整化群方程

- (a) 考虑
- $\lambda\phi^4$
- 理论的重整化, 试证明重整化后的
- n
- 点振幅与裸振幅之间的关系为

$$Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \Gamma_R^n(p_i, \lambda_R, m_R, \mu) = \Gamma_0^n(p_i, \lambda_0, m_0),$$

式中重整化参量 λ_R, m_R 均为截断参数 μ 的函数。

- (b) 由于裸振幅
- Γ_0^n
- 不应当随重整化参数变化, 因此

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_0^n(p_i, \lambda_0, m_0) = 0.$$

利用链式求导法则, 给出重整化振幅 Γ_R^n 满足的偏微分方程。这被称为重整化群方程。

- (c) 如果外线动量增加了
- σ
- 倍, 那么振幅变为
- $\Gamma_R^n(\sigma p_i, \lambda_R, m_R, \mu)$
- 。试求出
- Γ_R^n
- 对
- σ
- 的依赖关系。

- (d) 在略去场正规化的情况下, 我们定义有效耦合常数
- $\lambda_{\text{eff}}(\sigma, \lambda)$
- , 它满足

$$\Gamma_R^n(\sigma p_i, \lambda_R, m_R, \mu) = \sigma^{4-n} \Gamma_R^n(p_i, \lambda_{\text{eff}}, m_R, \mu),$$

式中 σ^{4-n} 项来源于振幅的量纲。换句话说, 一个动量为 σp_i 、耦合常数为 λ_R 的振幅, 看起来就像是一个动量为 p_i 、有效耦合常数为 $\lambda_{\text{eff}}(\sigma, \lambda)$ 的振幅一样。试给出 λ_{eff} 所满足的方程, 并在单圈阶求解出 λ_{eff} 对 σ 的依赖关系。

- (e) 在考虑场正规化的情况下, 求出
- $\Gamma_R^n(\sigma p_i, \lambda_R, m_R, \mu)$
- 与
- $\Gamma_p^n(p_i, \lambda_{\text{eff}}, m_R, \mu)$
- 之间的关系。由于场正规化引起的附加项被称为反常量纲。

- (f) 若在
- $\sigma \rightarrow \infty$
- 的极限下, 有效耦合常数趋近于
- $\lambda_{\text{eff}} \rightarrow \lambda_1$
- , 则称
- λ_1
- 为理论的紫外不动点。对于特定的重整化群方程来说, 给出理论紫外不动点存在的条件。

- (g) 若理论的紫外不动点存在, 试给出振幅在入射动量趋于无穷的极限下的渐进表达式。

- (h) 将粒子的质量视为一个有效参数, 在单圈阶给出其取值随能量的跑动关系。

10. 仿照量子力学的方法, 给出量子场论的薛定谔表述。由于量子场论可以被视为无穷维的量子力学, 因此此时系统的“波函数”应当被推广为一个关于场构型
- $\phi(x)$
- 的泛函。在薛定谔表述下, 给出坐标算符和动量算符的推广, 写出哈密顿量的表达式, 并给出场泛函所满足的薛定谔方程。

11. 在二维时空 (1+1 维时空) 中精确求解无质量费米子的量子电动力学, 并给出光子由于真空极化而获得的质量。这是量子场论之中少见的可以精确求解的模型之一。

12. 有效作用量

- (a) 证明所有真空图的贡献之和可以表示为
- $\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle = e^L$
- , 式中
- L
- 是所有连通真空图的贡献。

- (b) 定义连通生成泛函
- $W[J]$
- 为
- $W[J] = -i \ln Z[J]$
- , 试证明该含源系统所对应的场的经典取值
- $\phi_c(x)$
- (也就是
- ϕ
- 场的真空期望值) 等于
- $W[J]$
- 对
- J
- 的泛函导数。

- (c) 利用
- $W[J]$
- 求出
- n
- 点连通格林函数的表达式。

- (d) 定义量子场论的有效作用量泛函
- $\Gamma[\phi_c]$
- 为泛函
- $W[J]$
- 的勒让德变换

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x).$$

试证明在无外源的情况下, 场的经典取值将使得系统的有效作用量取极值。

(e) 证明有效作用量生成泛函

$$Z_{\Gamma}[J] = \int \mathcal{D}[\phi_c] \exp \left[i \left(\Gamma[\phi_c] + \int d^4x J(x) \phi_c(x) \right) \right]$$

中所有的树图贡献之和等于量子场论的生成泛函 $Z[J]$ 。也就是说, 我们只需要对有效作用量理论中的所有树图求和, 就可以得到原理论中的微扰结果。

(f) 将系统的有效作用量展开为

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

式中 $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ 称为正规顶点。证明正规顶点对应于系统的单粒子不可约关联函数。

(g) 我们可以将有效作用量展开为

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x [-V_{\text{eff}}(\phi_c) + Z(\phi_c) \partial^\mu \phi_c \partial_\mu \phi_c + \dots],$$

式中的第一项 $V_{\text{eff}}(\phi_c)$ 定义为系统的有效势。试证明场的经典取值将使得系统的有效势取极值。

(h) 在单圈阶给出量子场论单粒子不可约有效作用量的计算。

(i) 考虑一个发生自发对称性破缺的场。试求出该场的有效势, 并证明由于量子涨落效应, 场将自发地破缺到一个稳定的极小值点。

(j) 给出上述自发对称性破缺理论的重整化。

13. 共振态

(a) 考虑两个粒子 A, B 发生散射的过程。在散射的过程中可能会出现这样一种情况, 即两个粒子先生成一个共振态 R , 然后这个束缚态 R 再衰变为某一末态 f , 相应的过程可以表示为 $A + B \rightarrow R \rightarrow f$ 。试在质心系能量 s 接近于共振态 R 的质量 m_R 的情况下, 利用上述两个子过程的截面给出粒子散射的截面。

(b) 证明在质心系能量接近于共振态质量的情况下, 散射截面将会显著增大。实验上可以通过这个过程来探测可能存在的共振态。

(c) 证明不稳定粒子的传播子可以表示为

$$\Delta(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 + im\Gamma},$$

式中 m 是粒子质量, Γ 是粒子的衰变宽度。

14. 电子-质子散射

(a) 在不考虑相对论效应和量子效应的经典电子-质子弹性散射下, 求解经典运动方程, 计算微分散射截面, 证明得到的就是卢瑟福公式。

(b) 在计及量子效应的电子-质子弹性散射下, 求解薛定谔方程, 计算微分散射截面。

(c) 在量子场论的框架下, 求解电子-质子弹性散射在高能极限下的微分散射截面。⁷⁹

(d) 假设质子不是一个点粒子, 而是一个具有特定电荷分布与磁荷分布的复合粒子, 试给出上述结果的修正。这被称为罗森布鲁斯 (Rosenbluth) 公式。

⁷⁹这里的高能指的是“相对高能”, 因为在真正的能量极高的情况下, 非弹性散射将占主导, 上述公式将失效。

- (e) 考虑电子-质子非弹性散射过程 $e^- + p \rightarrow e^- + X$, 如图 6.24 (a) 所示, 这里 X 代表质子碎裂产生的一系列粒子的总和。设初态电子动量为 p_1 , 初态质子动量为 p_2 , 末态电子动量为 p_3 , 散射过程中的动量转移为 $q = p_1 - p_3$ 。定义如下的运动学变量

$$Q^2 = -q^2, \quad x = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q}, \quad y = \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1},$$

仅考虑末态电子的微分散射截面, 并对所有可能的末态 X 求和 (这被称为单举散射截面), 试证明非弹性散射的截面总可以表示为

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^2} \left[\left(1 - y^2 - \frac{M^2 y^2}{Q^2} \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right],$$

式中 $F_1(x, Q^2), F_2(x, Q^2)$ 被称为深度非弹性散射的结构函数。

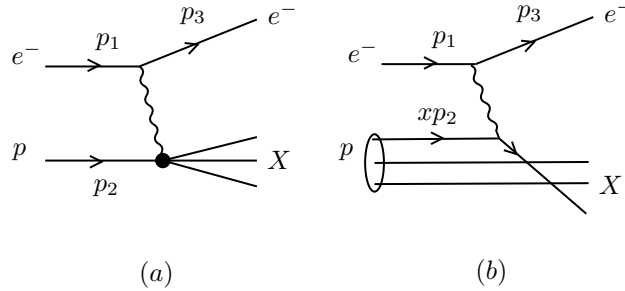


图 6.24: 电子-质子非弹性散射 (a) 与部分子模型 (b)。

- (f) 对于弹性散射来说, 试给出结构函数的具体形式。进一步地, 如果质子具有一定的电荷分布与磁矩分布, 试给出结构函数的修正。
- (g) 假设在高能下, 质子可以被视为是由一系列无相互作用的部分子组成的, 则深度非弹性散射过程可以被视为是电子与其中一个部分子发生的弹性散射, 如图 6.24 (b) 所示。试证明深度非弹性散射的各结构函数与 Q^2 无关,⁸⁰ 且可以利用部分子分布函数表示为

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = x \sum_q e_q^2 f_q(x),$$

式中 e_q 为部分子 q 的电荷, $f_q(x)$ 为质子中包含的具有动量为质子 x 倍的粒子 q 的个数。

15. 作代换 $g \rightarrow g/\sqrt{N}$, 在 $N \rightarrow \infty$ 的极限下写出 $SU(N)$ 规范理论的拉格朗日密度, 并求出 $SU(N)$ 规范理论的费曼规则。对于有限的 N 来说, 给出 $SU(N)$ 规范理论以 $1/N$ 为微扰进行的展开, 这被称为大 N 展开。
16. 分立对称性

- (a) 场算符 φ 在变换 \hat{U} 下的变换为 $\varphi' = \hat{U}\varphi\hat{U}^{-1}$ 。证明若场在变换下不变, 则场算符将与变换算符对易。
- (b) 空间反演 (宇称 P) 是将四维矢量的空间部分取反的操作, 时间反演 (T) 是将四维矢量的时间部分取反的操作, 电荷共轭 (C) 是将粒子变为反粒子的操作。试给出标量场、旋量场、矢量场分别在空间反演、时间反演、电荷共轭下的变换形式。
- (c) 给出标量场、旋量场、矢量场的各产生湮灭算符分别在空间反演、时间反演、电荷共轭下的变换形式。

⁸⁰ 结构函数 F_i 仅与 x 有关的结论被称为比约肯 (Bjorken) 标度不变性, 它在能量较高的情况下是适用的。在能量较低的情况下, 部分子假设是不适用的, 比约肯标度不变性也会遭到破坏。

- (d) 利用各产生湮灭算符, 给出量场、旋量场、矢量场的空间反演算符、时间反演算符、电荷共轭算符的表达式。
- (e) 给出各旋量场双线性型分别在空间反演、时间反演、电荷共轭下的变换形式。
- (f) $V - A$ 弱作用宇称不守恒, 即在宇称变换 P 下发生变化。
- (g) 证明 CKM 矩阵和 PMNS 矩阵中非零的相角 δ 将导致 CP 破缺, 即在电荷共轭和空间反演联合变换下发生变化。
- (h) 证明在非阿贝尔规范场论中, θ 项 $\mathcal{L}_\theta = \theta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a$ 具有规范不变性, 但是却会在 CP 联合变换下发生变化。
- (i) 证明 CP 破缺将导致正反物质不对称。
- (j) 给出标量场、旋量场和矢量场在空间反演、时间反演、电荷共轭的联合变换 $I = CPT$ 下的变换形式。
- (k) 证明正则对易关系在 CPT 联合变换下不变。
- (l) 证明 CPT 定理: 任何一个定域、厄密、洛伦兹协变、拉格朗日密度存在且满足自旋-统计关系的场论都在 CPT 联合变换下不变。
- (m) 利用 CPT 定理, 证明粒子与反粒子质量相等、守恒荷相反、寿命相等。

17. 手征有效理论

- (a) 证明无质量旋量场在其左手部分和右手部分的相位变换下分别是不变的。
- (b) 考虑无质量旋量场的 $SU(N)$ 规范理论。写出其费米子部分的拉格朗日密度, 并证明这个拉格朗日密度在左手场和右手场各自的 $U(N)$ 变换下保持不变。我们称这个系统具有手征对称性。
- (c) 证明费米子的质量项破坏了手征对称性。
- (d) 虽然拉格朗日密度具有手征对称性, 但是真空态未必具有相同的对称性。试证明: 如果真空具有手征对称性, 则理论将具有一系列的质量简并态; 如果真空不具有手征对称性, 则理论中将具有一系列无质量的标量粒子或者赝标量粒子。
- (e) 在至二阶的情况下, 给出满足手征对称性的最一般的作用量。
- (f) 讨论手征对称性的自发破缺。
- (g) 证明如果系统发生了自发对称性破缺, 则有 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, 这个现象被称为真空夸克凝聚。

18. 格点理论

- (a) 令格距为 a , 通过将微分替换为差分的方法, 写出格点上的自由标量场作用量。
- (b) 定义矢量场 A 的威尔逊线为

$$G(x, y) = P \exp \left[i \int_l A_\mu ds^\mu \right],$$

这里 l 为一条从 x 到 y 的路径, 而 P 为编路径算符, 即沿着路径走向, 先出现的算符在后出现的算符的后面。进一步定义键变量 $U_\mu(n) = G(n, n + \hat{\mu})$, 这里 $\hat{\mu}$ 为邻近格点之间的矢量。试写出 U_μ 与 A_μ 之间的关系。

- (c) 利用键变量给出规范场的作用量以及协变差分的表达式。
- (d) 给出格点上的量子色动力学作用量表达式, 并写出欧几里得时空上的路径积分。

- (e) 将路径积分中费米子部分积掉, 结果会得到一个算符的行列式, 给出其显式差分表达式。
- (f) 在格点场论的框架下, 给出算符期望值的表达式。
- (g) 给出利用格点场论计算强子质量的方法。
- (h) 证明无限重夸克存在夸克禁闭效应。

19. 手征量子反常

- (a) 证明零质量的自由旋量场在下述两个变换 $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$ 下分别是不变的, 并计算出相应的守恒流 J^μ 和 J_5^μ 。
- (b) 如果引入规范矢量场, 将偏导数推广为协变导数, 试计算矢量流 J^μ 与轴矢流 J_5^μ 的(经典)散度 $\partial_\mu J^\mu, \partial_\mu J_5^\mu$ 。在这里我们可以不考虑规范矢量场的动能项, 换句话说可以将之视为一个背景场。
- (c) 考虑上述对称性在量子场论之中的情况。在单圈阶计算如下的三点关联函数

$$iM^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 \times \langle 0 | T [J_5^\lambda(0) J^\mu(x_1) J^\nu(x_2)] | 0 \rangle e^{-i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2)},$$

所需要考虑的费曼图如图 6.25 所示。证明在适当的定义下,⁸¹ 矢量流仍然是守恒的, 而轴矢流不守恒。这一现象被称为阿德勒 (Alder) 反常。

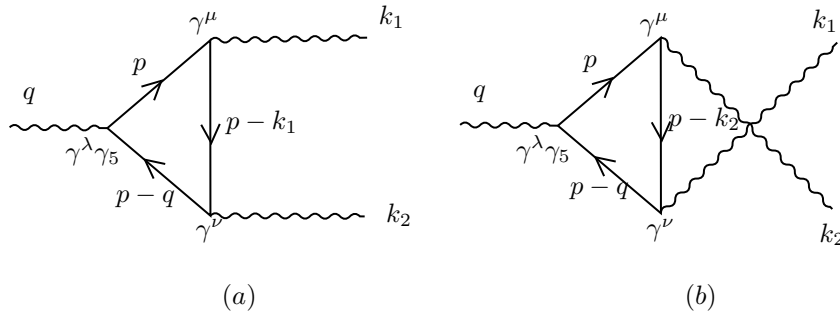


图 6.25: 量子反常的单圈图。

- (d) 证明轴矢流的反常将破坏掉瓦德-高桥恒等式。
- (e) 在路径积分层面上, 量子反常来源于路径积分的测度改变。给出手征变换下路径积分测度的变化, 并计算出量子反常的取值。
- (f) 计算非阿贝尔规范理论中的量子反常, 证明该量子反常正比于 $\text{Tr} [T^a \{T^b, T^c\}]$, 式中 T^a 是粒子所对应的生成元的表示。
- (g) 证明标准模型中所有的量子反常都会相互抵消。
- (h) 计算任意偶数维时空中的量子反常。

20. 标度反常

⁸¹在这里我们必须极为小心地处理相关的计算。在单圈图阶, 振幅 $M^{\lambda\mu\nu}$ 包含两张不同的图的贡献。初看起来, 这两张图所对应的圈积分只相差一个变量的平移。由于积分是对全空间进行的, 因此这两个积分将会精确地抵消。但如果积分是发散的, 那么将不能够简单地变量平移。

- (a) 证明无质量量子电动力学的作用量在如下的标度变换下不变

$$\phi'(x) = e^{-D\sigma} \phi(xe^{-\sigma}),$$

式中我们用 ϕ 代替所有的场, D 为场的质量量纲。

- (b) 证明无质量的量子电动力学在上述标度变换下将发生量子反常, 并计算量子反常的程度。

21. 有限温度场论

- (a) 若一个场处于温度为 T 的平衡态, 试求出其密度矩阵 $\hat{\rho}$, 并给出其算符 \hat{O} 期望值的表达式。这样得到的场论被称为有限温度场论。
- (b) 证明对于零温系统来说, 算符的期望值等于其在真空态 (基态) 下的期望值。因此相比于有限温度场论来说, 我们可以称之前讨论的场论为 “零温场论”。
- (c) 在统计物理之中, 配分函数可以表示为虚时间的路径积分

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \int_{\phi(0,\mathbf{x})=\phi(-i\beta,\mathbf{x})} \mathcal{D}[\phi] e^{-S_E[\phi]}.$$

需要特别注意的有两点: 首先由于我们对虚时间做路径积分, 因此维克转动后得到的是欧式时空的四矢量; 其次由于场在时间方向是周期性边界条件, 因此时间方向的频率也是离散的, 即只能取为一系列分立的值 $\omega_n = 2\pi n/\beta$ 。试仿照零温量子场论的方法, 计算有限温自由标量场的虚时传播子。

- (d) 对于费米场来说, 边界条件应当表示为 $\psi(0, \mathbf{x}) = -\psi(-i\beta, \mathbf{x})$ 。试计算有限温度自由费米场的虚时传播子。
- (e) 计算有限温 $\lambda\phi^4$ 理论的多点 (虚时) 关联函数, 对其进行微扰展开, 并求出在有限温度下的费曼规则。
- (f) 计算有限温 $\lambda\phi^4$ 理论的单圈积分, 并讨论其重整化。
- (g) 给出有限温度场论下量子电动力学的费曼规则, 比较它与零温场论之间的差异。
- (h) 讨论有限温度场论下量子电动力学的重整化, 给出有限温度效应对于耦合常数和粒子质量的修正。
- (i) 仿照有限温度量子场论的方法, 发展有限密度量子场论。

22. 量子多体理论 (凝聚态场论)

- (a) 在量子多体理论中, 我们用 $\hat{\psi}$ 来代表非相对论性的场 (波函数场), 并且在二次量子化的过程中, 我们始终将之看为算符。我们可以将场算符在一组一般的正交归一完备基矢 $\psi_n(\mathbf{x})$ 下展开为 $\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \hat{a}_i \psi_i(\mathbf{x})$ 。在这组表象下给出多体相互作用算符的表达式。
- (b) 一般来说, 量子多体系统的哈密顿量可以表示为动能项与各多体算符之和。在任意表象下 \hat{a}_i 下给出上述哈密顿量的表达式。
- (c) 如果各算符 \hat{a}_i 之间满足正则对易关系或反对易关系, 试证明它们分别描述了全同玻色系统和全同费米系统的二次量子化。
- (d) 证明态 ψ_i 上的产生算符和湮灭算符分别为 $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$, 且系统的粒子数算符为 $\hat{N} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ 。
- (e) 在动量表象下, 写出自由粒子的二次量子化哈密顿量, 计算自由费米子系统和自由玻色子系统的传播子。
- (f) 在辐射规范 $A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 下, 给出自由电磁场的非协变二次量子化。

- (g) 在动表象下, 写出具有库仑相互作用的多体系统的二次量子化哈密顿量表达式。计算上述相互作用场论的传播子, 给出其微扰展开, 写出相应的费曼规则, 并讨论其重整化。
- (h) 利用有限温度量子场论给出温度不为零时的相应结果。
- (i) 在二次量子化框架下, 讨论超导现象与超流现象。

23. 计算弯曲时空背景下的费曼规则, 讨论弯曲时空中两个粒子的散射过程。

24. 计算微扰引力场与物质场耦合的费曼规则, 并在微扰量子引力的框架下, 计算出两个粒子间通过交换单个引力子而发生的散射。

25. 给出引力的正则量子化方法, 并讨论其困难。

26. 公理化量子场论

一种公理化微扰量子场论的方案包含如下公理:

- (a) 协变公理: 如果两个参考系可以用非齐次洛伦兹变换联系起来, 那么一定存在一个可逆变换将这两个参考系中的态矢联系起来, 且同一态在这两个参考系中的力学量期望值相等。
- (b) 因果公理: 在类空区域内, 各力学量算符彼此对易或反对易。
- (c) 基态公理: 存在一个在非齐次洛伦兹变换下不变的态, 使得该态的四动量算符的本征值和广义角动量算符的本征值为零。且对于任意态来说, 其能量算符的本征值以及四动量算符平方的本征值恒大于等于零。
- (d) 完备公理: 对于希尔伯特空间中的态矢来说, 总存在一个场算符或其泛函可以将之变换为任意一个给定的态矢。
- (e) 渐进公理: 场算符在时间趋于无穷的极限下渐进于自由场。

试利用这些条件重建量子场论体系。

第七章 统一理论

本章中所使用的约定将在各节开头进行介绍。

7.1 天空中的乌云

在 19 世纪，经典物理学取得了巨大的成功，由牛顿力学、电动力学、经典统计力学组成的经典物理体系成功地解释了当时所观测到的大部分力学、电磁学和热力学现象。但同时物理学家开尔文 (Kelvin) 也指出，“物理学的天空中尚有两朵乌云，其中一朵乌云与光的速度有关，另一朵与黑体辐射有关。”¹ 这些问题仍然需要物理的进一步发展才能够解决。

开尔文的两朵乌云代表着那个时代基础物理学领域最重要的两个未解之谜。第一朵乌云指的是迈克耳孙-莫雷实验中发现光速不随参考系变化的现象。这一点在经典物理的框架下是很难理解的，要想解决这个问题，我们必须彻底改变我们的时空观念。现在我们已经知道了，在物体的运动速度接近光速的时候，经典力学中的伽利略变换已经失效，我们需要代之以洛伦兹变换。在洛伦兹变换下，光速将不随参考系的变化而变化，这样我们就解决了这个问题。

第二朵乌云指的是黑体辐射中的紫外发散。我们知道，一个处于热平衡状态的物体会向外辐射电磁波。如果这个物体只吸收从外界发射过来的电磁波而不对其进行反射的话，那么这个物体的辐射就被称为黑体辐射。如果我们在一个空腔上开一个小孔，那么这个小孔就可以被视为黑体，从它发射出的辐射就是黑体辐射。假设这个处于热平衡态的电磁场被腔体限制而形成一系列驻波，根据经典统计物理，每个驻波将具有 $k_B T/2$ 的能量。但由于在高频处驻波的模式将会越来越多，因此黑体辐射的总能量在高频处将会出现紫外发散。出现这个紫外发散的原因在于高频处经典统计物理将会失效，我们必须采用量子统计物理的方法才能解决这个困难。

开尔文的眼光是极为敏锐的，正是这“两朵乌云”成为了开启现代物理学大门的钥匙。对光速不变问题的探索促进了狭义相对论的诞生，而对黑体辐射问题的探索促进了量子力学的诞生。此后，物理学一日千里地发展起来。狭义相对论给出了物体在接近于光速时的运动规律，使得人们能够描述物体的高速运动；量子力学给出了支配原子与分子运动的规律，使得人们可以探索物质的微观结构。广义相对论将时空与引力结合起来，它让人们得以了解了宇宙本身的演化过程；而狭义相对论与量子力学的统一催生了量子场论的产生，它让人们更加深刻地理解了组成物质的基本粒子和各种基本相互作用。

毫无疑问，以广义相对论和各向同性假设为基础的宇宙学标准模型和以规范场论和自发对称性破缺为基础的粒子物理标准模型以极高的精确性和极为广泛的普适性为物理世界给出了可靠的预言，从而从深层次揭示了物理世界的运行规律。它不仅仅告诉了我们宇宙的大尺度结构，还告诉了我们基本粒子的种类和性质。它不仅仅能够解释质量极重、尺度极大的宇宙中的引力效应，还能够解释能量极高、尺度极小的粒子间的相互作用。在现代物理学的推动下，人类对世界

¹ “两朵乌云”的论断出自开尔文的演讲《在热与光的动力学理论之上的十九世纪的乌云》，原文直译为：“动力学理论断言热和光都是运动的方式，现在这种理论的优美性和清晰性被两朵乌云遮蔽得黯然失色了……第一朵乌云是随着光的波动理论出现的……第二朵乌云是麦克斯韦-玻尔兹曼关于能量均分的学说。”在许多物理教材和科普书籍中，这句话经常被表述为：“物理学的大厦已经基本落成，只剩两朵小小的乌云。”这是严重失实的。

的认识从未有过如此地深入和精确。

随着一代又一代物理学家的艰辛探索和不懈努力,人类的认识边界被极大地拓宽,接触到了许多此前没有机会了解的问题,观测到了许多此前从未观测过的现象,神秘而又深刻的物理世界正以一种全新的方式展现在人们面前。但与此同时,大量超越现有物理学框架、无法被现有物理学理论所解释的现象也被层出不穷地发现。面对着崭新的物理世界,人们感到既困惑又兴奋。困惑是因为这些新的物理现象已经超出了我们能够解释的范畴,而兴奋是因为更深层次的物理规律就潜藏在这些新奇的现象之中。通往物理世界终极规律的道路,此刻就呈现在我们的眼前。

下面我们列出基础物理之中一些尚未解决的问题,供读者参考:²

- (1) 如何将引力与其他相互作用相统一?
- (2) 是否存在新的相互作用以及新的基本粒子?
- (3) 我们现在所说的“基本粒子”是最基本的吗?
- (4) 为什么不同的相互作用之间的强度差距如此之大?
- (5) 为什么宇宙中存在(且只存在)三代不同的夸克和轻子?
- (6) 为什么强作用中不存在 CP 对称性破缺?
- (7) 希格斯粒子有内部结构吗?
- (8) 为什么标准模型中存在这些参数,并且它们取为现在的值?
- (9) 存在磁单极子吗?
- (10) 超对称存在吗?
- (11) 什么是暗物质?
- (12) 什么是暗能量?
- (13) 宇宙的未来是什么样的?
- (14) 宇宙极早期的演化过程是什么样的?
- (15) 暴胀理论正确吗?
- (16) 大爆炸的奇点从何而来?
- (17) 如何解释宇宙中正反物质不对称的问题?
- (18) 为什么宇宙的曲率非常接近平坦时空?
- (19) 是否存在所谓的“平行宇宙”?
- (20) 是否存在额外维?

7.2 作为有效理论的量子场论

现在,我们清楚地知道世界上仍然存在着大量无法被现有理论解释的现象。这些问题并非是孤立的,它们中的大多数或许将在一个更加深入的物理理论之中得到解决。但是我们对这个“真实理论”则几乎一无所知,仅仅知道它需要在低能的情况下退化为粒子物理标准模型和广义相对论。在这种情况下,我们还能够对它说些什么呢?

虽然在没有任何实验结果的情况下似乎很难先验地说些什么,但事实上我们确实有一个很强的结论,它可以表述如下:

在一定的条件下,³ 任何一个同时满足相对论和量子力学的理论,其低能有效理论都

²需要说明的是,虽然这些问题是物理学领域中非常“基础”的问题,但是它们绝不是当今物理学中最重要的问题。事实上,除非物理学的基础理论本身有新的重大突破(就像相对论和量子力学对经典物理学的革命一样),否则这些问题几乎是没有任何希望得到解决的。或者说,这些问题的解决本身就预示着基础理论的重大突破。相比之下,其他各个不同的尺度上都存在着一大批极具生命力的重要问题,如凝聚态物理中的超导效应、经典物理中的湍流,以及生命和智能的涌现等等。对于当今的物理学界来说,将精力投向这些更加“实际”的问题,很可能比沉溺于虚无缥缈的统一理论更有意义。

³公理化量子场论有许多抽象程度和严密程度各异的公理体系,其中一个广泛使用的微扰公理体系可参考第六章中的习题26,这被称为LSZ公理体系。非微扰的公理化量子场论体系也有很多,比较著名的有怀特曼(Wightman)公理体系等。公理化量子场论是一个非常普遍的体系,没有预设任何相互作用的形式,CPT定理和自旋-统计关联都可以从这一体系中推导出来。不

是一个量子场论。(或者更形象地说, 这样的理论在低能量下“看起来”都像是一个量子场论。)

如果这个结论真的可靠的话, 那么理论在低能量下表现为量子场论将不是一个巧合, 而是因为它只能表现为量子场论的形式。诚然, 一个真正的终极理论可能看起来与量子场论相当不同, 这正如量子力学和相对论看起来与牛顿力学完全不一样。但是如果能量足够低, 那么它将总会回到某种量子场论, 这正如量子力学和相对论在能量足够低的情况下总要回到某种牛顿力学一样。

通过对量子场论的进一步研究, 我们还能够得到一些更强的结果, 它们可以为理论施加一些更强的限制。例如, 任何一个自旋为 2 的无质量场在低能量下看起来都像是引力(或者说引力场是自旋为 2 无质量场唯一可能的低能有效理论), 这是因为广义相对论的最低阶微扰场恰好是自旋为 2 的自由场。这个结果我们已经在 6.10 节中讨论过了。

除此之外, 通过对顶点耦合常数的量纲进行分析, 我们发现四维时空中任何一个可重整的包含矢量场的理论都是一个规范理论。我们可以利用量纲分析的方法对此进行一个简单的说明。在四维时空中, 标量场、旋量场和矢量场的量纲分别为

$$[\phi] = 1, \quad [\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2}, \quad [A^\mu] = [A_\mu] = 1 \quad (7.1)$$

因此如果一个顶点中包含 n_b 个自旋为 0 或 1 的玻色场、 n_f 个自旋为 1/2 的费米场以及 n_d 个偏导数, 那么该顶点耦合常数的量纲为

$$[\lambda] = 4 - n_b - \frac{3}{2}n_f - n_d. \quad (7.2)$$

如果我们希望理论可重整, 那么我们就要求这个耦合常数的量纲大于或等于零。在不引入矢量场的情况下, 我们能构造出如下的相互作用项

$$\phi^3, \quad \phi^4, \quad \bar{\psi}\phi\psi, \quad (7.3)$$

它们分别为 ϕ^3 相互作用、 ϕ^4 相互作用以及汤川相互作用。而如果我们考虑矢量场, 那我们可以构造出如下的相互作用项

$$A^\mu \phi \partial_\mu \phi, \quad A^2 \phi^2, \quad \bar{\psi} A \psi, \quad (\partial_\mu A_\nu) A^\mu A^\nu, \quad A^4, \quad (7.4)$$

前两项为标量量子电动力学(标量规范理论)的相互作用, 第三项为量子电动力学(旋量规范理论)的相互作用, 而最后两项为非阿贝尔规范理论的自相互作用。

事实上, 这就是我们在四维时空中所能写出的所有可重整的相互作用项。即使我们在理论中额外引入自旋大于 1 的场, 我们也不能够构造出其他的协变相互作用项。因此, 四维时空中任何一个可重整的包含矢量场的相互作用理论都是一个规范理论。⁴ 如果说的更强些, 那么任何一个自旋为 1 的无质量场在低能量下看起来都像是规范场(或者说规范场是自旋为 1 无质量场唯一可能的低能有效理论)。这一点或许解释了为什么规范理论在量子场论中如此重要, 以及为什么我们在通常的量子场论中不会讨论自旋大于 1 的场。但现在看来, 可重整性的要求已经显得不那么重要了, 因为我们所考虑的本来就是一个作为有效理论的量子场论。

以上我们讨论了可重整性的条件对量子场论的限制, 然而量子场论本身也对相互作用的形式有所限制。例如我们认为, 含有自旋高于 2 的场的相互作用量子场论是不自洽的。⁵ 因此自旋为 2 的引力场就是量子场论中所能容许的自旋最高的场了, 其他自旋更高的场将不能够作为基本粒子出现。

过在这方面的研究遇到了很大的困难, 人们至今尚不能够从非微扰的公理化量子场论中构造出 $3+1$ 维闵可夫斯基时空中的任何一个非平凡的量子场论。这个问题与千禧年七大数学难题中的“杨-米尔斯存在性与质量间隙”密切相关。

⁴以上的讨论是粗糙的。我们仍然可以问, 如果上述各可重整项的系数发生改变, 使得规范对称性被破坏了, 那么它们还是可重整的吗? 事实上若系统没有规范对称性, 则瓦德-高桥恒等式将被破坏, 而这对于量子场论的可重整性是至关重要的。

⁵这并非是一个严格的禁戒定理, 而仅仅是我们在某种程度上信念。我们相信如果场论中包含大于 2 的自旋, 那么在理论中会出现一些难以克服的问题。例如在量子场论中, 高自旋粒子应当与守恒流相耦合, 然而对于自旋大于 2 的无质量粒子来说, 却不能够写出合适的守恒流。

我们仍然不知道理论的最终形式是什么样的, 不过我们至少可以对标准模型进行一些扩展。如果我们能够给出恰当的修正项, 那么我们实际上就得到了终极理论相对于量子场论的低阶修正, 它们将从侧面揭示出终极理论的一些性质。当然我们知道引力在量子场论的框架下是不可重整化的, 因此这意味着量子场论的框架一定是不完备的, 它仅仅是一个有效理论。我们最终还是要超越量子场论的框架, 给出全新的物理理论。

在本章接下来的几节之中, 我们将简要介绍统一理论的几个可能的备选理论。需要特别说明的是, 目前尚未有任何一个备选理论得到了实验的证实, 它们并不一定真的是支配真实物理世界的规律, 我们也不知道这些理论究竟在何种程度上反映了统一理论的性质。这些理论仅仅代表了迄今为止理论物理学家最优秀的想象而已。

7.3 规范统一理论

在本节中, 我们将采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$, 同时度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, γ 矩阵将选取为狄拉克表示。在文献中这个理论被称为“大统一理论”, 但由于它并不能够实现所有相互作用的真正统一, 因此我们在这里改称为“规范统一理论”。

标准模型的规范对称群为 $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$ 。我们对这个理论仍然不是很满意, 因为理论的结构仍然是较为复杂的。首先, 标准模型三个规范群的耦合常数各不相同, 因此实际上三种相互作用并未完全统一起来 (即使是通常所说的“电弱统一”也是两个耦合常数不同的单群的直积, 并未真的统一)。其次, 对于左手夸克、右手夸克、左手轻子和右手轻子来说, 我们将它们放在不同的表示空间中, 并且将不同的协变导数作用在它们之上, 这样一种处理方式看起来是比较刻意的。因此我们希望能够找到一个理论, 它能够以一种更加自然和统一的方式描述标准模型中的全部内容。

这个问题不能够在标准模型之内解决, 我们需要对标准模型进行修改和扩充。我们已经有了一个经验, 那就是虽然在低能量下电磁相互作用和弱相互作用看起来是完全不相关的两种相互作用, 但是在高能的情况下却可以由电弱统一理论 $\text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$ 来描述。因此我们设想, 如果能够为理论找到一个更大的规范群, 使得它的高能下能够统一地描述强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用, 而在低能下重新破缺为标准模型, 那么它将是一个理想的统一理论。同时它将包括更多的相互作用和更多的粒子, 可能会预言一些在极高能量下发生的新现象, 解决一些标准模型之外的问题。

一个有吸引力的想法是将标准模型的对称群扩充到 $\text{SU}(5)$ 。直观地来看, $\text{SU}(5)$ 群可以作用在一个五维复矢量上并保证其内积不变; 而 $\text{SU}(3)_C$ 群相当于保持这个五维复矢量的前三个分量内积不变, $\text{SU}(2)_L$ 群相当于保持这个五维复矢量的后两个分量内积不变, $\text{U}(1)_Y$ 群相当于为这个五维复矢量添加一个不改变内积的相位因子。因此 $\text{SU}(5)$ 群确实能够容纳标准模型的对称群。

从李代数的角度可以更清楚地看到这一点。 $\text{SU}(5)$ 群的李代数 $\mathfrak{su}(5)$ 由五维的厄密矩阵刻画, 从中可以找到 24 个相互独立的生成元。在这 24 个生成元中, 我们可以将其中八个选取为具有如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

式中 A 是一个 3×3 的分块厄密矩阵。习惯上我们将这些生成元选取为盖尔曼矩阵, 它们恰好构成了 $\text{SU}(3)$ 群的生成元 $\mathfrak{su}(3)$ 。另外还可以将其中三个选取为具有如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

式中 A 是一个 2×2 的分块厄密矩阵。习惯上我们将这些生成元选取为泡利矩阵, 它们恰好构成了 $\text{SU}(2)$ 群的生成元 $\mathfrak{su}(2)$ 。最后我们还可以将其中一个生成元选取为一个对角矩阵 (除去一

个归一化常数)

$$Y = \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (7.7)$$

我们称之为超荷矩阵，它恰好构成了 $U(1)$ 群的生成元 $u(1)$ 。用群论的语言来说，这意味着

$$\text{su}(3) \oplus \text{su}(2) \oplus u(1) \subset \text{su}(5), \quad (7.8)$$

也就是说标准模型规范群的李代数 $\text{su}(3) \oplus \text{su}(2) \oplus u(1)$ 是 $\text{su}(5)$ 的子代数。⁶ 由于 $SU(5)$ 群实际上是秩数最小的可以容纳标准模型对称群的单李群，因此将标准模型规范群扩充为 $SU(5)$ 群是一个自然的想法。除了对应于标准模型的 12 个生成元之外， $SU(5)$ 群还有 12 个其他的生成元，它们将给出 12 个新的规范自由度，承载超出标准模型之外的相互作用。

在量子场论中，粒子是以场的形式存在的。不同场在洛伦兹变换下的行为不同，因此它们承载了不同的洛伦兹群表示。类似地，各个不同的场在规范变换下的行为同样是不尽相同的，因此它们也承载了规范群的不同表示。在群论中，我们通常用群表示的维数来标记不同的群表示。比如说夸克的三个色分量组成了一个三维色空间

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

它实际上就承载了强相互作用规范群 $SU(3)_C$ 的基本表示 **3**。类似地，轻子或者夸克可以两两组成二重态

$$\psi_l = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}, \quad \psi_q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

它们实际上就承载了弱相互作用规范群 $SU(2)_L$ 的基本表示 **2**。对于 $U(1)_Y$ 规范群来说，所有的表示都是一维的，因此我们可以用 $U(1)$ 规范群的超荷 Y 来标记这个表示。

不同的粒子在规范群下有不同的变换规则，实际上就意味着它们是规范群不同的不可约表示。比如对于左手夸克来说，它具有三个不同的色分量，而又两两组合为弱作用的二重态，因此它实际上就是 $SU(3)_C$ 的基本表示 **3_L** 和 $SU(2)_L$ 的基本表示 **2_L** 的直积。由于其 $U(1)_Y$ 规范群的超荷为 $1/6$ ，因此我们将左手夸克所对应的标准模型规范群表示记为 **(3, 2, 1/6)_L**，式中角标 L 代表群作用在左手场上。类似地，对于左手轻子来说，它们不受到强作用，但是却两两组合为弱作用二重态，因此它实际上是 $SU(3)_C$ 的恒等表示 **1_L** 和 $SU(2)_L$ 的基本表示 **2_L** 的直积。由于其 $U(1)_Y$ 规范群的超荷为 $-1/2$ ，因此我们将左手轻子所对应的标准模型规范群表示记为 **(1, 2, -1/2)_L**。以此类推，我们可以写出标准模型中所有粒子所对应的表示，它们分别为⁷

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)_L, \quad u_R : (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)_R, \quad d_R : (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3)_R, \quad (7.11)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)_L, \quad e_R : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)_R. \quad (7.12)$$

这些表示中不包含右手中微子。从中我们可以看到，仅仅是对于标准模型中的第一代四个费米子 u, d, e, ν_e 来说，它们所对应的表示也多达五个。这样一种费米子的表示仍然是相对繁复的。

上述表示可以通过电荷共轭进行简化。对旋量场 ψ 做电荷共轭变换，我们得到

$$\psi^C = C\bar{\psi}^T, \quad C = i\gamma_2\gamma_0. \quad (7.13)$$

⁶更严格地说，如果考察规范群本身的话，那么要将标准模型规范群约化掉一个六阶循环群 \mathbb{Z}_6 后，它才是 $SU(5)$ 的子群，即 $(SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1))/\mathbb{Z}_6 \subset SU(5)$ ，这一点多少是有些微妙的。

⁷这里的下标 L 和 R 实际上标记的是洛伦兹群的左手旋量表示 $(1/2, 0)$ 和右手旋量表示 $(0, 1/2)$ ，而并非是规范群的不同表示。

定义电荷共轭场 ψ^C 的左手分量和右手分量为（注意这不是原场的左手分量 ψ_L 和右手分量 ψ_R 的电荷共轭）

$$\psi_L^C = (\psi^C)_L = \hat{P}_L \psi^C = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi^C, \quad (7.14)$$

$$\psi_R^C = (\psi^C)_R = \hat{P}_R \psi^C = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi^C, \quad (7.15)$$

我们将得到

$$\begin{aligned} (\psi_L)^C &= C\gamma^0 (\psi_L)^* = i\gamma^2 \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi^* = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) i\gamma^2 \psi^* \\ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) C\gamma^0 \psi^* = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi^C = \psi_R^C, \end{aligned} \quad (7.16)$$

类似地有

$$(\psi_R)^C = \psi_L^C. \quad (7.17)$$

由此可以看到，在做电荷变换后，左手场将变换为右手场，而右手场将变换为左手场。在这一变换下，粒子的信息并没有损失，因此 ψ_L^C 和 ψ_R 描述了相同的粒子，同样 ψ_R^C 和 ψ_L 也描述了相同的粒子。

根据上述讨论我们看到，对于标准模型中的粒子来说，它与其电荷共轭实际上对应的是同一个表示，我们可以在理论中选用任何一种表示来代表这种粒子。如果我们对粒子作电荷共轭变换，那么左手表示将变为右手表示，右手表示将变为左手表示，基本表示将变为反基本表示，同时超荷将取负号。通常的做法是将所有的表示都通过电荷共轭变换到左手，然后将所有的手征指标全部略去。这些共轭表示与原来的表示都可以代表标准模型中的粒子，它们是等价的。在做电荷共轭变换后，各个右手场将变换为相应的左手场

$$d_R : (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3)_R \xrightarrow{C} d_L^C : (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3)_L, \quad (7.18)$$

$$u_R : (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3)_R \xrightarrow{C} u_L^C : (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)_L, \quad (7.19)$$

$$e_R : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)_R \xrightarrow{C} e_L^C : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)_L. \quad (7.20)$$

因此我们将标准模型中各个粒子所对应的表示统一记为

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6), \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2), \quad (7.21)$$

$$e_L^C : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1), \quad d_L^C : (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3), \quad u_L^C : (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3). \quad (7.22)$$

接下来我们的目标就是将标准模型的各个粒子以一种恰当的方式填入 SU(5) 规范理论的表示中，使得它能够在低能量时自动给出粒子物理标准模型。为此接下来我们将不失一般性地考察 SU(N) 群的表示。一种系统性地研究群表示的方法是借助张量分析，不同的张量在变换下具有不同的性质，它们对应于不同的表示。最简单的表示是将变换作用在标量上的结果，它在变换后不发生改变

$$\phi' = \phi, \quad (7.23)$$

这对应于 SU(N) 群的恒等表示 $\mathbf{1}$ ，所有的变换都是恒等变换。将变换作用在逆变矢量 ψ^i 上，它将以如下方式变换

$$\psi'^i = U^i_j \psi^j, \quad (7.24)$$

这相当于 N 维空间中的旋转，它对应于 SU(N) 群的基本表示 \mathbf{N} ，我们用 U^i_j 来表示其表示矩阵的分量。类似地，将变换作用在协变矢量 ψ_i 上，它将以如下方式变换

$$\psi'_i = U_i^j \psi_j, \quad (7.25)$$

它按照逆变矢量的共轭进行变换，这对应于 SU(N) 群的反基本表示 $\bar{\mathbf{N}}$ ，我们用 U_i^j 来表示其表示矩阵的分量。当然，这里所说的标量和矢量指的是场在 SU(N) 变换下的行为，而不是它在洛伦兹变换下的行为。

各个不同的群表示之间可以进行进一步的运算。群表示的直积定义为表示矩阵的直积

$$[\Pi_1 \otimes \Pi_2](g) = \Pi_1(g) \otimes \Pi_2(g) \quad (7.26)$$

其中矩阵的直积 $A \otimes B$ 将矩阵 A 中的每个元素 A_{ij} 都替换为分块矩阵 $A_{ij}B$

$$A \otimes B = \{A_{ij}B\}. \quad (7.27)$$

群表示的直和定义为表示矩阵的直和

$$[\Pi_1 \oplus \Pi_2](g) = \Pi_1(g) \oplus \Pi_2(g), \quad (7.28)$$

其中矩阵的直和 $A \oplus B$ 将矩阵 A 与 B 以对角的方式拼接在一起

$$A \oplus B = \text{diag}(A, B). \quad (7.29)$$

对群表示进行直积或者直和，得到的仍然是群表示。

从基本表示和反基本表示出发，我们可以构造更复杂的表示。张量 $\psi_{j_1 j_2 \dots}^{i_1 i_2 \dots}$ 在 $SU(N)$ 变换下的性质为

$$\psi_{j_1 j_2 \dots}^{i_1 i_2 \dots} = U^{i_1}_{k_1} U^{i_2}_{k_2} \dots U^{i_l}_{k_l} U_{j_1}^{l_1} U_{j_2}^{l_2} \dots \psi_{l_1 l_2 \dots}^{k_1 k_2 \dots}. \quad (7.30)$$

这些张量仍然对应于 $SU(N)$ 群的表示，它相当于各基本表示与反基本表示的直积。然而，它们并非是最基本的表示，因为这些表示中存在着一些子空间，变换作用于其上的时候仍然仅将子空间中的元素变换到子空间自身。可以看出，这些子空间中承载了一些更小的表示，而原来的表示是由这些表示的直和构成的。我们称包含不变子空间的表示为可约表示，不包含不变子空间的表示为不可约表示。直观地说，可约表示的表示矩阵在特定的么正变换下可以表示为一系列分块对角矩阵，每一块矩阵对应于一个不可约表示。在物理中，不可约表示是更加基本的，因此我们要将张量表示分解为一系列不可约表示的直和。

作为一个简单的例子，我们可以考虑二阶张量表示 ψ^{ij} ，它是两个基本表示的直积。这个表示是可约的，因为我们可以验证，任何对称张量在 $SU(N)$ 变换下都仍然是对称张量，而任何反对称张量在 $SU(N)$ 变换下都仍然是反对称张量。也就是说，对称张量和反对称张量就是二阶张量表示的两个不变子空间。因此，我们可以将 ψ^{ij} 拆分为对称张量 S^{ij} 和反对称张量 A^{ij} 两部分

$$\psi^{ij} = S^{ij} + A^{ij}, \quad (7.31)$$

式中

$$S^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} + \psi^{ji}), \quad A^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} - \psi^{ji}). \quad (7.32)$$

可以验证，这两部分各自承载了 $SU(N)$ 群的表示

$$S'^{ij} = U^i_k U^j_l S^{kl}, \quad A'^{ij} = U^i_k U^j_l A^{kl}, \quad (7.33)$$

并且它们实际上均为不可约表示。根据表示的维数，我们将 S^{ij} 记为表示 $\mathbf{N}(\mathbf{N}+1)/2$ ，将 A^{ij} 记为表示 $\mathbf{N}(\mathbf{N}-1)/2$ ，张量表示 ψ^{ij} 就是这两个表示的直和。这可以表示为

$$\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{N}-1)}{2} \oplus \frac{\mathbf{N}(\mathbf{N}+1)}{2}. \quad (7.34)$$

由于表示直积的维数等于各表示维数之积，表示直和的维数等于各表示维数之和，因此将表示替换为相应的维数，直积和直和分别替换为普通的乘积和求和，上述等式仍然是可以得到满足的。

在 $SU(N)$ 变换下，狄拉克张量 δ^i_j 以及列维-奇维塔张量 $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}, \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ 是不变的。利用这些张量，我们可以构造出更多的不可约表示。例如，我们可以考虑基本表示 \mathbf{N} 与反基本表示 $\bar{\mathbf{N}}$ 的直积 $u^i v_j$ 。这一表示仍然是可约的，因为无迹矩阵在 $SU(N)$ 变换下仍然保持无迹，而单位矩阵在 $SU(N)$ 变换下仍然是一个单位矩阵。因此，我们可以将相应的张量分解为

$$u^i v_j = \left(u^i v_j - \frac{1}{3} \delta^i_j u^k v_k \right) + \frac{1}{3} \delta^i_j u^k v_k. \quad (7.35)$$

等式的右端分别承载了两个不可约表示，其中第一项的无迹张量所对应的表示为 $\mathbf{N}^2 - \mathbf{1}$ ，我们称之为 $SU(N)$ 群的共轭表示；第二项单位矩阵所对应的表示为 $\mathbf{1}$ ，实际上就是恒等表示。我们可以将上述结果表示为

$$\mathbf{N} \otimes \bar{\mathbf{N}} = (\mathbf{N}^2 - \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}. \quad (7.36)$$

这意味着基本表示与反基本表示的直积可以分解为共轭表示与单位表示的直和。当然，我们也可以考虑更加复杂的张量分解，读者可参考群表示理论的相关专著。

在 $SU(5)$ 统一理论中，旋量粒子将以适当的方式组合起来，构成 $SU(5)$ 群的表示。首先我们考虑如下的矢量

$$\psi_{iL} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix}_L, \quad (7.37)$$

它对应于 $SU(5)$ 群的反基本表示 $\bar{\mathbf{5}}$ 。我们设想在低能量下， $SU(5)$ 群破缺为 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 群，因此上述群表示也将破缺为标准模型的群表示。破缺的规则由群论中的分支规则给出，其详细的推导过程请读者参考群表示理论的专著。我们在这里直接给出最终的结果

$$\bar{\mathbf{5}} \rightarrow \underbrace{(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3)}_{d_R \rightarrow d_L^C} \oplus \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)}_{(\nu_L, e_L)^T}. \quad (7.38)$$

从这个表示中，我们可以看到 $SU(5)$ 群的 $\bar{\mathbf{5}}$ 表示在破缺之后自然地生成了标准模型中的两个表示。接下来考虑如下的 5×5 反对称矩阵

$$\psi_L^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi^{21} & -\psi^{31} & -\psi^{41} & -\psi^{51} \\ \psi^{21} & 0 & -\psi^{32} & -\psi^{42} & -\psi^{52} \\ \psi^{31} & \psi^{32} & 0 & -\psi^{43} & -\psi^{53} \\ \psi^{41} & \psi^{42} & \psi^{43} & 0 & -\psi^{54} \\ \psi^{51} & \psi^{52} & \psi^{53} & \psi^{54} & 0 \end{pmatrix}_L. \quad (7.39)$$

它对应于表示 $\mathbf{10}$ 。根据分支规则，我们将得到这个 10 维表示破缺后的结果

$$\mathbf{10} \rightarrow \underbrace{(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)}_{(u_L, d_L)^T} \oplus \underbrace{(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)}_{u_R \rightarrow u_L^C} \oplus \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)}_{e_R \rightarrow e_L^C}. \quad (7.40)$$

我们发现 $SU(5)$ 群的 $\mathbf{10}$ 表示在破缺之后自然地生成了标准模型的余下三个表示。根据上述分支规则，我们可以按照如下方式将标准模型中的粒子“填入”五维矢量 ψ^i 和五维反对称矩阵 ψ^{ij} 中

$$\psi_{iL} = \begin{pmatrix} d_1^C \\ d_2^C \\ d_3^C \\ \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R^i = \hat{C} \psi_{iL} = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^C \\ -\nu_e^C \end{pmatrix}_R, \quad (7.41)$$

$$\psi_L^{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^C & -u_2^C & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^C & 0 & u_1^C & -u^2 & -d^2 \\ u_2^C & -u_1^C & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^C \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^C & 0 \end{pmatrix}_L. \quad (7.42)$$

这个“填入”的过程实际上并不刻意，因为表示已经存在于理论之中了。我们要做的仅仅是为这些表示的分量“取名字”，换句话说就是将它们与我们已知的粒子对应起来。由盖尔曼-西岛关系

知, 系统的电荷矩阵为

$$Q = T_3 + Y = \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right), \quad (7.43)$$

式中 T_3 为 $\text{SU}(2)$ 群所对应的对角生成元 (即标准模型中的同位旋 z 分量), 其取值为

$$T_3 = \text{diag} \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right). \quad (7.44)$$

ψ_R^i 的粒子所对应的电荷为 q^i , ψ_L^{ij} 的粒子所对应的电荷为 $q^i + q^j$, 式中 q^i 为电荷矩阵 Q 的第 i 个对角元。从中我们得到各个粒子电荷的取值

$$Q_e = -1, \quad Q_\nu = 0, \quad Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}, \quad (7.45)$$

这一结果对左手和右手分量完全相同。特别地, 每个表示中所有粒子的电荷之和都应当为零, 这意味着 d 夸克电荷应当为电子的 $1/3$ 。由此可见, $\text{SU}(5)$ 规范理论自动给出了标准模型中各个粒子的电荷。

$\text{SU}(5)$ 群有 24 个生成元, 其群元可以表示为

$$U = \exp(iT^a \theta^a), \quad (7.46)$$

其中 T^a 为 $\text{SU}(5)$ 群的生成元, θ^a 为变换参数, $a = 1, \dots, 24$ 。因此 $\text{SU}(5)$ 规范理论的协变导数将引入 24 个规范矢量场 A_μ^a , 它们可以组合为一个规范场矩阵

$$A_\mu = \frac{1}{2} T^a A_\mu^a. \quad (7.47)$$

规范场矩阵中有 24 个独立参数, 因此构成了 $\text{SU}(5)$ 群的伴随表示 **24**, 我们将其分量记作 A_j^i 。在破缺之后, 这些 A_μ^a 场并不直接对应于各个规范场自由度。根据分支公式

$$\mathbf{24} \rightarrow \underbrace{(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)}_G \oplus \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)}_W \oplus \underbrace{(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)}_B \oplus \underbrace{(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, 5/6)}_{X,Y} \oplus \underbrace{(\mathbf{3}, \mathbf{2}, -5/6)}_{\bar{X}, \bar{Y}}, \quad (7.48)$$

我们可以将规范场矩阵 A 的各个分量与通常的规范场自由度对应起来

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^1 & G_3^1 & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3^2 & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

式中各个 G 场中只有八个是独立的, 它们代表着胶子场; W 场和 B 场是电弱统一理论的规范场; X, Y 场代表着 $\text{SU}(5)$ 规范理论中新的规范场, 它们将承载新的相互作用, 其电荷为

$$Q_X = \frac{4}{3}, \quad Q_Y = \frac{1}{3}. \quad (7.50)$$

在上述表达式中, 我们已经略去了各个矢量场的指标 μ 。

得到了 $\text{SU}(5)$ 规范场的表达式后, 我们就可以写出 $\text{SU}(5)$ 规范理论的动能项, 结果为

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}], \quad (7.51)$$

式中 $F^{\mu\nu}$ 为规范场矩阵 A^μ 所对应的场强张量矩阵。将矢量场 A 展开为分量, 我们将得到强相互作用的胶子场 G 、电弱相互作用的 W, B 场以及理论中新出现的 X, Y 场的动能项

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Gauge}} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^j W^{j\mu\nu} \\ & -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{2} X_{\mu\nu}^{\dagger a} X^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} Y_{\mu\nu}^{\dagger a} Y^{a\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.52)$$

式中 $G_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, X_{\mu\nu}$ 和 $Y_{\mu\nu}$ 分别为 $G_\mu, W_\mu, B_\mu, X_\mu$ 和 Y_μ 的场强张量, G 场的指标为 $j = 1, \dots, 8$, W 场的指标为 $i = 1, 2, 3$, X, Y 场的指标为 $a = 1, 2, 3$, X, Y 场强张量前的系数的差别是由于它们是复场。

利用上述定义的规范场, 我们可以将 SU(5) 规范理论的费米子项表示为

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \bar{\psi}_{Ri}(\not{D}\psi_R)^i + \bar{\psi}_{Lij}(\not{D}\psi_L)^{ij}, \quad (7.53)$$

式中各费米子场的协变导数可以表示为

$$(D_\mu\psi)^i = \partial_\mu\psi^i - ig_5 A_{\mu j}^i \psi^j, \quad (7.54)$$

$$(D_\mu\psi)^{ij} = \partial_\mu\psi^{ij} - ig_5 A_{\mu k}^i \psi^{kj} - ig_5 A_{\mu k}^j \psi^{ik}, \quad (7.55)$$

式中 g_5 为 SU(5) 的耦合常数。需要注意的是, 以上的表示中只包含第一代费米子。如果我们希望表示中包含全部三代费米子, 那么我们需要引入三个不同的场 ψ_L^a, ψ_R^a , 并在拉格朗日密度中对指标 a 求和。将矢量场 A 展开为分量, 我们将看到费米子与强相互作用的胶子场 G 、电弱相互作用的 W, B 场以及理论中新出现的 X, Y 场的耦合。

接下来我们将考虑 SU(5) 规范理论的自发对称性破缺。按照我们的预期, 它在极高能量下应当保持 SU(5) 对称性; 在统一理论能标 Λ_U 以下, 它应当破缺为标准模型对称群 $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$; 最后在电弱能标 Λ_W 以下, 标准模型会破缺为 $\text{SU}(3)_C \otimes \text{U}(1)_{\text{em}}$ 。上述过程中共包含两步破缺, 它可以表示为

$$\begin{aligned} & \text{SU}(5) \\ & \xrightarrow{E < \Lambda_U} \text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y \\ & \xrightarrow{E < \Lambda_W} \text{SU}(3)_C \otimes \text{U}(1)_{\text{em}}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

为了描述这两步自发对称性破缺, 我们至少需要引入两个不同的希格斯场。第一步破缺可以通过引入一个 24 维伴随表示 Φ_j^i 来实现, 这里 Φ_j^i 可以表示为 5×5 无迹矩阵, 它一共有 24 个自由度。我们让 Φ_j^i 场的真空期望值破缺为

$$\langle \Phi_j^i \rangle = u \text{diag} \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1 \right), \quad (7.57)$$

式中 u 是一个常数, 其取值与统一能标 Λ_U 在同一量级。在 $E < \Lambda_U$ 的情况下, Φ 场将发生破缺, 此时这一真空期望值将破坏掉 SU(5) 规范对称性, 但是仍然保持了 $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$ 规范对称性。第二步破缺可以通过引入一个 5 维表示 ϕ^i 来实现, 这里 ϕ^i 可以表示为一个五维矢量。我们让 ϕ^i 场的真空期望值破缺为

$$\langle \phi^i \rangle = v(0, 0, 0, 0, 1)^T, \quad (7.58)$$

式中 v 是一个常数, 其取值与电弱能标 Λ_W 在同一量级。在 $E < \Lambda_W$ 的情况下, ϕ 场将发生破缺, 此时这一真空期望值将破坏掉 $\text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$ 规范对称性, 但是却保持了 $\text{U}(1)_Y$ 规范对称性。引入这两种希格斯场的 SU(5) 规范理论被称为最小 SU(5) 规范理论。

一般地, 我们可以将 SU(5) 理论可重整的希格斯项表示为

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)] + \frac{1}{2} (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi, \Phi), \quad (7.59)$$

式中各希格斯场的协变导数可以表示为

$$D_\mu \Phi_j^i = \partial_\mu \Phi_j^i - ig_5 A_{\mu k}^i \Phi_j^k + ig_5 A_{\mu j}^k \Phi_k^i. \quad (7.60)$$

$$D_\mu \phi^i = \partial_\mu \phi^i - ig_5 A_{\mu k}^i \phi_j^k. \quad (7.61)$$

我们要求希格斯场的势能项 $V(\phi, \Phi)$ 能够发生恰当的对称性自发破缺, 满足 SU(5) 对称性、离散对称性 $\phi \rightarrow -\phi, \Phi \rightarrow -\Phi$ 以及可重整性。满足上述条件的希格斯项最普遍的形式为

$$V = V_\phi + V_H + V_{\phi H}, \quad (7.62)$$

式中

$$V_\phi = -\mu_\Phi^2 \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] + \lambda_1 (\text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi])^2 + \lambda_2 \text{Tr}[(\Phi^\dagger \Phi)^2], \quad (7.63)$$

$$V_\phi = -\mu_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (7.64)$$

$$V_{\phi\Phi} = \lambda_3 (\phi^\dagger \phi) \text{Tr}[\Phi^\dagger \Phi] + \lambda_4 \phi^\dagger (\Phi^\dagger \Phi) \phi. \quad (7.65)$$

希格斯场 Φ 的动能项为

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)] = \frac{1}{2} \text{Tr} [(\partial_\mu \Phi - ig_5 [A_\mu, \Phi])^\dagger (\partial_\mu \Phi - ig_5 [A_\mu, \Phi])], \quad (7.66)$$

因此在 Φ 场发生破缺之后, 我们得到矢量场的质量项

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \text{Tr}[(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)] \rangle &= -\frac{1}{2} g_5^2 \text{Tr} ([A_\mu, \langle \Phi \rangle]^\dagger [A_\mu, \langle \Phi \rangle]) \\ &= -\frac{1}{2} g_5^2 (\omega_i - \omega_j)^2 A_i^{\mu j} A_{\mu j}^i, \end{aligned} \quad (7.67)$$

式中

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\frac{2}{3}u, \quad \omega_4 = \omega_5 = u, \quad (7.68)$$

由于希格斯场的真空期望值 $\langle \Phi \rangle$ 与 $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$ 的所有生成元均对易, 因此在 $i, j = 1, 2, 3$ 以及 $i, j = 4, 5$ 的情况下, 所有标准模型中的规范玻色子均未获得质量。而 $\langle \Phi \rangle$ 与 $\text{SU}(5)$ 群中的其他生成元不对易, 因此 $i = 1, 2, 3$ 且 $j = 4$ 所对应的 X 玻色子以及 $i = 1, 2, 3$ 且 $j = 5$ 所对应的 Y 玻色子在这一破缺过程中获得了质量

$$m_X^2 = m_Y^2 = \frac{25}{18} g_5^2 u^2. \quad (7.69)$$

这些粒子的质量极大, 因此在低能量下几乎不可能观察到它们的效应。

第二步 ϕ^i 场的破缺可以给出其余规范玻色子的质量。在 Φ 场破缺后, 与之相耦合的 ϕ 场的前三个分量和后两个分量将按照不同的方式进行变换, 我们将之记为

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix}, \quad (7.70)$$

式中 h 为与 $\text{SU}(3)_C$ 群相对应的三分量希格斯场, H 为标准模型中的二分量希格斯场。此时低能标下 ϕ 场的势能项为

$$V_\phi + V_{\phi\Phi}|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} = V_h + V_H, \quad (7.71)$$

式中

$$V_h = -\mu_h^2 (h^\dagger h) + \lambda (h^\dagger h)^2, \quad (7.72)$$

$$V_H = -\mu_H^2 (H^\dagger H) + \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (7.73)$$

各希格斯场的质量为

$$\mu_h^2 = \mu_\phi^2 + \frac{1}{9} (30\lambda_3 + 4\lambda_4) u^2, \quad (7.74)$$

$$\mu_H^2 = \mu_\phi^2 + \frac{1}{9} (30\lambda_3 + 9\lambda_4) u^2. \quad (7.75)$$

通常来说, h 场的质量应当在统一能标 Λ_U^2 量级, 从而不会被我们探测到。但是 H 场就是标准模型中的希格斯场, 其质量仅为电弱能标 Λ_W^2 量级。要想使得这一点成立, 各个参数必须经过极为细致的微调, 精确度要达到小数点后几十位的量级。我们称这个问题为等级问题, 这是极为不自然的。在考虑到普朗克能标处圈图修正对于参数的影响后, 这个问题将变得更加困难。关于等级问题将在后文中进行更详细的讨论。

接下来我们考察 ϕ 场的破缺。由于

$$\langle \phi^i \rangle = v \delta_5^i, \quad W^\pm = \frac{W_1 \mp iW_2}{\sqrt{2}}, \quad (7.76)$$

因此在 ϕ 场发生破缺后, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \rangle = \frac{1}{2} v^2 \left\{ \frac{1}{2} g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{4} g_2^2 W_\mu^3 W^{3\mu} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} g_1^2 \frac{3}{5} B^\mu B_\mu + \frac{1}{4} g_1 g_2 \sqrt{\frac{3}{5}} (-2) B^\mu W_\mu^3 \right\}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

式中我们已略去重玻色子 X, Y 的贡献。在将质量项对角化后, 我们就得到了标准模型耦合常数与 $SU(5)$ 理论耦合常数之间的关系

$$g_s = g_3, \quad g = g_2, \quad g' = \sqrt{\frac{3}{5}} g_1, \quad (7.78)$$

式中 g_s, g, g' 分别为强耦合常数和两个电弱耦合常数。同时我们得到了各规范玻色子的质量

$$m_G^2 = m_\gamma^2 = 0, \quad m_W^2 = \frac{1}{2} g_2^2 v^2, \quad m_Z^2 = \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \frac{v^2}{2}. \quad (7.79)$$

光子和 Z 玻色子可以表示为 W^3 与 B 场的线性组合

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu, \quad (7.80)$$

$$A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu, \quad (7.81)$$

式中弱混合角为

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + 5g_2^2/3} = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2}. \quad (7.82)$$

这与我们在标准模型中得到的结果是一致的。

若我们考虑大统一能标 Λ_U 下的物理, 则各个耦合常数应当是相同的

$$g_1(\Lambda_U^2) = g_2(\Lambda_U^2) = g_3(\Lambda_U^2) = g_5(\Lambda_U^2). \quad (7.83)$$

因此在这一能标下, 弱混合角的取值为

$$\sin^2 \theta_w(\Lambda_U^2) = \frac{3}{8} = 0.375. \quad (7.84)$$

但是如果我们考虑低能标下的物理, 则各个耦合常数将跑动为不同的值。在单圈阶, 跑动耦合常数 g_i 所满足的重整化群方程为

$$\frac{dg_i(\mu^2)}{d \ln \mu} = b_i g_i^3, \quad (7.85)$$

积分后得到⁸

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu^2)} = \frac{1}{\alpha_i(\Lambda_U^2)} - 4\pi b_i \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_U^2}, \quad (7.86)$$

式中

$$\alpha_i(\mu^2) = \frac{g_i^2(\mu^2)}{4\pi} \quad (7.87)$$

为 g_i 所对应的跑动耦合常数。

对于不同的耦合常数来说, 系数 b_i 的取值为

$$b_1 = \frac{1}{48\pi^2} 2n_f, \quad (7.88)$$

$$b_2 = \frac{1}{48\pi^2} (-22 + 2n_f), \quad (7.89)$$

$$b_3 = \frac{1}{48\pi^2} (-33 + 2n_f), \quad (7.90)$$

式中 n_f 为夸克味数。前面定义的 α_1, α_2 与通常的 α, θ_W 之间的关系为

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W}. \quad (7.91)$$

⁸除了一个常数系数之外, 这一结果实际上与我们在量子电动力学中求出的跑动耦合常数完全一致, 只不过这里为了方便将其改写为了更容易求解的形式。

将上述结果代入到重整化群方程之中，我们将得到结构常数与弱混合角随能标的变化

$$\frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha_s(\mu^2)} = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{11}{2\pi} \alpha(\mu^2) \ln \frac{\Lambda_U^2}{\mu^2} \right), \quad (7.92)$$

$$\sin^2 \theta_W(\mu^2) = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{55}{18\pi} \alpha(\mu^2) \ln \frac{\Lambda_U^2}{\mu^2} \right). \quad (7.93)$$

从上述两式中可以解出

$$\sin^2 \theta_W(\mu^2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} \frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha_s(\mu^2)}. \quad (7.94)$$

带入电弱统一能标下各物理参数的实验值，我们就可以反推出 SU(5) 统一理论的能标

$$\Lambda_U \sim 10^{15} \text{ GeV}. \quad (7.95)$$

这说明在该能标下，三种相互作用将得到统一。⁹ 同时我们还可以推知在电弱能标下有

$$\alpha_s(\Lambda_W^2) \sim 0.1, \quad \alpha(\Lambda_W^2) \sim \frac{1}{130}, \quad \sin^2 \theta_W(\Lambda_W^2) \sim 0.2, \quad (7.96)$$

这些结果可以与标准模型大致符合。根据上述讨论看到，重整化能标 Λ_U 是一个非常高的能量。作为对比，普朗克能标约为 10^{19} GeV ，电弱能标仅为 10^2 GeV 。

最后我们引入汤川项来为费米子赋予质量。我们将不同的费米子记作 ψ^a ，指标 $a = 1, 2, 3$ 代表不同的三代。对于最小 SU(5) 规范理论来说，其可重整的汤川项可以一般性地表示为

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = A \bar{\psi}_{Lij} \phi^i \psi_R^j + \frac{B}{2} \varepsilon_{ijklm} \psi_L^{Tij} C^{-1} \phi^k \psi_L^{lm} + \text{h.c.} \quad (7.97)$$

式中 A, B 为两个耦合常数， C 为电荷共轭矩阵。在自发对称性破缺后，这一项将变为

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \sim -Av(\bar{d}_L d_R + \bar{e}_L e_R) - 2Bv\bar{u}_L u_R + \text{h.c.}, \quad (7.98)$$

因此 SU(5) 规范理论预言破缺后各个费米子的质量为

$$m_d = m_e = Av, \quad m_u = 2Bv, \quad m_\nu = 0. \quad (7.99)$$

当然，前面的讨论中只考虑了一代费米子的贡献。一般地，我们可以将不同的费米子记作 ψ^a ，指标 $a = 1, 2, 3$ 代表不同的三代。我们可以将汤川项更一般地表示为

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = A_{ab} \bar{\psi}_{Lij}^a \phi^i \psi_R^{bj} + \frac{B_{ab}}{2} \varepsilon_{ijklm} \psi_L^{Tij} C^{-1} \phi^k \psi_L^{blm} + \text{h.c.}, \quad (7.100)$$

式中 A_{ab}, B_{ab} 为两个耦合常数矩阵，它们可以为不同代的费米子赋予不同的质量，并将三代费米子混合起来。

SU(5) 理论要求同代的夸克和轻子的质量相等

$$m_d = m_e, \quad m_s = m_\mu, \quad m_b = m_\tau. \quad (7.101)$$

这一结果是在大统一理论能标下得到的，在低能量下这些粒子的质量将发生跑动。由粒子质量的重整化群方程可知，同代夸克和轻子的质量之比为

$$\frac{m_q(\mu)}{m_l(\mu)} = \left[\frac{\alpha_3(\mu)}{\alpha_3(\Lambda_U)} \right]^{4/b_3} \left[\frac{\alpha_1(\mu)}{\alpha_1(\Lambda_U)} \right]^{1/b_1}, \quad (7.102)$$

因此低能下第三代粒子的质量比为

$$\frac{m_b}{m_\tau} \sim 3, \quad (7.103)$$

这与实验结果符合得较好。

以上结果对于较重的粒子是成立的，但是对于低能下的第二代和第一代粒子有

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_e}{m_\mu} \sim \frac{1}{200}, \quad (7.104)$$

⁹需要说明的是，首先这几个跑动耦合常数并不会真正交于一点，而总会有一定的偏差。其次我们想问，在统一能标之上，各个耦合常数的行为是如何的？根据重整化群方程来看，似乎在这一能标之上各个耦合常数仍然会以各自的方式继续跑动，从而重新分离开来。

这几乎与实验值 $m_d/m_s \sim 1/20$ 相差了 10 倍。要解决这一问题,我们可以考虑非最小 SU(5) 理论,即尝试在理论中引入更加复杂的希格斯粒子。例如我们可以引入三个 5 维表示 ϕ_α^i ($\alpha = 1, 2, 3$) 以及一个 45 维表示 ϕ_{jk}^i , 这样在统一理论能标下可以得到

$$m_b = m_\tau, \quad m_d = 3m_e, \quad m_s = \frac{1}{3}m_\mu. \quad (7.105)$$

于是我们得到跑动后的结果

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{9m_e}{m_\mu} \sim \frac{1}{20}, \quad (7.106)$$

这可以与实验值相符合。在 SU(5) 理论中,中微子的质量项被禁戒了,因此其质量将严格等于零。

将上面的结果总结在一起,我们就得到了 SU(5) 规范理论的完整拉格朗日密度

$$\mathcal{L}_{\text{SU}(5)} = \mathcal{L}_{\text{Gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (7.107)$$

与标准模型一致,它由规范部分、费米子部分、希格斯部分和汤川耦合构成。在对称性自发破缺后, SU(5) 群将破缺为标准模型对称群 $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$ 。若 SU(5) 统一理论是正确的,那么在统一理论的能标下将可能看到理论中预言的重玻色子 X, Y 的自由度。

在 SU(5) 理论中会自发地产生磁单极子。SU(5) 理论的场方程之中存在着一系列拓扑非平凡的孤子解,这些解在物理上恰好对应于磁单极子。根据狄拉克条件,要使得电磁势满足单值性,电荷 e 和磁荷 g 必须满足如下条件

$$eg = 2\pi n\hbar, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.108)$$

因此磁荷也是自动量子化的。在宇宙演化的极早期,体系的能量达到统一能标,因此磁单极子可能大量产生,然后随着宇宙的降温脱耦出来,并一直保存到今天。如果暴胀理论是正确的,那么宇宙早期产生的磁单极子在暴胀后将被极大地稀释,从而难以被我们观测到。目前在实验上尚未观测到任何磁单极子的信号。如果能够证实磁单极子的存在,那么这对于统一理论将是一个积极的证据。

有时虽然系统的经典作用量在某些变换 $\psi \rightarrow \psi'$ 下不变

$$S[\psi'] = S[\psi], \quad (7.109)$$

但是其泛函积分却可能在这个变换下发生变化

$$K[\psi'] \neq K[\psi], \quad (7.110)$$

我们这个现象为量子反常。量子反常的出现意味着一个在经典层面上成立的对称性,在量子层面上将会失效。在很多情况下,量子反常会在理论中引发一些严重的问题,因此我们希望一个理论是没有量子反常的。

我们已经知道了,规范理论在局域规范变换 $\psi' = e^{i\Gamma^a T^a} \psi$ 下不变,式中 Γ^a 为变换参数, T_a 为生成元。但如果旋量场是无质量的,则我们还可以写出另一个局域对称性,即 $\psi' = e^{i\Gamma^a T^a \gamma_5} \psi$ 。然而这一新引入的对称性会在理论中产生额外的问题。诚然,在经典层面上这个对称性是得到了满足的,即在变换前后系统的作用量保持不变。但是在量子层面上,若我们考虑路径积分

$$K = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{iS[\psi, \bar{\psi}]}, \quad (7.111)$$

则我们会发现变换前后的泛函积分是不相等的。这是因为虽然变换前后的作用量相等 $S = S'$, 但是对旋量场的积分测度却发生了改变

$$\mathcal{D}[\psi'] \mathcal{D}[\bar{\psi}'] \neq \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}]. \quad (7.112)$$

正是这一积分测度的改变造成了量子反常的出现。我们可以验证,表示 R 所对应的量子反常的大小与

$$A(R) = \text{Tr}[T^a \{T^b, T^c\}] \quad (7.113)$$

成正比，式中 T^a 为表示的生成元。我们称之为反常系数，它只与费米子的表示有关。

与规范场相耦合的反常流会破坏由于规范不变性导致的瓦德-高桥恒等式，而这一恒等式的满足对于理论的可重整性是至关重要的。因此，理论中的量子反常应当设法避免。幸运的是，若我们计算标准模型的量子反常，则会发现将费米子表示的贡献全部加起来之后，所有的反常恰好完全抵消，这意味着标准模型是没有量子反常的。¹⁰ 这为标准模型费米子的表示给出了一个先验的解释：标准模型中费米子表示的选择必须使得所有反常之和相消，从而使得理论是自洽的。这一条件为可供选择的费米子的表示施加了限制，而标准模型的选择就是其中之一。

我们或许可以认为，量子反常的消除并不是一个完全的巧合，而是由更深层次的理论的性质所保持的。若更高能标下的理论是没有反常的，那么在破缺到低能标下后，它也不应当存在量子反常。因此，对于规范统一理论来说，我们要求其表示同样不存在量子反常。SU(5) 规范统一理论的反常系数可以较容易地计算出来。对于 SU(5) 群来说，可以验证只有当 T^a, T^b, T^c 都取为电荷矩阵 Q （或取为超荷矩阵 Y ）时才对反常系数有非零的贡献。计算出两个表示的反常，我们得到

$$\frac{1}{2}A(\bar{\mathbf{5}}) = \text{Tr}(Q^3)|_{\bar{\mathbf{5}}} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (-1)^3 = -\frac{8}{9}, \quad (7.114)$$

$$\frac{1}{2}A(\mathbf{10}) = \text{Tr}(Q^3)|_{\mathbf{10}} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 1^3 = \frac{8}{9}, \quad (7.115)$$

因此

$$A(\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}) = A(\bar{\mathbf{5}}) + A(\mathbf{10}) = 0. \quad (7.116)$$

这意味着对于每一代粒子来说，SU(5) 规范统一理论的表示 $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ 均不存在量子反常。因此 SU(5) 规范统一理论与标准模型一样，同样是一个自洽的理论。¹¹

相比于标准模型来说，SU(5) 规范统一理论有一些优势。首先，它的费米子表示更加简洁，在 SU(5) 规范理论中我们用三代 $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ 取代了标准模型中的三代粒子。其次，标准模型中的许多“基本参数”都可以在 SU(5) 规范理论中推导出来。¹² 最后，我们会发现它的跑动耦合常数在高能量下是统一的，而在低能量下自发破缺成了三个不同的耦合常数。因此，这个模型可以为三种相互作用提供一个更加统一的表述。

但是这个模型同样存在着不尽如人意的地方。首先，SU(5) 规范理论中的三代费米子将表示 $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ 重复填充了三次。尽管这相比于标准模型的表示来说已经简化很多了，但我们可能仍觉得不满意，希望对其进行进一步的简化。因此我们可以试图去寻找一个更大的对称群，将上述表示以一种更加统一的形式写出来。

我们可以选择 SO(10) 群，它比 SU(5) 群更大，并且可以在低能量下重新破缺为 SU(5) 群。根据分支规则，SO(10) 群的表示 $\mathbf{16}$ 在低能量下将破缺为如下 SU(5) 群表示的直和

$$\mathbf{16} = \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{1}, \quad (7.117)$$

因此 SU(5) 规范理论的表示 $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ 将可以由 SO(10) 群表示 $\mathbf{16}$ 自发破缺而来。同时余下的一维表示还可以填充标准模型中缺失掉的右手中微子，使得它可以通过跷跷板机制在获得大质量的同时还能够使得左手中微子获得很小但是不为零的质量。SO(10) 理论有多种可能的破缺方式，例如可以先破缺为 SU(5) 模型，再破缺为标准模型

$$\text{SO}(10) \rightarrow \text{SU}(5) \rightarrow \text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y, \quad (7.118)$$

¹⁰一般地，若一个规范理论中没有量子反常，则其所有粒子的电荷之和应当等于零，同时所有粒子的电荷立方之和也应当等于零。

¹¹另一个对标准模型费米子表示的要求是，我们希望理论中不存在由轻玻色子导致的味道改变中性流。标准模型和 SU(5) 规范理论都不包含由轻玻色子导致的味道改变中性流，这一点与实验结果也是符合的。

¹²但尽管如此，最小 SU(5) 规范理论中仍然可以容纳许多自由参数，实际上这并不比标准模型中自由参数的数量更少。并且 SU(5) 规范理论所预言的参数也仅仅是非常粗略地与标准模型中的参数相符合。

也可以先破缺为帕蒂 (Pati)-萨拉姆 (Salam) 模型, 再破缺为标准模型

$$\mathrm{SU}(10) \rightarrow \mathrm{SU}(4)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R \rightarrow \mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y, \quad (7.119)$$

不同的破缺方式都可以恰当地给出标准模型的表示。

我们想问, 什么样的规范群作为统一理论是可能的。首先, 我们要求它能够容纳标准模型对称群 $\mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ 。其次, 我们要求它能够容纳标准模型的表示。这意味着它应当具有复表示 (即存在相互共轭的表示), 因为在标准模型中由于宇称破坏, 费米子的左手部分和右手部分应当分属于不同的表示。最后, 我们希望它是个单群, 这样理论中就只有一个耦合常数。¹³ 满足上述条件的单群实际上是非常有限的, 仅有 $\mathrm{SU}(N)$ ($N \geq 5$)、 $\mathrm{SO}(4N+2)$ ($N \geq 2$) 以及一个额外群 E_6 。这就是统一理论所有可能的规范单群。

一个规范理论的对称群越大, 它能够承载的表示也就越多, 相应的破缺过程就越复杂, 也将会预言越多标准模型之外的新粒子和新的相互作用。一个有吸引力的想法是在同一个表示中容纳多代费米子, 而并不是将多代费米子重复地填充相同的表示。一些较大的规范群都可能在同一个表示中容纳多代费米子, 例如 $\mathrm{SU}(7), \mathrm{SU}(8), \mathrm{SO}(14), \mathrm{SO}(18)$ 群等。除此之外, E_6 群在理论上也是重要的, 它与弦论中卡拉比 (Calabi)-丘 (Yau) 流形的紧化相关。

其次, 虽然我们希望 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论中的三个跑动耦合常数在高能量处自发地相交于一点而统一为同一个耦合常数, 但实际上这是做不到的。前文中的讨论是较为粗糙的, 更加细致的计算表明, 三个跑动耦合常数并不会相交于一点, 而是会有一定的偏离。这种偏离确实损害了规范统一理论的结构。如果我们进一步考虑超对称 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论, 那么那么高能标处跑动耦合常数的行为将有所改善, 从而使得不同的耦合常数可能交于一点。我们将在后文中介绍超对称理论。

最后, $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论最大的困难在于与质子衰变实验的矛盾。我们知道在 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论中, 轻子和夸克被填充进了同一个表示中, 因此它们之间有可能通过新的 X 玻色子或者 Y 玻色子发生相互作用, 从而互相转换。将 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论的拉格朗日密度展开, 我们发现有如下的相互作用项

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & \frac{ig_5}{\sqrt{2}} \bar{X}_{i\mu} (d_{iR} \gamma^\mu e_R^C + \varepsilon_{ijk} \bar{u}_{kL}^C \gamma^\mu u_{jL} + \bar{d}_{iL} \gamma^\mu e_L^C) \\ & + \frac{ig_5}{\sqrt{2}} \bar{Y}_{i\mu} (-\bar{d}_{iR} \gamma^\mu \nu_R^C + \varepsilon_{ijk} \bar{u}_{kL}^C \gamma^\mu d_{jL} - \bar{u}_{iL} \gamma^\mu e_L^C) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (7.120)$$

因此夸克可以通过 X 顶点或者 Y 顶点衰变成轻子。由于这一相互作用, 重子数 B 和轻子数 L 的守恒都将被破坏, 但是重子数减轻子数 $B-L$ 的守恒仍然得到了保持。因此质子将不再是稳定的, 它会衰变为一个轻子和一个介子, 相关过程的费曼图如图所示。

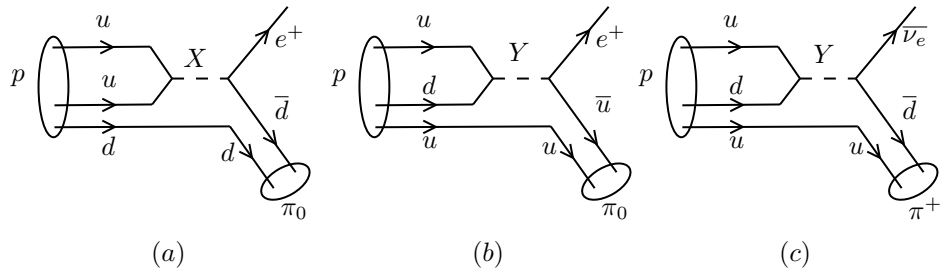


图 7.1: $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论预言的质子衰变。

将上述过程的散射振幅计算出来, 我们就可以得到 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论所预言的质子寿命。由于 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论中 X, Y 玻色子的质量非常大, 因此质子的寿命是极长的。理论计算结果显示, 在 $\mathrm{SU}(5)$ 规范理论中, 质子的寿命大约为

$$\tau_p \sim \frac{m_X^2}{g_5^4 m_p^5} \sim 10^{31} \text{ 年}. \quad (7.121)$$

¹³ 这一条件并不是强制的, 但是出于美学考虑我们希望如此。

考虑到现今宇宙的年龄仅为 10^{10} 年左右, 因此单个质子的寿命是极长的。但如果观察包含大量质子的物质, 那么就有可能在有限的时间内观测到质子衰变的示例。迄今为止人们已经进行了大量极为精确的实验, 尚未发现任何质子衰变的示例。实验结果显示, 如果质子真的会衰变的话, 那么其寿命要大于 10^{33} 年, 这已经远远超出了理论的预言结果。因此, $SU(5)$ 规范理论现在已经几乎被质子衰变实验所排除了。不过我们仍可以选择其他更大的规范理论, 比如 $SO(10)$ 规范理论等, 这些模型尚未被质子衰变实验完全排除。除此之外, 超对称 $SU(5)$ 规范理论以及引入了更多希格斯粒子的非最小 $SU(5)$ 规范理论也同样尚未被质子衰变实验完全排除, 这些理论仍然有待于实验的进一步检验。

如果我们在理论中追求更高层面上的统一, 那么我们就需要将所有的费米子填入同一个表示中, 而这样做的后果就是所有粒子之间都可以相互转变。因此对于规范统一理论来说, 质子衰变总是会发生, 只是不同模型中质子的寿命长短会有区别, 这是规范统一理论的代价。随着质子衰变实验精度的提高, 可能会有越来越多的模型被排除掉。而如果质子根本就不会发生任何的衰变, 那么所有的规范统一理论就都是错的。

虽然规范统一理论中额外引入的相互作用正在经受质子衰变实验的严峻考验, 不过这些相互作用中重子数守恒的破坏有可能为宇宙中正反物质不对称的问题给出解释。现代的天文观测表明, 宇宙中正反物质的数量是不等的, 正物质要多于反物质。在理论上可以设想宇宙的初始条件应当是正反物质对称的, 而后随着演化这一对称性发生了破坏。要想达到这一点, 在宇宙早期必须同时在某一个时期破坏重子数守恒、 C 对称性、 CP 对称性 (同时也就破坏了时间反演 T 对称性) 以及热平衡状态。对于 $SU(5)$ 统一理论来说, 上述条件都是能够得到满足的。在宇宙演化的极早期, 体系的温度极高, 产生了大量的正粒子和反粒子。而后随着温度的降低, 绝大多数的正粒子和反粒子都湮灭成为光子, 只留下来极少数的正粒子, 形成了目前的宇宙。天文观测指出, 净重子数与光子数的比值大致为

$$\frac{N_B}{N_\gamma} \sim 10^{-10}, \quad (7.122)$$

它衡量了我们宇宙中正反物质不对称的程度。这似乎是一个很小的值, 不过通常来说破坏重子数的其他机制的效应更加微弱, 不能够达到这一量级。我们期待规范统一理论能够对这一比值给出定量的解释。

7.4 额外维理论

在本节中, 我们将采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$, 同时度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, \dots)$, γ 矩阵将选取为狄拉克表示。

上一节中介绍的规范统一理论只涉及到强相互作用、弱相互作用以及电磁相互作用的统一, 而并未涉及到引力。我们发现, 无论我们写出一个多么大的规范对称群, 引力也不可能自发地出现在理论之中。换句话说, 引力是不能够仅仅通过扩充规范对称群的方式被囊括进量子场论中的。我们知道, 规范相互作用来源于量子系统的规范对称性, 而引力表现为时空弯曲的几何效应。既然将引力统一到规范作用的尝试失败了, 那么我们可以试图将规范相互作用表示为某种几何效应。

虽然规范理论与引力理论初看上去形式不同, 但实际上它们之间有着非常密切的联系。规范场和引力理论都产生于对称性, 只不过一个是规范对称性, 一个是在坐标变换下的对称性。为了保证理论的对称性, 我们为每个理论的导数都引入了一个修正项, 其中规范理论的修正项为规范场

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (7.123)$$

而引力理论的修正项为仿射联络

$$\nabla_\rho V^\mu = \partial_\rho V^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu V^\lambda. \quad (7.124)$$

规范理论的拉格朗日密度由场强张量来描述，它可以用规范场的协变导数表示为

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}, \quad (7.125)$$

而引力理论的拉格朗日密度由曲率张量来描述，它可以用引力场的协变导数表示为

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \quad (7.126)$$

规范场和引力场都仍然有规范的自由度，这些规范自由度仍然需要额外的规范条件才能消除掉。以上的讨论说明了规范场与引力理论结构的相似性。

事实上，我们可以将规范理论视为这样一种结构，即在闵可夫斯基时空中的每一点上都“长出”了一个规范群流形。这种结构在数学上被称为纤维丛，其中闵可夫斯基时空称为底流形，而规范群流形称为纤维。一般地，如果一个流形 B 上的每一点都“长出”了一个新的流形 F ，则称 B 为底流形， F 为纤维，称底流形和纤维的总和为纤维丛。举例来说，牛顿时空可以被视为一个纤维丛，其中底流形为时间 \mathbb{R}^1 ，而在时间流形的每一点上都“长出”了一个空间流形 \mathbb{R}^3 。流形的切空间可以被视为从流形中的每一点上“长出”的纤维，它被称为切丛。在这里如果我们把规范场视为纤维丛，则规范场 A_μ 就相当于纤维的联络，而规范场强张量 $F_{\mu\nu}$ 就相当于纤维的曲率。这也就解释了规范理论和引力理论相似的原因。

以上的讨论都还仅仅具有形式上的意义，但是现在让我们假设规范场所对应的纤维丛结构确实真实地存在于宇宙的几何结构中。直观上来看，我们的宇宙处在 $3+1$ 维时空之中。现在假设除了这四个维度之外，宇宙中还存在着一系列“蜷曲”起来的隐藏维度，我们称之为额外维。这些额外维的尺度非常小，以至于用现有的实验手段还无法观测到它们。这有些类似于一个细长的水管，在远处看的时候只有一个宏观展开的维度，水管看起来像一条一维的线一样。但是如果在近距离观看，就会发现水管实际上是一个二维结构，有一个维度“蜷曲”起来了，这就相当于额外维。在数学上，我们称这样的额外维为“紧致”的，将宏观维度蜷曲起来的过程称为“紧化”。

作为一个最简单的情况，让我们考虑一个 $4+1$ 维时空，其中一个时间维度和三个空间维度在宏观中展开，而另外一个空间维度将蜷曲起来。直观地说，这相当于在 $3+1$ 维时空中的每个点上都“长出”了一个小圆，如图 7.2 所示。我们期望宏观展开的四个维度的几何结构将产生引力，而蜷曲起来的维度的几何结构将产生规范相互作用。如果这能够实现的话，那么我们就找到了一种将引力和规范相互作用统一起来的方法。

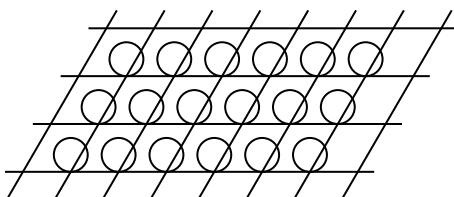


图 7.2: 蜷曲起来的额外维。

我们将这个五维时空的坐标记为 $x^M = (x^\mu, x^4)$ ，其中 x^μ 为四维时空的坐标，而 x^4 为额外维的坐标。¹⁴ 为了让额外维在宏观上隐藏起来，我们让 x^4 紧化为一个半径为 a 的圆，它的取值为 $x^4 \in [0, 2\pi a)$ 。我们可以将其度规张量表示为

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{4\nu} \\ g_{\mu 4} & g_{44} \end{pmatrix}. \quad (7.127)$$

由于额外维已经蜷曲在了一个极小的尺度中，因此其宏观展开部分和额外维的紧致部分将相互脱耦。这意味着五维时空的度规张量 g_{MN} 将退化为四维时空中的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 、四维时空中的

¹⁴在历史上这个额外维被记为 x^5 ，这是因为在当时 $x^4 = ict$ 代表时间分量。类似地， γ^5 矩阵没有被称为 γ^4 也是基于同样的原因。

矢量 $g_{4\nu}, g_{\mu 4}$ 以及标量 g_{44} 。这个过程被称为维数约化，它将把宏观维度的贡献和额外维的贡献区分开来。

接下来我们要将这个度规张量的各个分量明显地写出来。设这个五维时空的时空间隔可以表示为

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - (dx^4 + \kappa A_\mu dx^\mu)^2, \quad (7.128)$$

这里我们假设 $g_{\mu\nu}, A_\mu$ 仅为宏观维度 x^μ 的函数，而非额外维 x^4 的函数

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho), \quad A_\mu = A_\mu(x^\rho), \quad (7.129)$$

它的度规张量可以表示为

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 A_\mu A_\nu & \kappa A_\mu \\ \kappa A_\nu & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.130)$$

粗略地说， $g_{\mu\nu}$ 代表着宏观展开的四维时空之间的耦合， κA_μ 代表着额外维与宏观维度的耦合，而额外维自身的度规分量被我们约定为 1。

与四维时空的情况类似，上述五维时空的作用量可以表示为五维曲率标量 $R^{(5)}$ 对全时空的积分

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)}, \quad (7.131)$$

式中 $G^{(5)}$ 为五维时空中的耦合常数， $g^{(5)}$ 为五维度规张量 g_{MN} 的行列式。这个表达式仍然是利用五维时空中的量表示的，为了将之转化为四维时空中的表达式，我们将额外维 x^4 积去。如果我们恰当地选取参数

$$G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi a}, \quad \kappa^2 = 16\pi G^{(4)}, \quad (7.132)$$

那么四维时空中的作用量将可以表示为

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(4)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)} - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (7.133)$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.134)$$

为矢量场 A^μ 所对应的场强张量，由于反对称性这里的普通导数和协变导数没有区别。 $G^{(4)}$ 为四维时空中的耦合常数， $g^{(4)}$ 为四维张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式，而 $R^{(4)}$ 为与四维张量 $g_{\mu\nu}$ 相对应的曲率标量。这个理论被称为卡鲁扎 (Kaluza)-克莱因理论。

我们发现，如果将 A_μ 视为电磁场，将 $g_{\mu\nu}$ 视为四维时空的度规张量，那么上式恰好就给出了电磁场与引力场的作用量。特别地，如果我们对额外维作如下的无穷小坐标变换

$$x'^4 = x^4 - \kappa \varepsilon(x^\mu), \quad (7.135)$$

那么度规张量将变换为

$$g'_{MN} = \frac{\partial x^P}{\partial x'^M} \frac{\partial x^Q}{\partial x'^N} g_{PQ}, \quad (7.136)$$

这意味着我们要对电磁场进行一个规范变换

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon. \quad (7.137)$$

由于流形本身在坐标变换下不变，因此系统的作用量在电磁场的规范变换下也不应当发生改变，在这里紧致流形上的对称性反映在了规范场上。回忆前文中的讨论，时空底流形中每一点上的规范群都相当于一个纤维。而通过在时空中引入额外维的方式，我们可以让规范群恰好对应于紧致流形的时空结构。通过将时空的第五个维度紧致为一个圆环，我们在额外维所对应的紧致流形上构造了一个 $U(1)$ 对称群。而在将额外维的自由度积去后，它恰好给出了一个 $U(1)$ 规范理论。由于一个 $U(1)$ 的规范场在量子场论中描述电磁相互作用，因此我们成功地使得额外维上的几何结构能够描述电磁场的演化。

在前面的讨论中, 我们假设度规张量只是宏观维度 x^μ 的函数, 而不是紧致维度 x^4 的函数。对于更一般的情况来说, 我们当然可以设想度规张量是所有维度 $x^M = (x^\mu, x^4)$ 的函数。但由于 x^4 是紧致维度, 因此其取值并不是任意的, 度规张量 g_{MN} 的所有分量都应当满足 x^4 上的周期性边界条件

$$g_{MN}(x^4 = 0) = g_{MN}(x^4 = 2\pi a). \quad (7.138)$$

因此, 我们可以将度规张量在额外维上展开为傅里叶级数

$$g_{MN}(x^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{MN}^{(n)}(x^\mu) e^{inx^4/a}. \quad (7.139)$$

可以看出, 前文中认为度规张量只与宏观维度有关的假设, 实际上就相当于取了度规张量的零模 $g_{MN}^{(0)}(x^\mu)$ 。如果我们所考虑的能量远小于紧致维度的量级, 即 $E \ll a^{-1}$, 那么度规张量在紧致维度上更高阶的模式将不会被激发, 我们可以只考虑零模的贡献。可以设想紧致维度尺寸的量级与普朗克长度相当

$$a \sim \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35} \text{ m}, \quad (7.140)$$

而激发高阶模式所需能量的量级与普朗克能量相当

$$E \sim \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 10^{19} \text{ GeV}, \quad (7.141)$$

在上述表达式中已经恢复了各个物理常数。由此可见, 紧致维度通常来说是极为微小的, 要想将这些模式激发出来也需要极高的能量。¹⁵

以上讨论可以被推广到任意高维的时空中。既然一个紧化为圆环的额外维可以刻画 U(1) 规范理论, 那么如果让紧致流形具有更高的对称性, 它应当可以承载更加复杂的非阿贝尔规范理论。现在考虑一个 $(4+D)$ 维时空, 其中 4 维时空在宏观中展开, 余下的 D 维是额外维, 它们蜷曲为一个具有特定对称性的紧致流形。我们将这个 $(4+D)$ 维时空的坐标记为 $x^M = (x^\mu, x^m)$, 其中 x^μ 为四维时空的坐标, 而 x^m 为额外维的坐标 ($m = 4, \dots, D+3$)。利用维数约化方法, 我们可以将这一 $(4+D)$ 维时空的度规张量表示为

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu n} \\ g_{\mu n} & g_{mn} \end{pmatrix}, \quad (7.142)$$

它包含四维时空中的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 、四维时空中的矢量 $g_{\mu\nu}, g_{\mu n}$ 以及标量 g_{mn} 。在这里指标 m, n 只用于标记不同的标量场和矢量场, 而不参与宏观维度的洛伦兹变换。假设这个 $(4+D)$ 维时空的时空间隔为

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - g_{mn} (dx^m + g_0 B_\mu^m dx^\mu) (dx^n + g_0 B_\nu^n dx^\nu), \quad (7.143)$$

其中 g_0 为耦合常数, $g_{\mu\nu}$ 仅为宏观维度 x^μ 的函数, g_{mn} 仅为额外维 x^m 的函数, 而 B_μ^m 可以是所有坐标 x^M 的函数

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho), \quad g_{mn} = g_{mn}(x^p), \quad B_\mu^m = B_\mu^m(x^M). \quad (7.144)$$

它的度规张量可以表示为

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + g_0^2 B_\mu^m B_\nu^n g_{mn} & g_0 B_\mu^m g_{mn} \\ g_0 B_\nu^n g_{mn} & g_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.145)$$

我们期望 B_μ^m 对应于规范场, 相应的规范群应当对应于紧致流形度规张量 g_{mn} 的对称群。在微分几何中, 流形的对称性可以由基灵矢量来描述。假设在额外维的无穷小变换下

$$x'^m = x^m + \varepsilon^a \xi_a^m(x^n), \quad (7.146)$$

¹⁵但是需要说明的是, 实验上并未排除大得多的额外维存在的可能, 甚至在宇宙学中还可以讨论宏观展开的额外维。

紧致流形的度规张量保持不变

$$g_{mn}(x^p) = g'_{mn}(x'^p), \quad (7.147)$$

则称 ξ_a^m 为度规 g_{mn} 的基灵矢量, 式中 ε^a 为各个无穷小变换的参数。因此一般来说, 基灵矢量 $\hat{\xi}_a$ 之间将满足如下的对易关系

$$[\hat{\xi}_a, \hat{\xi}_b]^n = \xi_a^m \partial_m \xi_b^n - \xi_b^m \partial_m \xi_a^n = f_{ab}^c \xi_c^n, \quad (7.148)$$

系数 f_{ab}^c 称为基灵矢量的结构常数。可以验证, 基灵矢量的对易子满足如下的雅可比恒等式

$$[\hat{\xi}_a, [\hat{\xi}_b, \hat{\xi}_c]] + [\hat{\xi}_c, [\hat{\xi}_a, \hat{\xi}_b]] + [\hat{\xi}_b, [\hat{\xi}_c, \hat{\xi}_a]] = 0, \quad (7.149)$$

因此基灵矢量也构成了一个李代数。

从上述讨论中可以看出, 基灵矢量与保度规变换群的生成元是一一对应的, 同时也与规范群的生成元是一一对应的。因此, 基灵矢量的结构常数 f_{ab}^c 就是保度规变换群的结构常数, 同时也是相应的规范群的结构常数。利用紧致流形的基灵矢量, 我们可以将场 B_μ^m 表示为

$$B_\mu^m(x^M) = \xi_a^m(x^n) A_\mu^a(x^\nu), \quad (7.150)$$

式中 A_μ^a 仅为宏观维度 x^μ 的函数。也就是说, 我们将 B_μ^m 分解为了紧致流形的基灵矢量 (这也相当于规范群的生成元) 与矢量场 A_μ^a 的乘积。

与五维时空类似, 上述 $(4+D)$ 维时空的作用量可以表示为 $(4+D)$ 维曲率标量 $R^{(4+D)}$ 对全时空的积分

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(4+D)}} \int d^{(4+D)}x \sqrt{-g^{(4+D)}} R^{(4+D)}, \quad (7.151)$$

式中 $G^{(4+D)}$ 为 $(4+D)$ 维时空中的耦合常数, $g^{(4+D)}$ 为 $(4+D)$ 维度规张量 g_{MN} 的行列式。为了将之转化为四维时空中的表达式, 我们将各个额外维 x^m 积去。定义紧致流形的不变体积为

$$V^{(D)} = \int d^Dx \sqrt{g^{(D)}}, \quad (7.152)$$

式中 $g^{(D)}$ 为紧致流形度规张量 g_{mn} 的行列式, 积分对所有紧致维度 x^n 张成的紧致流形进行。计算出基灵矢量在紧致流形上的积分, 我们得到

$$\int d^Dx \sqrt{g^{(D)}} g_{mn} \xi_a^m \xi_b^n = a V^{(D)} \delta_{ab}, \quad (7.153)$$

式中 a 是一个常数, 积分对紧致流形进行。

因此在积去紧致维度后, 四维时空中的作用量可以表示为

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(4)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left(R^{(4)} - \frac{1}{4} a g_0^2 F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu} \right), \quad (7.154)$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (7.155)$$

为矢量场 A_μ^a 所对应的场强张量, $G^{(4)}$ 为四维时空中的耦合常数

$$G^{(4)} = \frac{G^{(4+D)}}{V^{(D)}}, \quad (7.156)$$

$g^{(4)}$ 为四维张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式, 而 $R^{(4)}$ 为与四维张量 $g_{\mu\nu}$ 相对应的曲率标量。恰当地选取归一化常数, 我们将得到非阿贝尔规范理论。

如果我们将 A_μ^a 视为非阿贝尔规范场, 将 $g_{\mu\nu}$ 视为四维时空的度规张量, 那么上式恰好就给出了规范场与引力场的作用量, 其中规范场所对应的规范群恰好就是紧致流形度规张量 g_{mn} 的对称群。特别地, 如果我们对额外维作如下的无限小坐标变换

$$x'^m = x^m - \varepsilon^a \xi_a^m(x^n), \quad (7.157)$$

那么要使得时空间隔 $d\tau^2$ 不发生改变, 我们需要使得规范场以如下方式进行变换

$$A_\mu'^a = A_\mu^a + \frac{1}{g_0} \partial_\mu \varepsilon^a - f_{bc}^a \varepsilon^b A_\mu^c, \quad (7.158)$$

这与非阿贝尔规范理论中规范变换的形式是相同的。因此在积去额外维后, 紧致流形的时空结构恰好给出了与其对称群相对应的规范场。这样通过为时空引入更加复杂的紧致维度, 我们成功地将引力理论与非阿贝尔规范理论统一了起来。

紧致流形的维数越高、对称性越复杂, 那么它所能承载的规范群也就越大。标准模型的规范群为 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, 可以证明这最少需要一个 7 维的紧致流形才能实现。也就是说, 如果电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用都是通过卡鲁扎-克莱因机制紧化得到的, 那么我们的宇宙至少需要具有 11 个维度, 其中 4 个维度在宏观中展开, 至少有 7 个维度蜷曲起来, 提供不同的规范相互作用。¹⁶ 当然, 我们也可以设想让紧致流形具有 $SU(5)$ (或更高) 的对称性, 再破缺到标准模型的对称群。

我们可以进一步地将这一高维时空与物质场耦合起来。以五维时空中的无质量实标量场为例, 我们可以将其作用量表示为

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left(\frac{1}{2} \nabla_M \phi \nabla^M \phi \right), \quad (7.159)$$

这里我们明显地写出了协变导数 ∇_M 的表达式, 以说明这一作用量是定义在五维弯曲时空的。上述作用量的宏观维度将描述标量场与引力场的相互作用, 而额外维将描述标量场与规范场的相互作用。若考虑到更高阶模式的贡献, 则理论中还会出现一系列质量不同的标量场模式。将这一标量场在额外维上展开为傅里叶级数, 我们将得到一系列不同的模式

$$\phi(x^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inx^4/a}. \quad (7.160)$$

若宏观维度是平直的, 则这一标量场所满足的经典克莱因-戈登方程为

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_4 \partial^4) \phi(x^M) = 0, \quad (7.161)$$

从中可以得到第 n 个模式所满足的方程

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - \frac{n^2}{a^2} \right) \phi^{(n)}(x^\mu) = 0. \quad (7.162)$$

因此我们得到, 标量场第 n 个模式 $\phi^{(n)}$ 的质量为

$$m_n^2 = \frac{n^2}{a^2}. \quad (7.163)$$

可以验证, 在紧致维度的无穷小变换下

$$x'^4 = x^4 - \kappa \varepsilon (x^\mu), \quad (7.164)$$

规范场和标量场将按照如下方式进行变换

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon, \quad (7.165)$$

$$\phi'^{(n)} = e^{in\kappa\varepsilon/a} \phi^{(n)}, \quad (7.166)$$

将这一结果与通常的规范变换相比较, 我们得到 $\phi^{(n)}$ 模式所对应的电荷为

$$q_n = \frac{n\kappa}{a}. \quad (7.167)$$

由此可见, 电荷也自动得到了量子化。如果能量足够高的话, 那么我们将可能在理论中看到这些场的贡献。¹⁷ 当然, 我们也可以在高维时空之中引入旋量场。相关的讨论是较为复杂的, 这里从略。

如果我们想要对卡鲁扎-克莱因理论进行量子化, 那么我们就需要恢复在高维空间中被约束掉的自由度。以五维时空中的卡鲁扎-克莱因理论为例, 其度规张量的额外维分量 g_{44} 被限制为了一个常数。为对这一自由度进行量子化, 我们用一个标量场 ϕ 来明显地写出这个自由度

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{2\phi} (dx^4 + \kappa A_\mu dx^\mu)^2, \quad (7.168)$$

¹⁶ 需要说明的是, 在卡鲁扎-克莱因理论中, 左手场和右手场是平等的, 因此可能还需要其他的机制将不同的手征场区分开来。

¹⁷ 但是需要注意的是, 在通常的能标下, 场的高阶模式并不会被激发出来, 因此通常所见到的带电场并不是前面提到的高阶模式。

它的度规张量可以表示为

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 e^{2\phi} A_\mu A_\nu & \kappa e^{2\phi} A_\mu \\ \kappa e^{2\phi} A_\nu & e^{2\phi} \end{pmatrix}, \quad (7.169)$$

这里的 ϕ 场被称为胀子场，它是宏观维度 x^μ 的函数。注意到五维度规张量 g_{MN} 中有 15 个自由度，而 $g_{\mu\nu}$ 中有 10 个自由度， A_μ 中有 4 个自由度， ϕ 中有 1 个自由度，因此现在 g_{MN} 中的所有自由度都已经得到了恢复。将额外维 x^5 积去，我们将得到含有胀子场 ϕ 的卡鲁扎-克莱因理论在四维时空中的作用量

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(4)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left[R^{(4)} - 2e^{-\phi} \nabla^2 e^\phi - \frac{\kappa^2}{4} e^{2\phi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right], \quad (7.170)$$

式中 $\kappa^2 = 16\pi G^{(4)}$ 。取胀子场的基态为 $\phi = 0$ ，我们将回到此前讨论的情况。

对于一个经典的卡鲁扎-克莱因理论来说，五维度规张量 g_{MN} 将使得其经典作用量取极值

$$\delta S[g_{MN}] = 0. \quad (7.171)$$

而量子卡鲁扎-克莱因理论的几率振幅将是对五维度规张量 g_{MN} （同时也是对 $g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi$ 场）保持拓扑结构和对称性不变的所有可能的构型进行泛函积分

$$K = \int \mathcal{D}[g_{MN}] e^{iS[g_{MN}]} \\ \sim \int \mathcal{D}[g_{\mu\nu}] \mathcal{D}[A_\mu] \mathcal{D}[\phi] e^{iS[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi]}. \quad (7.172)$$

当然，这里只包含了零模的结果。如果计及高阶的模式，则泛函积分中将包含更高阶场的贡献。由此可见，通过对高维时空中的作用量进行泛函积分，我们就得到了卡鲁扎-克莱因理论的量子化，它可以以一种统一的方式来描述规范理论和引力理论。

7.5 超对称理论

在本节中，我们将采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$ ，同时度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ， γ 矩阵将选取为外尔表示。¹⁸

我们知道，对称性在物理学中是至关重要的。通过要求系统满足洛伦兹对称性，我们成功地得到了相对论协变的理论。通过要求系统满足局域的规范对称性，我们成功地得到了规范相互作用，它恰当地描述了自然界中的强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用。本节要介绍的是一种能够将不同自旋的粒子关联起来的对称性，我们称之为超对称性。通过构建满足超对称性的理论，我们额外地为物理系统引入了一大类新的粒子和相互作用。它们将产生出一系列新的现象，同时有可能解决一些在标准模型中无法解决的问题。

初看起来，这种能够联系不同自旋的对称性似乎是难以得到的。我们可以设想能够将旋量多重态联系起来的内部变换，然而毕竟标量场、旋量场和矢量场是完全不同的。事实上研究者们已经证明了著名的科尔曼 (Coleman)-曼都拉 (Mandular) 禁戒定理。这个定理指出：对于理论的对称性生成元来说，其对称群总可以表示为庞加莱群和一个与庞加莱群对易的内部对称群的直积¹⁹，因此这样的对称性将只能实现同种粒子之间的变换。根据这一定理，将不同自旋的粒子利用

¹⁸超对称是符号约定的重灾区，几乎每一篇文献所使用的约定都或多或少地有些不同，并且超对称所使用的符号体系（二分量手征旋量）也与量子场论的其他领域非常不同。

¹⁹这里的对称性生成元指的是那些与 S 矩阵对易、对易子也是对称性生成元、将单粒子态变到另一个单粒子态、在多粒子态上的作用是它们在单粒子态上的作用的直和的生成元。除此之外，科尔曼-曼都拉定理还要求如下条件：满足洛伦兹不变性；理论具有非零的质量间隙（即对于任意一个给定的质量 M 来说，都只有有限多个粒子的质量小于 M ）；在几乎所有的能量范围内，两个单粒子态都会发生散射；对于几乎所有能量和散射角来说，散射振幅都是质心能量和转移动量的解析函数；生成元为动量空间的可积算符，且在其核上有确定的分布。通过放松科尔曼-曼都拉定理的限制条件，我们可以找到科尔曼-曼都拉定理的一些例外。例如，若我们考虑反对易的费米生成元，则理论中可能出现超对称性。若我们考虑无质量的场论，则理论中可能出现共形对称性。

对称性统一起来似乎已经是不可能实现的了。但如果不假设描述变换时必须采用对易对易型的玻色生成元，而是可以采用反对易型的费米生成元，那么我们确实可以找到一些超出科尔曼-曼都拉禁戒定理限制条件的对称性，从而实现不同自旋粒子之间的相互变换。

在超对称理论中，我们通常采用外尔表示的二分量旋量指标对手征场进行讨论，因此我们先对这一记号进行简要的介绍。在外尔表示下， γ 矩阵的形式为

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.173)$$

其中 $\sigma^\mu = (I, \boldsymbol{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\boldsymbol{\sigma})$, σ^i 为泡利自旋矩阵。将 γ_5 计算出来，我们得到

$$\gamma_5 = \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \quad (7.174)$$

因此左右手两个投影算符分别为

$$\hat{P}_L = \text{diag}(1, 1, 0, 0), \quad \hat{P}_R = \text{diag}(0, 0, 1, 1). \quad (7.175)$$

当我们将左右手投影算符作用到四分量旋量场上时，我们发现左手算符投影出了前两个分量，而右手算符投影出了后两个分量。如果我们将狄拉克旋量 ψ 在外尔表象下表示为

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (7.176)$$

式中 ψ_L, ψ_R 均为二分量的旋量场，那么将左右手投影算符作用到旋量场上得到

$$\hat{P}_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (7.177)$$

也就是说，在外尔表示下 ψ_L 实际上就是 ψ 的左手分量，而 ψ_R 就是 ψ 的右手分量。在这一表示下左手分量和右手分量明显地分离开了，这在使用时常常是比较方便的。

为了明显地区分左手旋量和右手旋量，我们用不带点的希腊字母来标记左手旋量场的二分量指标，而用带点的希腊字母来标记右手旋量场的二分量指标。²⁰ 在这个标记之下，左手旋量场和右手旋量场可以分别表示为

$$\psi_L = \xi_\alpha, \quad \psi_R = \chi^{\dagger\dot{\alpha}}, \quad (7.178)$$

不带点的指标将按照洛伦兹群的 $(1/2, 0)$ 表示进行变化，而带点的指标将按照洛伦兹群的 $(0, 1/2)$ 表示进行变化。在这个记号下，狄拉克旋量可以表示为

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (7.179)$$

取厄密共轭的操作将会把左手旋量和右手旋量互换，也就是说会将带点的指标换成不带点的指标，而将不带点的指标换成带点的指标。因此狄拉克旋量的共轭可以表示为

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} \xi_\alpha^\dagger & \chi^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \xi_\alpha^\dagger \end{pmatrix}, \quad (7.180)$$

这里 I 是 2×2 单位矩阵。

二分量旋量的“度规张量”定义为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.181)$$

这组矩阵满足如下的关系

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma} = \varepsilon^{\gamma\beta} \varepsilon_{\beta\alpha} = \delta_\alpha^\gamma, \quad \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}}. \quad (7.182)$$

²⁰ 对于超对称理论来说，上述二分量旋量指标并不是必需的。如果我们采用狄拉克表示，则旋量场的左手部分和右手部分将不会明显地分离开来。此时我们无需引入各个二分量旋量指标，而仍可以将手征旋量表示为四维形式并明显地将之记为 ψ_L 或 ψ_R 。

利用上述“度规张量”可以对二分量旋量指标进行升降

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad \psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (7.183)$$

$$\chi^{\dagger\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \chi_{\dot{\beta}}^\dagger, \quad \chi_{\dot{\alpha}}^\dagger = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \chi^{\dagger\dot{\beta}}. \quad (7.184)$$

两个同种旋量的内积定义为一对相同的上下指标的缩并，它将给出一个标量

$$\xi\chi = \xi^\alpha \chi_\alpha, \quad \xi^\dagger \chi^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \chi^{\dagger\dot{\alpha}}, \quad (7.185)$$

并且对于不带点的指标来说总是左上指标和右下指标缩并，而对于带点的指标来说总是左下指标和右上指标缩并。 σ 矩阵和 $\bar{\sigma}$ 矩阵自带一个带点指标和一个不带点指标

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}, \quad (7.186)$$

因此它们作用在旋量上可以将左手旋量和右手旋量互换

$$\chi^{\dagger\dot{\alpha}} = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \xi_\alpha, \quad \xi_\alpha = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \chi^{\dagger\dot{\alpha}}. \quad (7.187)$$

类似地，它们与一对左手旋量和右手旋量缩并也可以得到一个标量

$$\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi = \chi_{\dot{\alpha}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \xi_\alpha, \quad \xi \sigma^\mu \chi^\dagger = \xi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \chi^{\dagger\dot{\alpha}}. \quad (7.188)$$

作为一个例子，我们可以将狄拉克旋量的拉格朗日密度用二分量手征旋量来表示

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\begin{pmatrix} \chi^\alpha & \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} \chi^\alpha & \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= i\xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m(\xi\chi + \xi^\dagger \chi^\dagger), \end{aligned} \quad (7.189)$$

我们已弃去了适当的全导数项。若将上述表达式利用通常的四分量旋量记号表示出来，则我们得到

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L(i\partial)\psi_L + \bar{\psi}_R(i\partial)\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L), \quad (7.190)$$

这正是我们此前在狄拉克表象下曾得到的结果。这一点是在我们的预料之内的，因为拉格朗日密度应当与 γ 矩阵的表示无关。

下面我们开始试图构造一个具有超对称性，即能够通过恰当的对称变换将玻色子和费米子联系起来的理论。由于我们这里考虑的变换是将自旋为 1/2 的粒子变换为自旋为 0 或者自旋为 1 的粒子，因此这种变换是以自旋 1/2 为单位改变的。因此我们可以设想在理论中引入一组分别按照左手旋量和右手旋量变换的旋量算符 $\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}^{\dagger\dot{\alpha}}$ ，它们就是所要考虑的超对称变换的生成元。由于这一算符是旋量算符，因此可以设想它们之间应当满足反对易关系，而它们与庞加莱群的其它算符仍然满足对易关系。

在洛伦兹变换下，超对称生成元将分别按照左手旋量和右手旋量变化，因此它们与洛伦兹变换生成元之间将满足如下的对易关系

$$[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{Q}_\alpha] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \hat{Q}_\beta, \quad [\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{Q}^{\dagger\dot{\alpha}}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \hat{Q}^{\dagger\dot{\beta}}, \quad (7.191)$$

式中 $\hat{J}^{\mu\nu}$ 为洛伦兹变换生成元，而 $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ 分别为左手旋量和右手旋量在无限小洛伦兹变换下的生成元

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu), \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu). \quad (7.192)$$

由于超对称变换不应当改变粒子的动量，因此超对称生成元与时空平移生成元应当是对易的

$$[\hat{P}^\mu, \hat{Q}_\alpha] = [\hat{P}^\mu, \hat{Q}^{\dagger\dot{\alpha}}] = 0. \quad (7.193)$$

另外， \hat{Q} 以及 \hat{Q}^\dagger 与其自身应当是反对易的

$$\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta\} = \{\hat{Q}_\alpha^\dagger, \hat{Q}_\beta^\dagger\} = 0. \quad (7.194)$$

由于一个左手旋量表示与右手旋量表示的直积相当于一个四矢量, 因此 \hat{Q} 与 \hat{Q}^\dagger 之间的反对易子也应当按照一个四矢量进行变化。考虑到生成元之间的(反)对易关系仍为生成元的线性组合, 因此惟一的选择就是令这个反对易子所对应的四矢量正比于四动量算符, 即

$$\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\alpha^\dagger\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \hat{P}^\mu, \quad (7.195)$$

这里的系数是为了方便归一化而选取的。我们称上述对易关系和反对易关系为超对称代数, 并且凡是生成元满足上述超对称代数的变换, 就被称为超对称变换。

超对称变换有一些普遍的性质。将超荷算符 \hat{Q} 作用在系统的量子态上, 可以将玻色态 B 变换为费米态 F , 或者将费米态 F 变换为玻色态 B

$$\hat{Q}|B\rangle = |F\rangle, \quad \hat{Q}|F\rangle = |B\rangle. \quad (7.196)$$

因此每一个玻色自由度都与一个相应的费米自由度相联系, 反之亦然。并且玻色场和费米场的质量是相同的, 这是所有超对称理论的一个共同特征。要证明这一点, 只需要注意到庞加莱群的卡西米尔算符 \hat{P}^2 与所有的超对称生成元对易, 因此也是超对称代数的卡西米尔算符。这意味着所有超对称多重态中的粒子都将具有相同的 \hat{P}^2 本征值, 因此由超对称变换连接起来的玻色子和费米子将具有相同的质量

$$m_B = m_F. \quad (7.197)$$

如果玻色子的质量与相应的费米子的质量不同, 则理论的超对称性将不再得到保持。

我们还可以一般性地证明, 对于任意一个超对称的表示来说, 其玻色自由度的数量与费米自由度的数量总是相等的。要证明这一点, 我们需要考虑一个费米子数算符 $(-1)^{2s}$, 它作用于玻色态上给出本征值 $+1$, 作用于费米态上给出本征值 -1 。我们有

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(-1)^{2s} \hat{P}^\mu] &= \text{Tr}[(-1)^{2s} \hat{Q} \hat{Q}^\dagger] + \text{Tr}[(-1)^{2s} \hat{Q}^\dagger] \\ &= \text{Tr}[(-1)^{2s} \hat{Q} \hat{Q}^\dagger] - \text{Tr}[(-1)^{2s} \hat{Q} \hat{Q}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (7.198)$$

若我们仅考虑具有动量 p^μ 的粒子, 则动量算符 \hat{P}^μ 将可以用其本征值 p^μ 来代替, 于是我们有

$$\text{Tr}[(-1)^{2s} \hat{P}^\mu] = p^\mu \text{Tr}[(-1)^{2s}] \propto p^\mu (n_B - n_F), \quad (7.199)$$

因此要想使得上式等于零, 就必须有

$$n_B = n_F. \quad (7.200)$$

这就证明了超对称理论中玻色自由度和费米自由度一定是相同的。

从数学上看, 前面所讨论的超对称代数是更加普遍的阶化李代数的一个特例。在普通的李代数中只有一种生成元, 且所有的生成元之间都满足对易关系。而在 \mathbb{Z}_2 阶化李代数中, 我们为每一个生成元 \hat{O}_a 都引入一个阶 η_a , 这里 η_a 可以取为 0 或 1。因此可以根据生成元的阶将其分为两类, 其中阶 $\eta_a = 0$ 的称为玻色生成元, $\eta_a = 1$ 的称为费米生成元。不同的生成元之间满足如下的关系

$$\hat{O}_a \hat{O}_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} \hat{O}_b \hat{O}_a = i C_{ab}^c \hat{O}_c, \quad (7.201)$$

式中 C_{ab}^c 称为阶化李代数的结构常数, 式中不对指标 a, b 求和。由此我们可以看到, 生成元的种类不同, 它所满足的对易关系也就不同。特别地, 各个玻色生成元之间满足对易关系, 各个费米生成元之间满足反对易关系, 而玻色生成元和费米生成元之间仍满足对易关系。在超对称代数中, 洛伦兹变换生成元和时空平移变换生成元均为玻色生成元, 而超对称生成元为费米生成元, 因此它是一种特殊的阶化李代数。事实上我们可以证明, 超对称代数是相对论性量子场论中唯一容许的阶化对称李代数, 因此超对称将是唯一一种可能的将不同自旋联系起来的对称性。

我们应当如何构造一个具有超对称性的理论呢? 一个简单的做法是将场从通常的闵可夫斯基时空拓展到超空间中。²¹ 我们知道, 通常的场是定义在闵可夫斯基时空中的, 它是时空坐标

²¹ 在数学上, 我们可以将时空理解为系统的对称群(等度规群) G 与其小群(迷向子群) H 的商群。因此, 通常所说的闵可

x^μ 的函数。相应的洛伦兹变换和时空平移变换也是作用在 x^μ 上的，我们可以一般性地将它表示为

$$g(\omega, a) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu} + ia_\mu\hat{P}^\mu\right), \quad (7.202)$$

其中

$$\hat{J}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu), \quad \hat{P}^\mu = i\partial^\mu \quad (7.203)$$

分别为洛伦兹变换生成元和平移算符生成元在闵可夫斯基时空上的表示，而 ω, a 分别为变换参数。由于超对称变换是对洛伦兹变换的拓展，因此我们可以设想对时空本身也进行拓展，从而将超对称变换容纳进来。超对称变换的生成元是旋量算符，因此我们可以为闵可夫斯基时空额外引入一组格拉斯曼数构成的坐标 $\theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger$ 。这样得到的空间将包含 $x^\mu, \theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger$ ，我们称之为超空间。相应的场

$$A = A(x^\mu, \theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger) \quad (7.204)$$

也将定义在超空间中。当然，超空间中格拉斯曼数的自由度并非是物理的，我们最后要将其积去，得到的仍然是一个闵可夫斯基时空中的场论。

与洛伦兹变换类似，接下来我们要将超对称变换视为超空间中的坐标变换，它将把时空坐标 x^μ 和格拉斯曼坐标 $\theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger$ “混合”起来。我们用一个二分量的旋量参数 ε 来标记超对称变换，这样超对称变换将可以一般性地表示为

$$g(\varepsilon, \varepsilon^\dagger) = \exp\left(-i\varepsilon^\alpha\hat{Q}_\alpha - i\varepsilon_\alpha^\dagger\hat{Q}^{\dagger\alpha}\right). \quad (7.205)$$

需要注意的是，这一变换必须是厄密的，因此变换中必须同时包含 \hat{Q} 以及 \hat{Q}^\dagger ，且两个生成元之前的系数必须互为厄密共轭。我们期望这里的 $\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}^{\dagger\alpha}$ 可以理解为将时空坐标和格拉斯曼坐标混合起来的无穷小变换生成元。这组生成元应当满足前述所有超对称生成元的对易与反对易关系，我们将其选取为

$$\hat{Q}_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu\theta^\dagger)_\alpha\partial_\mu, \quad \hat{Q}^{\dagger\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^\dagger} - (\bar{\sigma}^\mu\theta)^\alpha\partial_\mu, \quad (7.206)$$

取厄密共轭后有

$$\hat{Q}^\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + (\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu, \quad \hat{Q}_\alpha^\dagger = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger\alpha}} + (\theta\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu, \quad (7.207)$$

它们可以满足全部的超对称代数。特别地，对于一个无限小的超对称变换来说

$$g(\varepsilon, \varepsilon^\dagger) = 1 - i\varepsilon^\alpha\hat{Q}_\alpha - i\varepsilon_\alpha^\dagger\hat{Q}^{\dagger\alpha} \quad (7.208)$$

它作用在超空间上相当于如下的变换

$$\theta^\alpha \rightarrow \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha, \quad \theta_\alpha^\dagger \rightarrow \theta_\alpha^\dagger + \varepsilon_\alpha^\dagger, \quad (7.209)$$

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + i\varepsilon\sigma^\mu\theta^\dagger + i\varepsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta, \quad (7.210)$$

这与我们的预想是相同的。因此，超对称变换确实可以被视为超空间中的“坐标变换”。

对于一个超空间中定域的场论来说，其作用量可以表示为对某个超场 A （它相当于超空间中的“拉格朗日密度”）对整个超空间的积分

$$S = \int d^4x \int d^2\theta d^2\theta^\dagger A(x^\mu, \theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger), \quad (7.211)$$

夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,3}$ 可以被视为庞加莱群 $\text{ISO}(1, 3)$ 与洛伦兹群 $\text{SO}(1, 3)$ 的陪集，即 $\mathbb{R}^{1,3} = \text{ISO}(1, 3)/\text{SO}(1, 3)$ 。相应地，超空间 $\mathbb{R}^{1,3|1}$ 也可以被视为超庞加莱群 $\text{ISO}(1, 3|1)$ 与洛伦兹群 $\text{SO}(1, 3)$ 的陪集，即 $\mathbb{R}^{1,3|1} = \text{ISO}(1, 3|1)/\text{SO}(1, 3)$ 。

引入超空间的优势在于，它可以系统性地构造具有超对称性的场论，并且使得理论的超对称性体现得更加明显。并且我们也可以利用超空间之中的超图（而非闵可夫斯基时空中的费曼图）来直接研究超对称理论中各场之间的相互作用，这有时是更有启发性的。当然对于物理上考虑的超对称理论来说，超场并不是必要的，我们可以在完全不引入超空间和超场的情况下直接讨论超对称理论。并且对于超对称守恒荷数量太多的超对称理论来说，明显地写出超场的表达式实际上是更加复杂的。

这里所说的“超场”指的是场 $A(x^\mu, \theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger)$ 自身在超对称变换下是不变的（就像闵可夫斯基时空中的标量场 φ 在庞加莱变换下不变一样）。一般地，若 A 是一个超场，则其共轭、乘积以及线性组合均为超场，它关于闵可夫斯基时空的导数 $\partial_\mu A$ 也是超场。但需要注意的是，它相对于格拉斯曼变量的导数 $\partial_\alpha A$ 以及 $\partial_{\dot{\alpha}} A$ 并不是超场，因为它们在超对称变换下将发生改变。事实上若我们能够将超对称理论的作用量表示为某个超场对整个超空间积分的形式，则它在超对称变换下将总保持不变，这是因为这样一个在超空间中定域的超场在整个超空间中的“旋转”变换下总应当是不变的。

在积去所有的格拉斯曼变量后，我们可以将这个场作用量表示为通常的拉格朗日密度 \mathcal{L} 对全时空的积分

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (7.212)$$

其中拉格朗日密度 \mathcal{L} 可以表示为超场 A 对全部格拉斯曼变量的积分

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger A(x^\mu, \theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger). \quad (7.213)$$

这个作用量定义在闵可夫斯基时空中，且在超对称变换下同样是不变的。因此如果我们能够在超空间中写出一个恰当的理论，然后将所有的格拉斯曼变量全部积去，那么我们就得到了一个定义在闵可夫斯基时空中、且具有超对称性的场论。

由于格拉斯曼数具有反对易性质，因此两个相同的格拉斯曼数的乘积将等于零。又由于 θ, θ^\dagger 均为二分变量，因此格拉斯曼数的非零乘积最多容许 $\theta^\alpha \theta^\beta \theta_\alpha^\dagger \theta_\beta^\dagger$ 项的存在。如果幂次继续增加，那么乘积中必定会出现相同的格拉斯曼变量，此时乘积将等于零，不会产生任何贡献。因此，如果我们将 A 场对格拉斯曼变量 θ, θ^\dagger 进行级数展开，那么级数展开式中将只有寥寥几项不为零。我们将它们全部写在下面，结果为

$$\begin{aligned} A(x, \theta, \theta^\dagger) = & a(x) + \theta \xi(x) + \theta^\dagger \xi^\dagger(x) + \theta \theta b(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger c(x) \\ & + \theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta v_\mu(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \eta + \theta \theta \theta^\dagger \zeta^\dagger(x) + \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger d(x), \end{aligned} \quad (7.214)$$

式中 $a, \xi, \chi^\dagger, b, c, v_\mu, \eta, \zeta^\dagger, d$ 均为定义在闵可夫斯基时空中的场，这就是超场最一般的表达式。计算出超场各分量在超对称变换下的行为，我们得到

$$\sqrt{2}\delta a = \varepsilon \xi + \varepsilon^\dagger \chi^\dagger, \quad (7.215)$$

$$\sqrt{2}\delta \xi_\alpha = 2\varepsilon_\alpha b - (\sigma^\mu \varepsilon^\dagger)_\alpha (v_\mu + i\partial_\mu a), \quad (7.216)$$

$$\sqrt{2}\delta \chi^{\dagger\dot{\alpha}} = 2\varepsilon^{\dagger\dot{\alpha}} c + (\bar{\sigma}^\mu \varepsilon)^{\dot{\alpha}} (v_\mu - i\partial_\mu a), \quad (7.217)$$

$$\sqrt{2}\delta b = \varepsilon^\dagger \zeta^\dagger - \frac{i}{2} \varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi, \quad (7.218)$$

$$\sqrt{2}\delta c = \varepsilon \eta - \frac{i}{2} \varepsilon \sigma^\mu \partial_\mu \chi^\dagger, \quad (7.219)$$

$$\sqrt{2}\delta v^\mu = \varepsilon \sigma^\mu \zeta^\dagger - \varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta - \frac{i}{2} \varepsilon \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\nu \xi + \frac{i}{2} \varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \partial_\nu \chi^\dagger, \quad (7.220)$$

$$\sqrt{2}\delta \eta_\alpha = 2\varepsilon_\alpha d - i(\sigma^\mu \varepsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu c - \frac{i}{2} (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \varepsilon)_\alpha \partial_\mu v_\nu, \quad (7.221)$$

$$\sqrt{2}\delta \zeta^{\dagger\dot{\alpha}} = 2\varepsilon^{\dagger\dot{\alpha}} d - i(\bar{\sigma}^\mu \varepsilon)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu b + \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \varepsilon^{\dagger})^{\dot{\alpha}} \partial_\mu v_\nu, \quad (7.222)$$

$$\sqrt{2}\delta_\varepsilon d = -\frac{i}{2} \varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta - \frac{i}{2} \varepsilon \sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger. \quad (7.223)$$

接下来我们将对超场 A 进行全部格拉斯曼变量的积分。注意到两个相同的格拉斯曼变量的乘积为零，对格拉斯曼变量的积分将得到

$$\int d^2\theta \, 1 = \int d^2\theta \, \theta = 0, \quad \int d^2\theta \, \theta\theta = 1, \quad (7.224)$$

$$\int d^2\theta^\dagger \, 1 = \int d^2\theta^\dagger \, \theta^\dagger = 0, \quad \int d^2\theta^\dagger \, \theta^\dagger \theta^\dagger = 1. \quad (7.225)$$

因此, 如果我们对全部格拉斯曼变量进行积分, 那么 A 场中余下的只有 $\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$ 一项

$$\int d^2\theta d^2\theta^\dagger A(x, \theta, \theta^\dagger) = d(x), \quad (7.226)$$

这被称为超场的 D 项。除此之外, 我们还容许如下的积分存在

$$\int d^2\theta d^2\theta^\dagger \delta^{(2)}(\theta) A(x, \theta, \theta^\dagger) = \int d^2\theta^\dagger A(x, 0, \theta^\dagger) = c(x), \quad (7.227)$$

$$\int d^2\theta d^2\theta^\dagger \delta^{(2)}(\theta^\dagger) A(x, \theta, \theta^\dagger) = \int d^2\theta A(x, \theta, 0) = b(x), \quad (7.228)$$

以上两项被称为超场的 F 项。

以上给出的超场是较为普遍的, 它并不是超对称代数的不可约表示, 因此我们常常需要对超空间中的超场施加一些更严格的限制。定义超空间中的手征协变导数 D 和反手征协变导数 \bar{D} 为

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu\theta^\dagger)_\alpha\partial_\mu, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}^\dagger} - i(\bar{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (7.229)$$

$$D^\alpha = -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i(\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}^\dagger} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu. \quad (7.230)$$

上述导数算符是超对称协变的 (即在超对称变换下不变), 因此它们可以用于构建具有超对称协变性的理论。它们之间满足如下的反对易关系

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\partial_\mu, \quad (7.231)$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = 0, \quad \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (7.232)$$

这在形式上与超对称生成元的反对易关系是相同的, 且所有的协变导数算符与超对称生成元算符均为反对易的。可以验证, 若 A 是一个超场, 则 $D_\alpha A$ 以及 $\bar{D}_{\dot{\alpha}} A$ 均为超场。

如果一个超场 Φ 的反手征协变导数为零

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \quad (7.233)$$

则称其为手征超场。如果我们做变量代换

$$y^\mu = x^\mu + i\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta, \quad (7.234)$$

那么在超空间坐标 $y^\mu, \theta^\alpha, \theta_{\dot{\alpha}}^\dagger$ 下, 反手征协变导数将表示为

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}^\dagger}. \quad (7.235)$$

此时手征超场中将只包含 θ 项, 而不包含 θ^\dagger 项

$$\Phi(y, \theta, \theta^\dagger) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y). \quad (7.236)$$

我们可以注意到, 这里的手征超场有些类似于复变函数中的解析函数。对于一个复变函数 $f(z, z^*)$ 来说, 它是解析函数的条件为 $\partial f/\partial z^* = 0$ 。换句话说, 解析函数只依赖于 z , 而不依赖于 z^* , 与这里手征超场的情况是类似的 (只包含 θ , 不包含 θ^\dagger)。将上式中的变量由 y 代换回 x , 我们就得到了超空间中手征超场的一般形式

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \theta^\dagger) = & \phi(x) + i\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) \\ & + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \theta\theta F(x). \end{aligned} \quad (7.237)$$

类似地, 如果一个超场 Φ^* 的手征协变导数为零

$$D_\alpha\Phi^* = 0, \quad (7.238)$$

则称其为反手征超场。如果我们做变量代换

$$y^{*\mu} = x^\mu - i\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta, \quad (7.239)$$

那么在超空间坐标 $y^{*\mu}, \theta^\alpha, \theta_\alpha^\dagger$ 下, 反手征协变导数将表示为

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}. \quad (7.240)$$

此时反手征超场中将只包含 θ^\dagger 项, 而不包含 θ 项

$$\Phi^*(y^*, \theta, \theta^\dagger) = \phi^*(y^*) + \sqrt{2}\theta^\dagger \psi^\dagger(y^*) + \theta^\dagger \theta^\dagger F^*(y^*). \quad (7.241)$$

将上式中的变量由 y 代换回 x , 我们就得到了超空间中反手征超场的一般形式

$$\begin{aligned} \Phi^*(x, \theta, \theta^\dagger) = & \phi^*(x) - i\theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu \phi^*(x) + \frac{1}{4} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi^*(x) \\ & + \sqrt{2}\theta^\dagger \psi^\dagger(x) - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^\dagger(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger F^*(x). \end{aligned} \quad (7.242)$$

可以看出, 手征超场的厄密共轭就是一个反手征超场。

除了手征超场和反手征超场之外, 还有一种重要的超场, 它与其自身的共轭相等

$$V^* = V, \quad (7.243)$$

这种超场被称为矢量超场。与复变函数相类比, 这里的矢量超场类似于复变函数中的实函数 $f^* = f$ 。将矢量超场展开, 我们得到

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \theta^\dagger) = & a(x) + \theta \xi(x) + \theta^\dagger \xi^\dagger(x) + \theta \theta b(x) \\ & + \theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta A_\mu(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \left[\lambda(x) - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^\dagger(x) \right] \\ & + \theta \theta \theta^\dagger \left[\lambda^\dagger(x) - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi(x) \right] + \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger \left[\frac{1}{2} D(x) + \frac{1}{4} \partial_\mu \partial^\mu a \right], \end{aligned} \quad (7.244)$$

这就是矢量超场最一般的形式。对于任何一个手征超场 Ω 和矢量超场 V 来说

$$V' = V + i(\Omega^* - \Omega) \quad (7.245)$$

仍然是一个矢量超场, 这被称为超规范变换。经过适当的超规范变换后, 矢量超场的任意性将有所降低。一个经常选取的规范固定条件为韦斯-祖米诺规范

$$a = \xi = \xi^\dagger = b = 0. \quad (7.246)$$

在这个规范条件下, 矢量超场的表达式可以简化为

$$V(x, \theta, \theta^\dagger) = \theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta A_\mu(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda(x) + \theta \theta \theta^\dagger \lambda^\dagger(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger D(x). \quad (7.247)$$

任意一个矢量超场在经过适当的超规范变换后都可以满足韦斯-祖米诺规范条件。

手征超场和矢量超场都可以通过其他的超场构造出来。如果 A 是一个一般的超场, 那么

$$\Phi = \bar{D} \bar{D} A = \bar{D}_\alpha \bar{D}^\alpha A \quad (7.248)$$

将是一个手征超场, 而

$$\Phi^* = D D A = D^\alpha D_\alpha A \quad (7.249)$$

将是一个反手征超场。如果 Φ 是一个手征超场, 而 Φ^* 是其共轭, 那么

$$\Phi + \Phi^*, \quad i(\Phi - \Phi^*), \quad \Phi^* \Phi \quad (7.250)$$

均为矢量超场。有了上述结果, 我们就可以源源不断地从已知的超场中构造手征超场和矢量超场了。

在积去超空间中的格拉斯曼变量后, 我们发现有两种合适的具有超对称性的场, 它们分别是矢量超场的 D 项

$$[V]_D = \int d^2 \theta d^2 \theta^\dagger V(x, \theta, \theta^\dagger) = \frac{1}{2} D, \quad (7.251)$$

以及手征超场的 F 项

$$[\Phi]_F + \text{h.c.} = \int d^2 \theta d^2 \theta^\dagger \left[\delta^{(2)}(\theta^\dagger) \Phi(x, \theta, \theta^\dagger) + \delta^{(2)}(\theta) \Phi^*(x, \theta, \theta^\dagger) \right], \quad (7.252)$$

式中的厄密共轭可以保证系统的作用量为实数。手征超场的 D 项是一个全导数，因此它在理论中没有贡献。如果我们利用上述项来构造系统的拉格朗日密度，那么我们将自然地得到一个在超对称变换下保持不变的理论。

作为一个最简单的例子，我们首先来考虑一个仅由手征超场 Φ 所构成的超对称理论。由于 Φ 是手征超场，因此 $\Phi^*\Phi$ 将是一个矢量超场。这样 $\Phi^*\Phi$ 的 D 项将具有超对称性

$$\mathcal{L} = [\Phi^*\Phi]_D = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger \Phi^*\Phi. \quad (7.253)$$

将手征超场 Φ 的具体表达式代入到上述拉格朗日密度中，积去格拉斯曼变量并弃去恰当的全导数项之后，我们将得到

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^* F, \quad (7.254)$$

这被称为韦斯 (Wess)-祖米诺 (Zumino) 模型，它是最简单的超对称模型之一。将超对称变换作用在超场上，并计算出超场的各个分量在超对称变换下的变化，那么我们将得到

$$\delta\phi = \varepsilon\psi, \quad \delta\phi^* = \varepsilon^\dagger\psi^\dagger, \quad (7.255)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu\varepsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi + \varepsilon_\alpha F, \quad \delta\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = i(\varepsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* + \varepsilon^\dagger_{\dot{\alpha}} F^*, \quad (7.256)$$

$$\delta F = -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi, \quad \delta F^* = i\partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \varepsilon. \quad (7.257)$$

可以验证，韦斯 (Wess)-祖米诺 (Zumino) 模型在这组变换下确实是不变的。

上述表达式中的场 F 没有动力学项，它被称为辅助场。²² 对于我们这里所考虑的情况来说， F 场的经典取值为零。因此在泛函积分中将 F 场自由度积去，我们得到

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi, \quad (7.258)$$

这是一个无质量标量场与无质量手征旋量场的组合。此时上述变换将简化为

$$\delta\phi = \varepsilon\psi, \quad \delta\phi^* = \varepsilon^\dagger\psi^\dagger, \quad (7.259)$$

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu\varepsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi, \quad \delta\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = i(\varepsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^*, \quad (7.260)$$

我们可以清楚地看到这个变换将旋量场和标量场的自由度混合在了一起。计算出相应的守恒流，我们得到

$$\hat{J}_\alpha^\mu = (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \psi)_\alpha \partial_\nu \phi^*, \quad \hat{J}_{\dot{\alpha}}^\mu = (\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu)_{\dot{\alpha}} \partial_\nu \phi, \quad (7.261)$$

将守恒流的零分量对全空间积分即得守恒荷

$$\hat{Q}_\alpha = \sqrt{2} \int d^3x \hat{J}_\alpha^0, \quad \hat{Q}_{\dot{\alpha}}^\dagger = \sqrt{2} \int d^3x \hat{J}_{\dot{\alpha}}^{\dagger 0}, \quad (7.262)$$

这里的系数是为了归一化的方便而选取的。可以验证，这组守恒荷满足所有的超对称代数，因此我们确实是在闵可夫斯基时空中明确地构造出了一个具有超对称性的理论。

由此我们看到了利用超空间构造超对称理论的方式，即先在超空间中利用超场构建出合适的场论，再积去格拉斯曼变量得到闵可夫斯基时空中的场论。对于超场来说，其可重整性也可以通过量纲分析来进行判断。对于基本手征超场 Φ 以及格拉斯曼变量 $[\theta]$ 来说，其量纲分别为

$$[\Phi] = 1, \quad [\theta] = -\frac{1}{2}, \quad (7.263)$$

由此可以得到其各分量的量纲

$$[\varphi] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}, \quad [F] = 2. \quad (7.264)$$

可以验证，基本超场的多项式也是一个超场。因此对于由基本超场的多项式所构成的一般超场来说，其量纲会发生变化，应当与其最高次项的量纲是相同的。对于一个一般的矢量超场 K 的 D 项和手征超场 W 的 F 项来说，若它们是可重整的，则其量纲必须小于等于 4

$$[K]_D \leq 4, \quad [W]_F \leq 4, \quad (7.265)$$

²² 辅助场对于超对称理论来说是必要的。如果不在理论中引入辅助场，那么除非各场均在壳，否则超对称变换将不是封闭的。

这意味着 K 场和 W 场自身的量纲应当满足

$$[K] \leq 2, \quad [W] \leq 3, \quad (7.266)$$

这就是可重整性对理论的要求。

现在我们来更一般性地构建具有超对称性的理论。假设理论中存在若干个手征超场 Φ^i ，那么 $\Phi^{*i}\Phi^j$ 将是一个矢量超场。由于我们要求理论是可重整的，因此作用量中最多包含 Φ 场的二次项，于是超对称理论中可以一般性地包含如下的项

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[g_{ij}\Phi^{*i}\Phi^j]_D. \quad (7.267)$$

对各个手征超场做恰当的线性变换，我们可以将其对角化，因此我们得到

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = [\Phi^{*i}\Phi_i]_D. \quad (7.268)$$

除此之外，我们发现手征超场 Φ_i 的函数 $W(\Phi_i)$ 仍然是一个手征超场，因此 $W(\Phi_i)$ 的 F 项将同样可能出现在超对称理论中

$$\mathcal{L}_{\text{sp}} = [W(\Phi_i)]_F + \text{h.c.}, \quad (7.269)$$

我们将函数 $W(\Phi_i)$ 称为超势。如果我们希望超对称理论是可重整化的，那么 $W(\Phi_i)$ 的幂次不能够超过 3。因此一个可重整的超势 $W(\Phi_i)$ 的最一般形式可以表示为

$$W = \frac{1}{2}M^{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k. \quad (7.270)$$

接下来我们考虑一个矢量超场 V ，其相应的超规范变换可以表示为

$$V' = V + i(\Omega^* - \Omega). \quad (7.271)$$

这个矢量超场所对应的场强张量可以表示为

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \quad (7.272)$$

它是一个手征超场，且在上述超规范变换下保持不变。事实上，取手征超场

$$\Omega(y) = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F, \quad (7.273)$$

则超规范变换作用在矢量超场上相当于使其矢量分量变换为

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu(\phi + \phi^*), \quad (7.274)$$

这确实相当于一个规范变换。利用矢量超场的场强张量，我们可以将其动能项表示为

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{4}[\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha]_F + \text{h.c.} \quad (7.275)$$

我们还容许理论中包含矢量超场 V 的 D 项，称为费耶特 (Fayet)-伊里奥普洛斯 (Iliopoulos) 项

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = -2\kappa[V]_D, \quad (7.276)$$

式中 κ 为一个常数系数。这一项只能在阿贝尔规范理论中存在。

接下来我们要将矢量超场 V 与手征超场 Φ 耦合起来，并且我们希望耦合项在超规范变换下能够保持不变。在上述超规范变换下，手征超场的变换为

$$\Phi'_i = e^{2igq_i\Omega}\Phi_i, \quad \Phi'^{*i} = e^{-2igq_i\Omega^*}\Phi^{*i}, \quad (7.277)$$

式中 g 为规范耦合常数， q_i 为场 Φ_i 所对应的 $U(1)$ 规范荷。因此一个在超对称变换和超规范变换下同时保持不变的手征项可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = [\Phi^{*i}e^{2gq_iV}\Phi_i]_D, \quad (7.278)$$

它将取代无规范相互作用的手征项 $[\Phi^{*i}\Phi_i]_D$ 。在韦斯-祖米诺规范下， e^{2gq_iV} 将自动截断为有限项

$$\begin{aligned} e^{2gq_iV} = & 1 + 2gq_i \left(\theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta A_\mu + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda + \theta \theta \theta^\dagger \lambda^\dagger + \frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger D \right) \\ & - g^2 q_i^2 \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger A_\mu A^\mu, \end{aligned} \quad (7.279)$$

因此计算起来是方便的。

以上讨论可以推广到任意的非阿贝尔规范理论中，此时我们需要为理论引入若干个矢量超场 V^a ，超场的个数与规范群生成元的个数相同。在超规范变换下，手征超场将按照如下方式进行变换

$$\Phi_i \rightarrow (e^{i\Omega})_i^j \Phi_j, \quad \Phi^{*i} \rightarrow \Phi^{*j} (e^{-i\Omega^\dagger})_j^i, \quad (7.280)$$

式中

$$\Omega_i^j = 2gT_i^{aj}\Omega^a, \quad (7.281)$$

式中 g 为耦合常数， T^a 为规范群生成元的表示。非阿贝尔规范理论的手征项将被推广为

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = [\Phi^{*i}(e^V)_i^j \Phi_j]_D, \quad (7.282)$$

式中

$$V = 2gT^a V^a \quad (7.283)$$

为各个矢量超场的线性组合。要使得上述手征项具有超规范对称性，在超规范变换下矢量超场应当按照如下方式变换

$$e^V \rightarrow e^{i\Omega^\dagger} e^V e^{-i\Omega}. \quad (7.284)$$

这等价于

$$\begin{aligned} V^a \rightarrow & V^a + i(\Omega^{a*} - \Omega^a) + g_a f^{abc} V^b (\Omega^{c*} + \Omega^c) \\ & - \frac{i}{3} g_a^2 f^{abc} f^{cde} V^b V^d (\Omega^{e*} - \Omega^e) + \dots \end{aligned} \quad (7.285)$$

对于阿贝尔规范理论来说，所有的结构常数 f^{abc} 都等于零，因此只有前两项有贡献，这回到了我们熟悉的情况。

我们将矢量超场的场强张量 \mathcal{W}_α 选取为

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-V} D_\alpha e^V), \quad (7.286)$$

它在超规范变换下将变换为

$$\mathcal{W}_\alpha \rightarrow e^{i\Omega} \mathcal{W}_\alpha e^{-i\Omega}. \quad (7.287)$$

因此一个在超规范变换下不变的矢量超场动能项将可以表示为

$$\frac{1}{4k_a g_a^2} \text{Tr} [\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha]_F = [\mathcal{W}^{a\alpha} \mathcal{W}_\alpha^a]_F, \quad (7.288)$$

式中

$$\mathcal{W}_\alpha = 2gT^a \mathcal{W}_\alpha^a \quad (7.289)$$

为场强张量的分量。选取适当的归一化常数，我们可以将非阿贝尔矢量超场的动能项表示为

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{4} [\mathcal{W}^{a\alpha} \mathcal{W}_\alpha^a]_F + \text{h.c.}, \quad (7.290)$$

它在超规范变换下将不发生改变。当然，超对称规范理论中仍然容许规范场部分有一个虚部

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{ig^2\theta}{32\pi^2} [\mathcal{W}^{a\alpha} \mathcal{W}_\alpha^a]_F + \text{h.c.}, \quad (7.291)$$

这将为理论的拉格朗日密度中额外添加一个 θ 项

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{g^2\theta}{64\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a. \quad (7.292)$$

将上述结果总结在一起，我们就得到了具有超对称性的非阿贝尔规范理论，它可以表示为

$$\mathcal{L} = \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{ig^2\theta}{32\pi^2} \right) [\mathcal{W}^{a\alpha} \mathcal{W}_\alpha^a]_F + \text{h.c.}}_{\mathcal{L}_{\text{gauge}}} + \underbrace{[\Phi^{*i}(e^V)_i^j \Phi_j]_D}_{\mathcal{L}_{\text{chiral}}} + \underbrace{[W(\Phi_i)]_F + \text{h.c.}}_{\mathcal{L}_{\text{sp}}}. \quad (7.293)$$

将各场的展开式代入到上述拉格朗日密度之中, 我们将得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{g^2\theta}{64\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a + i\lambda^{\dagger a}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a \\ & - D^\mu\phi^{*i}D_\mu\phi_a + i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + F^{*i}F_i \\ & - \sqrt{2}g(\phi^*T^a\psi)\lambda^a - \sqrt{2}g\lambda^{\dagger a}(\psi^\dagger T^a\phi) + g(\phi^*T^a\phi)D^a \\ & + \left[\left(-\frac{1}{2}W^{ij}\psi_i\psi_j + W^iF_i\right) + \text{h.c.}\right],\end{aligned}\quad (7.294)$$

式中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (7.295)$$

为非阿贝尔规范场的场强张量,

$$W^{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta\phi_i\delta\phi_j} = M^{ij} + y^{ijk}\phi_k, \quad (7.296)$$

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta\phi_i} = M^{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_j\phi_k \quad (7.297)$$

为超势的导数, 而

$$D_\mu\lambda^a = \partial_\mu\lambda^a + gf^{abc}A_\mu^b\lambda^c, \quad (7.298)$$

$$D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i - igA_\mu^a(T^a\phi)_i, \quad (7.299)$$

$$D_\mu\psi_i = \partial_\mu\psi_i - igA_\mu^a(T^a\psi)_i \quad (7.300)$$

为不同场的协变导数。

接下来我们来考察超对称规范理论中各项的含义。拉格朗日密度展开式的第一行来自于 $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ 的贡献, 其中 A_μ^a 是一系列矢量场, 它们是通常的规范矢量场, 承载着规范相互作用。 λ^a 是一系列处于伴随表示中的手征旋量场, 它们是为了满足超对称性而伴随于 A_μ^a 产生的。 D^a 场为辅助场, 将其积去后我们得到

$$D^a = -g(\phi^*T^a\phi). \quad (7.301)$$

拉格朗日密度展开式的第二行来自于 $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$ 的贡献, 其中 ψ_i 是一系列手征旋量场, 它们是通常的物质场, 代表一系列自旋为 1/2 的粒子。 ϕ_i 是一系列复标量场, 它们是为了满足超对称性而伴随于 ψ_i 产生的。 F_i 场为辅助场, 将其积去后我们得到

$$F_i = -W_i^*. \quad (7.302)$$

拉格朗日密度展开式的第三行描述了各 λ^a, D^a 场与其他场的相互作用。最后, 拉格朗日密度展开式的第四行来自于 \mathcal{L}_{sp} 的贡献, 它描述了各手征场 ψ_i 以及其伴随场 ϕ_i 之间的相互作用。

计算出闵可夫斯基时空中各场在超对称变换下的行为, 我们得到

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon^\dagger\bar{\sigma}_\mu\lambda^a + \lambda^{\dagger a}\bar{\sigma}_\mu\varepsilon), \quad (7.303)$$

$$\delta\lambda_\alpha^a = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\varepsilon)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_\alpha D^a, \quad (7.304)$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}}(-\varepsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a + D_\mu\lambda^{\dagger a}\bar{\sigma}^\mu\varepsilon), \quad (7.305)$$

$$\delta\phi_i = \varepsilon\psi_i, \quad (7.306)$$

$$\delta\psi_{i\alpha} = -i(\sigma^\mu\varepsilon^\dagger)_\alpha D_\mu\phi_i + \varepsilon_\alpha F_i, \quad (7.307)$$

$$\delta F_i = -i\varepsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \sqrt{2}g(T^a\phi)_i\varepsilon^\dagger\lambda^{\dagger a}. \quad (7.308)$$

由此可见, 超对称变换将 A_μ^a 场与其伴随场 λ^a 相互混合, 同时将 ψ_i 场与其伴随场 ϕ_i 相互混合。一般地, 为了构建一个具有超对称性的理论, 我们需要为每个玻色场引入一个费米场, 同时

要为每个费米场引入一个玻色场。我们称这种由超对称变换相互联系起来的两个场互为超对称伴随场，称这两个场所对应的粒子互为超对称伴子。超对称变换将实现超对称伴子之间的相互转换。对于超对称规范理论来说，我们为每一个物质粒子引入了一个自旋为零的超对称伴子，同时为每个规范玻色子引入了一个自旋为 1/2 的超对称伴子。如果我们进一步考察物质粒子的质量项，会发现它们具有完全相同的质量矩阵

$$(M^2)_i{}^j = M_{ik}^* M^{kj}. \quad (7.309)$$

因此，粒子与其超对称伴子将有完全相同的质量。

前面讨论的超对称理论还具有一个额外的对称性，即系统在关于格拉斯曼变量 θ, θ^\dagger 的全局 $U(1)_R$ 变换下是不变的

$$\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta, \quad \theta^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha}\theta^\dagger. \quad (7.310)$$

上述变换被称为 R 变换，相应的对称性被称为 $U(1)_R$ 对称性。超对称生成元与 R 生成元是不对易的

$$[\hat{R}, \hat{Q}] = -\hat{Q}, \quad [\hat{R}, \hat{Q}^\dagger] = \hat{Q}^\dagger, \quad (7.311)$$

因此不同的场具有不同的 R 荷。一般地，一个具有守恒荷 r_S 的超场 S 在 R 变换下将按照如下方式进行变换

$$S(x, \theta, \theta^\dagger) \rightarrow e^{ir_S\alpha} S(x, e^{-i\alpha}\theta, e^{i\alpha}\theta^\dagger). \quad (7.312)$$

如果一个手征超场 Φ 具有 r_Φ 的守恒荷，那么其各分量将按照如下方式变化

$$\phi \rightarrow e^{ir_\Phi\alpha}\phi, \quad \psi \rightarrow e^{i(r_\Phi-1)\alpha}\psi, \quad F \rightarrow e^{i(r_\Phi-2)\alpha}F, \quad (7.313)$$

其 R 荷分别为 $r_\Phi, r_\Phi - 1, r_\Phi - 2$ ，反手征超场将按照其共轭进行变化。矢量超场的各分量将按照如下方式进行变化

$$A^\mu \rightarrow A^\mu, \quad \lambda \rightarrow e^{i\alpha}\lambda, \quad D \rightarrow D, \quad (7.314)$$

其 R 荷分别为 0, 1, 0。可以验证，前面所讨论的超对称理论在上述变换下将是不变的。

我们可以构建一个具有超对称性的粒子物理标准模型，它具有 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 的规范群。标准模型之中的粒子之间并不构成超多重态，因此我们要额外地为每个费米子引入一个新的超对称玻色伴子，而为每个玻色子引入一个新的超对称费米伴子，这些新引入的粒子称为超粒子。在超对称标准模型中，我们需要引入 $Q, L, \bar{u}, \bar{d}, \bar{e}$ 五个手征超场，它们将给出各个费米子及其所对应的超粒子。除此之外还需要引入 G, W, B 三个矢量超场，它们将给出理论中的各个规范玻色子及其所对应的超粒子。这些矢量超场和手征超场的耦合方式按照标准模型的相应表示来进行。希格斯粒子也要被推广为超场，不过我们至少需要在理论中引入两个希格斯超场 H_u, H_d ，其超荷分别为 1/2, -1/2，它们分别为 u, d 夸克提供质量。在仅引入一个希格斯超场的情况下，理论中将出现量子反常，这是不可接受的。

在给定了理论的规范群和各个粒子所对应的超场之后，我们还需要写出超势的具体形式。对于粒子物理标准模型来说，最简单的超势可以表示为

$$W = \bar{u}y_uQH_u - \bar{d}y_dQH_d - \bar{e}y_eLH_d + \mu H_uH_d, \quad (7.315)$$

式中 y_u, y_d, y_e 均为 3×3 系数矩阵。在积去理论中的格拉斯曼变量之后，我们将得到标准模型中的各个粒子、超粒子以及希格斯粒子的质量项和相互作用项。这一体系具有一个分立的 $\mathbb{Z}_2 R$ 对称性，称为 R 宇称，它保证如下的量不发生改变

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}, \quad (7.316)$$

式中 B 为重子数， L 为轻子数， S 为粒子的自旋。事实上上述超势中已经包含了所有可能的满足 R 宇称的项。²³

²³如果系统具有 R 宇称，则所有破坏重子数 B 与轻子数 L 的过程都会被禁戒。并且最轻的超粒子是稳定的，因此如果它是中性的，那么它可以成为暗物质的一个候选者。除此之外，每个超粒子都只可能衰变到含奇数个最轻超对称伴子的末态，且超超粒子在对撞机上总是成对产生的。

上述仅包含标准模型粒子及相应的各个超粒子，以及上述两个希格斯多重态的超对称理论被称为最小超对称标准模型，其中各个超场所对应的粒子和表示如表 7.1 所示。²⁴ 最小超对称标准模型之中包含 105 个自由参数，这要远远多于粒子物理标准模型中的自由参数数量。若计及可能的超对称破缺项，则其参数数量还要进一步增加。当然，我们也可以考虑在理论中引入更多的超对称多重态并引入更加复杂的相互作用，这被称为非最小的超对称标准模型，它的自由度就更高了。

表 7.1: 最小超对称标准模型中的所有粒子及其表示。我们用不带波浪线的场来表示标准模型中的粒子，用带波浪线的场来表示新引入的超对称伴子。所有的超夸克/夸克以及超轻子/轻子均重复填充了三代。

粒子名称	超场	自旋 0	自旋 1/2	自旋 1	表示
超夸克/夸克 (左手)	Q	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	(u_L, d_L)		$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6)$
超夸克/夸克 (右手, u 型)	\bar{u}	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger		$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$
超夸克/夸克 (右手, d 型)	\bar{d}	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger		$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 1/3)$
超轻子/轻子 (左手)	L	$(\tilde{\nu}, \tilde{e}_L)$	(ν, e_L)		$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$
超轻子/轻子 (右手)	\bar{e}	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger		$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
希格斯/超希格斯 (u 型)	H_u	(H_u^+, H_u^0)	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$		$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)$
希格斯/超希格斯 (d 型)	H_d	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$		$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$
超胶子/胶子	G^a		\tilde{g}^a	g^a	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
超 W 子/W 玻色子	W^a		$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	W^\pm, W^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
超 B 子/B 玻色子	B		\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

根据我们前面的讨论，一个粒子与其超对称伴子之间的质量应当是相同的。如果是这样的话，那么实验中应当很容易观察到超对称伴子的效应。但是迄今为止，人们尚未在实验中发现任何超对称理论所预言的超对称伴子。这说明即使超对称伴子真的存在，其质量也将远超标准模型中的粒子的质量。因此，我们需要额外引入一个机制来为超对称伴子赋予更大的质量，这被称为超对称破缺。

系统的哈密顿量算符即为四动量算符的零分量，它可以用超对称生成元表示为

$$\hat{H} = \hat{P}^0 = \frac{1}{4} \left(\hat{Q}_1 \hat{Q}_1^\dagger + \hat{Q}_1^\dagger \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 \hat{Q}_2^\dagger + \hat{Q}_2^\dagger \hat{Q}_2 \right), \quad (7.317)$$

计算出哈密顿量在任意一个量子态 $|\varphi\rangle$ 下的期望值，我们得到

$$\langle \varphi | H | \varphi \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\hat{Q}_1^\dagger |\varphi\rangle\|^2 + \|\hat{Q}_1 |\varphi\rangle\|^2 + \|\hat{Q}_2^\dagger |\varphi\rangle\|^2 + \|\hat{Q}_2 |\varphi\rangle\|^2 \right) \geq 0, \quad (7.318)$$

²⁴从这个表示中我们看到，中微子与 H_d 具有完全相同的表示，因此这启发我们是否可以认为中微子是否与 H_d 互为超对称伴子。如果这一点能够成立的话，那么不仅可以减少超对称标准模型中的粒子数量，而且理论的超对称性就得到了验证，因此这无疑是一个有吸引力的做法。但遗憾的是，这样构建出的理论与实验结果不符，因此我们还是要为每个粒子额外引入一个新的超对称伴子。

由此我们看到，体系的超对称性自动地给出了能量正定的条件，这是超对称场论的一个重要特征。

若体系未发生超对称破缺，则真空态在超对称变换下是不变的

$$\hat{Q}_\alpha|0\rangle = 0, \quad \hat{Q}_\alpha^\dagger|0\rangle = 0, \quad (7.319)$$

因此真空态的能量为零。但若体系发生了超对称破缺，则其真空态 $|0\rangle$ 将在超对称变换下发生变化，即

$$\hat{Q}_\alpha|0\rangle \neq 0, \quad \text{or} \quad \hat{Q}_\alpha^\dagger|0\rangle \neq 0, \quad (7.320)$$

此时有

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle > 0. \quad (7.321)$$

由此可见，如果超对称发生了破缺，那么真空态的能量将大于零。²⁵ 进一步地，如果我们不考虑各场对时空的依赖关系，那么真空态的能量将等于标量辅助场的势函数的真空期望值

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \langle 0|V|0\rangle, \quad (7.322)$$

式中

$$\begin{aligned} V(\phi, \phi^*) &= F^{i*}F_i + \frac{1}{2}D^aD^a \\ &= W^{i*}W_i + \frac{1}{2}g_a^2(\phi^*T^a\phi)^2. \end{aligned} \quad (7.323)$$

因此，如果标量场势函数的极小值大于零，那么系统将会发生超对称破缺。

一个自然的想法是令超对称发生自发破缺，在这种情况下体系的超对称性仍然得到了保持，而真空态失去了超对称性。同时根据戈德斯通定理，破缺的过程将产生了无质量的外尔费米子，称为戈德斯通微子（超戈德斯通子）。例如，我们可以在理论中引入一个 D 项

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} = -\kappa D, \quad (7.324)$$

这种破缺被称为费耶特-伊里奥普洛斯破缺。此时标量势函数的取值为

$$V = \kappa D - \frac{1}{2}D^2 - gD \sum_i q_i |\phi_i|^2. \quad (7.325)$$

利用辅助场 D 与其他场的关系

$$D = \kappa - g \sum_i q_i |\phi_i|^2, \quad (7.326)$$

从势函数中消去辅助场，我们得到

$$V = \sum_i |m_i|^2 |\phi_i|^2 + \frac{1}{2} \left(\kappa - g \sum_i q_i |\phi_i|^2 \right)^2. \quad (7.327)$$

这一项恒大于零，因此超对称发生了破缺。

我们还可以考虑在理论中引入一个非零的 F 项，这种破缺被称为奥莱弗特 (O’Raifeartaigh) 破缺。考虑一个具有三个手征超场 Φ_1, Φ_2, Φ_3 的超对称理论，它的超势可以表示为

$$W = -k\Phi_1 + m\Phi_2\Phi_3 + \frac{y}{2}\Phi_1\Phi_3^2, \quad (7.328)$$

这个超势中包含一个线性项。计算出其标量势，我们得到

$$V = |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2, \quad (7.329)$$

其中三个辅助场的取值分别为

$$F_1 = k - \frac{y}{2}\phi_3^{*2}, \quad F_2 = -m\phi_3^*, \quad F_3 = -m\phi_2^* - y\phi_1^*\phi_3^*. \quad (7.330)$$

²⁵ 考虑到我们的宇宙确实发生了超对称破缺，因此真空态的能量将严格大于零，这或许可以为宇宙学常数提供一个解释。不幸的是，超对称破缺的量级要远远高于宇宙学常数的量级，因此这一解释将会遇到很大的困难。

由于三个辅助场不能够同时取为零，因此标量势函数 V 将恒大于零。这样的系统将会发生超对称自发破缺。

上述系统的基态为 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ ，此时标量势函数的取值为 $V = k^2$ 。我们可以计算出系统中各个粒子的质量，结果发现对于前两个超多重态来说，其玻色场和费米场的质量是相同的，分别为

$$m_{\varphi_1} = m_{\psi_1} = 0, \quad m_{\varphi_2} = m_{\psi_2} = m. \quad (7.331)$$

而对于第三个超多重态的一个旋量自由度 ψ_3 以及两个标量自由度 a, b 来说，其质量为

$$m_{\psi_3} = m, \quad m_a = \sqrt{m^2 - yk}, \quad m_b = \sqrt{m^2 + yk}. \quad (7.332)$$

我们看到，对于第三个超多重态来说，各个粒子的质量将破缺为不同的取值，其中一个玻色态的取值高于费米态，另一个玻色态的取值低于费米态。因此在这个简单的理论中确实发生了超对称破缺，从而使得粒子与其超对称伴子具有不同的质量。一般地，可以证明在超对称自发破缺的理论中，费米子（例如 e ）与其玻色超对称伴子的两个自由度（例如 \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 ）之间的质量应当满足如下关系²⁶

$$m_{\tilde{e}_1}^2 + m_{\tilde{e}_2}^2 = 2m_e^2. \quad (7.333)$$

或者更一般地，对质量平方算符求超迹的结果为零，即对所有自旋为 J 的粒子有

$$\text{STr} \hat{M}^2 = \sum_J (-1)^{2J} (2J+1) m_J^2 = 0. \quad (7.334)$$

在理论中引入超对称有助于解决一些标准模型中存在的问题。在标准模型中，希格斯粒子的自能是平方发散的。初看起来这并不会产生什么问题，因为无论何种发散都是非物理的，它将被裸参数抵消掉，从而得到一个有限的取值。但如果我们将粒子物理标准模型视为一个普朗克能标下的统一理论的低能近似，那么重整化的截断能标将选取为

$$\Lambda \sim 10^{19} \text{ GeV}. \quad (7.335)$$

这意味着如果我们计及各种粒子的圈积分修正，那么希格斯粒子的重整化质量 m_H 和裸质量 m_{H0} 之间的关系将可以表示为

$$m_H^2 = m_{H0}^2 + O(\Lambda^2). \quad (7.336)$$

通常来说，等式右端的两项均为 $O(\Lambda^2)$ 量级，因此可以期望它们的贡献之和也在 $O(\Lambda^2)$ 量级。然而，实际的希格斯粒子的质量仅为 125 GeV，大约是普朗克质量的 10^{-17} 倍。它相比于普朗克质量来说是一个极为微小，但却不精确等于零的数值。为了解释这一点，真实的统一理论必须经过极为细致的微调，使得等式右端的两项在小数点后几十位的地方相互抵消。这一困难被称为等级问题。相较而言，其他费米子的质量是对数发散的

$$m^2 = m_0^2 + O(\ln \Lambda^2). \quad (7.337)$$

因此即便是在一个较高的能标下，也不会产生等级问题。但是对于希格斯粒子而言，等级问题则是难以回避的。

我们或许可以相信自然界就是如此，但这看起来是极度不自然的。一个更加可能的情况是，存在着某种机制使得对于一个较大的参数空间来说都能够“自然而然”地得到这个结果。²⁷ 相比之下，超对称理论将对此给出更加自然的解释。如果我们考虑超对称理论，那么我们将为理论中的每个费米子引入一个玻色超对称伴子。这些粒子都会为希格斯粒子的质量给出修正，其单圈阶的费曼图如图所示。费米子与希格斯粒子的耦合项为

$$\mathcal{L}_f = -\lambda_f H \bar{\psi} \psi, \quad (7.338)$$

²⁶ 这一结果意味着理论中一定存在着比费米子本身更轻的超对称伴子，但是我们尚未在实验中探测到这样的粒子。因此为了解释这一现象，我们可能还需要在理论中考虑其他的机制。

²⁷ 另一个可能的解释是所谓“人择原理”，即只有宇宙恰好是这个样子，智慧生命才能生活于其中。换句话说，成为今天的样子并不是一个巧合，而是只有宇宙是这样才能被我们看到。

它对费米子质量的修正为

$$\Delta m_H^2 = -\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2} \Lambda^2 + \dots, \quad (7.339)$$

式中 Λ 为理论的截断能标。而玻色子与希格斯粒子的耦合项为

$$\mathcal{L}_f = -\lambda_s |H|^2 |\phi|^2, \quad (7.340)$$

它对费米子质量的修正为

$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_s}{16\pi^2} \Lambda^2 + \dots, \quad (7.341)$$

由于自旋-统计关联，这里与费米子的修正项相差了一个负号。并且标准模型中的每个手征费米子都有两个与之对应的复标量粒子。在超对称理论之中，费米子和玻色子的质量是相等的，这意味着

$$\lambda_s = |\lambda_f|^2. \quad (7.342)$$

因此每个费米子圈对希格斯粒子自能的贡献将和玻色子圈的贡献将在高能下相互抵消，从而使希格斯粒子能够自然地保持一个非常微小的质量。当然，这是针对未破缺的超对称理论来说的。如果玻色子和费米子之间的质量差距过大，那么上述耦合常数之间的关系将不能够得到满足，我们仍然不能回避等级问题。要使得在超对称破缺后二次发散还是能够消除，我们还需要对理论进行一些更加细致的调整。

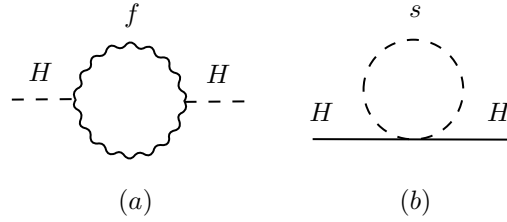


图 7.3: 费米子 (a) 和玻色子 (b) 对希格斯粒子质量的修正。

作为一个统一理论来说，超对称理论也有独到的优势。考虑到前文中所讨论的最小 $SU(5)$ 规范统一理论，我们虽然希望它的三个耦合常数在高能标下能够自发地交于一点，但这实际上是做不到的，三个跑动耦合常数始终存在着一定的偏差。但如果我们考虑超对称理论，那么跑动耦合常数的偏离情况将得到改善。在超对称标准模型中，三个耦合常数 g_i 将按照如下的方式进行跑动

$$\frac{dg_i}{d \ln \mu} = \frac{1}{16\pi^2} b_i g_i^3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.343)$$

式中参数 b_i 的取值为

$$b_1 = \frac{33}{5}, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = -3. \quad (7.344)$$

在这种情况下，如果我们在理论中选取恰当的参数，那么强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用的跑动耦合常数将有可能自发地交于一点，从而实现三种相互作用的真正统一。

超对称理论中的超对称伴子是暗物质最重要的候选者之一。在宇宙大爆炸的极早期，体系的温度极高，各种粒子达到了热平衡状态。随着温度的降低，超对称伴子将逐渐与其他粒子脱耦，其粒子数基本不再改变，从而遗留在宇宙之中形成暗物质。如果这些粒子的质量与相互作用强度与弱相互作用在同一量级，那么现今宇宙中残留的暗物质密度将与观测的结果基本吻合。这为暗物质问题提供了一个解决方案。

然而超对称理论也正在经受来自实验的越来越严峻的挑战。超对称标准模型为每个粒子都引入了一个超对称伴子，然而任何已知费米子的超对称伴子都是未知的玻色子，任何已知玻色子的超对称伴子都是未知的费米子。为了构建超对称标准模型，我们将基本粒子的数量扩充了一倍，而所有这些扩充的粒子目前尚未被任何实验所探测到。目前在大型强子对撞机上进行的对撞

实验已经达到了 14 TeV 的对撞能量，但仍未发现任何超对称粒子的信号。最小超对称理论的最佳参数空间目前已经几乎被粒子物理实验所排除。

我们或许可以争辩说，实际的超对称粒子的质量非常巨大，已经超过了目前对撞机所能够探测的极限。因此，虽然我们现在没有探测到超对称粒子，但是我们可以设想在能量足够高的情况下，超对称粒子是有可能被发现的。当然，超对称粒子可能根本就不存在，超对称理论本身就是一个不恰当的理论。但这一点是无法在实验上检验的，换句话说，超对称理论至少从某种程度上来说是一个“不可证伪”的理论——我们不能通过“没有发现超对称粒子”这件事来说明超对称理论是错误的。²⁸ 不过，我们仍然有一个理由相信超对称性的存在：如果超弦理论是正确的，那么我们将可以期望在普朗克能标处看到超对称性的恢复。

以上所讨论的是比较基本的超对称理论，我们还可以对它进行扩展。我们知道，在量子场论中通过将系统的全局对称性推广为局域的规范对称性

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad (7.345)$$

我们为理论引入了额外的规范矢量场 A^μ ，它们描述了规范相互作用。类似地，如果我们将全局的超对称性推广为局域的超对称性，换句话说就是让超对称变换的参数 ε 在不同的时空点上取为不同的值

$$g(\varepsilon(x), \varepsilon^\dagger(x)) = \exp \left[-i\varepsilon^\alpha(x)\hat{Q}_\alpha - i\varepsilon_\alpha^\dagger(x)\hat{Q}^{\dagger\alpha} \right], \quad (7.346)$$

那么为了保持理论的超对称性不被破坏，我们将需要在理论引入额外的场。

回忆规范理论的内部对称性，它所对应的守恒流可以表示为 J^μ 。要将这一理论局域化，我们需要引入一个额外的矢量场 A_μ ，并将它与守恒流 J^μ 耦合起来得到相互作用项 $A_\mu J^\mu$ ，这个矢量场实际上就是规范理论中的规范场。类似地，庞加莱对称性的守恒流为能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ ，要想将其局域化需要引入一个二阶张量场 $h_{\mu\nu}$ 并将其与守恒流耦合起来 $h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ 。这个二阶张量场 $h_{\mu\nu}$ 实际上就是线性的度规张量场，它可以是对应于庞加莱对称性的“规范场”。

现在考虑理论中的超对称性，其守恒流可以表示为 \hat{J}_α^μ 。要想让这个对称性局域化，我们需要引入一个具有自旋 3/2 的场 Ψ_μ^α ，并将它与守恒流耦合起来得到 $\Psi_\mu^\alpha \hat{J}_\alpha^\mu$ 。由此我们发现，超对称性的定域化引入了一个自旋为 3/2 的“规范场”。特别是若我们考虑整个超空间 $z^M = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ 中的坐标变换对称性，即庞加莱对称性加上超对称性，那么这些对称性的定域化将自动引入一个自旋为 2 的场和一个自旋为 3/2 的场，而这两个场自动组成了一个引力超多重态。由此可见，超对称的定域化自动地在理论中引入了引力超多重态，我们称这一理论为超引力。

在最低阶的情况下，一个自由微扰引力场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{LG}} = -\frac{1}{2}h^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu}^{\text{L}} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{\text{L}} \right), \quad (7.347)$$

式中 $R_{\mu\nu}^{\text{L}}, R^{\text{L}}$ 分别为线性化的里奇张量和曲率标量

$$R_{\mu\nu}^{\text{L}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\lambda h^\lambda_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda h^\lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda_\lambda - \partial^2 h_{\mu\nu}), \quad (7.348)$$

$$R^{\text{L}} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{\text{L}}. \quad (7.349)$$

自旋为 3/2 的伴随场 ψ_μ 的自由拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L}_{\text{RS}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\psi_\sigma, \quad (7.350)$$

这种自旋 3/2 的场被称为拉利塔 (Rarita)-施温格 (Schwinger) 场，我们将它所对应的粒子称为引力微子（超引力子）。考虑将两部分自由场加在一起的作用量

$$S = \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{LG}} + \mathcal{L}_{\text{RS}}), \quad (7.351)$$

²⁸ 有一些科学哲学的流派认为，可证伪性是对科学理论的一个基本要求。一个命题如果是不可证伪的，那么说明它过于宽泛和含糊，以至于不会对我们的世界有什么预见性。没有证伪性的断言太“强大”了，以至于它可以解释一切的事情。而正因为它可以解释一切的事情，它也就实际上相当于什么都没有解释。世界上无论发生什么事情都无损于它的正确性，也正因为如此它将不会对我们有任何科学意义上的启发。我们或许可以说，这样的理论“连错误都算不上”。

它将在如下的全局超对称变换下保持不变

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\varepsilon\partial_\rho h_{\mu\sigma}, \quad (7.352)$$

$$\delta h_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\varepsilon^\dagger(\gamma_\mu\psi_\nu + \gamma_\nu\psi_\mu). \quad (7.353)$$

但仅有上述两项仍然不足以满足局域的超对称性，它在局域的超对称变换下将多出额外的一项

$$\delta(S_{\text{RS}}[\psi] + S_{\text{EH}}[h]) = \int d^4x J^\mu \partial_\mu \varepsilon, \quad (7.354)$$

式中流 J^μ 为

$$J^\mu = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho\gamma_5\gamma_\nu[\gamma^\lambda, \gamma^\tau]\partial_\lambda h_{\tau\sigma}. \quad (7.355)$$

我们发现这一情况与局域规范变换是类似的。因此要想使得局域超对称性得到满足，我们就必须在 ψ_μ 和 $h^{\mu\nu}$ 之间引入一个额外的相互作用

$$S_{\text{int}}[\psi, h] = -\frac{\kappa}{2} \int d^4x J^\mu \psi_\mu, \quad (7.356)$$

即引入一个新的相互作用拉格朗日密度

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho\gamma_5\gamma_\nu[\gamma^\lambda, \gamma^\tau]\partial_\lambda h_{\tau\sigma}\psi_\mu, \quad (7.357)$$

式中 κ 为引力耦合常数。将上述三部分加在一起，我们就得到了超引力的拉格朗日密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{LG}} + \mathcal{L}_{\text{RS}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (7.358)$$

根据戈德斯通定理，任意的连续对称性破缺都将会产生无质量的粒子，对于超对称来说也不例外。真实的物理世界发生了超对称破缺，使得粒子与其反粒子的质量不同。这一破缺同样产生了无质量的戈德斯通粒子，我们称之为戈德斯通微子。在超引力理论中，这一戈德斯通微子将被引力微子所“吸收”，从而使得引力微子获得一个不为零的质量。这与我们在电弱理论中看到的 W, Z 玻色子吸收戈德斯通粒子从而获得质量的情况是类似的。

若要考虑非微扰的超引力场，则应当引入标架场，并将系统的作用量表示为

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e R + \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma, \quad (7.359)$$

式中 $\kappa^2 = 8\pi G$ ， D_ν 为弯曲时空中旋量场所对应的协变导数。可以验证，上述非微扰的作用量在如下的局域超对称变换下是不变的

$$\delta e_\mu^a = \frac{\kappa}{2} \bar{\xi}(x) \gamma^a \psi_\mu, \quad (7.360)$$

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{\kappa} D_\mu \xi(x), \quad (7.361)$$

$$\delta\omega_{\mu ab} = -\frac{1}{4} \bar{\xi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \tilde{\psi}_{ab} + \frac{1}{8} \bar{\xi}(x) \gamma_5 (\gamma^\lambda \tilde{\psi}_{\lambda b} e_{a\mu} - \gamma^\lambda \tilde{\psi}_{\lambda a} e_{b\mu}), \quad (7.362)$$

式中

$$\tilde{\psi}_{ab} = \varepsilon_{ab}{}^{cd} e_c^\mu e_d^\nu (D_\mu \psi_\nu - D_\nu \psi_\mu). \quad (7.363)$$

当然，以上作用量之中只包含了纯引力的部分。我们还应当将超引力场与物质场耦合起来，相关的讨论是复杂的，这里从略。

在前面的讨论中，我们在理论中引入了一组超对称生成元 $\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\alpha^\dagger$ 。如果我们希望理论有更强的超对称性，那么我们可以为理论引入 \mathcal{N} 组不同的超对称生成元 $\hat{Q}_\alpha^I, \hat{Q}_\alpha^{I\dagger}$ 。但这样的扩展有一个代价，那就是 $\mathcal{N} > 1$ 的超对称理论中将不会再次出现手征旋量。由于粒子物理标准模型是一个手征理论，因此只有 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称理论有可能对应于真实的世界。然而在理论上讨论更高的超对称仍然是有意义的。一般地，对于含 \mathcal{N} 组超对称生成元的体系来说，各生成元之间将满足如下的对易关系与反对易关系

$$[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{Q}_\alpha^I] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \hat{Q}_\beta^I, \quad [\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{Q}^{I\dagger\dot{\alpha}}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \hat{Q}^{I\dagger\dot{\beta}}, \quad (7.364)$$

$$[\hat{P}^\mu, \hat{Q}_\alpha^I] = [\hat{P}^\mu, \hat{Q}^{I\dagger\dot{\alpha}}] = 0, \quad (7.365)$$

$$\{\hat{Q}_\alpha^I, \hat{Q}_{\dot{\alpha}}^{J\dagger}\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \hat{P}^\mu \delta^{IJ}, \quad (7.366)$$

$$\{\hat{Q}_\alpha^I, \hat{Q}_\beta^J\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}, \quad \{\hat{Q}_{\dot{\alpha}}^{I\dagger}, \hat{Q}_{\dot{\beta}}^{J\dagger}\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (Z^\dagger)^{IJ}, \quad (7.367)$$

式中 $I, J = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$, Z^{IJ} 为一个复线性空间中的反对称常数矩阵, 它被称为中心荷, 与所有生成元都是对易的。

理论中超对称生成元的数量越多, 超对称伴子之间的依赖关系就越复杂。为简便起见, 接下来我们将讨论超对称在无质量粒子上的表示。取粒子的运动方向为 z 方向, 其动量可以表示为 $p^\mu = (E, 0, 0, E)$ 。超对称生成元在这个态上的对易关系将可以表示为

$$\{\hat{Q}_\alpha^I, \hat{Q}_{\dot{\alpha}}^{J\dagger}\} = -2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \hat{P}^\mu \delta^{IJ} = -4E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\dot{\alpha}} \delta^{IJ}, \quad (7.368)$$

因此 $\hat{Q}_2^I, \hat{Q}_2^{I\dagger}$ 作用在该粒子上将不改变其状态。利用理论中的 \mathcal{N} 组超对称生成元, 我们可以定义归一化的产生和湮灭算符

$$\hat{a}^I = \frac{1}{2i\sqrt{E}} \hat{Q}_1^I, \quad \hat{a}^{I\dagger} = \frac{1}{2i\sqrt{E}} \hat{Q}_1^{I\dagger}, \quad (7.369)$$

它们满足如下的反对易关系

$$\{\hat{a}^I, \hat{a}^{J\dagger}\} = \delta^{IJ}, \quad \{\hat{a}^I, \hat{a}^J\} = \{\hat{a}^{I\dagger}, \hat{a}^{J\dagger}\} = 0. \quad (7.370)$$

它们作用在单粒子态上, 将使得粒子的螺旋度 λ (自旋在运动方向上的投影, 在这个例子中就是自旋的 z 分量) 改变 $1/2$

$$\hat{a}^I |\lambda\rangle = |\lambda - 1/2\rangle, \quad \hat{a}^{I\dagger} |\lambda\rangle = |\lambda + 1/2\rangle. \quad (7.371)$$

我们从一个螺旋度最低的态 (基态) $|\lambda_0\rangle$ 开始, 它将被所有的湮灭算符湮灭为零

$$\hat{a}^I |\lambda_0\rangle = 0. \quad (7.372)$$

同时由于所有的产生算符都是满足反对易关系的费米算符, 因此任意两个相同的产生算符作用在同一个态上也会将该态变为零

$$\hat{a}^{I\dagger} \hat{a}^{I\dagger} |\lambda_0\rangle = 0, \quad (7.373)$$

式中不对指标 I 求和。因此从基态 $|\lambda_0\rangle$ 开始, 通过超对称变换能够得到的所有可能的状态就是将产生算符以所有不重复的方式作用在 $|\lambda_0\rangle$ 上得到的

$$|\lambda_0\rangle, \quad \hat{a}^{I\dagger} |\lambda_0\rangle = |\lambda_0 + 1/2\rangle, \quad \hat{a}^{I\dagger} \hat{a}^{J\dagger} |\lambda_0\rangle = |\lambda_0 + 1\rangle, \quad \dots \quad (7.374)$$

式中各指标 I, J, \dots 均不相等。一般地, 一个超多重态之中螺旋度为 $\lambda_0 + k/2$ 的态的数量为

$$n(\lambda_0 + k/2) = C_{\mathcal{N}}^k = \frac{\mathcal{N}!}{k!(\mathcal{N} - k)!}. \quad (7.375)$$

由此可见, 体系中玻色态和费米态的自由度数量是相同的。当然, 由于 CPT 定理, 每一个量子态都有一个与之螺旋度相反的态相对应。我们称上述所有的态的总和为超多重态。

一般地, 我们只讨论形如 $\mathcal{N} = 2^n$ 的超对称理论。²⁹ 对于 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称理论来说, 我们仅有一个产生算符 \hat{a}^\dagger , 它作用在基态 $|\lambda_0\rangle$ 上将得到一个 $|\lambda_0 + 1/2\rangle$ 的态。这样的超多重态中仅包含一个玻色子与一个费米子, 它们互为超对称伴子。如果我们取 $\lambda_0 = 0$, 那么超多重态中将包含一个螺旋度为 0 的自由度和一个螺旋度为 $1/2$ 的自由度。考虑到 CPT 定理, 将所有态的螺旋度取反又可以得到一个螺旋度为 0 的自由度和一个螺旋度为 $-1/2$ 的自由度。因此这一超多重态之中包含四个自由度, 我们将其记为

$$1 \times | -1/2\rangle, \quad 2 \times |0\rangle, \quad 1 \times |1/2\rangle, \quad (7.376)$$

²⁹ 原则上来说, 其余的超对称理论仍然是可能的, 但是它们可能找不到一个合适的拉格朗日表述。

这被称为 $\mathcal{N} = 1$ 的手征超多重态。在这个超多重态之中包含两个标量自由度以及两个旋量自由度，因此它包含一个无质量的复标量场以及一个无质量的手征费米场。如果我们取 $\lambda_0 = 1/2$ ，那么超多重态中将包含

$$1 \times |-1\rangle, \quad 1 \times |-1/2\rangle, \quad 1 \times |1/2\rangle, \quad 1 \times |1\rangle. \quad (7.377)$$

这被称为 $\mathcal{N} = 1$ 的矢量超多重态，它包含一个无质量的手征旋量场以及一个无质量的矢量场。如果我们取 $\lambda_0 = 3/2$ ，那么超多重态中将包含

$$1 \times |-2\rangle, \quad 1 \times |-3/2\rangle, \quad 1 \times |3/2\rangle, \quad 1 \times |2\rangle. \quad (7.378)$$

这被称为 $\mathcal{N} = 1$ 的引力超多重态，它包含一个无质量的自旋为 $3/2$ 的场以及一个无质量的自旋为 2 的场。

对于 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称理论来说，理论中存在两个不同的产生算符 $\hat{a}^{1\dagger}, \hat{a}^{2\dagger}$ 。此时超多重态中将包含四个态，分别为一个 $|\lambda_0\rangle$ ，两个 $|\lambda_0 + 1/2\rangle$ 以及一个 $|\lambda_0 + 1\rangle$ 。并且由于 CPT 定理，将所有的粒子取反可以得到一系列新的状态。如果我们取 $\lambda_0 = 0$ ，那么超多重态中将包含

$$1 \times |-1\rangle, \quad 2 \times |-1/2\rangle, \quad 2 \times |0\rangle, \quad 2 \times |1/2\rangle, \quad 1 \times |1\rangle. \quad (7.379)$$

这被称为 $\mathcal{N} = 2$ 的矢量超多重态，它包含一个无质量的复标量场、两个无质量的手征费米场以及一个无质量的矢量场。事实上这就是一个 $\mathcal{N} = 1$ 的矢量超多重态和一个 $\mathcal{N} = 1$ 的手征超多重态之和。

对于 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称理论来说，理论中存在四个不同的产生算符 $\hat{a}^{I\dagger}$ 。如果我们取 $\lambda_0 = -1$ ，那么超多重态中将包含

$$1 \times |-1\rangle, \quad 4 \times |-1/2\rangle, \quad 6 \times |0\rangle, \quad 4 \times |1/2\rangle, \quad 1 \times |1\rangle, \quad (7.380)$$

这被称为 $\mathcal{N} = 4$ 的矢量超多重态，它实际上是一个 $\mathcal{N} = 1$ 的矢量超多重态和三个 $\mathcal{N} = 1$ 的手征超多重态之和。由此我们看到，四维时空中 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称理论中将不可避免地引入自旋为 1 的场。并且如果我们希望理论中不包含自旋大于 1 的场，那么 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称就是理论中所允许的最高的对称性。

而对于 $\mathcal{N} = 8$ 的超对称理论来说，取 $\lambda_0 = -2$ ，那么超多重态中将包含

$$1 \times |-2\rangle, \quad 8 \times |-3/2\rangle, \quad 28 \times |-1\rangle, \quad 56 \times |-1/2\rangle, \quad 70 \times |0\rangle, \quad (7.381)$$

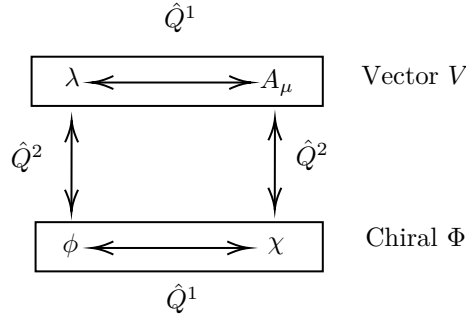
$$56 \times |1/2\rangle, \quad 28 \times |1\rangle, \quad 8 \times |3/2\rangle, \quad 1 \times |2\rangle, \quad (7.382)$$

这被称为 $\mathcal{N} = 8$ 的引力超多重态。从这个表示中我们看出，四维时空中 $\mathcal{N} = 8$ 的超对称理论将不可避免地引入自旋为 2 的引力场。并且如果我们希望理论中不包含自旋大于 2 的场，那么 $\mathcal{N} = 8$ 的超对称就是理论中所允许的最高的对称性。

当然，以上都是关于无质量场的结果，对于有质量场的讨论要更加复杂一些。一般地，除了粒子的动量之外，一个无质量的粒子态 $|\lambda\rangle$ 仅需螺旋度 λ 一个量子数来表示，而一个有质量的粒子态 $|m, s, s_3\rangle$ 则同时需要质量 m ，总自旋 s 以及 z 方向自旋 s_3 三个量子数来刻画。构造有质量超多重态的方式是类似的：通过将超对称的产生算符作用于有质量粒子态上，我们可以得到一系列相互关联的态，这些态共同构成了有质量粒子的超对称多重态。

如果理论中存在多组超对称生成元，那么系统将在多个不同的超对称变换下保持不变，这实际上相当于为系统施加了更多的限制。因此 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称理论实际上是一种特殊的 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称理论，对于其他情况也是类似的。考虑一个 $\mathcal{N} = 2$ 的矢量超多重态，它可以表示为一个 $\mathcal{N} = 1$ 的矢量超多重态和一个 $\mathcal{N} = 1$ 的手征超多重态之和，因此它将由一个矢量超场 V 和一个手征超场 Φ 构成。这个理论中包含两组不同的超对称生成元 \hat{Q}^1, \hat{Q}^2 ，它们可以将不同自旋的场混合起来，如图 7.4 所示。

对于 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称理论来说，它应当具有一个 $U(2)_R$ 对称性，即作用于生成元 (\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) 上的全局 $U(2)$ 变换，而这个变换可以拆分为作用于 \hat{Q}^1 上的 $U(1)_R$ 对称性以及一个额外的

图 7.4: $\mathcal{N} = 2$ 超对称理论中的超多重态及相应的生成元。

$SU(2)_R$ 对称性。我们令这个 $SU(2)_R$ 对称性作用在 (λ, χ) 上，于是满足条件的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = -\text{Tr} \left[\int d^2\theta \frac{i\tau}{8\pi} W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} \right] + \frac{1}{g^2} \int d^4\theta \Phi^\dagger e^{2V} \Phi, \quad (7.383)$$

式中 τ 是一个复数系数。将其展开为分量形式，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{2}{g^2} \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i\lambda \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} - i\chi \sigma^\mu D_\mu \chi + D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi + \frac{\theta}{16\pi^2} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \\ & + \frac{2}{g^2} \text{Tr} \left[\sqrt{2}i\lambda [\phi^\dagger, \chi] + \sqrt{2}i\bar{\lambda} [\phi, \bar{\chi}] - \frac{1}{2} [\phi^\dagger, \phi]^2 \right], \end{aligned} \quad (7.384)$$

这就是一个 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称理论。

对于 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称理论来说，理论的限制将会变得更加严格。我们可以考虑一个 $\mathcal{N} = 4$ 的矢量超多重态，它将由一个 $\mathcal{N} = 1$ 矢量超多重态和三个 $\mathcal{N} = 1$ 手征超多重态构成。相应的超对称理论是唯一的，其作用量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \text{Tr} \left[-\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - D_\mu X^i D^\mu X^i \right] \\ & + \text{Tr} \left[g C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + g \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g^2}{2} [X^i, X^j] [X^i, X^j] \right], \end{aligned} \quad (7.385)$$

式中 C_{ab}^i 为 $SU(4)_R$ 群的结构常数。

理论中超对称生成元的数量越多，它所容许的自由度就越少。对于 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称理论来说，我们可以选取理论中超势的形式，从而给出理论中的相互作用项。对于 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称理论来说，其超势必须取为零，但我们仍可以选择物质场的形式。而对于 $\mathcal{N} = 4$ 的超对称理论来说，我们将几乎没有任何可选择的自由度。在给定了规范群和耦合常数的情况下， $\mathcal{N} = 4$ 的超对称理论将会被唯一地确定下来。

对于 $\mathcal{N} = 8$ 的超对称理论来说，理论中将包含自旋为 2 的张量场。因此若我们的世界真的具有 $\mathcal{N} = 8$ 的超对称性，那么引力似乎会自动出现在理论中。但是其代价也是巨大的，我们必须同时在理论中引入 2 个引力自由度，16 个引力微子自由度，56 个矢量自由度，112 个旋量自由度以及 70 个标量自由度。如果我们考虑更高的超对称性，那么理论中将不可避免地包含自旋高于 2 的场，因此 $\mathcal{N} = 8$ 就是四维时空之中所能够包含的最大超对称性，我们称之为极大超引力理论。

除了四维时空（3+1 维时空）中的超对称理论之外，我们还可以考虑任意 D 维时空中的超对称理论。一个最简单的例子是处于一维时空（0+1 维时空）中的超对称理论，它被称为超对称量子力学。超对称量子力学处理起来是相对比较容易的，并且相比于普通的量子力学来说，它也具有一些更好的性质。

我们更感兴趣的是处于高维时空中的超对称理论。一般地，我们考虑一个 D 维时空 x^M ，式中 $M = 0, 1, \dots, D-1$ 代表所有时空维度的指标。一个 D 维时空中的标量场表示为 ϕ ，它有 1

个自由度。无质量矢量场可以表示为 A^M ，它有 $D - 2$ 个自由度。对于一般的 p 阶无质量反对称张量场来说，它可以表示为 $B^{M_1 \dots M_p}$ ，其自由度的数量为

$$N = C_{D-2}^p = \frac{(D-2)!}{p!(D-p-2)!}. \quad (7.386)$$

这就是张量场向高维时空的推广。

为将旋量场推广到高维时空中，我们需要将四维时空中的 γ 矩阵推广为 D 个矩阵 Γ^M ，它们之间满足如下的反对易关系

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN}, \quad (7.387)$$

且旋量场在洛伦兹变换下的生成元将表示为

$$\Sigma^{MN} = \frac{i}{4} [\Gamma^M, \Gamma^N]. \quad (7.388)$$

我们需要对偶数维时空和奇数维时空分别进行处理。对于偶数维时空 $D = 2n$ 来说，定义 Γ^{2n+1} 矩阵为

$$\Gamma^{2n+1} = i^{n-1} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{2n-1}, \quad (7.389)$$

这类似于四维时空中的 γ^5 矩阵，它与所有 Γ^M 均反对易。在 $D = 2n$ 维时空中定义如下的升降算符

$$\hat{a}^0 = \frac{i}{2} (\Gamma^0 + \Gamma^1), \quad \hat{a}^{0\dagger} = \frac{i}{2} (-\Gamma^0 + \Gamma^1), \quad (7.390)$$

$$\hat{a}^j = \frac{i}{2} (\Gamma^{2j} - i\Gamma^{2j+1}), \quad \hat{a}^{j\dagger} = \frac{i}{2} (\Gamma^{2j} + i\Gamma^{2j+1}), \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (7.391)$$

对于一个 $D = 2n$ 维时空中的旋量场来说，其量子态可以表示为 $|s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\rangle$ 的形式，这里的每个量子数 s_i 的取值均为 $\pm 1/2$ 。将 $\hat{a}^{i\dagger}$ 作用于量子态上，可以将量子数 s_i 由 $-1/2$ 变为 $1/2$ ，而将 \hat{a}^i 作用于量子态上，可以将量子数 s_i 由 $1/2$ 变为 $-1/2$ 。因此这样一个量子态中共有 $2^n = 2^{D/2} 2^n = 2^{D/2}$ 个自由度。如果时空维数 $D = 2n + 1$ 是一个奇数，那么 Γ^{D+1} 将正比于一个单位矩阵。在这种情况下，它与 $D = 2n$ 的量子态的表示是相同的，共有 $2^n = 2^{(D-1)/2}$ 个自由度。综上所述， D 维时空中旋量场的自由度数量为

$$N = 2^{\lfloor D/2 \rfloor} = \begin{cases} 2^{D/2}, & D = 2n \\ 2^{(D-1)/2}, & D = 2n + 1 \end{cases}, \quad (7.392)$$

式中 $\lfloor D/2 \rfloor$ 代表向下取整。

时空的维数为理论可能的超对称性施加了进一步的限制。由于张量场的自由度按照多项式的形式增长，而旋量场的自由度按照指数形式增长，因此随着维数的增加，我们将不得不在理论中引入自旋越来越高的张量场。若我们希望超对称理论中不出现自旋大于 1 的场，那么所容许的时空维数最高为 10 维。若我们希望超对称理论中不出现自旋大于 2 的场，那么所容许的时空维数最高为 11 维。³⁰ 如果继续增大时空的维数，则理论中将不可避免地出现自旋更高的场。在 11 维时空中的超对称理论仅有一种可能，即 $D = 11, \mathcal{N} = 1$ 的超对称理论。若我们考虑 10 维空间，则可能存在两种不同的超对称理论，分别为 $D = 10, \mathcal{N} = 1$ 的超对称理论以及 $D = 10, \mathcal{N} = 2$ 的超对称理论。

低维时空中 $\mathcal{N} > 1$ 的超对称理论可以通过对高维时空中的超对称理论进行维数约化得到。以 $D = 11, \mathcal{N} = 1$ 的超引力理论为例，它包含一个引力场 g_{MN} ，一个引力微子场 ψ_M^α 以及一个三阶反对称张量场 A_{MNP} 。在这个体系中，引力微子场 ψ_M^α 有 128 个自由度，引力场 g_{MN} 有 44 个自由度（它是无迹的），三阶反对称张量场 A_{MNP} 有 88 个自由度，因此体系中的玻色自由度与费米自由度的数量是相等的。

一般地，我们将 D 维时空 ($D > 4$) 中的坐标记为

$$x^M = (x^\mu, x^m), \quad (7.393)$$

³⁰我们注意到卡鲁扎-克莱因理论中能够容许标准模型规范群的最小时空维数同样为 11 维。这是一个巧合吗？

式中 $M = 0, 1, \dots, D-1$ 代表所有时空维度的指标, $\mu = 0, 1, 2, 3$ 代表通常的四维时空的指标, $m = 4, \dots, D-1$ 代表其他维度的指标。利用 7.4 节中介绍的维数约化方法, 我们可以将 11 维时空中的度规张量场表示为

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{m\nu} \\ g_{\mu n} & g_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.394)$$

在经过维数约化后, 我们将得到一系列用希腊指标 μ, ν 等标记的四维时空中的场, 而拉丁指标 m, n 等将用于标记不同的场。由于 g_{MN} 是对称张量, 因此 $g_{m\nu}, g_{\mu n}$ 总共只相当于 $11 - 4 = 7$ 个独立的矢量场, 而 g_{mn} 则相当于 $7 \times (7-1)/2 + 7 = 28$ 个独立的标量场。因此, 我们可以将 g_{MN} 表示为

$$g_{MN} \rightarrow 1 \times g_{\mu\nu} (s=2), \quad 7 \times g_{\mu m} (s=1), \quad 28 \times g_{mn} (s=0). \quad (7.395)$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned} A_{MNP} &\rightarrow 1 \times A_{\mu\nu\rho} (s=3), \quad 7 \times A_{\mu\nu m} (s=2), \\ &21 \times A_{\mu mn} (s=1), \quad 35 \times A_{mnp} (s=0), \end{aligned} \quad (7.396)$$

$$\psi_M^\alpha \rightarrow 8 \times \psi_\mu^\alpha (s=3/2), \quad 56 \times \psi_m^\alpha (s=1/2). \quad (7.397)$$

这样我们就将 11 维时空中的超对称理论约化到了通常的四维时空中。

在四维时空中, 由于三阶反对称张量 $A_{\mu\nu\rho}$ 无任何自由度, 因此它不会在理论中产生任何贡献。由于 $A_{\mu\nu m}$ 只有一个自由度, 因此它在四维时空中将对偶于一个标量。各标量场 g_{mn}, A_{mnp} 仅有一个自由度, 而其他的场 $g_{\mu\nu}, g_{\mu m}, A_{\mu mn}, \psi_\mu^\alpha, \psi_m^\alpha$ 则仅有两个在壳自由度。这样维数约化后的 $D=11$ 超引力理论将包含 70 个标量自由度、112 个旋量自由度、56 个矢量自由度、16 个引力微子自由度以及 2 个引力子自由度。因此 $D=11, \mathcal{N}=1$ 的超引力理论在维数约化后将恰好给出四维时空中 $\mathcal{N}=8$ 的极大超引力理论。类似地可以验证, $D=10, \mathcal{N}=1$ 的超对称理论在维数约化后将给出四维时空中 $\mathcal{N}=4$ 的超对称理论, 而 $D=6, \mathcal{N}=1$ 的超对称理论在维数约化后将给出四维时空中 $\mathcal{N}=2$ 的超对称理论。这给出了一种在低维时空中构建 $\mathcal{N} > 1$ 的超对称理论的一种方法。

相比于普通的场论来说, 超对称场论的重整性质要好很多。例如著名的无重整定理指出, 超对称场论中只存在场强重整化, 而不存在质量重整化和耦合常数重整化。除此之外, 跑动耦合常数中的 β 函数也仅仅受到了单圈阶的修正。研究者们甚至证明了, 四维时空中 $\mathcal{N}=4$ 的超对称杨-米尔斯理论是完全有限的。考虑到四维时空中 $\mathcal{N}=4$ 的超对称杨-米尔斯理论几乎是唯一的, 这无疑是一个令人激动的结果。

超引力的收敛性也要比通常的引力理论更好。人们可以证明, 四维时空中的任意一个超引力理论在双圈阶都是有限的。并且理论中超对称生成元的数量越多、时空维数越低, 超引力的收敛性就越好。但是不论如何, 这毕竟是一个不可重整的理论。³¹ 像引力这样动摇理论基础的问题或许并不能够通过对场论进行修修补补来得到解决, 它需要一场更深刻的、彻底超越场论框架的变革。我们期待着这样一个全新的统一理论的出现。

7.6 弦理论

在本章中, 我们将选取自然单位制 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$, 同时度规张量将选取为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 。

我们发现, 量子场论产生紫外发散的原因之一在于相互作用在时空中是定域的, 即各场完全处在同一个时空点上。如果我们考虑一个在时空中非定域的理论, 那么当系统的能量足够高以至

³¹ 早年的一些结果曾经暗示了四维时空中 $\mathcal{N}=8$ 极大超引力完全有限的可能, 但是目前来看这一问题还远没有定论, 距离其彻底解决仍然遥遥无期。

于其康普顿波长远小于相互作用弥散的区间时,非定域效应将会变得非常显著。其结果就是在如此之高的能量下,相互作用的振幅将被极大地压低。因此整个理论将是收敛的,没有紫外发散。在本章中我们要介绍的弦理论就是一个在时空中非定域的理论,³² 它可以为量子引力的发散提供一个自洽的解决方案。

不失一般性地,我们考虑 D 维平直时空中的相对论性点粒子。这一粒子在时空中运动的轨迹 x^μ 构成一维的世界线,我们可以用一个参数 λ 来标记世界线上的各点

$$x^\mu = x^\mu(\tau). \quad (7.398)$$

我们希望相对论性自由粒子的作用量保持庞加莱不变性,因此我们将其选取为世界线的长度

$$\begin{aligned} S[x] &= -m \int d\lambda \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \\ &= -m \int d\lambda \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}, \end{aligned} \quad (7.399)$$

式中 $\eta_{\mu\nu}$ 为 D 维平直时空中的度规张量, λ 是标记世界线上不同点的参数,指标 $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ 。一个经典的相对论性自由粒子的世界线将使得上述作用量取极值

$$\delta S[x] = 0, \quad (7.400)$$

而对于一个相对论性的量子粒子来说,其几率振幅将满足

$$K = \int \mathcal{D}[x] e^{iS[x]}, \quad (7.401)$$

这样我们就得到了 D 维平直时空中相对论性自由粒子的量子理论。

在弦理论中,零维的点粒子将被推广为一维的弦。一条弦在时空中的运动将产生一个二维的曲面,我们称之为世界面,如图 7.5 所示。将点粒子的作用量推广为弦的作用量是容易的,我们将世界面的坐标标记为 X^μ , 用两个参数 $\sigma^\alpha = (\sigma^0, \sigma^1)$ 来标记世界面上的各点,这样世界面就可以表示为

$$X^\mu = X^\mu(\sigma^\alpha). \quad (7.402)$$

与相对论性自由粒子类似,要使得理论具有庞加莱不变性,我们可以令弦作用量正比于世界面的面积,即将其表示为

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma^\alpha} \frac{dX^\nu}{d\sigma^\beta} \right)} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det (\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}, \end{aligned} \quad (7.403)$$

式中 $\eta_{\mu\nu}$ 为 D 维平直时空中的度规张量,指标 $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$, 指标 $\alpha, \beta = 0, 1$, α' 是一个常数,称为弦参数,其倒数 $T = 1/(2\pi\alpha')$ 称为弦张力, $\partial_\alpha X^\mu = \partial X^\mu / \partial \sigma^\alpha$, 求行列式的操作对指标 α, β 进行,积分对整个世界面进行。这个作用量被称为南部 (Nambu)-后藤 (Goto) 作用量。在给定了弦所满足的特定边界条件下,对世界面的所有可能的构型进行泛函积分,我们将得到体系的几率振幅

$$K = \int \mathcal{D}[X] e^{iS[X]}, \quad (7.404)$$

这样我们就得到了一个量子化的弦理论。

由于作用量中包含导数的平方根项,南部-后藤作用量使用起来常常是不够方便的。我们可以进一步地在系统中引入一个辅助场 $h_{\alpha\beta}$, 从而将弦作用量表示为

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad (7.405)$$

³²从弦自身的角度来讲,弦理论仍然是定域的。但是从时空的角度来讲,弦理论则是非定域的。考虑数条弦之间的散射过程,数条弦相互靠近,逐渐交融在一起,而后又彼此远离,如图 7.6 (a) 以及图 7.6 (c) 所示。整个过程是发生在一个有限的时空区域内的,因此它描述了一个时空中非定域的相互作用。

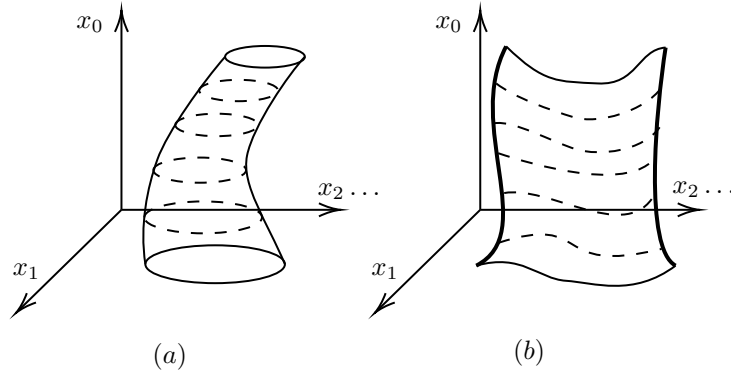


图 7.5: 闭弦 (a) 和开弦 (b) 在时空中运动形成的世界面。图中的虚线代表了弦在不同时刻所处的位置。

式中 $h = \det(h_{\alpha\beta})$, 且我们约定 $h_{\alpha\beta}$ 在对角化后的符号为 $\text{diag}(-, +)$ 。这个作用量被称为波利亚科夫 (Polyakov) 作用量, 它不含平方根项, 使用起来是方便的。对波利亚科夫作用量进行路径积分, 我们将得到

$$K = \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[h] e^{iS[X, h]}. \quad (7.406)$$

由于 $h_{\alpha\beta}$ 场没有动能项, 因此将它积去后我们得到弦的经典运动方程, 即其能量动量张量为零

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= -4\pi \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial^\alpha X^\mu \partial^\beta X_\mu - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\gamma X^\mu \partial^\gamma X_\mu \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.407)$$

利用上式从波利亚科夫作用量中消去 $h_{\alpha\beta}$ 场, 我们就得到了南部-后藤作用量, 因此这两个作用量是等价的。

为看出波利亚科夫作用量的物理意义, 我们可以利用 $h_{\alpha\beta}$ 将作用量中的指标 α, β 收缩, 并明显地写出 $\eta_{\mu\nu}$ 场

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X^\nu. \quad (7.408)$$

如果我们不将 X^μ 视为定义在 D 维闵可夫斯基时空上的矢量, 而将其视为定义在二维世界面 σ^α 上的 D 个在世界面坐标变换 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 下不变的“标量场”, 那么弦理论就可以被视为二维世界面上的标量场论。在这里指标 α, β 就是时空的指标, 指标 μ, ν 标记不同的标量场, $h_{\alpha\beta}$ 相当于世界面的度规张量, $\eta_{\mu\nu}$ 相当于联系不同 X^μ 场的系数, 最终的泛函积分要对度规场 $h_{\alpha\beta}$ 和标量场 X^μ 进行。对于标量场来说, 协变导数和普通导数是相同的, 因此它恰当地描述了世界面流形上的标量场论。我们称这个模型为二维线性 σ 模型, 它实际上体现了我们一直以来的思想: 在处理弯曲流形的时候, 我们并不一定非要将其嵌入到更高维的平直空间中, 一个更好的做法其实是完全通过内禀的方式来研究它的性质。

除了庞加莱对称性之外, 弦理论的波利亚科夫作用量还具有一些额外的对称性。由于在世界面 σ^α 上作用量同样是“协变”的, 因此对于任意不改变流形拓扑结构的坐标变换 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 来说, 弦作用量在如下的变换下保持不变

$$X'^\mu(\sigma') = X^\mu(\sigma), \quad h'_{\gamma\delta}(\sigma') = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial \sigma'^\gamma} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial \sigma'^\delta} h_{\alpha\beta}(\sigma), \quad (7.409)$$

这被称为系统的微分同胚不变性。另外对于任意函数 $\omega(\sigma)$ 来说, 弦作用量在度规场的局域尺度变换下同样保持不变

$$X'^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma), \quad h'_{\alpha\beta}(\sigma) = e^{2\omega(\sigma)} h_{\alpha\beta}(\sigma), \quad (7.410)$$

这被称为系统的外尔不变性。由微分同胚变换和外尔变换所联系起来的度规场 $h_{\alpha\beta}$ 都是相互等价的。

与规范场的情况相似, 当我们在对度规场 $h_{\alpha\beta}$ 进行路径积分的时候, 相互等价的度规场将会被计算无数次, 从而使得路径积分发散。为了处理这个问题, 我们可以采用法捷耶夫-波波夫方法, 即选取适当的规范条件将度规场固定为 \hat{h} , 然后将对度规场 $h_{\alpha\beta}$ 的积分转化为对鬼场的积分。一个最简单的规范条件就是将世界面视为平直的

$$\hat{h}_{\alpha\beta}(\theta) = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1), \quad (7.411)$$

它被称为平直规范。³³ 有时我们也选取一个稍复杂的规范条件, 以明显地将系统的外尔对称性表示出来

$$\hat{h}_{\alpha\beta}(\theta) = e^{2\omega(\sigma)} \eta_{\alpha\beta}, \quad (7.412)$$

它被称为共形规范。利用法捷耶夫-波波夫方法, 在规范固定后我们需要在引入两个定义在世界面 σ^α 上的反对易格拉斯曼鬼场 $b_{\alpha\beta}, c_\alpha$, 然后将泛函积分表示为

$$K = \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[b] \mathcal{D}[c] e^{i(S[X, \hat{h}] + S_g[\hat{h}, b, c])}, \quad (7.413)$$

式中

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{h}} \hat{h}^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (7.414)$$

为规范固定后的弦作用量, 而

$$S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\hat{h}} b_{\alpha\beta} \hat{\nabla}^\alpha c^\beta \quad (7.415)$$

为规范固定后的鬼场作用量, $\hat{\nabla}^\alpha$ 为规范固定后的协变导数。我们称这一过程为 BRST 量子化。

共形规范仍然保留了部分的规范自由度。如果变换 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 使得度规张量满足

$$h'_{\alpha\beta}(\sigma') = \Lambda(\sigma) h_{\alpha\beta}(\sigma), \quad (7.416)$$

则称它为共形变换。在共形变换下, 共形规范条件将得到保持。特别地, 如果我们在二维世界面上选取一组复坐标

$$z = e^{2(\sigma_1 - i\sigma_2)}, \quad \bar{z} = e^{2(\sigma_1 + i\sigma_2)}, \quad (7.417)$$

则共形变换将可以由所有的解析函数

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}), \quad (7.418)$$

来刻画, 这个结果与复变函数论中的结论是相同的。³⁴

在共形变换下保持不变的场论称为共形场论, 前文中所讨论的弦作用量 S 以及鬼场作用量 S_g 均为共形场论。利用复坐标, 我们可以将上述共形场论表示为

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu, \quad (7.419)$$

$$S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b \bar{\partial} c + \tilde{b} \partial \tilde{c}), \quad (7.420)$$

式中

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (7.421)$$

分别为对共形变量 z, \bar{z} 的导数, 而

$$b = b_{zz}, \quad c = c^z, \quad \tilde{b} = b_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \tilde{c} = c^{\bar{z}} \quad (7.422)$$

分别为 b, c 场在共形坐标下的分量。可以验证弦理论在变换

$$\delta X^\mu = \eta c \partial X^\mu, \quad \delta c = \eta c \partial c, \quad \delta b = \eta T \quad (7.423)$$

³³事实上, 只有在世界面的欧拉示性数为零 (例如平面或者柱面) 的情况下, 才有可能在整个世界面上选取这一规范。

³⁴在复变函数论中, 我们将复平面上由解析函数 $z \rightarrow f(z)$ 刻画的映射称为共形映射 (保角映射), 它可以将复平面上的无穷小区域映射为一个形状相同的无穷小区域, 只不过其尺寸发生了变化。一般地, 一个 n 维流形上的无穷小共形变换可以表示为 $\delta x^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x^2 - 2x^\mu (b \cdot x)$, 式中 $a^\mu, \omega^\mu{}_\nu, \lambda, b^\mu$ 为无穷小变换参数。

下是不变的, 式中 T 为系统的能量动量张量, η 为无穷小的格拉斯曼变换参数。这被称为弦的 BRST 对称性。

与量子场论类似, 弦理论中算符 $\hat{\mathcal{O}}$ 的期望值可以表示为

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[b] \mathcal{D}[c] \mathcal{O} e^{i(S+S_g)}, \quad (7.424)$$

我们已经略去了分母上的归一化条件。为了计算出算符的期望值, 我们定义系统的生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[b] \mathcal{D}[c] e^{i(S+S_g+S_J)}, \quad (7.425)$$

式中

$$S_J = \int d^2\sigma \left(J_\mu X^\mu + J_b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + J_c^\alpha c_\alpha \right), \quad (7.426)$$

各 J 场均为定义在世界面 σ^α 上的场。我们所要计算的各种多点关联函数最终都可以归结为生成泛函的偏导数或者某些特殊值。在实际的计算过程中, 我们常常对世界面进行维克转动, 此时世界面的平直度规张量将表示为

$$h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1), \quad (7.427)$$

同时路径积分将变为

$$K = \int \mathcal{D}[X] \mathcal{D}[b] \mathcal{D}[c] e^{-(S[X, \hat{h}] + S_g[\hat{h}, b, c])}. \quad (7.428)$$

我们知道, 弦理论满足外尔不变性, 这意味着在外尔变换 $h \rightarrow h'$ 下, 系统的经典作用量是不变的

$$S[h'] = S[h]. \quad (7.429)$$

但虽然经典作用量在外尔变换下保持不变, 泛函积分却仍然有可能发生改变

$$K[h'] \neq K[h], \quad (7.430)$$

因此理论中将可能出现量子反常, 我们称之为外尔反常。外尔反常对理论的破坏非常严重, 应当设法避免。经过计算后我们发现, 只有在 $D = 26$ 维时空中弦理论才是没有量子反常的, 我们称这个时空维度为弦理论的临界维数。因此我们得出结论: 弦理论只有在 26 维时空中才是自洽的。

接下来我们将讨论弦的正则量子化。我们选取 $\sigma^0 = \tau$ 为弦的固有时, 利用 $\sigma^1 = \sigma$ 来标记弦上的各点, 并选取世界面度规张量为 $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 。根据弦作用量, 我们可以写出弦所满足的经典运动方程

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0, \quad (7.431)$$

即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = 0, \quad (7.432)$$

这是一个波动方程。上述波动方程的通解可以表示为左行波 (左手模式) X_L 和右行波 (右手模式) X_R 的叠加

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma). \quad (7.433)$$

对于在时空中运动的弦来说, 我们要求 X^μ 总是实的。除此之外, 我们还可以额外考虑一个限制条件。考虑一个改变世界面方向的变换

$$\sigma' = \pi - \sigma, \quad \tau' = \tau, \quad (7.434)$$

如果弦在该变换下保持不变, 则称之为非定向弦, 反之则称为定向弦。

为求解弦的运动, 我们还需要给定恰当的边界条件。在弦理论中我们将考虑两种重要的弦, 一种为弦的两个端点相连形成一个闭环, 这种弦称为开弦, 如图 7.5 (a) 所示。另一种是弦的两个端点未封闭, 形成一条具有两个自由端点的线段, 这种弦称为开弦, 如图 7.5 (b) 所示。若弦的世界面上没有边界, 则其中将只包含闭弦, 不包含开弦。但是如果弦的世界面包含边界, 则其

中将包含开弦，并且它也可能包含闭弦。换句话说，一个闭弦理论中将只包含闭弦，而一个开弦理论则需要同时考虑到开弦和闭弦的贡献。

对于闭弦来说，我们将弦的边界条件选取为首尾两个端点相接形成的周期性边界条件

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi), \quad (7.435)$$

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, \pi). \quad (7.436)$$

对于开弦来说，我们将弦的边界条件选取为两个端点在时空中自由运动形成的诺伊曼 (Neumann) 边界条件

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, \pi) = 0. \quad (7.437)$$

上述两种边界条件是满足庞加莱对称性的。除此之外，我们也可以考虑两个端点固定于时空中特定点（或某些流形）的开弦，其边界条件为狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件

$$X^\mu(\tau, 0) = X_0^\mu(\tau), \quad X^\mu(\tau, \pi) = X_\pi^\mu(\tau). \quad (7.438)$$

这种边界条件破坏了体系的庞加莱对称性。

在适当的边界条件下求解出弦的运动方程，我们就得到了经典弦的演化过程。弦的运动可以被分为两部分，一部分是质心的平动，另一部分是弦自身的振动。由于弦的尺寸是有限的，因此弦的振动只有一些分立的模式。对于闭弦来说，满足周期性边界条件的最一般的解就是

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right], \quad (7.439)$$

式中 x^μ 为弦的质心坐标， p^μ 为弦的质心动量， m 为振动的模式，它的取值为所有非零整数， $\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ 分别代表各个右手式和左手模式的振幅。为了将弦量子化，我们需要将弦的坐标 X^μ 和其正则动量 P^μ 视为算符，并且让它们满足如下的等时对易关系

$$[X^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.440)$$

$$[P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')] = [X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = 0. \quad (7.441)$$

这意味着所有的 $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ 均应当被视为算符，并且它们需要满足如下的正则对易关系

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (7.442)$$

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = [\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (7.443)$$

其余所有算符均是对易的。

正如量子场论中场的不同激发态对应于不同的粒子一样，在弦理论中，弦振动的激发态在量子化后也将对应于不同的粒子。从上述对易关系中我们可以看到， $\hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$ 对应于两种不同的粒子，我们将其分别称为右手粒子和左手粒子。由于我们要求弦的坐标 X^μ 是实（厄密）的，因此各算符的正负模式之间应当是互相共轭的

$$\hat{\alpha}_{-n}^\mu = \hat{\alpha}_n^{\mu\dagger}, \quad \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu = \hat{\tilde{\alpha}}_n^{\mu\dagger}. \quad (7.444)$$

这就意味着对于各算符 $\hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$ 来说， $n > 0$ 对应的是粒子的湮灭算符， $n < 0$ 对应的是粒子的湮灭算符。特别地，如果我们定义归一化的产生和湮灭算符

$$\hat{a}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\alpha}_n^\mu, \quad \hat{a}_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\alpha}_{-n}^\mu, \quad \hat{\tilde{a}}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu, \quad \hat{\tilde{a}}_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu, \quad (7.445)$$

那么它们将满足

$$[\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^{\nu\dagger}] = [\hat{\tilde{a}}_m^\mu, \hat{\tilde{a}}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (7.446)$$

式中各 $m, n > 0$ 。这就是产生湮灭算符之间的对易关系。

我们将弦的基态记为 $|0, 0; p\rangle$ ，它将被所有的湮灭算符湮灭

$$\hat{a}_n^\mu |0, 0; p\rangle = \hat{\tilde{a}}_n^\mu |0, 0; p\rangle = 0. \quad (7.447)$$

弦的激发态可以表示为 $|N, \tilde{N}; p\rangle$ ，它代表系统中包含 N 个由 \hat{a} 产生的粒子， \tilde{N} 个由 $\hat{\tilde{a}}$ 产生的粒子

$$|N, \tilde{N}; p\rangle = \prod_{i=1}^N \hat{a}_{m_i}^{\mu_i \dagger} \prod_{j=1}^{\tilde{N}} \hat{\tilde{a}}_{n_j}^{\nu_j \dagger} |0, 0; p\rangle, \quad (7.448)$$

如果表达式中有相同的算符则要额外扣除相应的对称因子。由此我们看到，各种不同的激发态实际上就代表了弦的不同振动模式。对于闭弦来说，只有在其左右手粒子数量相等的情况下

$$N = \tilde{N}, \quad (7.449)$$

它才是物理上可能的。上述各态的动量本征值均为 p^μ

$$\hat{p}^\mu |N, \tilde{N}; p\rangle = p^\mu |N, \tilde{N}; \rangle, \quad (7.450)$$

它代表了弦的平动性质。

弦的正则动量为

$$\hat{P}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma), \quad (7.451)$$

因此其哈密顿算符为

$$\hat{H} = \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}_\mu \hat{P}^\mu - \mathcal{L}) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu + X'_\mu X'^\mu), \quad (7.452)$$

式中

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}, \quad X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}. \quad (7.453)$$

利用 X^μ 的展开式，我们可以将闭弦的哈密顿算符用其各个模式的自由度表示为

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_{n\mu} + \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu \hat{\tilde{\alpha}}_{n\mu} :, \quad (7.454)$$

式中对指标 μ 求和，零模式为弦的平动模式

$$\hat{\alpha}_0^\mu = \hat{\tilde{\alpha}}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \hat{p}^\mu. \quad (7.455)$$

从上式中我们可以看出，弦的哈密顿算符实际上就是其各模式的贡献之和。需要注意的是，在进行量子化后，算符的顺序将存在着一些不确定性。在这里我们简单地取算符的正规乘积，即将算符中所有的产生算符排在湮灭算符的左边，这一操作相当于减除掉了理论的真空能。当然，由于减除过程的任意性，实际上我们仍然保留了相差一个常数的自由度。

我们可以进一步地定义维拉宿 (Virasoro) 算符³⁵

$$\hat{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \hat{\alpha}_{m-n}^\mu \hat{\alpha}_{n\mu} :, \quad \hat{\tilde{L}}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \hat{\tilde{\alpha}}_{m-n}^\mu \hat{\tilde{\alpha}}_{n\mu} :, \quad (7.456)$$

式中对指标 μ 求和。它们之间满足如下的对易关系

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \quad (7.457)$$

$$[\hat{\tilde{L}}_m, \hat{\tilde{L}}_n] = (m-n)\hat{\tilde{L}}_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \quad (7.458)$$

³⁵ 维拉宿算符是体系能量动量张量的洛朗 (Laurent) 展开系数

$$\hat{T}_{zz}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{L}_m}{z^{m+2}}, \quad \hat{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\tilde{L}}_m}{\bar{z}^{m+2}}.$$

式中 D 为时空维数，最后一项称为中心荷。当然，由于各个产生湮灭算符之间的对易关系，实际上除了 \hat{L}_0 之外我们都不需要关心算符之间的对易关系，而各 $\hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\alpha}_{-n}^\mu$ 之间顺序的不确定性将在 \hat{L}_0 以及 $\hat{\tilde{L}}_0$ 之中引入一个额外的常数。利用维拉宿算符，我们可以将闭弦的哈密顿算符进一步表示为

$$\hat{H} = 2(\hat{L}_0 + \hat{\tilde{L}}_0). \quad (7.459)$$

对于具有诺伊曼边界条件的开弦来说，其最一般的解可以表示为

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (7.460)$$

式中 n 的取值为所有非零整数。在开弦之中将只存在一种模式，它由左手模式与右手模式复合而成。在经过正则量子化后，我们需要将所有的 $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu$ 视为算符，且各算符之间将满足如下的对易关系

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (7.461)$$

其余的各算符都是对易的。与闭弦的情况类似，我们定义归一化的产生湮灭算符为

$$\hat{a}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\alpha}_n^\mu, \quad \hat{a}_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\alpha}_{-n}^\mu. \quad (7.462)$$

我们将开弦的基态记为 $|0; p\rangle$ ，它将被所有的湮灭算符 \hat{a}_n^μ 湮灭

$$\hat{a}_n^\mu |0; p\rangle = 0. \quad (7.463)$$

弦的激发态可以表示为 $|N; p\rangle$ ，它代表系统中包含 N 个由 \hat{a} 产生的粒子，且其动量本征态为 p^μ

$$|N; p\rangle = \prod_{i=1}^N \hat{a}_{-n_i}^{\mu_i\dagger} |0; p\rangle, \quad \hat{p}^\mu |N; p\rangle = p^\mu |N; p\rangle, \quad (7.464)$$

式中各 $n_i > 0$ ，如果表达式中有相同的算符则要额外扣除相应的对称因子。开弦的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hat{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_{n\mu} :, \quad (7.465)$$

式中对指标 μ 求和，零模式为平动模式

$$\hat{\alpha}_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^\mu. \quad (7.466)$$

与闭弦类似，开弦的哈密顿量同样可以表示为所有模式的贡献之和。

我们注意到对于算符的零分量来说有

$$\langle 0 | \hat{a}_m^0 \hat{a}_m^{0\dagger} | 0 \rangle = -1, \quad (7.467)$$

这与矢量场量子化中出现的情况是类似的。这些态的范数为负，是非物理的，应当在理论中予以消除。以闭弦为例，对于任意的物理态 $|\phi\rangle$ 来说，我们要求

$$(\hat{L}_0 - a)|\phi\rangle = (\hat{\tilde{L}}_0 - a)|\phi\rangle = 0, \quad (7.468)$$

而对于开弦有

$$(\hat{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0, \quad (7.469)$$

式中 a 是由于算符的顺序产生的任意常数。我们发现，要想消除掉这些范数为负的态，我们需要令时空维数 $D = 26$ ，同时取参数 $a = 1$ ，因此我们再次得到了弦理论的临界维数。³⁶ 这一结果对于开弦和闭弦都是一致的。

以上我们利用正则量子化方法讨论了弦的运动。然而即使是我们采用了 $h_{ab} = \eta_{ab}$ 的平直规范条件，理论中仍然含有残余的规范自由度。为了进一步消除掉理论中的规范自由度，我们可以采用并非明显协变的光锥量子化的方法。定义时空光锥坐标为

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1), \quad (7.470)$$

³⁶ 若仅考虑范数非负的条件，那么 $D \leq 25, a \leq 1$ 的弦理论也是可能的，这被称为非临界弦理论。

这样弦的运动将可以由纵向坐标 X^\pm 和横向坐标 X^i 来刻画, 其中 $i = 2, \dots, (D-1)$ 。一般地, 矢量之间的内积可以用光锥坐标表示为

$$a^\mu b_\mu = -a^+ b^- - a^- b^+ + a^i b^i, \quad (7.471)$$

指标升降的规则为

$$a_- = -a^+, \quad a_+ = -a^-, \quad a_i = a^i. \quad (7.472)$$

利用残余的规范自由度, 我们可以将 X^+ 选取为

$$X^+ = x^+ + p^+ \tau, \quad (7.473)$$

换句话说我们利用规范条件消除掉了 X^\pm 的所有激发模式, 而只用各个横向坐标 X^i 的激发态来描述弦的运动。

在光锥坐标下, D 维时空中的弦具有 $(D-2)$ 个横向自由度, 而每个横向自由度将贡献一个相同的零点能³⁷

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sim \frac{1}{2} \zeta(-1) = -\frac{1}{24}. \quad (7.474)$$

因此, 所有自由度贡献的总零点能为 $-(D-2)/24$ 。对于开弦来说, 其质量算符可以表示为

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i : - \frac{D-2}{12} \right) = \frac{1}{\alpha'} \left(\hat{N} - \frac{D-2}{12} \right), \quad (7.475)$$

式中对指标 i 求和, \hat{N} 为粒子数算符。对于开弦的基态来说, 其粒子数为 $N=0$, 因此其质量为

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \cdot \frac{D-2}{24} < 0, \quad (7.476)$$

这是一个非物理态, 我们称之为快子。³⁸ 对于开弦的第一激发态来说, 其粒子数为 $N=1$, 因此其质量为

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \cdot \left(1 - \frac{D-2}{24} \right). \quad (7.477)$$

开弦的第一激发态由各个产生算符 $\hat{\alpha}_1^i$ 产生, 共有 $(D-2)$ 个自由度。虽然在光锥规范下, 理论并不是明显协变的, 但我们仍然要求系统具有洛伦兹对称性。对于一个具有洛伦兹对称性的体系来说, 一个有质量的粒子具有 $(D-1)$ 个自由度, 而一个无质量的粒子具有 $(D-2)$ 个自由度。因此要使得体系的洛伦兹对称性得到满足, 第一激发态的质量算符必须为零, 即

$$1 - \frac{D-2}{24} = 0, \quad (7.478)$$

从中我们可以解出时空维数 $D=26$ 。³⁹ 我们在这里明显地给出了一次临界维数的推导。

对于闭弦来说, 其质量算符的表达式为

$$\begin{aligned} \hat{M}^2 &= \frac{2}{\alpha'} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i : - \frac{D-2}{24} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^i \hat{\tilde{\alpha}}_n^i : - \frac{D-2}{24} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\alpha'} (\hat{N} + \hat{\tilde{N}} - \frac{D-2}{12}), \end{aligned} \quad (7.479)$$

式中对指标 i 求和。对于闭弦的基态来说, 其粒子数为 $N = \tilde{N} = 0$, 因此其质量为

$$M^2 = -\frac{2}{\alpha'} \cdot \frac{D-2}{12} < 0, \quad (7.480)$$

³⁷ 对“所有自然数之和等于 $-1/12$ ”的恰当理解是将其视为黎曼 ζ 函数 $\zeta(s) = \sum_n n^{-s}$ ($\text{Re}(s) > 1$) 在整个复平面上的解析延拓, 即 $\zeta(-1) = -1/12$ 。黎曼 ζ 函数的性质是极为复杂的, 黎曼本人猜想 $\zeta(s)$ 的所有非平凡的零点都位于 $\text{Re}(s) = 1/2$ 的直线上。这被称为黎曼猜想, 它是千禧年七大数学难题之一。

³⁸ 快子的存在意味着弦理论的真空可能是不稳定的, 这一问题要在超弦中才能得到解决。

³⁹ 我们也可以验证光锥坐标下的洛伦兹群生成元对易关系 $[J^{i-}, J^{j-}] = 0$ 。要使得上述对易关系成立, 时空维数必须满足 $D=26$ 。因此只有在 $D=26$ 的情况下, 弦理论才是洛伦兹协变的, 在这里临界维数又一次出现了。

这是一个非物理的快子。对于闭弦的第一激发态来说，其粒子数为 $N = \tilde{N} = 1$ ，因此其质量为

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \cdot \left(2 - \frac{D-2}{12} \right). \quad (7.481)$$

我们发现，如果取时空维数 $D = 26$ ，那么这将同样对应于一个无质量的粒子，这与开弦的情况是完全一致的。

接下来我们考虑不同弦量子态之间的相互作用。一般地，一系列弦量子态之间的振幅可以自然地表示为对所有以这些弦为边界的世界面的贡献之和。但由于系统具有微分同胚不变性和外尔不变性，因此世界面的任意性可以被极大地降低。在微分同胚变换下，一个曲面可以“光滑”地变换为另一个曲面，并且在这个过程之中不改变曲面上各点的相邻关系，即既不将原来相邻的两点撕开，也不将原来不相邻的两点粘在一起。由于弦理论在微分同胚变换下不变，因此我们可以通过微分同胚变换将世界面变换为更加简单的形式，从而简化计算。

例如对于闭弦-闭弦散射过程来说，一个可能的世界面如图 7.6 (a) 所示，它所对应的过程是两个闭弦首先融合成一个闭弦，然后这个闭弦再分裂为两个不同的闭弦。通过微分同胚变换，我们可以光滑地将四条无穷长的柱面收缩为球面上的四个无限小点，如图 7.6 (b) 所示，它与世界面 7.6 (a) 是等价的。因此，计算上述闭弦-闭弦散射世界面的振幅，实际上就等价于计算球面内的一个四点关联函数。类似地，对于开弦-开弦散射过程来说，一个可能的世界面如图 7.6 (c) 所示，它所对应的过程是两个开弦首先融合成一个开弦，然后这个开弦再分裂为两个不同的开弦。通过微分同胚变换，每个延伸至无穷远处的开弦态都可以收缩为圆盘边界上的一个无限小点，如图 7.6 (d) 所示。因此，计算上述开弦-开弦散射世界面的振幅，实际上就等价于计算圆盘边界上的一个四点关联函数。

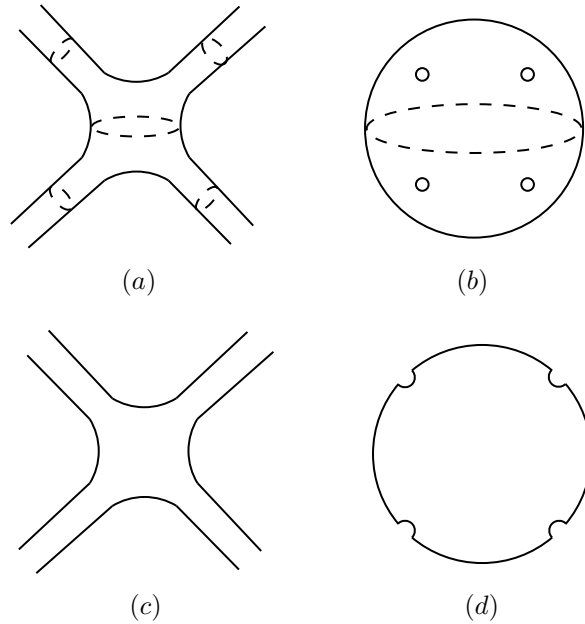


图 7.6: 闭弦-闭弦散射的一个可能的世界面 (a) 和与其微分同胚的二维流形 (b)，以及开弦-开弦散射的一个可能的世界面 (c) 和与其微分同胚的二维流形 (d)。

现在考虑内部自由度为 j_1, \dots, j_m ，动量为 p_1, \dots, p_m 的一系列弦从无穷远处相互靠近，散射后生成了内部自由度为 j_{m+1}, \dots, j_n ，动量为 p_{m+1}, \dots, p_n 的一系列弦并传播至无穷远处的过程，相应的散射矩阵元记为 $S(p_1, \dots, p_n)$ ，式中我们不明显地区分入射粒子和出射粒子。在进行恰当的微分同胚变换后，从无穷远处传播而来的弦都可以收缩为世界面上的一个点，因此每一个弦量子态都可以与一个顶点算符 $\hat{V}_{j_i}(p_i, \sigma_i)$ 一一对应。这样，待求的散射振幅（我们不明显地区

分散射矩阵元和振幅) 将可以归结为世界面上各个顶点算符之间的一个关联函数

$$S(p_1, \dots, p_n) \sim \left\langle \prod_{i=1}^n \hat{V}_{j_i}(p_i) \right\rangle. \quad (7.482)$$

式中我们要对所有顶点算符的坐标在整个世界面上积分, 且上述顶点算符的关联函数要计及所有可能的世界面的贡献。写出弦量子态所对应的顶点算符的具体形式, 并将上述关联函数计算出来, 我们就得到了弦的散射振幅。

由于可以由微分同胚变换和外尔变换联系起来的世界面流形都是等价的, 因此对于那些微分同胚的世界面流形来说, 我们只需计算其中一个流形的贡献即可。由于维数 $D \leq 3$ 的流形上的同胚和微分同胚是等价的, 即任何不超过三维的流形都具有唯一的微分结构, 因此我们可以进一步去掉变换中的光滑性质, 而只保留流形的拓扑结构不变。这样弦的散射振幅就归结为所有不同胚的世界面流形 M 的各个顶点算符关联函数之和

$$S(p_1, \dots, p_n) \sim \sum_M \left\langle \prod_{i=1}^n \hat{V}_{j_i}(p_i) \right\rangle_M. \quad (7.483)$$

或者我们可以明显地写出积分, 将上述振幅更精确地表示为⁴⁰

$$S(p_1, \dots, p_n) = \sum_M \int \frac{\mathcal{D}[X]\mathcal{D}[h]}{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} e^{-S[X, h]} \prod_{i=1}^n \int d^2\sigma_i \sqrt{h(\sigma_i)} V_{j_i}(p_i, \sigma_i), \quad (7.484)$$

式中我们已做维克转动, 且除去了可以由微分同胚变换和外尔变换联系起来的模空间的测度 $V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}$ 。需要注意的是, 在考虑世界面流形的拓扑结构时, 我们无需计及弦在无穷远处的初态和末态。我们只需考虑一个不包含延伸至无穷远处的初态和末态的世界面流形, 然后为每个无穷远处的闭弦态在世界面内部引入一个点, 为每个无穷远处的开弦态在世界面边界上引入一个点, 并计算这几个点上的顶点算符关联函数即可。

初看起来, 找到所有不同胚的流形并不是一件容易的事, 不过在二维情况下这个问题已经被彻底解决了。⁴¹ 对于可定向、无边界、连通的紧曲面来说, 其拓扑性质可以由“洞数”(亏格) g 决定。凡是洞数相同的曲面就是同胚的, 而具有不同洞数的曲面就是不同胚的, 图 7.7 中分别给出了洞数 $g = 0, 1, 2$ 的球面、环面和双环面。可以证明, 任何可定向、无边界、连通的紧曲面都同胚于一个具有 g 个洞的曲面。这样的曲面描述了最简单的定向闭弦理论, 因此将所有这些具有不同洞数的曲面的贡献加起来, 我们就得到了定向闭弦的散射振幅。并且这自然地给出了一个微扰展开的表达式: 零阶微扰就是 0 个洞的球面的贡献, 它类似于量子场论的树图; 一阶的微扰是 1 个洞的环面的贡献, 它类似于量子场论的单圈图; 而二阶微扰是 2 个洞的双环面的贡献, 它类似于量子场论的双圈图, 等等。与量子场论不同的是, 在弦理论中每一阶微扰展开都只有一个世界面与之对应, 这一个世界面的贡献在低能下将退化为量子场论中的大量圈图。

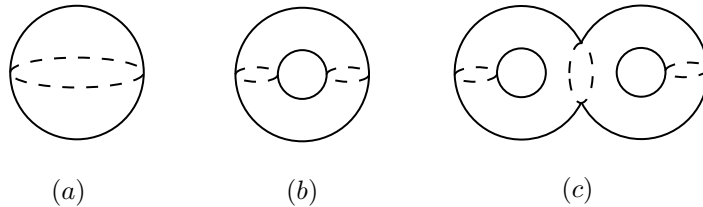


图 7.7: 具有零个洞 (a)、一个洞 (b) 和两个洞 (c) 的二维闭曲面。它们是拓扑不同胚的曲面, 分别对应于弦理论中的零阶微扰, 一阶微扰和二阶微扰。

除了“洞数”之外, 含有边界的可定向闭曲面的拓扑性质还由其边界的数目 b 决定, 这对应的是含有开弦的理论。例如 $g = 0, b = 1$ 的曲面为圆盘, $g = 0, b = 2$ 的曲面为环带, 以此类推。

⁴⁰如果我们利用法捷耶夫-波波夫方法进行规范固定, 并将模空间的测度明显地计算出来, 则上述表达式将变得更加复杂。

⁴¹需要说明的是, 流形的分类问题远没有看起来那么显然。对于三维流形来说, 这个问题将变得非常复杂, 它与几何化猜想(其特例是千禧年七大数学难题之中的“庞加莱猜想”)相关。

由于任何一条边界都可以拓扑收缩为曲面上的一个孔, 因此任何可定向、连通的紧曲面都同胚于一个具有 g 个洞以及 b 个孔的曲面。若我们进一步考虑不可定向的曲面, 则曲面的拓扑性质还由其“交叉帽”的数量 c 决定, 这对应的是含有无定向弦的理论。⁴² 例如 $(g, b, c) = (0, 0, 1)$ 为射影平面, $(g, b, c) = (0, 1, 1)$ 为莫比乌斯 (Möbius) 环, $(g, b, c) = (0, 0, 2)$ 为克莱因瓶, 等等。可以证明, 任何连通的紧曲面都同胚于一个具有 g 个洞、 b 个孔以及 c 个交叉帽的曲面。

我们可以在二维流形 M 上定义一个拓扑不变量

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M \sqrt{|h|} R^{(2)}(h) d^2 z, \quad (7.485)$$

式中 h 为二维流形的度规, $R^{(2)}$ 为二维流形的曲率标量, 积分对整个流形进行。将这个积分计算出来, 我们得到

$$\chi(M) = 2 - 2h - b - c, \quad (7.486)$$

式中 h 为流形的洞数, b 为流形的孔数, c 为流形的交叉帽数。这个拓扑不变量被称为欧拉示性数, 它在拓扑变换下是不发生改变的, 因此它反映了流形的拓扑性质。我们发现这里的欧拉示性数与二维世界面上度规的爱因斯坦-希尔伯特作用量 (即“纯引力”部分) 的表达式是一致的, 因此这说明世界面上的“纯引力项”将只会在理论中贡献一个与世界面拓扑有关的项。

弦的顶点算符与其各态之间是一一对应的。利用共形变量, 我们可以将闭弦的运动展开为

$$X^\mu(z, \bar{z}) = \hat{x}^\mu - i \frac{\alpha'}{2} \hat{p}^\mu \ln |z|^2 + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\hat{\alpha}_n^\mu}{z^n} + \frac{\hat{\bar{\alpha}}_n^\mu}{\bar{z}^n} \right). \quad (7.487)$$

从中我们可以解出弦的产生算符的表达式

$$\hat{\alpha}_{-n}^\mu = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(n-1)!} \partial^n X^\mu, \quad (7.488)$$

$$\hat{\bar{\alpha}}_{-n}^\mu = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(n-1)!} \bar{\partial}^n X^\mu, \quad (7.489)$$

式中 $n > 0$ 。对于闭弦来说, 其基态所对应的顶点算符可以表示为⁴³

$$|0, 0; p\rangle \sim: e^{ip \cdot X} :, \quad (7.490)$$

可以设想它们在时空平移变换 $X^\mu \rightarrow X^\mu + a^\mu$ 下都按照乘以一个因子 $e^{ik \cdot a}$ 的方式进行变换。因此, 一个闭弦的激发态 $|N, \tilde{N}; p\rangle$ 所对应的顶点算符将可以一般性地表示为

$$V(p) =: \prod_i \partial^{m_i} X^{\mu_i}(z) \prod_j \bar{\partial}^{n_j} X^{\nu_j}(\bar{z}) e^{ip \cdot X(z, \bar{z})} :, \quad (7.491)$$

我们在这里略去了常数系数。

对于开弦来说, 其运动可以表示为

$$X^\mu(z, \bar{z}) = \hat{x}^\mu - i \alpha' \hat{p}^\mu \ln |z|^2 + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\hat{\alpha}_n^\mu}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n}), \quad (7.492)$$

其基态所对应的算符为

$$|0; p\rangle \sim: e^{ip \cdot X} :, \quad (7.493)$$

各产生算符为

$$\hat{\alpha}_{-n}^\mu = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(n-1)!} \partial^n X^\mu. \quad (7.494)$$

⁴²粗略地说, 在曲面上挖一个洞, 并将相对两点粘在一起就得到了一个交叉帽。

⁴³需要注意的是, 这里在顶点算符中所引入的正规乘积不同于前面在讨论弦的哈密顿量时所引入的产生-湮灭算符正规乘积, 而是一种新的正规乘积, 称为共形正规乘积。除此之外, 若我们考虑的是含有边界的世界面, 则还需要考虑一种边界正规乘积。如果只做较为粗略的讨论, 那么我们无需详细区分不同正规乘积之间的区别。

因此，一个开弦的激发态 $|N, p\rangle$ 所对应的顶点算符将可以一般性地表示为

$$V(p) =: \prod_i \partial^{m_i} X^{\mu_i}(z) e^{ip \cdot X(z, \bar{z})} :. \quad (7.495)$$

在进行 BRST 量子化之后，我们需要对理论进行规范固定并引入鬼场，此时弦量子态的顶点算符形式会发生变化，我们需要计及鬼场的贡献。例如对于开弦来说，动量为 p 的基态所对应的顶点算符为

$$\hat{V}(p) =: c e^{ip \cdot X} :, \quad (7.496)$$

我们称它为开弦快子。而动量为 p 的第一激发态所对应的顶点算符为

$$\hat{V}(p) =: c \partial X^\mu e^{ip \cdot X} :, \quad (7.497)$$

我们称它为无质量开弦粒子。对于闭弦来说，动量为 p 的基态所对应的顶点算符为

$$\hat{V}(p) =: \tilde{c} c e^{ip \cdot X} :, \quad (7.498)$$

我们称它为闭弦快子。而动量为 p 的第一激发态所对应的顶点算符为

$$\hat{V}(p) =: \tilde{c} c \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ip \cdot X} :, \quad (7.499)$$

我们称它为无质量闭弦粒子。类似地，我们也可以得到弦的更高激发态所对应的顶点算符。

对于开弦来说，我们还可以在其端点处引入额外的自由度 $i, j = 1, \dots, N$ ，这被称为陈 (Chan)-帕顿 (Paton) 自由度。现在每个开弦量子态 $|N, p, i, j\rangle$ 将由其两个端点上的陈-帕顿自由度 i, j 来刻画。在选定了一组基 i, j 后，任意一个物理态的陈-帕顿自由度 a 均可以利用其两个端点处的陈-帕顿自由度展开为

$$|N, p, a\rangle = \sum_{i, j=1}^N \lambda_{ij}^a |N, p, i, j\rangle, \quad (7.500)$$

式中 λ_{ij}^a 为常数系数。因此，参与相互作用的开弦将额外携带一个陈-帕顿自由度 a ，它将为振幅贡献一个各 λ_{ij}^a 沿世界面边界首尾相乘的因子

$$\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \dots \lambda^{a_n}). \quad (7.501)$$

接下来我们计算不同弦量子态之间的相互作用。一般地，开弦之间的最低阶相互作用可以表示为圆盘上的顶点算符关联函数。最简单的情况是三个开弦快子（开弦基态）之间的相互作用，在树图阶的情况下其振幅可以表示为圆盘 D_2 上的一个三点关联函数

$$S_{D_2}(p_1, p_2, p_3) = g_o^3 e^{-\lambda} \left\langle : \prod_{i=1}^3 c^1 e^{ip_i \cdot X}(z_i, \bar{z}_i) : \right\rangle_{D_2} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) \\ + (p_2, a_2 \leftrightarrow p_3, a_2), \quad (7.502)$$

如图 7.8 (a) 所示，式中 g_o 为与开弦快子相关的耦合常数， $e^{-\lambda}$ 项与流形的欧拉示性数有关， $c e^{ip \cdot X}(z, \bar{z})$ 代表算符中的各场 c, X 均以 z, \bar{z} 为变量， $(p_2 \leftrightarrow p_3)$ 代表交换前述各项中 p_2, p_3 两个变量所得到的表达式。将上述关联函数明显地计算出来，我们就可以得到三个开弦快子的散射振幅 nh

$$S_{D_2}(p_1, p_2, p_3) = \frac{i g_o}{\alpha'} (2\pi)^D \delta^{(D)}(\sum_i p_i) \text{Tr}(\lambda^{a_1} \{\lambda^{a_2}, \lambda^{a_3}\}), \quad (7.503)$$

式中 C_{D_2} 为一个常数，上述结论的详细推导过程从略。由于我们已经采用了法捷耶夫-波波夫方法进行了规范固定，因此最终的散射振幅与各顶点算符的具体位置 z_i 无关。我们发现，弦理论所预言的最低阶的三开弦快子散射振幅与一个 $\lambda \phi^3$ 场论的三粒子散射振幅是相同的，它所对应的费曼图为图 7.8 (b)。这意味着在低能极限下，弦理论将自然地退化为一个 $\lambda \phi^3$ 量子场论。

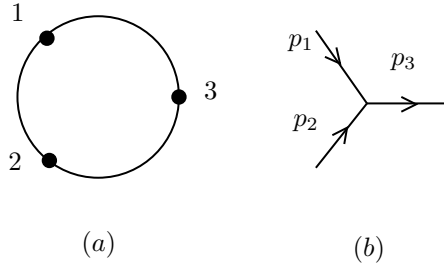


图 7.8: 三开弦快子最低阶振幅所对应的三点关联函数 (a) 与其所对应的 $\lambda\phi^3$ 场论的最低阶费曼图 (b)。

一个稍复杂的例子是四个开弦快子之间的相互作用，其树图阶振幅等价于圆盘 D_2 上的一个四点关联函数

$$S_{D_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_o^4 e^{-\lambda} \int d^2 z_4 \left\langle : \prod_{i=1}^3 c^1 e^{ip_i \cdot X}(z_i, \bar{z}_i) :: e^{ip_4 \cdot X}(z_4, \bar{z}_4) : \right\rangle_{D_2} \quad (7.504)$$

$$\times \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) + (p_2, a_2 \leftrightarrow p_3, a_3),$$

如图 7.9 (a) 所示。将这个振幅计算出来，我们得到

$$S_{D_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{ig_o^2}{\alpha'} (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i) \quad (7.505)$$

$$\times [\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) B(-\alpha_o(s), -\alpha_o(t))$$

$$+ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) B(-\alpha_o(t), -\alpha_o(u))$$

$$+ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) B(-\alpha_o(s), -\alpha_o(u))],$$

式中 $\alpha_o(x) = 1 + \alpha'x$, s, t, u 为曼德尔施塔姆变量，而

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (7.506)$$

为欧拉 B 函数⁴⁴，这个结果被称为韦内齐亚诺 (Veneziano) 公式。将四快子散射振幅在其极点 $\alpha's = -1$ 处展开，我们得到

$$S_{D_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) \sim i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{S_{D_2}(p_1, p_2, p) S_{D_2}(-p, p_3, p_4)}{-p^2 + \alpha'^{-1} + i\epsilon}. \quad (7.507)$$

我们发现，等式右端的表达式实际上就相当于两个 $\lambda\phi^3$ 顶点通过一个标量场传播子相连接的结果。上述四快子散射振幅还有两个其他的极点 $\alpha'u = -1, \alpha't = -1$ ，因此它在极点附近最终可以归结为三张不同的费曼图，如图 7.9 (b)-(d) 所示。可以看出，它们恰恰就是 $\lambda\phi^3$ 场论所给出的四粒子散射的最低阶费曼图。

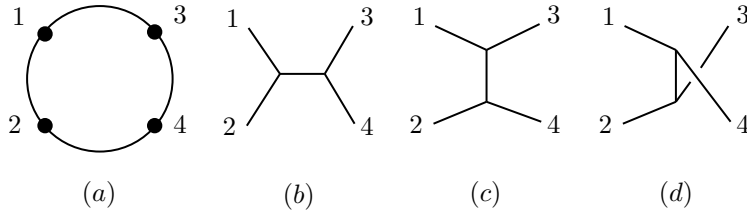


图 7.9: 四开弦快子最低阶振幅所对应的四点关联函数 (a) 与其所对应的 $\lambda\phi^3$ 场论的最低阶费曼图 (b)-(d)。

接下来我们来考虑含无质量开弦粒子（开弦第一激发态）的相互作用。一个无质量开弦粒

⁴⁴这里的 B 实际上是希腊字母 β 的大写，因此应当读作“beta 函数”。

子和两个开弦快子之间的最低阶振幅它可以表示为圆盘 D_2 上的三点关联函数

$$S_{D_2}(p_1, e_1, p_2, p_3) = -ig'_o g_o^2 e^{-\lambda} e_{1\mu} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3}) \\ \times \langle : c^1 \partial X^\mu e^{ip_1 \cdot X}(z_1, \bar{z}_1) :: c^1 e^{ip_2 \cdot X}(z_2, \bar{z}_2) :: c^1 e^{ip_3 \cdot X}(z_3, \bar{z}_3) : \rangle_{D_2} + (p_2, a_2 \leftrightarrow p_3, a_2), \quad (7.508)$$

式中 e_1 是一个矢量且满足 $e_{1\mu} e_1^\mu = 1$ ，它对应于矢量粒子的极化， $g'_o = (2\alpha')^{-1/2} g_o$ 为与无质量开弦粒子相关的耦合系数。将这个振幅计算出来，我们得到

$$S_{D_2}(p_1, e_1, p_2, p_3) = -ig'_o e_1 \cdot p_{23} (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i) \text{Tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2}, \lambda^{a_3}]), \quad (7.509)$$

式中 $p_{ij} = p_i - p_j$ 。可以发现，上述振幅对应于一个标量量子电动力学的顶点 $A\phi^2$ 。我们还可以考察三个无质量开弦粒子之间的相互作用，其振幅为

$$S_{D_2}(p_1, e_1, p_2, e_2, p_3, e_3) = -ig_o^3 e^{-\lambda} e_{1\mu} e_{2\nu} e_{3\rho} \\ \times \langle : c^1 \partial X^\mu e^{ip_1 \cdot X}(z_1, \bar{z}_1) :: c^1 \partial X^\nu e^{ip_2 \cdot X}(z_2, \bar{z}_2) :: c^1 \partial X^\rho e^{ip_3 \cdot X}(z_3, \bar{z}_3) : \rangle_{D_2} \\ + (p_2, a_2 \leftrightarrow p_3, a_3), \quad (7.510)$$

式中 e_1, e_2, e_3 为三个极化矢量。将这个振幅计算出来，我们得到

$$S_{D_2}(p_1, e_1, p_2, e_2, p_3, e_3) = ig_o^3 (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i) \text{Tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2}, \lambda^{a_3}]) \\ \times \left(e_1 \cdot p_{23} e_2 \cdot e_3 + e_2 \cdot p_{31} e_3 \cdot e_1 + e_3 \cdot p_{12} e_1 \cdot e_2 + \frac{\alpha'}{2} e_1 \cdot p_{23} e_2 \cdot p_{31} e_3 \cdot p_{12} \right). \quad (7.511)$$

将上述所有结果总结起来，我们发现弦理论所描述的开弦快子与无质量开弦粒子之间的相互作用在低能极限下等价于如下的相互作用量子场

$$S = \frac{1}{g_o'^2} \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \text{Tr}(D_\mu \phi D^\mu \phi) + \frac{1}{2\alpha'} \text{Tr}(\phi^2) \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{9\alpha'}} \text{Tr}(\phi^3) - \frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right], \quad (7.512)$$

这给出了一个 $U(n)$ 规范理论，式中 ϕ, A_μ 均为 n 阶矩阵，它们可以用一组矩阵 λ_a 展开为

$$\phi = \phi^a \lambda^a, \quad A_\mu = A_\mu^a \lambda^a, \quad (7.513)$$

各 ϕ^a 为标量场，各 A_μ^a 为矢量场，而协变导数和场强张量为

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i[A_\mu, \phi], \quad (7.514)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (7.515)$$

由此我们看到，弦理论中开弦之间的相互作用在低能下将自然地退化为规范场论，其中 ϕ 为快子场，它对应于开弦的基态； A_μ 代表各规范矢量场，它对应于开弦的第一激发态； λ_a 为规范群的生成元，其性质可以由振幅中的常数 A 来刻画。

接下来我们考虑闭弦的最低阶相互作用，它可以表示为球面上的顶点算符关联函数。三闭弦快子的最低阶散射振幅等价于球面上的如下三点关联函数

$$S_{S_2}(p_1, p_2, p_3) = g_c^3 e^{-2\lambda} \left\langle : \prod_{i=1}^3 c \tilde{c} e^{ip_i \cdot X(z_i, \bar{z}_i)} : \right\rangle_{S_2}, \quad (7.516)$$

式中 g_c 为闭弦快子的耦合常数。将其计算出来，我们得到

$$S_{S_2}(p_1, p_2, p_3) = \frac{8\pi i g_c}{\alpha'} (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i), \quad (7.517)$$

式中 C_{S_2} 是一个常数。四闭弦快子的最低阶散射振幅等价于如下的四点关联函数

$$S_{S_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) = g_c^4 e^{-2\lambda} \int d^2 z_4 \left\langle : \prod_{i=1}^3 c \tilde{c} e^{ip_i \cdot X(z_i, \bar{z}_i)} :: e^{ip_4 \cdot X(z_4, \bar{z}_4)} : \right\rangle_{S_2}, \quad (7.518)$$

将其计算出来, 我们得到

$$S_{S_2}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{8\pi i g_c^2}{\alpha'} (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i) C(-\alpha_c(t), -\alpha_c(u)), \quad (7.519)$$

式中 $\alpha_c(x) = 1 + \alpha' x/4$, 而

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \int d^2 z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2} \\ &= 2\pi \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-a-b)}{\Gamma(a+b)\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}. \end{aligned} \quad (7.520)$$

这一结果被称为维拉宿-夏皮罗 (Shapiro) 振幅。

接下来考虑含有无质量闭弦粒子 (闭弦第一激发态) 的相互作用。一个无质量闭弦粒子与两个闭弦快子的最低阶振幅等价于如下的三点关联函数

$$\begin{aligned} S_{S_2}(p_1, e_1, p_2, p_3) &= g_c^2 g'_c e^{-2\lambda} e_{1\mu\nu} \langle : \tilde{c} c \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ip_1 \cdot X}(z_1, \bar{z}_1) : \\ &: \tilde{c} c e^{ip_2 \cdot X}(z_2, \bar{z}_2) :: \tilde{c} c e^{ip_3 \cdot X}(z_3, \bar{z}_3) : \rangle_{S_2}, \end{aligned} \quad (7.521)$$

式中 $g'_c = 2g_c/\alpha'$ 为与无质量闭弦粒子所对应的耦合常数, e_1 为二阶张量且满足 $e_{1\mu\nu} e_1^{\mu\nu} = 1$, 它对应于无质量闭弦粒子的极化。将其计算出来, 我们得到

$$S_{S_2}(p_1, e_1, p_2, p_3) = -\frac{\pi i \alpha'}{2} g'_c e_{1\mu\nu} p_{23}^\mu p_{23}^\nu (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i). \quad (7.522)$$

三个无质量闭弦粒子的散射振幅等价于如下的三点关联函数

$$\begin{aligned} S_{S_2}(p_1, e_1, p_2, e_2, p_3, e_3) &= g_c'^3 e^{-2\lambda} e_{1\mu_1\nu_1} e_{2\mu_2\nu_2} e_{3\mu_3\nu_3} \\ &\times \left\langle \prod_{j=1}^3 : \tilde{c} c \partial X^{\mu_j} \bar{\partial} X^{\nu_j} e^{ip_j \cdot X}(z_j, \bar{z}_j) : \right\rangle_{S_2}. \end{aligned} \quad (7.523)$$

将其计算出来, 我们得到

$$S_{S_2}(p_1, e_1, p_2, e_2, p_3, e_3) = \pi i g_c (2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma_i p_i) e_{1\mu\nu} e_{2\alpha\beta} e_{3\gamma\delta} T^{\mu\alpha\gamma} T^{\nu\beta\delta}, \quad (7.524)$$

式中

$$T^{\mu\alpha\gamma} = p_{23}^\mu \eta^{\alpha\gamma} + p_{31}^\alpha \eta^{\gamma\mu} + p_{12}^\gamma \eta^{\mu\alpha} + \frac{\alpha'}{8} p_{23}^\mu p_{31}^\alpha p_{12}^\gamma. \quad (7.525)$$

将上述所有结果总结起来, 我们发现弦理论所描述的闭弦快子与无质量闭弦粒子的相互作用在低能极限下等价于如下的相互作用量子场

$$S = S_G + S_T, \quad (7.526)$$

其中

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^D x \sqrt{-g^{(D)}} e^{-2\Phi} \left[-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} \right. \\ &\quad \left. + R^{(D)} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right], \end{aligned} \quad (7.527)$$

$$S_T = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g^{(D)}} e^{-2\Phi} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T - \frac{4}{\alpha'} T^2 \right), \quad (7.528)$$

式中 κ_0 是一个常数, T, Φ 均为标量场, $g_{\mu\nu}$ 是一个对称的二阶张量场, $R^{(D)}$ 为 $g_{\mu\nu}$ 所对应的曲率标量, $g^{(D)}$ 为 $g_{\mu\nu}$ 的行列式, $B_{\mu\nu}$ 是一个反对称的二阶张量场, 其场强张量为

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}. \quad (7.529)$$

由此我们看到, 弦理论中闭弦之间的相互作用在低能下将自然地退化为引力理论, 式中 T 为快子场, 它对应于闭弦的基态; 而 $g_{\mu\nu}$ 为时空的度规张量, 它对应于闭弦的第一激发态。⁴⁵

⁴⁵弦理论在低能下自发地给出了引力理论, 这一结论很引人注目, 但是却并不令我们感到十分惊讶。因为我们已经知道了, 任何一个同时满足相对论和量子力学的理论的低能有效理论都是一个量子场论, 同时量子场论中的任何一个二阶张量场看起来都像是一个引力场一样。

弦理论的更高阶振幅仍然可以归结为世界面上的顶点算符关联函数，只不过此时的世界面将具有更加复杂的拓扑结构。例如，闭弦的单圈阶散射振幅将可以归结为二维环面 T^2 上的顶点算符关联函数。将这一振幅计算出来，我们可以得到一个有限的结果。事实上可以一般性地证明，弦理论的高阶振幅都是收敛的。这是因为与量子场论不同，弦的相互作用是在时空中的一个有限的尺度内完成的，它可以避免紫外发散的困难。因此我们说弦理论是一个无需重整化的有限理论。

在前面的讨论中，我们考虑的都是 D 维平直时空中的弦理论，即取背景时空的度规张量为 $\eta_{\mu\nu}$ 。如果我们一般性地考虑 D 维弯曲背景时空中的弦理论，那么弦作用量将可以表示为

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu. \quad (7.530)$$

式中 $g_{\mu\nu}(X)$ 为 D 维背景时空的度规张量。在这个作用量中，世界面度规为 $h_{\alpha\beta}$ ，而 $g_{\mu\nu}(X)$ 没有动力学且与弦流形本身并不直接相关，它相当于一个“背景场”。除去 D 维背景时空的度规张量 $g_{\mu\nu}(X)$ 外，我们还容许理论中出现两种背景场，它们分别为反对称二阶张量场 $B_{\mu\nu}(X)$ 以及胀子场 $\Phi(X)$ ，其作用量分别为

$$S_B = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \varepsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (7.531)$$

$$S_\Phi = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \Phi(X) R^{(2)}, \quad (7.532)$$

式中 $R^{(2)}$ 为二维世界面度规张量 $h_{\alpha\beta}$ 所对应的曲率标量。

弦理论只有在 $D = 26$ 维时空中是自洽的，而我们的物理世界是四维的。初看起来这似乎意味着弦理论并不能够描述四维时空中的物理学，但是我们发现它恰好可以为 7.4 节中的额外维给出一个自洽的解释。换句话说，弦理论所描述的时空仍然是 26 维的，只不过有 4 个维度在宏观上展开并被我们所感知到，而余下的 $26 - 4 = 22$ 个维度将蜷曲起来形成额外维。为简便起见，我们首先来考察只有一个维度 x^{25} 蜷曲成半径为 R 的圆环，其余 25 个维度 x^0, \dots, x^{24} 全部在宏观中展开的情况，如图 7.10 所示。在非紧致的维度 x^μ 上，闭弦的周期性边界条件要求

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi), \quad \mu = 0, \dots, 24. \quad (7.533)$$

而对于紧致维度 x^{25} 来说，情况则要更加复杂一些。我们容许弦环绕紧致维度数圈之后又重新回到原点，因此在紧致维度上，闭弦的周期性边界条件应当表示为

$$X^{25}(\tau, \sigma) = X^{25}(\tau, \sigma + \pi) + 2\pi RW, \quad (7.534)$$

式中 W 为一个整数，它被称为弦的环绕数。顺时针缠绕和逆时针缠绕所贡献的环绕数是相反的，图 7.10 中给出了几条曲线的环绕数。因此，若我们考虑缠绕数的贡献，则要在弦的激发模式中额外加入一项 $2RW\sigma$ ，其余的各个激发态都保持不变。

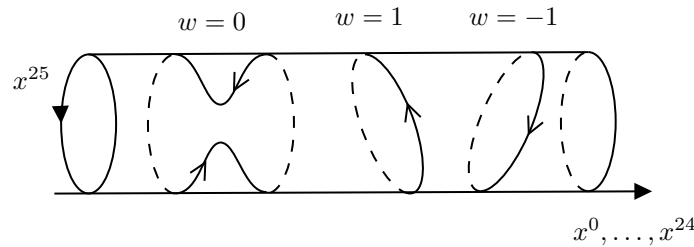


图 7.10: 有一个维度蜷曲起来的时空流形，以及在其上的各条曲线的环绕数。

我们还可以注意到另外一件事情，即在紧致维度上弦的动量不能取为任意值。由于一个自由粒子的波函数可以表示为平面波 $e^{ip \cdot x}$ ，因此紧致维度的动量 p^{25} 需要满足周期性条件

$$e^{ip^{25}x^{25}} = e^{ip^{25}(x^{25} + 2\pi R)}, \quad (7.535)$$

这意味着 p^{25} 必须满足

$$p^{25} = \frac{K}{R}, \quad (7.536)$$

式中 K 为一个整数, 它被称为卡鲁扎-克莱因激发数。在计及缠绕数和卡鲁扎-克莱因因数的贡献后, 我们就可以将紧致维度的振动模式表示为

$$\begin{aligned} X^{25}(\tau, \sigma) = & x^{25} + \frac{2K\alpha'}{R}\tau + 2RW\sigma \\ & + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^{25}}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right]. \end{aligned} \quad (7.537)$$

上述弦理论具有一种额外的对称性。现在我们明显地写出弦的左手部分和右手部分

$$X^{25} = X_L^{25}(\tau + \sigma) + X_R^{25}(\tau - \sigma), \quad (7.538)$$

式中

$$X_L^{25}(\tau + \sigma) = \frac{x^{25} + \tilde{x}^{25}}{2} + \sqrt{2\alpha'} \tilde{\alpha}_0^{25}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^{25}}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (7.539)$$

$$X_R^{25}(\tau - \sigma) = \frac{x^{25} - \tilde{x}^{25}}{2} + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^{25}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad (7.540)$$

零模式定义为

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^{25} = \alpha' \frac{K}{R} - WR, \quad \sqrt{2\alpha'} \tilde{\alpha}_0^{25} = \alpha' \frac{K}{R} + WR. \quad (7.541)$$

我们发现, 如果将弦的左手部分不变, 而将右手部分取反, 即作代换

$$\tilde{X}_L = X_L, \quad \tilde{X}_R = -X_R, \quad (7.542)$$

那么得到的对偶弦可以表示为

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{25} = & X_L^{25}(\tau + \sigma) - X_R^{25}(\tau - \sigma) \\ = & \tilde{x}^{25} + \frac{2K\alpha'}{R}\sigma + 2RW\tau \\ & + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left[-\frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^{25}}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right]. \end{aligned} \quad (7.543)$$

将之与含有紧致维度闭弦的展开式相比较, 我们发现这相当于作下述代换而得到的一个新的对偶弦理论

$$\tilde{W} = K, \quad \tilde{K} = W, \quad \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}. \quad (7.544)$$

因此在这个变换之下, 对偶弦的紧致维度半径由 R 变为了 \tilde{R} , 同时弦的卡鲁扎-克莱因激发数变为了缠绕数, 而缠绕数变为了卡鲁扎-克莱因激发数。可以验证, 通过上述变换得到的对偶弦理论与原来的弦理论是等价的, 这被称为弦理论的 T 对偶。

对于开弦可以进行类似的讨论。考虑满足诺伊曼边界条件的开弦

$$\partial^\sigma X^{25}(\tau, 0) = \partial^\sigma X^{25}(\tau, \pi) = 0. \quad (7.545)$$

由于这样的开弦端点是自由的, 总可以在拓扑上收缩为一点, 因此它并没有类似于闭弦环绕数的概念。这样具有诺伊曼边界条件开弦紧致维度的振动模式可以表示为

$$X^{25}(\tau, \sigma) = x^{25} + \frac{2K\alpha'}{R}\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (7.546)$$

式中 K 为卡鲁扎-克莱因激发数。开弦的左手部分和右手部分分别为

$$X_L^{25}(\tau + \sigma) = \frac{x^{25} + \tilde{x}^{25}}{2} + \frac{K\alpha'}{R}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (7.547)$$

$$X_R^{25}(\tau - \sigma) = \frac{x^{25} - \tilde{x}^{25}}{2} + \frac{K\alpha'}{R}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-in(\tau - \sigma)}, \quad (7.548)$$

在 T 对偶后, 弦的左手部分不变, 右手部分取反, 这样得到的对偶弦为

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{25}(\tau, \sigma) &= X_L^{25}(\tau + \sigma) - X_R^{25}(\tau - \sigma) \\ &= \tilde{x}^{25} + \frac{2K\alpha'}{R}\sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{25}}{n} e^{-in\tau} \sin(n\sigma), \end{aligned} \quad (7.549)$$

这样得到的对偶弦理论与原来的弦理论是等价的。将之与含有紧致维度开弦的展开式相比较, 我们发现这相当于作下述代换而得到的一个新的对偶弦理论

$$\tilde{W} = K, \quad \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}. \quad (7.550)$$

因此在这个变换之下, 对偶弦的紧致维度半径由 R 变为了 \tilde{R} , 同时弦的卡鲁扎-克莱因激发数变为了缠绕数。进一步计算出弦的两端点坐标, 我们得到

$$\tilde{X}^{25}(\tau, 0) = \tilde{x}^{25}, \quad \tilde{X}^{25}(\tau, \pi) = \tilde{x}^{25} + 2\pi\alpha' \tilde{p}^{25}, \quad (7.551)$$

因此紧致维度的诺伊曼边界条件在对偶弦中变为了狄利克雷边界条件。此时弦端点的紧致维度坐标 \tilde{X}^{25} 被固定了下来, 而余下的 24 个空间维度和 1 个时间维度仍然可以自由改变, 因此弦端点被固定在了时空中的一个 25 维流形上, 我们称之为 $D24$ 膜, 这里的 D 代表狄利克雷边界条件, 24 为膜的空间维数。

上述结果意味着在 T 对偶下, 一个紧致维度半径为 R 的弦理论等价于一个紧致维度为

$$\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R} \quad (7.552)$$

的对偶弦理论, 这一结论对于微扰论的任意阶都是成立的。根据 T 对偶, 紧致维度半径在 $R \rightarrow 0$ 的极限和 $R \rightarrow \infty$ 的极限下的行为是相同的, 而紧致维度半径为 $R = \sqrt{\alpha'}$ 的弦论与其自身对偶。对于闭弦来说, T 对偶交换了弦的缠绕模式和卡鲁扎-克莱因激发模式。而对于开弦来说, T 对偶将紧致维度的诺伊曼边界条件变换为狄利克雷边界条件, 将一个有卡鲁扎-克莱因激发而无缠绕数的弦变换为有缠绕数而无卡鲁扎-克莱因激发的弦。因此, 在紧致维度的尺度之下, 我们将不能够确切地说出系统究竟处在什么样的状态, 此时通常的物理概念将失去意义。

以上我们讨论了仅有一个紧致维度的情况, 将它推广到具有多个紧致维度的情况是直接的。作为一种最简单的情况, 我们假设有 p 个维度 X^m 发生了紧化, 它们均满足周期性边界条件

$$X^m(\tau, \sigma) = X^m(\tau, \sigma + \pi) + 2\pi R^m W^m, \quad (7.553)$$

式中 $25 - p < m \leq 25$, R^m 为紧致维度半径, W^m 为维度 X^m 所对应的环绕数, 式中不对 m 求和。在这种情况下, 紧致流形的拓扑结构为 p 维环面 T^p 。在 T 对偶的情况下, 紧致流形的拓扑结构仍然为 T^p , 其半径将变为

$$\tilde{R}^m = \frac{\alpha'}{R^m}. \quad (7.554)$$

如果紧致流形的拓扑结构变得复杂, 那么其对偶流形的拓扑结构也将更加复杂。在 T 对偶之后, 开弦的诺伊曼边界条件将变为狄利克雷边界条件, 其端点将会被固定在 D 膜上。一般地, 如果时空中有 n 个紧致维度, 则在进行 T 对偶后, 开弦的端点将会被约束在一个 $D(25 - n)$ 膜上。

对于量子场论来说, 理论中有许多自由的参数。我们可以自由地选择各个粒子的质量、耦合常数以及混合角, 除此之外粒子的表示以及规范群也是可以自由选择的。但是对于弦理论来说, 情况则不同: 弦理论中几乎没有任何可调的参数, 甚至连弦参数 α 都可以通过适当的约定消除掉。也就是说, $D = 26$ 维的弦理论给出了一个唯一的理论。

我们可以尝试将一维的弦推广为更高维的流形。考虑在 D 维时空中的一个 p 维流形, 我们称之为 p 膜, 它在时空中的运动轨迹将是一个 $(p + 1)$ (世界) 膜。我们记 $(p + 1)$ 膜的坐标为

X^μ , 指标 $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, 并用坐标 σ^α 来标记 $(p+1)$ 膜上的各点, 式中 $\alpha = 0, 1, \dots, p$ 。一个相对论性 p 膜在时空中运动的作用量将可以表示为

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}. \quad (7.555)$$

利用 $(p+1)$ 膜上的度规场 $h_{\alpha\beta}$, 我们可以将系统的作用量进一步表示为

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \quad (7.556)$$

它是弦的波利亚科夫作用量的直接推广。虽然我们在原则上可以给出任意维度的 p 膜的量子理论, 但是随着膜的维数的提高, 由其内部自由度所引起的发散会变得越来越严重。最终我们发现, 一维的弦理论将是唯一的一个有限的理论。但是在一些其他的情况下, 考虑一般的 p 膜仍然是有意义的。

前文中介绍的弦理论是经典弦的直接量子化, 它仍是一个“一次量子化”理论, 与点粒子的量子力学是相对应的。我们也可以考虑仿照量子场论的方法, 将弦进行二次量子化, 这样得到的理论被称为弦场论。我们知道点粒子的运动可以由 $x(t)$ 来刻画, 在二次量子化后它将成为一个场 $\phi(x)$

$$x(t) \rightarrow \phi(x), \quad (7.557)$$

其物理意义是产生或者湮灭一个处于 x 处的粒子。类似地, 弦的运动可以由弦的坐标 $X^\mu(\sigma)$ 以及反对易鬼场 $c(\sigma), \tilde{c}(\sigma)$ 来刻画, 另一个反对易鬼场 $b(\sigma), \tilde{b}(\sigma)$ 可以由 $c(\sigma), \tilde{c}(\sigma)$ 的泛函确定。在二次量子化后, 它将成为上述各场的一个泛函

$$X^\mu(\sigma), c(\sigma), \tilde{c}(\sigma) \rightarrow \Psi(X^\mu, c, \tilde{c}), \quad (7.558)$$

这里的 $\Psi(X^\mu, c, \tilde{c})$ 被称为弦场, 其物理意义是产生或者湮灭一条由 $X^\mu(\sigma), c(\sigma), \tilde{c}(\sigma)$ 刻画的弦。

接下来我们需要写出弦场的作用量。对于开弦来说, 我们将外积推广为 $*$ 运算。粗略地说, 它的计算方法是将弦拆分为左右两部分, 然后对第一条弦的右半部分和第二条弦的左半部分进行卷积。利用这一运算, 我们可以将弦场的场强表示为

$$F = Q_B A + A * A, \quad (7.559)$$

式中 Q_B 为 BRST 对称性的守恒荷。而弦场的作用量可以选取为陈-西蒙斯作用量

$$S[\Psi] = \frac{1}{2} \int \Psi * Q_B \Psi + \frac{2g}{3} \int \Psi * \Psi * \Psi. \quad (7.560)$$

可以验证, 这一理论在如下的规范变换下不变

$$\delta\Psi = Q_B \Lambda + g\Psi * \Lambda - g\Lambda * \Psi, \quad (7.561)$$

式中 Λ 为任意的泛函。将上述作用量量子化后, 我们将得到一个关于弦场的泛函积分

$$K = \int \mathcal{D}[\Psi] e^{iS[\Psi]}, \quad (7.562)$$

这就是二次量子化后的开弦场论。对于闭弦场论来说, 情况要更加复杂。

上述玻色弦理论中只包含自旋为整数的玻色子, 而不包含自旋为半整数的费米子。为了描述现实世界中的费米子, 我们需要为弦理论引入费米自由度。一个合适的选择是在弦理论中引入超对称性, 它可以自然地将玻色子与费米子联系起来。我们将具有超对称性的弦理论称为超弦理论。作为一个最简单的例子, 我们取弦参数 $\alpha' = 1/2$, 并考虑如下具有费米自由度的弦作用量

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \quad (7.563)$$

式中 ψ 为世界面上的二分量马约拉纳旋量, 指标 μ 代表 D 维时空中的各个分量, ρ^α 为二维狄拉克矩阵, 满足如下的反对易关系

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}, \quad (7.564)$$

我们可以将其选取为

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.565)$$

而旋量场的共轭定义为

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta, \quad \beta = i\rho^0, \quad (7.566)$$

上述作用量被称为雷蒙-内沃-施瓦兹 (Ramond-Neveu-Schwarz, RNS) 作用量。我们发现 RNS 作用量在如下的无穷小变换下

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon} \psi^\mu, \quad \delta \psi^\mu = \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon \quad (7.567)$$

是不变的, 式中 ε 为无穷小的二分量马约拉纳旋量。因此, RNS 弦具有超对称性。

我们可以更加系统地利用超空间的方法构造具有超对称性的弦作用量。我们将世界面坐标扩充为超空间 $(\sigma^\alpha, \theta_A)$, 其中 θ_A 为二分量的格拉斯曼坐标, 指标 A 标记格拉斯曼坐标的不同分量。在超空间中, 超场 Y^μ 所具有的最一般的形式为

$$Y^\mu(\sigma^\alpha, \theta) = X^\mu(\sigma^\alpha) + \bar{\theta} \psi^\mu(\sigma^\alpha) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta B^\mu(\sigma^\alpha), \quad (7.568)$$

式中 X^μ, ψ^μ, B^μ 均为定义在世界面坐标 σ^α 上的场。超空间中的弦作用量可以表示为

$$S = \frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma d^2\theta \bar{D}Y^\mu D Y_\mu, \quad (7.569)$$

式中

$$D_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} + (\rho^\alpha \theta)_A \partial_\alpha \quad (7.570)$$

为超空间中的协变导数。积去格拉斯曼坐标后, 我们得到

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - B_\mu B^\mu). \quad (7.571)$$

超对称变换的生成元可以表示为

$$\hat{Q}_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} - (\rho^\alpha \theta)_A \partial_\alpha. \quad (7.572)$$

在无限小超对称下, 超空间坐标的变换关系为

$$\theta^A \rightarrow \theta^A + \varepsilon^A, \quad \sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \bar{\theta} \rho^\alpha \varepsilon, \quad (7.573)$$

式中 ε 为无限小的二分量旋量。计算出上述超空间变换下各分量场的变换关系, 我们得到

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon} \psi^\mu, \quad \delta \psi^\mu = \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon + B^\mu \varepsilon, \quad \delta B^\mu = \bar{\varepsilon} \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu, \quad (7.574)$$

这恰是前文中所给出的超对称变换。注意到 B^μ 场没有动能项, 因此它为辅助场, 将其积去后我们就得到了前文中所给出的 RNS 作用量。

超弦理论中 X^μ 场的行为与玻色弦理论是一致的, 因此接下来我们将利用正则量子化方法讨论二分量旋量场 ψ^μ 的振动模式。我们将 ψ^μ 的两个分量分别表示为

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix}, \quad (7.575)$$

则旋量场的作用量将可以表示为

$$S_f = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+), \quad (7.576)$$

式中

$$\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial \sigma_\pm}, \quad \sigma_\pm = \tau \pm \sigma \quad (7.577)$$

分别为光锥坐标和相应的导数。旋量场满足的经典运动方程为

$$\partial_+ \psi_- = 0, \quad \partial_- \psi_+ = 0, \quad (7.578)$$

因此在对旋量场作用量的变分将只余下边界处的表面项

$$\delta S = \frac{i}{\pi} \int d\tau [(\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-)|_{\sigma=\pi} - (\psi_+ \delta\psi_+ - \psi_- \delta\psi_-)|_{\sigma=0}]. \quad (7.579)$$

我们需要恰当地为旋量场选择边界条件, 以使得表面项的变分为零。

对于开弦来说, 我们要求旋量场在边界处满足

$$\psi_+^\mu = \pm \psi_-^\mu. \quad (7.580)$$

我们可以不失一般性地在 $\sigma = 0$ 处取

$$\psi_+^\mu(\tau, 0) = \psi_-^\mu(\tau, 0), \quad (7.581)$$

这样在 $\sigma = \pi$ 处将有两种不同的边界条件, 分别称为 R 型边界条件和 NS 型边界条件。如果我们取 R 型边界条件

$$\psi_+^\mu(\tau, \pi) = \psi_-^\mu(\tau, \pi), \quad (7.582)$$

那么旋量场将可以展开为

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \psi_+^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (7.583)$$

如果我们取 NS 型边界条件

$$\psi_+^\mu(\tau, \pi) = -\psi_-^\mu(\tau, \pi), \quad (7.584)$$

那么旋量场将可以展开为

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)}, \quad \psi_+^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \quad (7.585)$$

为了将弦量子化, 我们需要将旋量场视为算符, 并且让它们满足如下的等时对易关系

$$\{\psi_A^\mu(\tau, \sigma), \psi_B^\nu(\tau, \sigma')\} = \pi \eta_{\mu\nu} \delta_{AB} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (7.586)$$

对于 R 型开弦来说, 这等价于

$$\{\hat{d}_m^\mu, \hat{d}_n^\nu\} = \eta_{\mu\nu} \delta_{m+n, 0}. \quad (7.587)$$

而对于 NS 型开弦来说, 这等价于

$$\{\hat{b}_r^\mu, \hat{b}_s^\nu\} = \eta_{\mu\nu} \delta_{r+s, 0}. \quad (7.588)$$

我们要求场 ψ_\pm 为马约拉纳场, 因此个各算符之间将满足如下的关系

$$\hat{d}_{-n}^\mu = \hat{d}_n^{\mu\dagger}, \quad \hat{b}_{-r}^\mu = \hat{b}_r^{\mu\dagger}. \quad (7.589)$$

与玻色弦的情况类似, 两种弦的基态将被各自的湮灭算符湮灭

$$\hat{d}_m^\mu |0\rangle_R = 0, \quad \hat{b}_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0, \quad (7.590)$$

其中 $m > 0, r > 0$ 。我们可以验证, $|0\rangle_{NS}$ 是唯一的, 因此 NS 型开弦的基态所对应的粒子是自旋为 0 的玻色子。而 $|0\rangle_R$ 不是唯一的, 各简并态之间可以由各个 \hat{d}_0^μ 算符相互转化。除去一个常数外, \hat{d}_0^μ 算符的对易关系与 γ 代数是一致的, 因此 R 型开弦的基态态所对应的粒子是自旋为 1/2 的费米子。

对于闭弦来说, 我们同样可以选择两种不同的边界条件。如果我们取 R 型边界条件

$$\psi_\pm^\mu(\tau, \sigma) = \psi_\pm^\mu(\tau, \sigma), \quad (7.591)$$

那么旋量场将可以展开为

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad \psi_+^\mu(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (7.592)$$

如果我们取 NS 型边界条件

$$\psi_{\pm}^{\mu}(\tau, \sigma) = -\psi_{\pm}^{\mu}(\tau, \sigma), \quad (7.593)$$

那么旋量场将可以展开为

$$\psi_{-}^{\mu}(\tau, \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^{\mu} e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad \psi_{+}^{\mu}(\tau, \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \tilde{b}_r^{\mu} e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (7.594)$$

对于闭弦来说, 各算符的量子化及其对易关系与开弦是类似的。闭弦的量子态可以表示为其左手部分和右手部分的直积, 它们可以分别满足 R 型边界条件或者 NS 型边界条件。于是我们可以得到四种不同的闭弦, 分别为 R-R 型弦、NS-NS 型弦、R-NS 型弦以及 NS-R 型弦。

与玻色弦的情况一致, 超限理论中仍然存在范数为负的态, 我们需要将其排除在理论之外。经过计算之后可以得到, 当时空维数 $D = 10$ 时, 物理态是正定的, 上述条件可以得到满足。因此超弦理论只有在 10 维时空中才可能是自洽的, 我们称之为超弦理论的临界维数。同时我们还发现, 在十维超弦理论中, 质量平方为负数的快子态被消除了, 因此超弦理论的真空是稳定的, 玻色弦理论中快子的困难将不复存在。

在以上的讨论中, 为了在弦作用量中引入超对称, 我们将二维世界面推广为了超空间。我们还可以采用另一种做法, 即将二维世界面推广为超空间, 而将弦所在处的 D 维时空推广为超空间。可以证明, 这两种引入超对称的方式是等价的。因此接下来我们将采用如下的超空间坐标来描述弦的位置

$$X^{\mu}(\tau, \sigma), \quad \Theta^{Aa}(\tau, \sigma), \quad (7.595)$$

式中 Θ 为格拉斯曼坐标, $a = 1, \dots, 2^{D/2}$ 为 D 维时空中旋量分量的指标, $A = 1, \dots, \mathcal{N}$ 为超对称生成元的指标。我们可以考虑 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称, 取 $A = 1, 2$ 分别代表两个不同的超对称生成元。在引入了超空间后, 玻色弦的波利亚科夫作用量将被推广为

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha} \cdot \Pi_{\beta} \quad (7.596)$$

式中

$$\Pi_{\alpha}^{\mu} = \partial_{\alpha} X^{\mu} - \bar{\Theta}^A \Gamma^{\mu} \partial_{\alpha} \Theta^A. \quad (7.597)$$

上述作用量在如下的全局超对称变换下将保持不变

$$\delta \Theta^A = \varepsilon^A, \quad \delta X^{\mu} = i \bar{\varepsilon}^A \gamma^{\mu} \Theta^A, \quad (7.598)$$

式中 ε^A 为无限小的格拉斯曼变换参量。

但仅有以上作用量是不够的, 我们还希望超弦的作用量在如下的变换下保持不变

$$\delta X^{\mu} = \bar{\Theta}^A \Gamma^{\mu} \delta \Theta^A = -\delta \bar{\Theta}^A \Gamma^{\mu} \Theta^A, \quad (7.599)$$

这被称为 κ 对称性。为了满足上述对称性, 我们需要在弦作用量中额外添加上一项

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \varepsilon^{\alpha\beta} [-\partial_{\alpha} X^{\mu} (\bar{\Theta}^1 \Gamma_{\mu} \partial_{\beta} \Theta^1 - \bar{\Theta}^2 \Gamma_{\mu} \partial_{\beta} \Theta^2) - \bar{\Theta}^1 \Gamma^{\mu} \partial_{\alpha} \Theta^1 \bar{\Theta}^2 \Gamma_{\mu} \partial_{\beta} \Theta^2]. \quad (7.600)$$

完整的超弦作用量将表示为上述两项之和

$$S = S_1 + S_2, \quad (7.601)$$

这被称为超弦的格林-施瓦兹 (Green-Schwarz, GS) 作用量。

与玻色弦一样, 格林-施瓦兹超弦的格拉斯曼坐标也要满足特定的边界条件。对于开弦来说, 其边界条件可以表示为

$$\Theta^{1a}(0, \tau) = \Theta^{2a}(0, \tau), \quad \Theta^{1a}(\pi, \tau) = \Theta^{2a}(\pi, \tau), \quad (7.602)$$

这被称为 I 型超弦。对于闭弦来说, 其边界条件可以表示为

$$\Theta^{Aa}(0, \tau) = \Theta^{Aa}(\pi, \tau), \quad (7.603)$$

这被称为 II 型超弦。II 型超弦有两种不同的类型，如果我们要求两个格拉斯曼坐标具有不同的手性

$$\Gamma_{11}\Theta^A = (-1)^{A+1}\Theta^A, \quad (7.604)$$

那么这被称为 IIA 型超弦；如果我们要求两个格拉斯曼坐标具有相同的手性

$$\Gamma_{11}\Theta^A = \Theta^A, \quad (7.605)$$

那么这被称为 IIB 型超弦，式中 $\Gamma^{11} = \Gamma^0\Gamma^1 \dots \Gamma^9$ 为 γ^5 矩阵在 10 维时空中的推广。

除了以上的 I 型超弦以及 II 型超弦之外，我们还可以考虑一种杂化弦。由于超弦费米场的左手部分和右手部分是独立的，因此我们可以采用不同的方式来处理它们。我们为弦的右手部分引入马约拉纳-外尔旋量场 ψ_-^μ ，而为弦的左手部分引入 32 个马约拉纳旋量场 λ_+^A ，其中 $A = 1, \dots, 32$ 。这样我们就可以将它的作用量表示为

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_a X^\mu \partial_a X_\mu - 2i\psi_-^\mu \partial_+ \psi_{\mu-} - 2i\lambda_+^A \partial_- \lambda_+^A). \quad (7.606)$$

这个作用量的左手部分的结构为玻色弦，右手部分的结构为超弦，因此它被称为杂化弦。

与玻色弦类似，超弦中同样会存在量子反常。经过仔细的考察后，人们一共发现有五种没有量子反常的超弦理论，它们分别为：

- (1) I 型超弦理论。
- (2) IIA 型超弦理论。
- (3) IIB 型超弦理论。
- (4) SO(32) 杂化弦理论。
- (5) $E_8 \times E_8$ 杂化弦理论。

如果超弦理论是描述真实世界的理论，那么只有这五种超弦是可能的。

超弦理论只能存在于 10 维时空中，然而我们的物理世界毕竟是处于四维时空中的。因此 10 维时空中的六个空间维度必须紧化，蜷曲成微小的流形，而只余下四个宏观展开的时空维度。要想得到我们的物理世界，维度紧化的方式并不是任意的。我们发现，只有紧致流形为里奇平坦（里奇张量处处为零）的卡勒 (Kahler) 流形（只有一个基灵旋量），那么它在低能极限下才能退化为我们的物理世界。我们称这样的流形为卡拉比-丘流形。通过将紧致流形选取为恰当的卡拉比-丘流形，我们将有可能得到四维时空中的粒子物理标准模型，它将能够为标准模型中各个粒子的质量给出一个更加基本的解释。

初看起来，对于一个统一理论来说，五种自洽的超弦理论显得还是有些太多，我们似乎很难说这些理论究竟哪一种是更真实的。不过人们已经提出了 11 维时空中的 M 理论，在一定情况下上述五种超弦理论以及 11 维时空中的超引力均可以通过 M 理论约化得到。这样，所有的弦理论以及超引力就全部得到了统一，它们可以被视为一个更加普遍的理论的不同侧面。对于超弦理论以及 M 理论的进一步探讨已经超出了本讲义的范围，请读者参考弦理论的相关专著。

如果弦理论是真正的终极理论，那么这将是一个完美的结局。它将不仅仅是这份讲义的结尾，更是这个世界的界限。但可惜的是，受到时代的局限，我们并不知道弦理论是否是一个可靠的理论。我们也不知道终极理论究竟是什么样子的，甚至我们连终极理论是否存在都不知道。因此，尽管非常遗憾，但我们只能在这里停下来了。这里已经是我们所能够到达的最远的地方，至于更前方的未知道路，就交由不畏艰险的读者来探索了。

第八章 总结：物理世界的规律

现在，我们将对前面所叙述的内容作一个总结，来看看我们目前所能够达到的最普适的基本规律究竟是什么。

在通常的尺度下，物理世界处于三维空间和一维时间中。质点运动的加速度 a 正比于质点所受的外力 F ，反比于质点的质量 m ，即

$$F = ma, \quad (8.1)$$

上式被称为牛顿第二定律。如果我们考虑的是基本相互作用，那么所有力都可以写成势函数 V 的梯度。由于加速度是位置的二阶导数，因此上述表达式等价于

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (8.2)$$

角标 i 代表不同的自由度， x_i 代表质点的直角坐标，式中不对指标 i 求和。给定 $V(x_i)$ 的表达式，我们就可以写出力学系统的运动方程，进而求解出质点的运动。

我们可以将牛顿第二定律写成等价但是更有启发性的形式。一般来说，微分方程等价于一个泛函极值，这意味着牛顿第二定律的解将会使得一个关于质点运动路径的作用量 S 取极值

$$\delta S[x_i(t)] = 0, \quad (8.3)$$

上式被称为最小作用量原理。将这个作用量泛函写成一个关于时间的积分

$$S = \int dt L(x_i, \dot{x}_i), \quad (8.4)$$

那么最小作用量原理将等价于如下的微分方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (8.5)$$

这个方程被称为拉格朗日方程， L 被称为拉格朗日量，式中 x_i, \dot{x}_i 可以代表各个广义坐标和广义速度 q_i, \dot{q}_i ，它们不一定是直角坐标。如果我们取拉格朗日量为

$$L = T - V, \quad (8.6)$$

即动能 T 与势能 V 的差值，那么拉格朗日方程将给出任意广义坐标 q_i 下的牛顿第二定律。

如果所考虑的系统的运动速度接近于光速，则牛顿力学将不再适用，此时相对论中的洛伦兹变换来取代牛顿力学中的伽利略变换。取自然单位制 $c = 1$ ，我们定义时空四矢量 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ ，在洛伦兹变换下它将按照洛伦兹变换矩阵 Λ^μ_ν 来进行变化

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (8.7)$$

由于光速是不变的，因此在狭义相对论之中，时空间隔

$$\tau^2 = t^2 - \mathbf{x}^2 \quad (8.8)$$

在坐标系变换洛伦兹变换下保持不变，这意味着洛伦兹变换矩阵需要满足

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma, \quad (8.9)$$

式中 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 为平直时空的度规张量。

一般地，我们定义协变矢量 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ ，它按照洛伦兹变换矩阵进行变化

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad (8.10)$$

而相应的逆变矢量为 $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -\mathbf{A})$ ，它按照洛伦兹变换矩阵的逆进行变化

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu. \quad (8.11)$$

类似地，我们可以定义具有任意上下指标的张量。两个张量相乘，得到的新张量的指标数量等于原来两个张量的指标数量之和；而两个张量缩并，得到的新张量则要消去重复的上下指标；如果一个张量没有任何指标，则它将在洛伦兹变换下不变。这样两点之间的时空间隔将表示为

$$\tau^2 = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (8.12)$$

它确实是一个洛伦兹不变量。狭义相对论对理论最基本的要求就是理论要具有洛伦兹不变性，这意味着系统的作用量是一个洛伦兹不变量。在这个要求下，一个自由粒子的作用量就可以表示为

$$S[x^\mu] = -m \int d\tau = -m \int d\lambda \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (8.13)$$

它意味着在一个相对论性自由粒子将沿着时空中的最短路径（直线）来运动。

由于定域性的要求，粒子之间的相互作用要被替换为场。考虑弥散于空间并随时间演化的一系列场 $\phi^a(x^\mu)$ ，一般来说场的拉格朗日密度 \mathcal{L} 可以表示为各场及其偏导数的函数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a). \quad (8.14)$$

场作用量可以表示为拉格朗日密度对全时空的积分

$$S[\phi^a] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a), \quad (8.15)$$

场的真实运动场将使得上述场作用量的泛函取极值，这等价于场的拉格朗日方程

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0, \quad (8.16)$$

式中各量均具满足洛伦兹协变性。特别地，如果我们写出一个无质量矢量场 A^μ 与相对论性粒子 x_i^μ 耦合的作用量

$$S[x_i^\mu, A^\mu] = -m_i \int d\tau_i - \frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + q_i \int A_\mu dx_i^\mu, \quad (8.17)$$

那么它将恰好给出电磁场与物质相互作用的麦克斯韦方程，这里 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 为电磁场张量。在系统的速度远小于光速的情况下，相对论性理论将自动退化为牛顿力学。

在广义相对论中，引力体现为时空的弯曲效应。因此要想得到引力系统的作用规律，我们需要将平直时空中的理论推广到弯曲时空中。为此我们需要将平直空间中的度规 $\eta^{\mu\nu}$ 替换为弯曲空间中的度规 $g^{\mu\nu}$ ，将平直时空中的积分体积元 d^4x 替换为协变体积元 $\sqrt{-g}d^4x$ ，将平直时空中的导数 ∂_μ 替换为协变导数 D_μ ，其中 g 为度规张量的行列式

$$g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (8.18)$$

而协变导数 ∇_μ 作用在张量上的结果为

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\rho, \quad (8.19)$$

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\rho_{\nu\mu} A_\rho, \quad (8.20)$$

对更高阶的张量有类似的结果。

度规场（引力场）本身的演化则由作用量

$$S[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (8.21)$$

来描述，式中 G 为引力常数，而 R 为曲率标量，它与度规张量之间的关系为

$$R = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (8.22)$$

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta}, \quad (8.23)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (8.24)$$

引力系统的总作用量可以表示为度规场（引力场）与物质场两部分的作用量之和，即

$$S = S_g + S_m = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (8.25)$$

式中 \mathcal{L}_m 为物质场的拉格朗日密度。

对上述作用量求物质场的变分，我们就得到了物质场的演化方程

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (8.26)$$

而对上述作用量求度规张量的变分，我们就得到了刻画引力场与物质场相互作用的爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (8.27)$$

式中 $T_{\mu\nu}$ 为物质场的能量动量张量，它的定义为

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m). \quad (8.28)$$

在所考虑的系统尺度十分微小的情况下，牛顿力学同样不再适用，此时支配世界的规律将成为量子力学。在量子力学中，物体的运动将不再遵循一条固定的轨迹，而是同时“经过”所有可能的路径。每一条路径提供一个正比于作用量的复指数函数的贡献，而最终总的振幅等于所有路径贡献之和。因此，在量子力学中，粒子运动的振幅 K 被表示为对所有粒子可能轨道的路径积分

$$K = \int \mathcal{D}[x_i] e^{iS[x_i]/\hbar}, \quad (8.29)$$

这里 \hbar 是普朗克常数， $\mathcal{D}[x]$ 代表路径积分体积元，它意味着对所有可能的路径进行求和， $S[x]$ 代表该条路径所对应的（经典作用量）。我们将对所有可能的路径的求和定义为对粒子在一系列时刻所能够到达的所有位置的多重积分

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{j=1}^{n-1} dx_j e^{iS[x]/\hbar}, \quad (8.30)$$

利用这个公式可以显式地将路径积分计算出来。上述路径积分所给出的几率振幅等价于如下的偏微分方程的传播子

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}_i, t) = \left[-\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V(\mathbf{x}_j, t) \right] \Psi(\mathbf{x}_i, t), \quad (8.31)$$

这个方程被称为薛定谔方程。式中 $\Psi(\mathbf{x}_i, t) = \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)$ 被称为波函数，它包含所有的变量 \mathbf{x}_i 。其物理意义是在时刻 t 时测量得到第一个粒子处于位置 \mathbf{x}_1 ，……，第 n 个粒子处于 \mathbf{x}_n 的概率密度为 $|\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t)|^2$ 。在粒子的作用量远大于普朗克常数的情况下，量子力学将自然地退化为经典力学。

如果我们同时要考虑到量子力学效应和狭义相对论效应，则不仅粒子之间的相互作用要替换为场，甚至连粒子本身都要被替换为场。在这种情况下，系统的作用量将替换为场作用量，而路径积分将对场所有可能的构型求和

$$K = \int \mathcal{D}[\phi^a] e^{iS[\phi^a]}. \quad (8.32)$$

式中已经取自然单位制，即令普朗克常数 $\hbar = 1$ ，并用 ϕ^a 来代替在路径积分中出现的所有可能的场。对于标量场来说，我们可以直接进行上述路径积分的量子化过程；对于旋量场来说，我们应当将旋量场视为满足反对易关系的格拉斯曼数，然后再进行路径积分；对于矢量场来说，我们应当将规范项从路径积分中分离出来，以消除掉由于规范冗余引起的无穷大。

在量子场论之中, 自旋为 0 的粒子由标量场来刻画, 自旋为 1/2 的粒子由旋量场来刻画, 而自旋为 1 的粒子由矢量场来刻画。各种粒子以及相互作用由如下的规范理论刻画

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (8.33)$$

式中

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a, \quad (8.34)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (8.35)$$

T^a 为规范群的生成元, f^{abc} 为规范群的结构常数。它在如下的规范变换下保持不变

$$\psi'(x) = \psi(x) + iT^a \theta^a(x)\psi(x), \quad (8.36)$$

$$A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^a(x) - f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x). \quad (8.37)$$

对于我们真实的世界来说, 完整的拉格朗日密度的规范对称群将表示为 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, 而所有的质量项则是通过对称性自发破缺来得到的。

如果我们考虑引力的量子效应, 那就要对度规场 $g^{\mu\nu}$ 进行路径积分。这样, 系统的振幅可以表示为

$$K = \int \mathcal{D}[g^{\mu\nu}] \mathcal{D}[\phi^a] e^{iS[g^{\mu\nu}, \phi^a]}, \quad (8.38)$$

其中物质场与引力场的作用量为

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (8.39)$$

在线性近似下, 场的拉格朗日密度可以表示为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32\pi G} \mathcal{I} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (8.40)$$

式中

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h - \partial_\lambda h^{\lambda\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu} + \partial^\nu h \partial^\mu h_{\mu\nu} \quad (8.41)$$

为自由微扰引力场的拉格朗日密度, $T^{\mu\nu}$ 为平直时空中物质场的能量动量张量, $h = h^\mu_\mu = h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}$ 。这里引力子可以表示为一个二阶张量场 $h^{\mu\nu}$, 它是一个自旋为 2 的无质量粒子, 用于传递引力相互作用。不过这个理论不可重整化, 因此它只是一个低能有效理论。至于真正的量子引力理论究竟是什么样的, 我们还不清楚。这就是我们到目前为止所能够写下的最普适的物理规律。

由此我们构建起了目前已知的物理理论的主要框架。牛顿第二定律等价于最小作用量原理, 它意味着物体真实的运动将使得一个预先定义好的作用量取极值。如果我们将点粒子扩展为场, 那么我们就得到了场论。如果我们让系统的作用量满足洛伦兹协变性, 那么我们就得到了狭义相对论。如果我们将洛伦兹协变性推广为广义协变性, 那么我们就得到了广义相对论。如果我们将最小作用量原理推广为路径积分, 那么我们就得到了量子理论。而如果我们对场进行路径积分, 那么我们就得到了量子场论。通过对现有理论的进一步拓展, 我们期望能够得到一个自洽的统一理论, 它可以恰当地描述物理世界中的所有现象。

这就是到目前为止理论物理的发展历程。沿着这条路走下去, 我们取得了巨大的成功, 得到了迄今为止最精确也是最普适的物理理论。粒子物理标准模型和宇宙学标准模型几乎包含了人类目前对于基本规律的全部认识, 但它们仍然不是最终的物理理论。物理学的未来究竟是什么样的? 至少在现在看来, 我们能说的还很少。不过唯一可以肯定的是, 目前的物理学绝非物理发展的终点。宇宙之中还存在着大片广阔的未知空间等待着我们探索, 而人类前进的脚步将永远也不会停下。

特别值得强调的是, 了解了基本的物理规律, 并不等于理解了物理世界的一切。量变产生质变, 丰富的物理现象将自发地从复杂的系统之中涌现出来, 从而在各个尺度上形成不同的结构。

如何理解在各个尺度上所展示出的丰富的物理结构，以及如何处理越来越复杂的真实系统，将成为物理学研究中越来越重要的问题。在这一方面，我们的认识还非常有限，这仍然需要未来不同研究方向的物理学家，乃至所有科学工作者的通力合作与不懈探索。

最后，作者想引用爱因斯坦的一句名言来结束这份讲义：“与客观事实相比，我们全部的科学都显得很原始和幼稚。但是，这正是我们所拥有的最宝贵的东西。”¹

¹引自爱因斯坦 1951 年 7 月 9 日致 Hans Muehsam 的信。（见 Einstein Archives 38-408.）

附录 A 约定和记号

本附录介绍讲义中所使用的各种约定和记号。

1. 简略记号

(a) 爱因斯坦求和约定

在未做特殊说明的情况下，凡是在同一项乘积中出现两个相同的指标，即对该重复指标自动求和，而不显式地写出求和号，例如

$$A_i B_{ij} = \sum_i A_i B_{ij}.$$

特别地，如果我们所考虑的是明显协变的理论，则求和应当总是对于一个上指标和一个下指标进行，例如

$$\eta_{\mu\nu} x^\nu = \sum_\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu.$$

如果在不同的相加或相减的项中出现了相同的指标，则不对其进行求和。

我们称求和的指标为哑指标，称未求和的指标为独立指标。对于哑指标来说，不论用哪个字母表示哑指标，都不会影响表达式的含义。对于独立指标来说，它一般可以取遍所有可能的值，且其每一个取值都标记了一个不同的表达式。

(b) 函数自变量的简略记号

假设有一系列以指标 i 标记的变量 x_i ，某函数 f 是这些所有变量的函数，那么在未做特殊说明的情况下，我们将用一个指标来代替这些所有的变量，例如

$$f(x_i) = f(x_1, \dots, x_n)$$

代表函数 f 中包含所有可能的变量 x_1, \dots, x_n 。

在未作说明的情况下，这一自变量的指标是独立于其他所有的哑指标和独立指标的。它们不作为哑指标参与爱因斯坦求和约定，也不作为独立指标标记不同的表达式。

(c) 积分变量的简略记号

如果对定义在三维空间中的函数 $f(\mathbf{x})$ 进行全空间的积分，则我们将它表示为

$$I = \int d^3x f(\mathbf{x}) = \int dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, x_2, x_3).$$

如果对定义在四维时空中的函数 $f(x^\mu)$ 进行全时空的积分，则我们将它表示为

$$I = \int d^4x f(x^\mu) = \int dt d^3x f(t, \mathbf{x}).$$

假设 $f(x_i) = f(x_1, \dots, x_n)$ 是一系列变量 x_1, \dots, x_n 的函数，则我们将对所有这些变量的积分表示为

$$I = \int dx_i f(x_i) = \int dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots, x_n).$$

假设 $f[x_i] = f[x_1, \dots, x_n]$ 是一系列变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 的泛函, 则我们将对所有这些函数进行的泛函积分表示为

$$I = \int \mathcal{D}[x_i] f[x_i] = \int \mathcal{D}[x_1] \dots \mathcal{D}[x_n] f[x_1] \dots f[x_n].$$

注意这里积分变量中的指标代表了所有可能的积分变量。在未作说明的情况下, 这一积分变量的指标是独立于其他所有的哑指标和独立指标的。它们不作为哑指标参与爱因斯坦求和约定, 也不作为独立指标标记不同的表达式。

- (d) 在未明显地写出积分上下限的情况下, 我们默认对积分变量从负无穷到正无穷进行定积分。在容易引起混淆的情况下, 对函数进行的不定积分运算我们将作特殊说明。

2. 单位制

- (a) 在第一章（牛顿力学）、第二章（分析力学）和第五章（量子力学）中除 5.11 节（相对论性量子力学）之外的部分, 我们使用的是国际单位制。
- (b) 在第三章（狭义相对论）、第四章（广义相对论）、第六章（量子场论）、第七章（统一理论）以及 5.11 节（相对论性量子力学）之中, 我们使用的是自然单位制, 即令 $\hbar = c = k_B = \varepsilon_0 = 1$ ¹。这样所有的单位仅剩下能量一项, 我们将之取为电子伏特 eV, 它与国际单位制之间的关系为

$$1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

- (c) 电磁学依各章节的约定使用国际单位制或自然单位制, 而不使用高斯单位制。

- (d) 元电荷 e （电磁耦合常数）是一个正值

$$e > 0,$$

而电子所带电荷量为负值

$$q_e = -e < 0.$$

3. 度规张量

- (a) 我们将弯曲时空中的度规张量记为 $g_{\mu\nu}$, 将平直时空中的度规张量记为 $\eta_{\mu\nu}$ 。
- (b) 在第三章（狭义相对论）、第六章（量子场论）、5.11 节（相对论性量子力学）以及 7.3 节（规范统一理论）中, 我们将平直时空度规张量选取为

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1),$$

固有时选取为

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

- (c) 在第四章（广义相对论）以及第七章（统一场论）除 7.3 节的其余部分, 我们将平直时空度规张量选取为

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

固有时选取为

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

4. γ 矩阵

¹取 $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ 的单位制又被称为亥维赛德-洛伦兹单位制。

(a) γ 矩阵是一组满足如下反对易关系的矩阵

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

我们可以写出 γ 矩阵在四维时空中不同的表示，它们彼此是等价的，仅相差一个么正变换。

(b) 在除了 7.5 节（超对称）之外的所有章节中，我们将采用狄拉克表示。在这个表示下， γ 矩阵可以表示为如下的 4×4 矩阵

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I 和 σ^i 分别为二阶单位矩阵和泡利自旋矩阵

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) 在 7.5 节（超对称）中，我们将采用外尔表示。在这个表象下， γ 矩阵可以表示为如下的 4×4 矩阵

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\sigma^\mu = (I, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (I, -\boldsymbol{\sigma}).$$

(d) 矢量与 γ 矩阵的缩并定义为

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu,$$

γ^5 矩阵定义为

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu.$$

5. 球坐标

(a) 空间球坐标系选取为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}.$$

(b) 空间转动的欧拉角选取为：首先绕原 z 轴逆时针转过 ϕ 角，其次绕第一次转动后的新 x 轴逆时针转过 θ 角，最后绕第二次转动后的新 z 轴逆时针转过 ψ 角。

6. 时空与矢量

(a) “ D 维时空”指的是 1 维时间与 $(D-1)$ 维空间所构成的整体，而“ $n+1$ 维时空”指的是 1 维时间与 n 维空间所构成的整体。比如“四维时空/4 维时空”和“3+1 维时空”，指的都是 1 维时间与 3 维空间所构成的整体。

(b) 在未涉及额外维的情况下，三维空间中矢量的分量用拉丁字母指标 i, j, k 等来标记，而四维时空中矢量的分量则用希腊字母 μ, ν, ρ, σ 等来标记。协变矢量 x^μ 定义为

$$x^\mu = (x^0, x^i),$$

逆变矢量定义为协变矢量与度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的缩并

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

(c) 四维时空中的偏导数定义为

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

弯曲时空中的协变导数定义为

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu A^\rho,$$

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho,$$

式中 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ 为时空的仿射联络。平直时空中阿贝尔规范场（电磁场）的协变导数定义为

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,$$

式中 e 为电磁耦合常数, A_μ 为阿贝尔规范场。非阿贝尔规范场的协变导数定义为

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a,$$

式中 g 为规范场耦合常数, A_μ^a 为非阿贝尔规范场, $\lambda^a/2$ 为规范群生成元的表示。

(d) 四维矢量之间的内积定义为

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu.$$

拉普拉斯算符和达朗贝尔算符定义为

$$\nabla^2 = \partial_i \partial_i, \quad \square = \partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu.$$

(e) 四维时空中的仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 、黎曼曲率张量 $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ 、里奇张量 $R_{\mu\kappa}$ 、曲率标量 R 定义为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}),$$

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda.$$

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\nu\kappa}^\nu.$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu.$$

爱因斯坦方程选取为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

能量动量张量的零分量恒正

$$T_{00} > 0.$$

(f) 四维时空中的列维-奇维塔张量是一个全反对称张量, 它定义为

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} -1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ 奇排列} \\ 1, & \mu\nu\rho\sigma \text{ 偶排列} \\ 0, & \text{else} \end{cases},$$

$$\varepsilon_{\rho\sigma\eta\xi} = g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} g_{\eta\lambda} g_{\xi\kappa} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}.$$

克罗内克张量定义为

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu \neq \nu \\ 0, & \mu = \nu \end{cases}.$$

- (g) 在计及额外维的情况下, 我们考虑一个 $(D+4)$ 维时空, 其中 4 维时空在宏观中展开, 余下的 D 维空间蜷曲在一个很小的尺度之中。我们将这个 D 维时空的坐标记为

$$x^M = (x^\mu, x^m),$$

其中 $M = 0, \dots, D+3$ 为 D 维时空的指标, $\mu = 0, 1, 2, 3$ 为宏观展开的四维时空的坐标, 而 $m = 4, \dots, D+3$ 为额外维的指标。

7. 傅里叶变换

- (a) 一元函数的傅里叶变换及其逆变换定义为

$$F(\omega) = \int dt f(t) e^{-i\omega t},$$

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega t}.$$

- (b) 三维空间中函数的傅里叶变换及其逆变换定义为

$$F(\mathbf{p}) = \int d^3x f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}},$$

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.$$

- (c) 四维时空中函数的傅里叶变换及其逆变换定义为

$$F(p) = \int d^4x f(x) e^{ip\cdot x},$$

$$f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} F(p) e^{-ip\cdot x}.$$

8. 量子场论

- (a) 自由场平面波的展开系数选取为

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} [\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}].$$

- (b) 多粒子态选取为

$$|\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^N \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle.$$

如果式中有 n 个算符是相同的, 那么我们还要在表达式中额外扣除一个对称因子 $1/\sqrt{n!}$ 。

- (c) 产生和湮灭算符的对易关系满足

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

- (d) 含有规范固定项的矢量场拉格朗日密度选取为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2,$$

通常取 $\xi = 1$ 。

- (e) $U(1)_Y$ 群的超荷选取为使得协变导数为

$$D_\mu = \partial_\mu - ig' Y B_\mu,$$

式中 g' 为 $U(1)_Y$ 群的耦合常数。超荷与电荷之间的关系为

$$Q = T_3 + Y,$$

式中 T_3 为弱同位旋。

9. 变换与生成元

(a) 洛伦兹变换选取为

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right),$$

式中 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为变换参数, $J^{\mu\nu}$ 为洛伦兹变换生成元。各生成元之间所满足的对易关系为

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}).$$

(b) 无限小 $SU(N)$ 变换选取为

$$U = \exp(iT^a\theta^a),$$

式中 T^a 为 $SU(N)$ 变换生成元, θ^a 为变换参数。各生成元之间所满足的对易关系为

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c,$$

式中 f^{abc} 为群的结构常数。对于 $SU(3)$ 群来说, 其生成元选取为 $T^a = \lambda^a/2$, λ^a 为盖尔曼矩阵。对于 $SU(2)$ 群来说, 其生成元选取为 $T^a = \sigma^a/2$, σ^a 为泡利矩阵。

10. 各统一理论中其他的约定请参阅相应的章节。

11. 附录 B (计算细节) 中所采用的约定与相应的各章节保持一致。

附录 B 计算细节

本附录给出正文中一些结果的推导与证明，各节中的符号约定与相应章节的约定一致。

B.1 一维谐振子的关联函数

在傅里叶变换下，算符 \hat{A} 将变成对角的

$$A_{12} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{m}{\hbar} (-p^2 + \omega^2) e^{-ip(t_1 - t_2)}. \quad (\text{B.1})$$

因此， \hat{A} 的逆就可以表示为

$$A_{12}^{-1} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\hbar}{m} \frac{1}{-p^2 + \omega^2} e^{-ip(t_1 - t_2)}. \quad (\text{B.2})$$

为简便起见，我们定义传播子 G_{12} 为

$$G_{12} = -iA_{12}^{-1} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\hbar}{m} \frac{i}{p^2 - \omega^2} e^{-ip(t_1 - t_2)}. \quad (\text{B.3})$$

将之与式 (5.61) 相比较，我们需要作如下的变换

$$J \rightarrow J/\hbar, \quad \hat{A}^{-1} \rightarrow i\hat{G}, \quad (\text{B.4})$$

因此谐振子的生成泛函最终可以表示为

$$Z[J] = Z[0] e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y}. \quad (\text{B.5})$$

记泛函导数为 $\delta/\delta J = \delta J$ 。对生成泛函求泛函导数，我们得到

$$\begin{aligned} & \delta J_1 e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \\ &= \left(-\frac{1}{2\hbar^2} \delta_{a1} G_{ab} J_b - \frac{1}{2\hbar^2} J_a G_{ab} \delta_{1b} \right) e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \\ &= \left(-\frac{1}{2\hbar^2} G_{1b} J_b - \frac{1}{2\hbar^2} J_a G_{a1} \right) e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

因为传播子是对称的

$$G(t_1 - t_2) = G(t_2 - t_1), \quad G_{12} = G_{21}, \quad (\text{B.7})$$

所以

$$\delta J_1 e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} = (-J_a G_{a1}/\hbar^2) e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y}. \quad (\text{B.8})$$

两点关联函数可以表示为对生成泛函求两次偏导数

$$\begin{aligned} & \langle x_1 x_2 \rangle \\ &= (-i\hbar \delta J_1) (-i\hbar \delta J_2) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\ &= -\hbar^2 \delta J_1 \delta J_2 \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\ &= -\delta J_1 (-J_a G_{a2}) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\ &= -(-G_{12} + J_a G_{a1} J_b G_{b2}/\hbar^2) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\ &= G_{12}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

这意味着谐振子的两点关联函数 $\langle x_1 x_2 \rangle$ 就是谐振子的经典传播子 $G(t_1 - t_2)$ 。

类似地, 谐振子的四点关联函数可以表示为

$$\begin{aligned}
& \langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle \\
&= (-i\hbar\delta J_1)(-i\hbar\delta J_2)(-i\hbar\delta J_3)(-i\hbar\delta J_4) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\
&= \hbar^4 \delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4 \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\
&= \hbar^2 \delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 (-J_a G_{a4}) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\
&= \hbar^2 \delta J_1 \delta J_2 (-G_{34} + J_a G_{a3} J_b G_{b4} / \hbar^2) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\
&= \delta J_1 (G_{34} J_a G_{a2} + G_{23} J_a G_{a4} + J_a G_{a3} G_{24} \\
&\quad - J_a G_{a3} J_b G_{b4} J_c G_{c2} / \hbar^2) \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\
&= (G_{34} G_{12} + G_{23} G_{14} + G_{13} G_{24} - G_{13} J_a G_{a4} J_b G_{b2} / \hbar^2 \\
&\quad - J_a G_{a3} G_{14} J_c G_{c2} / \hbar^2 - J_a G_{a3} J_b G_{b4} G_{12} / \hbar^2 - G_{34} J_a G_{a2} J_b G_{b1} / \hbar^2 \\
&\quad - G_{23} J_a G_{a4} J_b G_{b1} / \hbar^2 - J_a G_{a3} G_{24} J_b G_{b1} / \hbar^2 \\
&\quad + J_a G_{a3} J_b G_{b4} J_c G_{c2} J_d G_{d1} / \hbar^4) \times \left[e^{-\frac{1}{2\hbar^2} J_x G_{xy} J_y} \right]_{J=0} \\
&= G_{34} G_{12} + G_{23} G_{14} + G_{13} G_{24},
\end{aligned} \tag{B.10}$$

这意味着谐振子的四点关联函数是所有可能的传播子组合之和。对于更高阶的多点关联函数来说, 我们有类似的结果, 证明从略。

B.2 氢原子系统的求解

我们首先给出拉普拉斯算符在球坐标系中的表达式。在直角坐标系中, 拉普拉斯算符定义为

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{B.11}$$

球坐标与直角坐标之间的关系为

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \tag{B.12}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{B.13}$$

利用偏导数的链式法则, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{B.14}$$

对于其他坐标也有类似结果。将对直角坐标的偏导数转换为对球坐标的偏导数, 我们将得到

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \tag{B.15}$$

这就是球坐标系中的拉普拉斯算符。

由于氢原子是球对称的, 因此我们在球坐标系下求解薛定谔方程。假设质子的质量远大于电子的质量, 则在球坐标下, 薛定谔方程将表示为

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V(r) \psi = E \psi.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

利用分离变量法, 我们可以将波函数表示为

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi), \tag{B.17}$$

这样薛定谔方程就可以被分解为径向的部分和角向的部分

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{2m_e r^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = \\ = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

不失一般性地, 我们假设这两部分都等于 $l(l+1)$ (这里 l 可取任意复数), 那么我们将得到如下两个方程

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2m_e r^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1), \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) \right] = -l(l+1). \quad (\text{B.20})$$

首先考虑角向方程的求解。我们进一步进行分离变量

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (\text{B.21})$$

在这种情况下, 角向方程可以分解为两个常微分方程

$$\frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2, \quad (\text{B.23})$$

式中 m^2 为一个常数。

关于 ϕ 的方程是简单的, 其结果为

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}. \quad (\text{B.24})$$

这一方程有单值解要求 m 必须为整数。关于 θ 的方程可以表示为

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0. \quad (\text{B.25})$$

作代换 $x = \cos \theta$, 我们得到

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0, \quad (\text{B.26})$$

这个方程在数学上被称为连带勒让德方程, 其解被称为连带勒让德函数

$$\Theta(x) = P_l^m(x). \quad (\text{B.27})$$

要使得这个方程有收敛的解, l 必须为非负整数, 且 l 和 m 之间需要满足关系 $-l \leq m \leq l$ 。此时连带勒让德函数退化为多项式, 其封闭表达式为

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x), \quad (\text{B.28})$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l. \quad (\text{B.29})$$

接下来我们来求解径向方程。氢原子系统的势能为

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (\text{B.30})$$

因此其径向方程可以表示为

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 R}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = ER. \quad (\text{B.31})$$

我们令

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m_e|E|}}{\hbar}, \quad \rho = \kappa r, \quad \rho_0 = \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa}, \quad (\text{B.32})$$

那么方程变为

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{(\kappa r)^2} \right]. \quad (\text{B.33})$$

我们进一步作代换

$$R(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} u(\rho), \quad (\text{B.34})$$

那么方程将变为

$$\rho \frac{d^2 u}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{du}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]u = 0. \quad (\text{B.35})$$

这个方程在数学上被称为连带拉盖尔 (Laguerre) 方程, 其解为被称为连带拉盖尔函数

$$u(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho). \quad (\text{B.36})$$

要使得这个方程有收敛的解, n 必须为正整数, 且 l 和 n 之间需要满足 $l \leq n$ 。此时连带拉盖尔函数退化为多项式, 其封闭表达式为

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} L_q(x), \quad (\text{B.37})$$

$$L_q(x) = e^x \frac{d^q}{dx^q} (e^{-x} x^q). \quad (\text{B.38})$$

要想满足上述条件, 参数 ρ_0 的取值为

$$\rho_0 = 2n, \quad (\text{B.39})$$

因此系统的本征值为

$$E_{nlm} = - \left[\frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2}. \quad (\text{B.40})$$

将上述所有的结果整理在一起并计算出相应的归一化系数, 我们就得到了氢原子本征态的具体表达式

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{B.41})$$

其中径向和角向的归一化波函数分别为

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{m_e e^2}{2\pi n \epsilon_0 \hbar^2} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-\frac{m_e e^2 r}{4\pi n \epsilon_0 \hbar^2}} \times \left(\frac{m_e e^2 r}{2\pi n \epsilon_0 \hbar^2} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{m_e e^2 r}{2\pi n \epsilon_0 \hbar^2} \right), \quad (\text{B.42})$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{\theta(m)} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \quad (\text{B.43})$$

式中 $\theta(m)$ 为关于 m 的阶跃函数。

B.3 自由标量场的费曼传播子

为了计算标量场的费曼传播子, 我们需要先将传播子的空间部分和时间部分分离开

$$\begin{aligned} G_F(x' - x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x' - x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \int dp^0 \frac{i e^{-ip^0(t' - t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

式中 $E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ 为粒子的能量。注意到奇异性只出现在关于时间部分的积分中, 因此将时间部分计算出来, 我们就成功地处理了传播子中的发散。

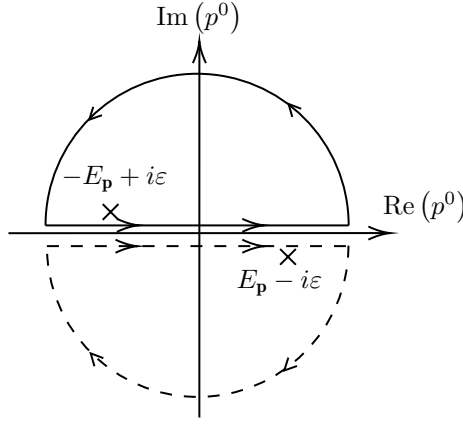


图 B.1: 标量场费曼传播子的积分回路。

接下来我们来计算时间部分的积分

$$I(t' - t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{B.45})$$

我们将 p^0 延拓到整个复平面上, 并选取适当的回路进行积分。留数定理指出, 对于复平面上的某条环路积分, 其积分值等于环路内各极点的留数之和的 $2\pi i$ 倍, 这个定理的证明可以参考复变函数的教材。当 $t' - t > 0$ 时, 我们选取围绕上半平面的积分回路; 当 $t' - t < 0$ 时, 我们选取围绕下半平面的积分回路, 如图 B.1 所示。由于我们将围绕上半平面或者下半平面的回路选取在无穷远处, 因此这一部分的取值实际上趋于零。这样对环路进行的积分实际上就等于实轴上的积分结果

$$\oint dp^0 \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon}, \quad (\text{B.46})$$

在上述表达式中, 我们已经在 $t' - t$ 取不同值处选取了不同的积分路径。

注意到

$$\frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} = \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{1}{p^0 - E_{\mathbf{p}} + i\varepsilon} - \frac{1}{p^0 + E_{\mathbf{p}} - i\varepsilon} \right), \quad (\text{B.47})$$

因此被积函数在两个极点处的留数分别为

$$\text{Res} \left[\frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon}, E_{\mathbf{p}} \right] = \frac{ie^{-iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}}, \quad (\text{B.48})$$

$$\text{Res} \left[\frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon}, -E_{\mathbf{p}} \right] = -\frac{ie^{iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}}. \quad (\text{B.49})$$

注意到绕上半平面的环路积分是逆时针的, 而绕下半平面的环路积分是顺时针的, 因此绕上半平面的环路积分等于留数值的 $2\pi i$ 倍, 而绕下半平面的环路积分等于留数值的 $-2\pi i$ 倍。因此, 环路积分就可以表示为

$$\oint dp^0 \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} = \begin{cases} (2\pi) \frac{e^{iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}}, & t' - t > 0 \\ (2\pi) \frac{e^{-iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}}, & t' - t < 0. \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

这意味着

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} = \begin{cases} (2\pi) \frac{e^{iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}}, & t' - t > 0 \\ (2\pi) \frac{e^{-iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}}, & t' - t < 0. \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

利用 θ 函数, 我们可以将关于时间的积分表示为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{ie^{-ip^0(t'-t)}}{p^{02} - E_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} = \theta(t' - t)(2\pi) \frac{e^{-iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}} + \theta(t - t')(2\pi) \frac{e^{iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}} \quad (\text{B.52})$$

因此费曼传播子将可以表示为

$$\begin{aligned} G_F(x' - x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \left[\theta(t' - t)(2\pi) \frac{e^{-iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}} \right. \\ &\quad \left. + \theta(t - t')(2\pi) \frac{e^{iE_{\mathbf{p}}(t'-t)}}{2E_{\mathbf{p}}} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2E_{\mathbf{p}})} \left[\theta(t' - t)e^{-ip \cdot (x' - x)} + \theta(t - t')e^{-ip \cdot (x' - x)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

式中 $p^\mu p_\mu = m^2$ 。由此可以看到, 积分中的奇异性已经消失, 积分在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限下确实是收敛的。

B.4 LSZ 约化公式

我们将在海森堡绘景下利用正则量子化方法证明标量场的 LSZ 约化公式。对于任意标量场 $\phi(x)$ 来说, 我们有

$$e^{ip \cdot x} \nabla \phi(x) = \nabla (e^{ip \cdot x} \phi(x)) - i\mathbf{p} e^{ip \cdot x} \phi(x). \quad (\text{B.54})$$

如果我们假设在 $x \rightarrow \infty$ 处有 $\phi \rightarrow 0$, 那么对全时空积分后, 积分的表面项将不给出贡献

$$\int d^4x \nabla (e^{ip \cdot x} \phi(x)) = 0. \quad (\text{B.55})$$

因此我们有

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \nabla \phi(x) = -i\mathbf{p} \int d^4x e^{ip \cdot x} \phi(x). \quad (\text{B.56})$$

这样

$$\begin{aligned} &i \int d^4x e^{ip \cdot x} (\square + m^2) \phi(x) \\ &= i \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi(x) \\ &= i \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) \phi(x) \\ &= i \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 + E_{\mathbf{p}}^2) \phi(x). \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

注意到

$$\begin{aligned} &\partial_t [e^{ip \cdot x} (i\partial_t + E_{\mathbf{p}}) \phi(x)] \\ &= iE_{\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} (i\partial_t + E_{\mathbf{p}}) \phi(x) + e^{ip \cdot x} (i\partial_t^2 + E_{\mathbf{p}} \partial_t) \phi(x) \\ &= i e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 + E_{\mathbf{p}}^2) \phi(x), \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

因此我们可以进一步将上述积分表示为

$$\begin{aligned} &i \int d^4x e^{ip \cdot x} (\square + m^2) \phi(x) \\ &= \int dt \partial_t \left[e^{iE_{\mathbf{p}}t} \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (i\partial_t + E_{\mathbf{p}}) \phi(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

先把关于空间的积分计算出来。我们将 ϕ 场展开为各个平面波的叠加

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right]. \quad (\text{B.60})$$

对于一般的相互作用场来说, ϕ 场的各个升降算符 $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ 将与时间有关。将上述展开式代入到积分中, 我们得到

$$\begin{aligned}
& \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_t + E_{\mathbf{p}}) \phi(x) \\
&= \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_t + E_{\mathbf{p}}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik\cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik\cdot x} \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x \left[\left(\frac{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \right) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik\cdot x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \right) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik\cdot x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \right) \hat{a}_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \left(\frac{-E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \right) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \right] \\
&= \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t}.
\end{aligned} \tag{B.61}$$

然后将关于时间的积分计算出来, 我们得到

$$i \int d^4x e^{ip\cdot x} (\partial^2 + m^2) \phi(x) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}) - \hat{a}_{\text{in}}(\mathbf{p})). \tag{B.62}$$

对上式取厄密共轭, 我们可以得到另一个与之相对应的表达式

$$-i \int d^4x e^{-ip\cdot x} (\partial^2 + m^2) \phi(x) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} (\hat{a}_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p}) - \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p})). \tag{B.63}$$

在上述表达式中, $\hat{a}_{\text{in}}(\mathbf{p}) = \hat{a}_{\mathbf{p}}(-\infty)$ 为负无穷时刻粒子态 (初态) 所对应的算符, 而 $\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}) = \hat{a}_{\mathbf{p}}(+\infty)$ 为正无穷时刻粒子态 (末态) 所对应的算符。

现在我们来考察散射矩阵 S 的矩阵元。假设初态有 m 个粒子, 末态有 n 个粒子, 那么 S 矩阵的矩阵元为

$$\begin{aligned}
& \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle = \langle p_{m+1} \dots p_{m+n}, \text{in} | p_1 \dots p_m, \text{out} \rangle \\
&= \prod_{j=1}^{m+n} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_j}} \langle 0 | \hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{m+1}) \dots \hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{m+n}) \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p}_m) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{B.64}$$

这个表达式同样可以写成编时乘积的形式

$$\begin{aligned}
& \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle = \prod_{j=1}^{m+n} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_j}} \\
&\quad \times \langle 0 | T [\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{m+1}) \dots \hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{m+n}) \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p}_m)] | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{B.65}$$

我们可以进一步将编时乘积的表达式改写为

$$\begin{aligned}
& \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle = \prod_{j=1}^{m+n} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_j}} \\
&\quad \times \langle 0 | T \{ [\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{m+1}) - \hat{a}_{\text{in}}(\mathbf{p}_{m+1})] \dots [\hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{p}_{m+n}) - \hat{a}_{\text{in}}(\mathbf{p}_{m+n})] \\
&\quad \times [\hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p}_1) - \hat{a}_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p}_1)] \dots [\hat{a}_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p}_m) - \hat{a}_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p}_m)] \} | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{B.66}$$

在编时乘积后, 额外的 $\hat{a}_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p}_i)$ 将被排列到算符乘积的最左边, 被 $\langle 0 |$ 湮灭掉。而额外的 $\hat{a}_{\text{in}}(\mathbf{p}_i)$ 将被排列到算符乘积的最右边, 被 $|0\rangle$ 湮灭掉。

现在, 将等式右端的算符替换掉, 我们就得到了

$$\begin{aligned}
& \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle = \prod_{j=1}^m \left[i \int d^4x_j e^{-ip_j \cdot x_j} (\partial_j^2 + m^2) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=m+1}^{m+n} \left[i \int d^4x_j e^{ip_j \cdot x_j} (\partial_j^2 + m^2) \right] \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{m+n}) \} | 0 \rangle,
\end{aligned} \tag{B.67}$$

式中 \square_j 代表偏导数只作用在 x_j^μ 上。进一步我们得到

$$\begin{aligned} & \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle \\ &= \prod_{j=1}^m \left[\int d^4 x_j e^{-ip_j \cdot x_j} \right] \prod_{j=m+1}^{m+n} \left[\int d^4 x_j e^{ip_j \cdot x_j} \right] \\ & \quad \times \prod_{j=1}^{m+n} [i(\partial_j^2 + m^2)] \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{m+n}) \} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

定义动量空间关联函数为坐标空间关联函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned} & I(-p_1, \dots, -p_m, p_{m+1}, \dots, p_{m+n}) \\ &= \prod_{j=1}^m \left[\int d^4 x_j e^{-ip_j \cdot x_j} \right] \prod_{j=m+1}^{m+n} \left[\int d^4 x_j e^{ip_j \cdot x_j} \right] \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_{m+n}) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

由于编时乘积的真空期望值与场的关联函数是等价的，因此我们得到

$$\begin{aligned} & \langle p_{m+1} \dots p_{m+n} | \hat{S} | p_1 \dots p_m \rangle \\ &= \prod_{j=1}^{m+n} \left(\frac{i}{p_j^2 - m^2} \right)^{-1} I(-p_1, \dots, -p_m, p_{m+1}, \dots, p_{m+n}). \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

这样我们就得到了结论：散射 S 矩阵的矩阵元就等于截去所有外线贡献的动量空间关联函数。由于我们在推导的时候没有涉及到任何微扰的理论，因此这个结果对于非微扰的过程也是成立的。

B.5 关联函数与编时乘积真空期望值的等价性

考虑两个场算符的乘积

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2), \quad (\text{B.71})$$

我们在这里明显地写出场的算符标记。我们要计算的是它在任意两个初末状态 $|\phi_i, t_i\rangle$ 以及 $|\phi_f, t_f\rangle$ 下的编时乘积期望值

$$\langle \phi_f, t_f | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | \phi_i, t_i \rangle. \quad (\text{B.72})$$

式中 ϕ_i, ϕ_f 代表两个特定的场构型，态矢 $|\phi, t\rangle$ 应当被理解为薛定谔绘景下的态矢。若 $t_i < t_2 < t_1 < t_f$ ，则按照时间演化的顺序，我们要先在计算中插入算符 $\hat{\phi}(x_2)$ ，再插入 $\hat{\phi}(x_1)$ 。在表达式中插入 $t = t_1, t_2$ 时刻的完备基，我们得到

$$\begin{aligned} & \langle \phi_f, t_f | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | \phi_i, t_i \rangle \\ &= \langle \phi_f, t_f | \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) | \phi_i, t_i \rangle \\ &= \int d\phi_1 d\phi_2 \langle \phi_f, t_f | \phi_1, t_1 \rangle \langle \phi_1, t_1 | \hat{\phi}(x_1) | \phi_2, t_2 \rangle \langle \phi_2, t_2 | \hat{\phi}(x_2) | \phi_i, t_i \rangle \\ &= \int d\phi_1 d\phi_2 \phi(x_1) \phi(x_2) \langle \phi_f, t_f | \phi_1, t_1 \rangle \langle \phi_1, t_1 | \phi_2, t_2 \rangle \langle \phi_2, t_2 | \phi_i, t_i \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

式中积分测度 $d\phi_1$ 代表对所有可能的场构型 ϕ_1 进行求和。

上述表达式中包含三个传播子，其中的每一个都可以表示为

$$\langle \phi_n, t_n | \phi_m, t_m \rangle = \int_{\phi(t_m)=\phi_m}^{\phi(t_n)=\phi_n} \mathcal{D}[\phi] \exp \left[i \int_{t_m}^{t_n} dt L \right]. \quad (\text{B.74})$$

注意到三个传播子的路径积分测度以及最终对 ϕ_1, ϕ_2 的两个积分给出了对场从 t_i 到 t_f 的路径积分

$$\int d\phi_1 d\phi_2 \int_{\phi(t_i)=\phi_i}^{\phi(t_2)=\phi_2} \mathcal{D}[\phi] \int_{\phi(t_2)=\phi_2}^{\phi(t_1)=\phi_1} \mathcal{D}[\phi] \int_{\phi(t_1)=\phi_1}^{\phi(t_f)=\phi_f} \mathcal{D}[\phi] = \int_{\phi(t_i)=\phi_i}^{\phi(t_f)=\phi_f} \mathcal{D}[\phi], \quad (\text{B.75})$$

而三个传播子的作用量给出了从 t_i 到 t_f 的总作用量

$$\exp \left[i \int_{t_i}^{t_2} dt L \right] \exp \left[i \int_{t_2}^{t_1} dt L \right] \exp \left[i \int_{t_1}^{t_f} dt L \right] = \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L \right], \quad (\text{B.76})$$

因此这一期望值将可以用路径积分表示为

$$\langle \phi_f, t_f | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)] | \phi_i, t_i \rangle = \int_{\phi(t_i)=\phi_i}^{\phi(t_f)=\phi_f} \mathcal{D}[\phi] \phi(x_1)\phi(x_2) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L \right]. \quad (\text{B.77})$$

而如果 $t_i < t_1 < t_2 < t_f$, 则按照时间演化的顺序, 我们要先在计算中插入算符 $\hat{\phi}(x_1)$, 再插入 $\hat{\phi}(x_2)$, 其余的运算都是相同的。于是我们得到

$$\begin{aligned} & \langle \phi_f, t_f | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)] | \phi_i, t_i \rangle \\ &= \langle \phi_f, t_f | \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_1) | \phi_i, t_i \rangle \\ &= \int d\phi_1 d\phi_2 \langle \phi_f, t_f | \phi_2, t_2 \rangle \langle \phi_2, t_2 | \hat{\phi}(x_2) | \phi_1, t_1 \rangle \langle \phi_1, t_1 | \hat{\phi}(x_1) | \phi_i, t_i \rangle \\ &= \int d\phi_1 d\phi_2 \phi(x_1)\phi(x_2) \langle \phi_f, t_f | \phi_2, t_2 \rangle \langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle \langle \phi_1, t_1 | \phi_i, t_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

在这种情况下, 我们仍然有

$$\langle \phi_f, t_f | T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)] | \phi_i, t_i \rangle = \int_{\phi(t_i)=\phi_i}^{\phi(t_f)=\phi_f} \mathcal{D}[\phi] \phi(x_1)\phi(x_2) \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L \right]. \quad (\text{B.79})$$

这意味着算符插入的顺序将自动保证编时乘积的实现。对于任意多点关联函数有类似的结果, 详细的推导从略。

接下来我们将证明, 在时间趋于无穷的情况下, 只有真空态的贡献是重要的。设 $\tau = it$ 为虚时, 系统的基态能量为零。利用能量表象写出两个量子态间的力学量期望值, 并取 $\tau \rightarrow \infty$ 的极限, 我们将得到

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \phi_f, \tau | T[\hat{\mathcal{O}}] | \phi_i, -\tau \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{mn} \langle \phi_f, \tau | m \rangle \langle m | T[\hat{\mathcal{O}}] | n \rangle \langle n | \phi_i, -\tau \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{mn} \langle \phi_f | e^{-\hat{H}\tau} | m \rangle \langle m | T[\hat{\mathcal{O}}] | n \rangle \langle n | e^{-\hat{H}\tau} | \phi_i \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{mn} \langle \phi_f | m \rangle \langle m | T[\hat{\mathcal{O}}] | n \rangle \langle n | \phi_i \rangle e^{-E_m\tau - E_n\tau} \\ &= \langle \phi_f | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{\mathcal{O}}] | 0 \rangle \langle 0 | \phi_i \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

式中有时间标记的态矢应当被视为薛定谔绘景下的态矢, 而无时间标记的态矢应当被视为海森堡绘景下的态矢。对初末两态之间的内积也有类似的结果

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \phi_f, \tau | \phi_i, -\tau \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_n \langle \phi_f, \tau | n \rangle \langle n | \phi_i, -\tau \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_n \langle \phi_f | e^{-\hat{H}\tau} | n \rangle \langle n | e^{-\hat{H}\tau} | \phi_i \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_n \langle \phi_f | n \rangle \langle n | \phi_i \rangle e^{-2E_n\tau} \\ &= \langle \phi_f | 0 \rangle \langle 0 | \phi_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

于是我们得到

$$\langle 0 | T[\hat{\mathcal{O}}] | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle \phi_f, \tau | T[\hat{\mathcal{O}}] | \phi_1, -\tau \rangle}{\langle \phi_2, \tau | \phi_1, -\tau \rangle} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{O}[\phi] e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}[\phi] e^{-S_E[\phi]}}. \quad (\text{B.82})$$

这一结果与路径积分的初末状态无关。¹

以上是虚时极限下的结果，但只要振幅在时间复平面上没有奇异性，我们就可以将上述结果延拓回实时间，于是我们得到

$$\langle 0|T[\hat{O}]|0\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \phi_f, t|T[\hat{O}]|\phi_1, -t\rangle}{\langle \phi_2, t|\phi_1, -t\rangle} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{O}[\phi] e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]}}. \quad (\text{B.83})$$

这意味着当初末态从负无穷到正无穷时，力学量期望值将与系统的初末状态无关，都等于真空态力学量期望值。

B.6 维克定理

考虑两个场算符的编时乘积。当 $t_1 > t_2$ 时，我们有

$$\begin{aligned} T[\phi_1 \phi_2] &= \phi_1 \phi_2 \\ &= \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^+ \phi_2^- + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- \\ &= \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^+ \phi_2^- + \phi_2^- \phi_1^+ - \phi_2^- \phi_1^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- \\ &= N[\phi_1 \phi_2] + [\phi_1^+, \phi_2^-]. \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

类似地，当 $t_1 < t_2$ 时，我们有

$$T[\phi_1 \phi_2] = N[\phi_1 \phi_2] + [\phi_2^+, \phi_1^-]. \quad (\text{B.85})$$

我们将等式右边第二项定义为 ϕ_1, ϕ_2 两个场算符的收缩

$$T[\phi_1 \phi_2] = N[\phi_1 \phi_2] + \overline{\phi_1 \phi_2}. \quad (\text{B.86})$$

上式实际上就是两个场算符的维克定理。由于收缩就是两个场算符的对易子，因此它实际上是一个关于 x_1, x_2 的函数而非算符。对上式两边取真空期望值，我们将得到

$$\overline{\phi_1 \phi_2} = \langle 0|T[\phi_1 \phi_2]|0\rangle. \quad (\text{B.87})$$

这与我们此前定义的算符收缩是一致的。

接下来我们考虑三个算符的编时乘积。不失一般性地，我们假设 $t_1, t_2 > t_3$ ，此时我们有

$$\begin{aligned} T[\phi_1 \phi_2 \phi_3] &= T[\phi_1 \phi_2] \phi_3 \\ &= (N[\phi_1 \phi_2] + \overline{\phi_1 \phi_2}) \phi_3 \\ &= N[\phi_1 \phi_2] \phi_3 + \overline{\phi_1 \phi_2} \phi_3. \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

将正规乘积项展开为正频部分与负频部分的乘积，我们得到

$$\begin{aligned} &N[\phi_1 \phi_2] \phi_3 \\ &= (\phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_2^- \phi_1^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^-) \phi_3 \\ &= \phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^+ + \phi_2^- \phi_1^+ \phi_3^+ + \phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^+ + \phi_1^- \phi_2^- \phi_3^+ \\ &\quad + \phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^- + \phi_2^- \phi_1^+ \phi_3^- + \phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^- + \phi_1^- \phi_2^- \phi_3^-. \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

上式中有 5 项已排成了正规乘积，将其余项进一步交换算符乘积顺序，结果为

$$\begin{aligned} \phi_2^- \phi_1^+ \phi_3^- &= \phi_2^- (\phi_1^+ \phi_3^- + \phi_3^- \phi_1^+ - \phi_3^- \phi_1^+) \\ &= \phi_2^- \phi_3^- \phi_1^+ + \phi_2^+ \phi_1^+ \phi_3^-, \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

$$\phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^- = \phi_1^- \phi_3^- \phi_2^+ + \phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^-, \quad (\text{B.91})$$

¹在有限温度场论中，虚时 τ 对应于温度的倒数。 $\tau \rightarrow \infty$ 的极限相当于对场取零温极限，因此只有基态的贡献不为零。如果我们考虑有限温度的情况，则应当考虑激发态的贡献。

$$\begin{aligned}
\phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^- &= \phi_1^+ \phi_3^- \phi_2^+ + \phi_1^+ \overline{\phi_2 \phi_3} \\
&= \phi_3^- \phi_1^+ \phi_2^+ + \overline{\phi_1 \phi_3} \phi_2^+ + \phi_1^+ \overline{\phi_2 \phi_3}.
\end{aligned} \tag{B.92}$$

至此我们已将所有算符均排成了正规乘积

$$N[\phi_1 \phi_2] \phi_3 = N[\phi_1 \phi_2 \phi_3] + \phi_2 \overline{\phi_1 \phi_3} + \phi_1 \overline{\phi_2 \phi_3}. \tag{B.93}$$

由于一个算符的正规乘积就是它自身，因此我们得到

$$\begin{aligned}
T[\phi_1 \phi_2 \phi_3] &= N[\phi_1 \phi_2 \phi_3] + \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_3] + \overline{\phi_1 \phi_3} N[\phi_2] + \overline{\phi_2 \phi_3} N[\phi_1] \\
&= N[\phi_1 \phi_2 \phi_3] + N[\overline{\phi_1 \phi_2} \phi_3] + N[\overline{\phi_1 \phi_3} \phi_2] + N[\overline{\phi_2 \phi_3} \phi_1].
\end{aligned} \tag{B.94}$$

这就是三个场算符的维克定理。类似地我们可以证明任意多个场算符的维克定理，详细的推导从略。

B.7 圈积分的正规化引理

在计算标量场的圈积分时，我们利用了三个引理，下面将逐一给出证明。

引理 1：费曼参数化公式

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 \frac{dz_1 \dots dz_n}{(a_1 z_1 + \dots + a_n z_n)^n} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n z_i\right), \tag{B.95}$$

式中积分对所有变量从 0 到 1 进行。

证明：注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{dz_1 dz_2 \delta(1 - z_1 - z_2)}{(a_1 z_1 + a_2 z_2)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dz_1}{[a_1 z_1 + a_2(1 - z_1)]^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dz_1}{[(a_1 - a_2)z_1 + a_2]^2} \\
&= \frac{1}{a_1 - a_2} \frac{-1}{(a_1 - a_2)z_1 + a_2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{a_1 a_2},
\end{aligned} \tag{B.96}$$

因此当 $n = 2$ 时，费曼参数化公式是成立的。

为了计算 $n = 3$ 的费曼参数化公式，我们将式 (B.96) 两边对 a_1 微分，结果为

$$\frac{1}{a_1^2 a_2} = 2 \int_0^1 \frac{z_1 dz_1 dz_2 \delta(1 - z_1 - z_2)}{(a_1 z_1 + a_2 z_2)^3}. \tag{B.97}$$

另外将式 (B.96) 两边同时乘以 a_3 ，我们得到

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{1}{a_3} \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2 \delta(1 - z_1 - z_2)}{(a_1 z_1 + a_2 z_2)^2}. \tag{B.98}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_1 a_2 a_3} \\
&= \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2 \delta(1 - z_1 - z_2)}{(a_1 z_1 + a_2 z_2)^2} \frac{1}{a_3} \\
&= 2 \int_0^1 \frac{y_2 dy_1 dy_2 \delta(1 - y_1 - y_2)}{[y_1 a_3 + y_2(a_1 z_1 + a_2 z_2)]^3} dz_1 dz_2 \delta(1 - z_1 - z_2) \\
&= 2 \int_0^1 \frac{(1 - y_1) dy_1 dz_1 dz_2 \delta(1 - z_1 - z_2)}{[y_1 a_3 + (1 - y_1)(a_1 z_1 + a_2 z_2)]^3}
\end{aligned} \tag{B.99}$$

定义

$$(1 - y_1)z_1 = x_1, \quad (1 - y_1)z_2 = x_2, \quad (\text{B.100})$$

则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{(1 - y_1) dy_1 dx_1 dx_2 \delta\left(\frac{1 - y_1 - x_1 - x_2}{1 - y_1}\right)}{(y_1 a_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2)^3} \left(\frac{1}{1 - y_1}\right)^2 \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dy_1 dx_1 dx_2 \delta(1 - y_1 - x_1 - x_2)}{(y_1 a_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2)^3} \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

即

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = 2 \int_0^1 \frac{dz_1 dz_2 dz_3 \delta(1 - z_1 - z_2 - z_3)}{(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^3}. \quad (\text{B.102})$$

这就是 $n = 3$ 的费曼参数化公式。类似地，我们可以证明任意多项的费曼参数化公式。

更一般地，我们可以证明如下的结果

$$\frac{1}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n}} = \frac{\Gamma(m_1 + \cdots + m_n)}{\Gamma(m_1) \cdots \Gamma(m_n)} \int_0^1 dz_1 \cdots dz_n \delta\left(1 - \sum_i z_i\right) \frac{\prod_i z_i^{m_i - 1}}{[\sum_i z_i a_i]^{\sum m_i}}. \quad (\text{B.103})$$

详细的推导过程从略。

引理 2：维克转动

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2m}}{(k^2 - D + i\varepsilon)^n} = (-1)^{m-n} i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^{2m}}{(l^2 + D)^n}, \quad (\text{B.104})$$

式中 d 为时空维数， k 为闵可夫斯基时空中的矢量，满足 $k^2 = k^{02} - \mathbf{k}^2$ ； l 为欧几里得空间中的矢量，满足 $l^2 = l^{02} + \mathbf{l}^2$ 。上述公式在时空维数 d 维非整数的情况下也是成立的，只不过我们应当在解析延拓的意义下理解这些结果

证明：我们首先将上述积分分解为空间部分与时间部分的积分

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2m}}{(k^2 - D + i\varepsilon)^n} = \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n}. \quad (\text{B.105})$$

为了计算时间部分的积分，我们将 k_0 延拓到整个复平面上，并选取图 B.2 所示的积分回路。由于 $+i\varepsilon$ 项的存在，不论是 $D > 0$ 还是 $D < 0$ ，被积函数的极点总是落在 k_0 复平面的第二或者第四象限中，因此上述回路中不包含任何的极点。根据留数定理，整个回路积分为零

$$\oint \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n} = 0. \quad (\text{B.106})$$

注意到在 $k^0 \rightarrow \infty$ 的极限下有

$$\frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n} \sim (k^0)^{2(m-n)}, \quad (\text{B.107})$$

而大圆部分的积分路径长度正比于 k^0 ，因此只要满足 $n - m > 1/2$ ，则无穷远处的大圆积分将总是为零的。² 因此沿实轴正向的积分和沿虚轴负向的积分之和为零

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n} + \int_{+\infty}^{-i\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n} = 0, \quad (\text{B.108})$$

换句话说就是沿实轴正向的积分与沿虚轴正向的积分相等

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n}. \quad (\text{B.109})$$

²更一般地，若函数 $f(z)$ 满足在无穷远处 $zf(z)$ 一致收敛于零，则关于 $f(z)$ 的大圆积分将恒为零。

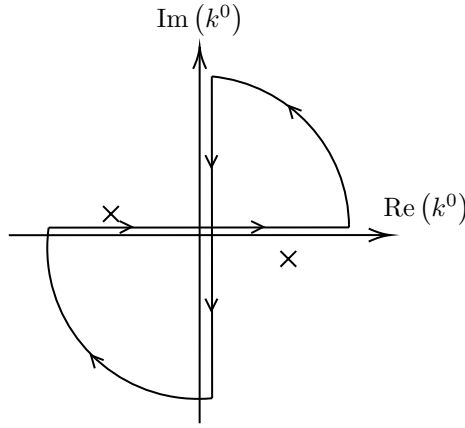


图 B.2: 维克转动的积分回路。

作代换 $k^0 \rightarrow il^0, \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{l}$, 则积分变为

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2m}}{(k^2 - D + i\varepsilon)^n} \\
 &= \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{(k^{02} - \mathbf{k}^2)^m}{(k^{02} - \mathbf{k}^2 - D + i\varepsilon)^n} \\
 &= i \int \frac{d^{d-1} l}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl^0}{2\pi} \frac{(-l^{02} - \mathbf{l}^2)^m}{(-l^{02} - \mathbf{l}^2 - D + i\varepsilon)^n}.
 \end{aligned} \tag{B.110}$$

定义 $l^2 = l^{02} + \mathbf{l}^2$, 我们得到

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2m}}{(k^2 - D + i\varepsilon)^n} \\
 &= i \int \frac{d^{d-1} l}{(2\pi)^{d-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl^0}{2\pi} \frac{(-l^2)^m}{(-l^2 - D + i\varepsilon)^n} \\
 &= (-1)^{m-n} i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^{2m}}{(l^2 + D - i\varepsilon)^n} \\
 &= (-1)^{m-n} i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^{2m}}{(l^2 + D)^n}.
 \end{aligned} \tag{B.111}$$

这样我们就证明了维克转动的结果。

引理 3: 高维积分公式

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^a}{(l^2 + D)^b} = \frac{D^{-(b-a-d/2)}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(b-a-d/2)\Gamma(a+d/2)}{\Gamma(b)\Gamma(d/2)}. \tag{B.112}$$

式中 l 为 d 维欧几里得空间中的矢量, 满足 $l^2 = l_i l_i$ 。上述公式在时空维数 d 维非整数的情况下也是成立的, 只不过我们应当在解析延拓的意义下理解这些结果。

证明: 我们先计算 d 维空间中的立体角。

考虑积分

$$I_d = \int d^d l e^{-l_i l_i}. \tag{B.113}$$

一方面, 我们可以逐个变量将积分计算出来

$$I_d = \prod_{i=1}^d \int dl_i e^{-l_i^2} = \pi^{d/2}. \tag{B.114}$$

另一方面, 我们可以在球坐标中计算这个积分

$$I_d = \Omega_d \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{\Omega_d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right). \tag{B.115}$$

将两个结果进行比较, 我们得到

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (\text{B.116})$$

这就是 d 维立体角的结果。

接下来我们将高维积分公式的角度部分积去, 并作代换

$$r = \sqrt{Dy}, \quad z = \frac{1}{y+1}, \quad (\text{B.117})$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^a}{(l^2 + D)^b} \\ &= \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dr \frac{r^{2a+d-1}}{(r^2 + D)^b} \\ &= \frac{D^{-(b-a-d/2)}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty dy y^{a+d/2-1} (1+y)^{-b} \\ &= \frac{D^{-(b-a-d/2)}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^1 dz (1-z)^{a+d/2-1} z^{b-a-d/2-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

根据 B 函数与 Γ 函数之间的关系

$$B(p, q) = \int_0^1 dx x^{p-1} (1-x)^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (\text{B.119})$$

将上述关于 z 的积分计算出来, 我们就得到了

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^a}{(l^2 + D)^b} = \frac{D^{-(b-a-d/2)}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(b-a-d/2)\Gamma(a+d/2)}{\Gamma(b)\Gamma(d/2)}. \quad (\text{B.120})$$

这样我们就证明了上述高维积分公式。

B.8 微分散射截面公式

考虑一个 $2 \rightarrow n$ 散射过程

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + \dots + p_{n+2}, \quad (\text{B.121})$$

它描述了两个动量分别为 p_1, p_2 的粒子, 散射后形成了 n 个动量分别为 p_3, \dots, p_{n+2} 的粒子的过程。根据微分散射截面的定义, 我们有

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} dP, \quad (\text{B.122})$$

式中 V 为体积, T 为时间, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 为粒子的两入射粒子的速度, dP 为散射的概率

$$dP = \frac{|\langle f | \hat{S} | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} d\Pi, \quad (\text{B.123})$$

而 $d\Pi$ 为末态相空间体积元

$$d\Pi = \prod_{\text{final } j} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_j. \quad (\text{B.124})$$

若末态有 m 个全同粒子, 则应当在相空间中额外扣除全同因子 $m!$ 。给出公式中各项的具体形式, 我们就可以求出微分散射截面的表达式。

初末态的归一化条件分别为

$$\langle i | i \rangle = (2E_1 V)(2E_2 V), \quad \langle f | f \rangle = \prod_{\text{final } j} (2E_j V). \quad (\text{B.125})$$

根据散射振幅的定义

$$\langle f | \hat{S} | i \rangle = \langle f | i \rangle + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) \mathcal{M}, \quad (\text{B.126})$$

若初态与末态不同, 则我们有

$$\begin{aligned} |\langle f | \hat{S} | i \rangle|^2 &= (2\pi)^8 \delta^{(4)}(\Sigma p) \delta^{(4)}(0) |\mathcal{M}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p) TV |\mathcal{M}|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.127})$$

式中

$$\delta^{(4)}(\Sigma p) = \delta^{(4)} \left(\sum_f p_f^\mu - \sum_i p_i^\mu \right) \quad (\text{B.128})$$

为入射与出射粒子的四动量守恒条件。将上述表达式代入到微分散射截面的公式中, 我们得到

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 d\Pi, \quad (\text{B.129})$$

其中

$$d\Pi = \prod_{\text{final } j} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_j}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p), \quad (\text{B.130})$$

是一个在洛伦兹变换下不变的末态体积元, 若末态有 m 个全同粒子, 则应当在相空间中额外扣除全同因子 $1/m!$ 。如果末态只有两个粒子, 那么在质心系中我们有

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4, \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E_{\text{CM}}, \quad (\text{B.131})$$

式中 E_{CM} 为质心系能量。令

$$p_i = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|, \quad p_f = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|, \quad (\text{B.132})$$

$$E_3 = \sqrt{m_3^2 + p_f^2}, \quad E_4 = \sqrt{m_4^2 + p_f^2}. \quad (\text{B.133})$$

因此体积元可以表示为

$$d\Pi = \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p). \quad (\text{B.134})$$

将 \mathbf{p}_4 积掉, 我们得到

$$d\Pi = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int dp_f \frac{p_f^2}{E_3} \frac{1}{E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_{\text{CM}}), \quad (\text{B.135})$$

作代换

$$x(p_f) = E_3(p_f) + E_4(p_f) - E_{\text{CM}}, \quad (\text{B.136})$$

注意到

$$\frac{dx}{dp_f} = \frac{d}{dp_f} (E_3 + E_4 - E_{\text{CM}}) = \frac{p_f}{E_3} + \frac{p_f}{E_4} = \frac{E_3 + E_4}{E_3 E_4} p_f, \quad (\text{B.137})$$

因此体积元可以表示为

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int_{m_3+m_4-E_{\text{CM}}}^{\infty} dx \frac{p_f}{E_{\text{CM}}} \delta(x) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{\text{CM}}} \theta(E_{\text{CM}} - m_3 - m_4). \end{aligned} \quad (\text{B.138})$$

将上述表达式代入到微分散射振幅的表达式中, 我们得到

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{\text{CM}}} \theta(E_{\text{CM}} - m_3 - m_4). \end{aligned} \quad (\text{B.139})$$

注意到

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right| = p_i \frac{E_{\text{CM}}}{E_1 E_2}, \quad (\text{B.140})$$

因此质心系中微分散射振幅的表达式可以表示为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{CM}}} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}|^2 \theta(E_{\text{CM}} - m_3 - m_4). \quad (\text{B.141})$$

特别地，如果散射前后所有粒子的质量都相等，则 $p_f = p_i$ ，微分散射振幅的表达式可以进一步简化为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}} |\mathcal{M}|^2, \quad (\text{B.142})$$

这就是最终的结果。

B.9 卢瑟福散射

卢瑟福散射的振幅为

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{t} \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) \bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_2), \quad (\text{B.143})$$

式中 $t = (p_1 - p_3)^2$ 。对上式两边取厄密共轭，我们得到

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{e^2}{t} \bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma^\nu u(\mathbf{p}_4) \bar{u}(\mathbf{p}_1) \gamma_\nu u(\mathbf{p}_3), \quad (\text{B.144})$$

因此散射振幅的模平方可以表示为

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{t^2} [\bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1)] [\bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_2)] \\ &\quad \times [\bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma^\nu u(\mathbf{p}_4)] [\bar{u}(\mathbf{p}_1) \gamma_\nu u(\mathbf{p}_3)] \\ &= \frac{e^4}{t^2} [\bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1)] [\bar{u}(\mathbf{p}_1) \gamma^\nu u(\mathbf{p}_3)] \\ &\quad \times [\bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_\nu u(\mathbf{p}_4)] [\bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_2)], \end{aligned} \quad (\text{B.145})$$

式中我们已经略去了自旋极化的指标。

可以验证旋量场对自旋求和的结果为

$$\sum_s u_a^s(\mathbf{p}) \bar{u}_b^s(\mathbf{p}) = (\not{p} + m)_{ab}, \quad (\text{B.146})$$

$$\sum_s v_a^s(\mathbf{p}) \bar{v}_b^s(\mathbf{p}) = (\not{p} - m)_{ab}, \quad (\text{B.147})$$

因此我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{s,s'} [\bar{u}_a^s(\mathbf{p}_3) \gamma_{ab}^\mu u_b^{s'}(\mathbf{p}_1)] [\bar{u}_c^{s'}(\mathbf{p}_1) \gamma_{cd}^\nu u^s(\mathbf{p}_3)_d] \\ &= \sum_s [\bar{u}_a^s(\mathbf{p}_3) \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_1 + m)_{bc} \gamma_{cd}^\nu u^s(\mathbf{p}_3)_e] \\ &= (\not{p}_3 + m)_{ab} \gamma_{bc}^\mu (\not{p}_1 + m)_{cd} \gamma_{da}^\nu \\ &= \text{Tr}[(\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu] \\ &= \text{Tr}[(\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m) \gamma^\mu], \end{aligned} \quad (\text{B.148})$$

式中我们已明显地写出了旋量的指标 a, b, c 等。类似地我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{s,s'} [\bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_\nu u(\mathbf{p}_4)] [\bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_2)] \\ &= \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_p) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_p) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (\text{B.149})$$

注意到基矢 $u(\mathbf{p}_1), \bar{u}(\mathbf{p}_3)$ 实际上是质量为 m_e 的电子场的基矢，而 $u(\mathbf{p}_2), \bar{u}(\mathbf{p}_4)$ 实际上是质量为 m_p 的质子场的基矢。因此对初态自旋求和，对末态自旋求平均之后，振幅的模平方将可以表示为

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4t^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_3 + m_e) \gamma^\mu] \\ &\quad \times \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_p) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_p) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (\text{B.150})$$

根据 γ 矩阵的恒等式

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{B.151})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}), \quad (\text{B.152})$$

我们可以将振幅中的求迹计算出来

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m_e)\gamma^\mu] \\ &= 4p_{1\rho}p_{3\sigma}\text{Tr}(\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu) + m_e^2\text{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= 4p_{1\rho}p_{3\sigma}(\eta^{\rho\nu}\eta^{\sigma\mu} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\nu\mu} + \eta^{\rho\mu}\eta^{\nu\sigma}) + 4m_e^2\eta^{\nu\mu} \\ &= 4(p_1^\nu p_3^\mu + p_1^\mu p_3^\nu - p_1 \cdot p_3 \eta^{\nu\mu} + m_e^2 \eta^{\nu\mu}). \end{aligned} \quad (\text{B.153})$$

类似地我们有

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_p)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_p)\gamma_\nu] \\ &= 4(p_{4\mu}p_{2\nu} + p_{4\nu}p_{2\mu} - p_2 \cdot p_4 \eta_{\mu\nu} + m_p^2 \eta_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{B.154})$$

注意到 $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 4$ ，因此卢瑟福散射振幅的模平方可以表示为

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{4e^4}{t^2} (p_1^\nu p_3^\mu + p_1^\mu p_3^\nu - p_1 \cdot p_3 \eta^{\nu\mu} + m_e^2 \eta^{\nu\mu}) \\ &\quad \times (p_{4\mu}p_{2\nu} + p_{4\nu}p_{2\mu} - p_2 \cdot p_4 \eta_{\mu\nu} + m_p^2 \eta_{\mu\nu}) \\ &= \frac{8e^4}{t^2} (p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34} - m_p^2 p_{13} - m_e^2 p_{24} + 2m_e^2 m_p^2), \end{aligned} \quad (\text{B.155})$$

式中 $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ 。我们还可以利用曼德尔施塔姆变量将上述振幅表示为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} [u^2 + s^2 + 4t(m_e^2 + m_p^2) - 2(m_e^2 + m_p^2)^2]. \quad (\text{B.156})$$

假设 $m_p \gg m_e$ ，并且质子在碰撞前和碰撞后都是静止的，那么我们可以在质心系中写出入射动量和出射动量的值

$$p_1^\mu = (E, \mathbf{p}_i), \quad p_2^\mu = (m_p, 0), \quad p_3^\mu = (E, \mathbf{p}_f), \quad p_4^\mu = (m_p, 0). \quad (\text{B.157})$$

并且初末态动量的点积满足

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f = p^2 \cos \theta = v^2 E^2 \cos \theta, \quad (\text{B.158})$$

其中

$$p = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|, \quad v = \frac{p}{E} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E^2}}. \quad (\text{B.159})$$

在 m_e/m_p 的领先阶，我们有

$$p_{13} = E^2(1 - v^2 \cos \theta), \quad p_{24} = m_p^2, \quad (\text{B.160})$$

$$p_{12} = p_{23} = p_{34} = p_{14} = Em_p, \quad (\text{B.161})$$

因此

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{t^2} [p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34} - m_p^2 p_{13} - m_e^2 p_{24} + 2m_e^2 m_p^2] \\ &= \frac{8e^4}{4v^4 E^4 (1 - \cos \theta)^2} [E^2 m_p^2 + E^2 m_p^2 v^2 \cos \theta + m_e^2 m_p^2] \\ &= \frac{2e^4 m_p^2}{v^4 E^2 (1 - \cos \theta)^2} [2 - v^2 (1 - \cos \theta)] \\ &= \frac{e^4 m_p^2}{v^4 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.162})$$

将这个表达式代入到微分散射截面中，我们得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 v^2 p^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [1 - v^2 \sin^2 \theta], \quad (\text{B.163})$$

这一结果被称为莫特 (Mott) 公式。如果我们进一步假设 $v \ll 1$ (即电子的速度远小于光速), 则 $v \sim p/m_e$, 因此上式可以进一步简化为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4 m_e^2}{64\pi^2 p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (\text{B.164})$$

这就是卢瑟福散射公式。

B.10 瓦德-高桥恒等式

我们考虑如下的旋量场两点关联函数

$$\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{iS} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2). \quad (\text{B.165})$$

在局域相位变换下

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \bar{\psi}(x), \quad (\text{B.166})$$

拉格朗日密度的变化为

$$i\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) \rightarrow i\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\alpha(x), \quad (\text{B.167})$$

同时

$$\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rightarrow e^{-i\alpha(x_1)} e^{i\alpha(x_2)} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \quad (\text{B.168})$$

由于路径积分要对所有可能的旋量场 $\psi, \bar{\psi}$ 求和, 因此这一变量代换并不会改变路径积分的结果。

由于相位变换并不改变积分测度, 因此将两点关联函数展开至 $\alpha(x)$ 一阶, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{iS} \left[i \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \alpha(x) \right] \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \\ &\quad + \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{iS} [-i\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) + i\alpha(x_2) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)], \end{aligned} \quad (\text{B.169})$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\int d^4x \alpha(x) i\partial_\mu \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{iS} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \\ &= \int d^4x \alpha(x) [-i\delta(x-x_1) + i\delta(x-x_2)] \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{iS} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2). \end{aligned} \quad (\text{B.170})$$

由于上述表达式对任意 $\alpha(x)$ 都成立, 因此我们得到

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \langle j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \\ &= -e\delta(x-x_1) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle + e\delta(x-x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.171})$$

式中

$$j^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (\text{B.172})$$

为量子电动力学中的守恒流。

在上式两边乘以

$$\int d^4x e^{-ik \cdot x} \int d^4x_1 e^{+iq \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{-ip \cdot x_2}, \quad (\text{B.173})$$

并进行傅里叶变换, 我们可以将施温格-戴森方程中的多点关联函数转变为相应的散射振幅。于是我们得到

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p; q) = e\mathcal{M}_0(p; q-k) - e\mathcal{M}_0(p+k; q). \quad (\text{B.174})$$

这一结果被称为瓦德-高桥恒等式。在上述表达式中, j^μ 代表一个光子流, k 为所考虑的入射光子, p 为入射电子, q 为出射电子, \mathcal{M}^μ 为包含光子的完整散射振幅, \mathcal{M}_0 为除去光子后余下过程的振幅。上述公式可以利用费曼图表示出来, 如图 B.3 所示。特别地, 我们记 $\mathcal{M}^\mu(k; p; q)$ 为顶点

积分 $\Gamma^\mu(p, q)$, 记 $\mathcal{M}_0(p; q - k)$ 为电子自能 $\Sigma(p)$ 。在瓦德-高桥恒等式两边同时除以 $k_\mu = q_\mu - p_\mu$, 并取 $q \rightarrow p$ 的极限, 我们得到

$$\Gamma(p, p) = -\lim_{q \rightarrow p} \frac{\Sigma(p) - \Sigma(q)}{p_\mu - q_\mu} = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p), \quad (\text{B.175})$$

这一结果被称为瓦德恒等式。

更一般地, 对于具有多个费米子参与的散射过程来说, 我们可以证明

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = e \sum_i [\mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_i - k, \dots, q_n) - \mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_i + k, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)]. \quad (\text{B.176})$$

式中各 p 为入射电子动量, 各 q 为出射电子动量。这一结果是非微扰的, 因此对于任意阶的圈图来说都是成立的。从上述推导中我们也可以看到, 瓦德-高桥恒与量子电动力学中的规范对称性及流守恒密切相关。

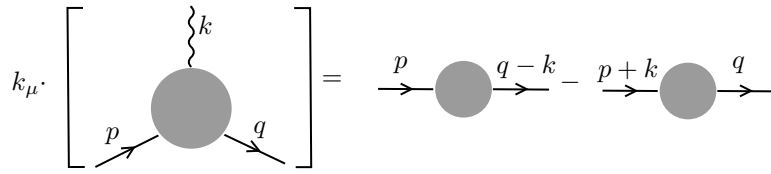


图 B.3: 瓦德-高桥恒等式的费曼图表示。

为简便起见, 我们接下来将所有的入射粒子和出射粒子的动量均记为 p_i 。我们可以证明, 若所有外线粒子均满足质壳条件 $p_i^2 = m_i^2$, 则对于一个具有动量为 k 的光子外线参与的洛伦兹不变振幅 $\mathcal{M}(k) = \varepsilon_\mu(k) \mathcal{M}^\mu(k)$ 来说, 总有

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (\text{B.177})$$

为证明这一点, 我们注意到根据 LSZ 约化公式, 散射振幅 \mathcal{M} 可以表示为关联函数 G 截去各外线传播子 $S(p_i)$ 的形式。因此, 我们可以将瓦德-高桥恒等式表示为

$$\begin{aligned} k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1, \dots, p_n) &= k_\mu G^\mu(k; p_1, \dots, p_n) / \prod_i S(p_i) \\ &= e \sum_i \pm G(p_1, \dots, p_i \mp k, \dots, p_n) / \prod_i S(p_i), \end{aligned} \quad (\text{B.178})$$

式中各 $S(p_i)$ 为除去动量为 k 的光子传播子之外的所有外线传播子, 且已计及圈图修正。现在考虑质壳条件 $p_i^2 = m_i^2$, 对于等式右端的第 i 项来说, 关联函数 G 的第 i 条外线的解析性质为

$$\lim_{p_i^2 = m_i^2} G(p_1, \dots, p_i \mp k, \dots, p_n) = \frac{1}{(p_i \mp k)^2 - m_i^2}, \quad (\text{B.179})$$

而传播子 $S^{-1}(p_i)$ 的解析性质为

$$\lim_{p_i^2 = m_i^2} S^{-1}(p_i) = p_i^2 - m_i^2 = 0, \quad (\text{B.180})$$

这一零点无法被关联函数所消除。因此若质壳条件得到满足, 则等式右端的所有项都将等于零, 于是我们得到

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (\text{B.181})$$

更一般地, 若散射振幅中有多条光子外线参与

$$\mathcal{M}(k_1, \dots, k_n) = \varepsilon_{\mu_1}(k_1) \dots \varepsilon_{\mu_n}(k_n) \mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n), \quad (\text{B.182})$$

且振幅的所有外线都满足质壳条件, 则对于任意一个动量 k_i 来说, 都有

$$k_{i\mu_i} \mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}(k_1, \dots, k_n) = 0. \quad (\text{B.183})$$

我们顺便利用瓦德-高桥恒等式来证明四光子散射图的收敛性, 四光子散射过程的费曼图(框图)如图所示。设四光子散射振幅 $i\mathcal{M}$ 可以表示为

$$i\mathcal{M} = i\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \epsilon_3^{\rho*} \epsilon_4^{\sigma*} \mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.184})$$

这一振幅是表观对数发散的, 因此在泡利-维拉斯正规化下, 振幅中可能出现的最高的发散项就是 $\ln \Lambda^2$ 。由于交换各光子并不会影响振幅的取值, 因此我们可以不失一般性地将振幅 $\mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma}$ 表示为

$$\mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma} = c \ln \Lambda^2 (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + \text{finite}, \quad (\text{B.185})$$

式中 c 为常数。设 q^μ 为某外线光子动量, 根据瓦德-高桥恒等式我们得到

$$q^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad (\text{B.186})$$

因此

$$c \ln \Lambda^2 (q_\nu \eta_{\rho\sigma} + q_\rho \eta_{\nu\sigma} + q_\sigma \eta_{\nu\rho}) + q^\mu \cdot \text{finite} = 0. \quad (\text{B.187})$$

如果上式对所有 q^μ 都成立, 则必有 $c = 0$, 因此四光子散射振幅确实是有限的。

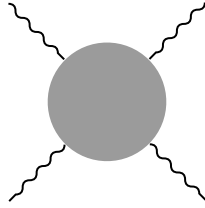


图 B.4: 量子电动力学四光子散射的费曼图(框图)。

B.11 真空极化与顶点修正的张量结构

我们利用瓦德-高桥恒等式讨论真空极化与顶点修正的张量结构, 瓦德-高桥恒等式的推导详见 B.10。首先考虑单粒子不可约图的真空极化 $i\Pi^{\mu\nu}(p^2)$, 由于 $\Pi^{\mu\nu}$ 是一个二阶张量, 并且唯一的一个动量就是 p^μ , 因此满足洛伦兹不变性的最普遍的形式就是

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = \eta^{\mu\nu} \Pi_1(p^2) + p^\mu p^\nu \Pi_2(p^2), \quad (\text{B.188})$$

式中 Π_1, Π_2 是两个标量函数。根据瓦德-高桥恒等式

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p^2) = 0, \quad (\text{B.189})$$

我们得到

$$p_\mu \eta^{\mu\nu} \Pi_1(p^2) + p_\mu p^\mu p^\nu \Pi_2(p^2) = 0, \quad (\text{B.190})$$

因此 Π_1, Π_2 之间的关系为

$$\Pi_1(p^2) = -p^2 \Pi_2(p^2) = p^2 \Pi(p^2). \quad (\text{B.191})$$

这样我们就可以将真空极化分解为

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = i\Delta^{\mu\nu} p^2 \Pi(p^2), \quad (\text{B.192})$$

式中张量部分为

$$\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}. \quad (\text{B.193})$$

可以验证, 真空极化的张量部分满足

$$\Delta^\mu_\rho \Delta^\rho_\nu = \Delta^\mu_\nu. \quad (\text{B.194})$$

为简便起见, 我们选取朗道规范 $\xi \rightarrow \infty$, 则自由光子的传播子可以表示为

$$G^{\mu\nu}(p^2) = \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} = \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right). \quad (\text{B.195})$$

考虑如图所示链近似下的真空极化, 总振幅 $iD^{\mu\nu}(p^2)$ 与单粒子不可约振幅 $i\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} iD^{\mu\nu}(p^2) &= \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} + \frac{-i\Delta^{\mu\rho}}{p^2 + i\varepsilon} (i\Pi_{\rho\sigma}(p^2)) \frac{-i\Delta^{\sigma\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \\ &\quad + \frac{-i\Delta^{\mu\rho}}{p^2 + i\varepsilon} (i\Pi_{\rho\sigma}(p^2)) \frac{-i\Delta^{\sigma\tau}}{p^2 + i\varepsilon} (i\Pi_{\tau\eta}(p^2)) \frac{-i\Delta^{\eta\nu}}{p^2 + i\varepsilon} + \dots \\ &= \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} + \frac{-i\Delta^{\mu\rho}}{p^2 + i\varepsilon} (i\Delta_{\rho\sigma} p^2 \Pi(p^2)) \frac{-i\Delta^{\sigma\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \\ &\quad + \frac{-i\Delta^{\mu\rho}}{p^2 + i\varepsilon} (i\Delta_{\rho\sigma} p^2 \Pi(p^2)) \frac{-i\Delta^{\sigma\tau}}{p^2 + i\varepsilon} (i\Delta_{\tau\eta} p^2 \Pi(p^2)) \frac{-i\Delta^{\eta\nu}}{p^2 + i\varepsilon} + \dots \\ &= \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} + \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \Pi(p^2) + \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \Pi^2(p^2) + \dots \\ &= \frac{-i\Delta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \frac{1}{1 - \Pi(p^2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.196})$$

这样我们就给出了总振幅的表达式。

类似地, 链近似下电子自能 $iS(p)$ 与单粒子不可约图 $i\Sigma(p)$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} iS(p) &= \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} + \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} (i\Sigma(p)) \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} \\ &\quad + \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} (i\Sigma(p)) \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} (i\Sigma(p)) \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} + \dots \\ &= \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} + \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} \left(\frac{-\Sigma(p)}{p' - m + i\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} \left(\frac{-\Sigma(p)}{p' - m + i\varepsilon} \right)^2 + \dots \\ &= \frac{i}{p' - m + i\varepsilon} \left(1 + \frac{\Sigma(p)}{p' - m + i\varepsilon} \right)^{-1} \\ &= \frac{i}{p' - m + \Sigma(p) + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{B.197})$$

为给出顶点修正的张量结构, 我们首先需要给出戈登恒等式的推导。 $\sigma^{\mu\nu}$ 的定义为

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{B.198})$$

注意到

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{B.199})$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^\nu - (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\gamma^\mu \gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{B.200})$$

因此我们得到

$$i\sigma^{\mu\nu} = -(\gamma^\mu \gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}) = \eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu, \quad (\text{B.201})$$

等价地有

$$i\sigma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \gamma^\nu \gamma^\mu - \eta^{\mu\nu}. \quad (\text{B.202})$$

于是

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\mathbf{p}') i\sigma^{\mu\nu} (p'_\nu - p_\nu) u(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') [(\gamma^\nu \gamma^\mu - \eta^{\mu\nu}) p'_\nu - (\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) p_\nu] u(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') [\not{p}' \gamma^\mu - p'^\mu - p^\mu + \gamma^\mu \not{p}] u(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') [\not{p}' \gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu) + \gamma^\mu \not{p}] u(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{B.203})$$

根据狄拉克方程有

$$\not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p}')\not{p}' = m\bar{u}(\mathbf{p}'). \quad (\text{B.204})$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} & \bar{u}(\mathbf{p}') i\sigma^{\mu\nu} (p'_\nu - p_\nu) u(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') [m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu) + \gamma^\mu m] u(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') [2m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu)] u(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{B.205})$$

因此

$$\bar{u}(\mathbf{p}') i\sigma^{\mu\nu} (p'_\nu - p_\nu) u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}') [2m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu)] u(\mathbf{p}), \quad (\text{B.206})$$

这一结果被称为戈登恒等式。

接下来我们考虑量子电动力学的顶点修正。由于顶点修正的振幅是一个洛伦兹矢量，且顶点中独立的动量只有 q_1^μ, q_2^μ 两个，因此振幅最一般的形式可以表示为

$$i\mathcal{M}^\mu = -ie\bar{u}(\mathbf{q}_2)\Gamma^\mu u(\mathbf{q}_1) = -ie\bar{u}(\mathbf{q}_2)(f_1\gamma^\mu + f_2q_1^\mu + f_3q_2^\mu)u(\mathbf{q}_1). \quad (\text{B.207})$$

式中各 f_i 为标量函数。如果 f_i 之中包含 q_1, q_2 的话，那么它可以通过狄拉克方程去除掉

$$q_1 u(\mathbf{q}_1) = mu(\mathbf{q}_1), \quad \bar{u}(\mathbf{q}_2)q_2 = m\bar{u}(\mathbf{q}_2). \quad (\text{B.208})$$

因此 f_i 只是 $q_1 \cdot q_2$ 和 m 的函数，或者说只是 $p^2 = 2m^2 - 2q_1 \cdot q_2$ 和 m 的函数。

根据瓦德-高桥恒等式，我们有

$$p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0, \quad (\text{B.209})$$

即

$$p_\mu \bar{u}(f_1\gamma^\mu + f_2q_1^\mu + f_3q_2^\mu)u = 0. \quad (\text{B.210})$$

这意味着

$$(p \cdot q_1)f_2\bar{u}u + (p \cdot q_2)f_3\bar{u}u = 0. \quad (\text{B.211})$$

由于

$$p \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 - m^2 = -p \cdot q_2, \quad (\text{B.212})$$

因此 $f_2 = f_3$ 。这样顶点振幅就可以表示为

$$i\mathcal{M}^\mu = -ie\bar{u}(\mathbf{q}_2)[f_1\gamma^\mu + f_2(q_1^\mu + q_2^\mu)]u(\mathbf{q}_1). \quad (\text{B.213})$$

利用戈登恒等式，我们得到

$$\bar{u}(\mathbf{q}_2)(q_1^\mu + q_2^\mu)u(\mathbf{q}_1) = 2m\bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma^\mu u(\mathbf{q}_1) + i\bar{u}(\mathbf{q}_2)\sigma^{\mu\nu}(q_{1\nu} - q_{2\nu})u(\mathbf{q}_1), \quad (\text{B.214})$$

因此我们可以将顶点振幅进一步表示为

$$i\mathcal{M}^\mu = (-ie)\bar{u}(\mathbf{q}_2) \left[F_1\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2 \right] u(\mathbf{q}_1), \quad (\text{B.215})$$

式中 F_1, F_2 是两个标量函数，它们与 f_i 之间的关系为

$$F_1 = f_1 + 2mf_2, \quad F_2 = 2mf_2, \quad (\text{B.216})$$

我们称这两个函数为电磁形状因子。由于 F_i 是无量纲的，因此它们实际上只是无量纲量 p^2/m^2 的函数

$$F_i = F_i \left(\frac{p^2}{m^2} \right). \quad (\text{B.217})$$

于是我们得到

$$\Gamma^\mu = F_1 \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2 \left(\frac{p^2}{m^2} \right). \quad (\text{B.218})$$

这就是顶点振幅的一般形式。

B.12 非阿贝尔规范场的量子化

首先考虑一个有限维的积分。对一系列变量 g_i 的约束条件来说, 我们有

$$\int d^n g \delta^n(g) = 1. \quad (\text{B.219})$$

在变量代换 $g_i \rightarrow a_i$ 下, 积分体积元的变化为

$$d^n g = d^n a \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right), \quad (\text{B.220})$$

式中 $\det(\partial g_i / \partial a_j)$ 为变换的雅可比行列式。而 $\delta^n(g) = \delta^n(g(a))$ 本身不发生改变, 因此我们得到

$$\int d^n g \delta^n(g) = \int d^n a \delta^n(g(a)) \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial a_j} \right) = 1. \quad (\text{B.221})$$

这就是约束条件的积分在坐标变换下的变化。

如果我们把这个积分推广到无限维, 我们就得到了场泛函的情况。考虑洛伦兹规范条件

$$\partial^\mu A_\mu^a = 0. \quad (\text{B.222})$$

对这个规范条件进行路径积分, 我们得到

$$\int \mathcal{D}[\partial^\mu A_\mu^a] \delta(\partial^\mu A_\mu^a) = 1. \quad (\text{B.223})$$

上述积分中的 δ 函数取遍所有指标 a 。对上式进行规范变换

$$A_{\theta\mu}^a(x) = A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) - f^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x) \quad (\text{B.224})$$

结果为

$$\int \mathcal{D}[\partial^\mu A_{\theta\mu}^a] \delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a) = 1. \quad (\text{B.225})$$

这意味着上述积分是规范不变的。

现在我们将上述积分中对规范条件 $\partial^\mu A_{\theta\mu}^a$ 的积分变换为对群参数 Γ^a 的积分。³ 在这个变换下, 积分测度变为

$$\mathcal{D}[\partial^\mu A_{\theta\mu}^a] = \mathcal{D}[\theta^b] \det \left(\frac{\delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a)}{\delta \theta^b} \right), \quad (\text{B.226})$$

而约束条件并未发生改变

$$\delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a) = \delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a(\theta)), \quad (\text{B.227})$$

将这个行列式显式地计算出来, 我们得到

$$\det \left(\frac{\delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a)}{\delta \theta^b} \right) = \det \left(\frac{\delta(\partial^\mu A_\mu^a + \partial^\mu D_\mu^{ab} \theta^b / g)}{\delta \theta^b} \right) = \det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right), \quad (\text{B.228})$$

式中

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A_\mu^c. \quad (\text{B.229})$$

因此我们得到

$$\int \mathcal{D}[\theta^b] \delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a) \det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right) = 1. \quad (\text{B.230})$$

这是一个重要的恒等式。

在非阿贝尔规范理论中, 我们要计算的是如下的路径积分

$$K = \int \mathcal{D}[A_\mu^a] e^{iS[A_\mu^a]}. \quad (\text{B.231})$$

³更严格地说, 我们这里是对所有的群元积分。当我们将其转换为对群参数的积分时, 应当引入一个权重因子 $W(\theta)$ 使得对群参数的积分在群变换下不变。直观地说它代表了不同群参数所对应的群元的密度, 我们称之为哈尔 (Haar) 测度。对于 $SU(n)$ 群来说, 在单位元附近我们可以简单地将权重因子 $W(\theta)$ 取为 1。

现在将 (B.230) 式插入到上述路径积分中, 我们得到将这个表达式插入到规范场的路径积分中, 结果为

$$\begin{aligned}
 K &= \int \mathcal{D}[A_\mu^a] e^{iS[A_\mu^a]} \\
 &= \int \mathcal{D}[A_{\theta\mu}^a] e^{iS[A_{\theta\mu}^a]} \\
 &= \int \mathcal{D}[A_{\theta\mu}^a] \mathcal{D}[\theta^b] \delta(\partial^\mu A_{\theta\mu}^a) \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab}\right) e^{iS[A_{\theta\mu}^a]} \\
 &= \int \mathcal{D}[\theta^b] \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \delta(\partial^\mu A_\mu^a) \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab}\right) e^{iS[A_\mu^a]}.
 \end{aligned} \tag{B.232}$$

这样我们就在路径积分中插入了规范条件。

我们可以引入更一般的规范条件

$$G^\mu A_\mu^a - B^a = 0, \tag{B.233}$$

这里我们不要求算符 G^μ 是协变的。此时规范条件的恒等式为

$$\int \mathcal{D}[\theta^b] \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \det\left(\frac{1}{g} G^\mu D_\mu^{ab}\right) = 1. \tag{B.234}$$

从而场的泛函积分可以表示为

$$K = \int \mathcal{D}[\theta^b] \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \det\left(\frac{1}{g} G^\mu D_\mu^{ab}\right) e^{iS[A_\mu^a]}. \tag{B.235}$$

几率振幅的结果与上述规范条件中的场 B^a 无关, 因此若将上述几率振幅以恰当的方式对 B^a 场进行叠加, 则结果应不发生改变。在这里我们引入权函数

$$\exp\left\{-\frac{i\xi}{2} \int d^4x (B^a)^2\right\}, \tag{B.236}$$

并对场 B^a 做泛函积分

$$\begin{aligned}
 K &= \int \mathcal{D}[\theta^b] \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \mathcal{D}[B^a] \\
 &\quad \times \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \det\left(\frac{1}{g} G^\mu D_\mu^{ab}\right) e^{iS[A_\mu^a]} \exp\left\{-\frac{i\xi}{2} \int d^4x (B^a)^2\right\}.
 \end{aligned} \tag{B.237}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 &\int \mathcal{D}[B^a] \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \exp\left\{-\frac{i\xi}{2} \int d^4x (B^a)^2\right\} \\
 &= \exp\left\{-\frac{i\xi}{2} \int d^4x (G^\mu A_\mu^a)^2\right\},
 \end{aligned} \tag{B.238}$$

在积去 B^a 场后, 我们得到

$$\begin{aligned}
 K &= \int \mathcal{D}[\theta^b] \int \mathcal{D}[A_\mu^a] \\
 &\quad \times \det\left(\frac{1}{g} G^\mu D_\mu^{ab}\right) e^{iS[A_\mu^a]} \exp\left[-\frac{i\xi}{2} \int d^4x (G^\mu A_\mu^a)^2\right].
 \end{aligned} \tag{B.239}$$

这给出了理论的规范固定条件。

附录 C 物理学常数

C.1 粒子物理标准模型中的参数

本节给出粒子物理标准模型中的参数取值，数据引自 (Particle Data Group, 2022)。在目前的物理理论之中，这些参数被视为“基本参数”。它们的取值不能够先验地由标准模型给出，而要通过实验来确定下来。在本节中我们采用自然单位制，所有单位取为电子伏特 (eV)，它的定义是用 1V 的电压加速一个电子所得到的能量，在国际单位制中为

$$1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

由于电荷单位库伦的定义，这个数值是精确的。电子伏特与质量之间的换算关系式为

$$1 \text{ kg} \sim 5.609588603 \dots \times 10^{35} \text{ eV},$$

由于长度单位米的定义，这个数值（在给定的精度上）是精确的。各单位之间的换算公式为

$$1 \text{ eV} = 10^{-3} \text{ KeV} = 10^{-6} \text{ MeV} = 10^{-9} \text{ GeV} = 10^{-12} \text{ TeV}.$$

规范玻色子的质量：

$$m_W = 80.377 \pm 0.012 \text{ GeV}, \quad m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV},$$

希格斯粒子的质量：

$$m_H = 125.25 \pm 0.17 \text{ GeV},$$

轻子的质量：

$$m_e = 0.51099895000 \pm 0.00000000015 \text{ MeV},$$

$$m_\mu = 0.1056583755 \pm 0.00000000023 \text{ GeV},$$

$$m_\tau = 1.77686 \pm 0.00012 \text{ GeV}.$$

夸克的质量：¹

$$m_u = 2.16^{+0.49}_{-0.26} \text{ MeV}, \quad m_d = 4.67^{+0.48}_{-0.17} \text{ MeV}, \quad m_s = 93.4^{+8.6}_{-3.4} \text{ MeV},$$

$$m_c = 1.27 \pm 0.02 \text{ GeV}, \quad m_b = 4.18^{+0.03}_{-0.02} \text{ GeV}, \quad m_t = 172.69 \pm 0.30 \text{ GeV}.$$

中微子的质量：²

$$m_1 < 1.1 \text{ eV}, \quad \Delta m_{21}^2 = (7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5} \text{ eV}^2,$$

¹这里指的是自由夸克（而非处在束缚态之中的夸克）的质量。在上述表达式中，u,d,s 夸克的质量为 $\mu = 2 \text{ GeV}$ 处重整化所得到的 $\overline{\text{MS}}$ 质量，即 $\bar{m} = \bar{m}(\mu = 2 \text{ GeV})$ 。c,b 夸克的质量为在 $\mu = \overline{\text{MS}}$ 处重整化所得到的 $\overline{\text{MS}}$ 质量，即 $\bar{m} = \bar{m}(\mu = \bar{m})$ 。t 夸克的质量是从散射过程中拟合得到的。

由于夸克禁闭的缘故，我们不可能直接观测到自由夸克，因此它们的质量极难测量。但是对于它们的束缚态的质量来说，目前已经获得了很精确的实验数据。由于束缚态的结合能与夸克本身的质量相比是一个很大的量，因此束缚态的质量可能远大于组成它的自由夸克的质量。

²利用中微子振荡实验，我们测量得到的质量仅仅是不同中微子质量之间的差值。换句话说，虽然我们并未直接观测到中微子的质量，但是不同中微子之间的质量差却是实实在在地被实验探测到了的。

$$\Delta m_{32}^2 = (2.453 \pm 0.033) \times 10^{-3} \text{ eV}^2.$$

其中 $\Delta m_{ij}^2 = |m_i^2 - m_j^2|$, $i, j = 1, 2, 3$ 分别代表三个中微子的质量本征态。精细结构常数 α 、强耦合常数 α_s 和弱作用相角 $\sin \theta_W$ 的取值分别为:³

$$\alpha = (7.2973525693 \pm 0.0000000011) \times 10^{-3},$$

$$\alpha_s = 0.1179 \pm 0.0009, \quad \sin^2 \theta_W = 0.23121 \pm 0.00004.$$

CKM 矩阵的四个参数:

$$\sin \theta_{12} = 0.22500 \pm 0.00067, \quad \sin \theta_{23} = 0.04182^{+0.00085}_{-0.00074},$$

$$\sin \theta_{13} = 0.00369 \pm 0.00011, \quad \delta = 1.144 \pm 0.027.$$

PMNS 矩阵的四个参数:

$$\sin^2 \theta_{12} = 0.307 \pm 0.013, \quad \sin^2 \theta_{23} = 0.546 \pm 0.021,$$

$$\sin^2 \theta_{13} = 0.0220 \pm 0.0007, \quad \delta = 1.36^{+0.20}_{-0.16}.$$

强相互作用 θ 项的系数

$$\theta = 0.$$

以上我们给出了标准模型中 26 个参数的实验值。

C.2 重要物理常数

本节给出一些重要的物理常数的取值, 数据引自 (Particle Data Group, 2022)。我们将用括号的方式标记不确定度, 它意味着在相应的数位上加减括号中的值, 例如

$$0.1354(12) = 0.1354 \pm 0.0012.$$

在物理中, 我们通常所使用的单位制是国际单位制的一个略有改进的版本。它包含五个基本量纲, 分别为质量量纲 M , 长度量纲 L , 时间量纲 T , 电荷量纲 Q 以及温度量纲 Θ 。⁴ 各个量纲所对应的基本单位定义如下: 时间单位秒 (s) 的定义为使得铯-133 原子在两个超精细能级间跃迁所对应的辐射的频率为

$$f = 9192631770 \text{ s}^{-1}$$

的时间。长度单位米 (m) 的定义为使得光速为

$$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

的距离。质量单位千克 (kg) 的定义为使得普朗克常量为

$$\hbar = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

的质量。电荷单位库伦 (C) 的定义为使得元电荷为

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

³强作用规范耦合常数 g_s 以及电弱统一两个规范耦合常数 g, g' 与下面给出的精细结构常数 α 、强耦合常数 α_s 和弱作用相角 $\sin \theta_W$ 之间的关系为:

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad \alpha = \frac{g^2 \sin^2 \theta_W}{4\pi}, \quad \sin^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2}.$$

⁴国际单位制包含七个基本量纲, 它将电荷量纲替换为电流量纲, 并添加了发光强度和物质的量这两个基本量纲。在物理中, 发光强度作为一个主观量可以被排除于基本量纲之外, 而物质的量可以被视为一个辅助单位, 不具有独立的量纲, 因此只有五个量纲保留了下来。除此之外, 这里的时间、长度以及电荷的单位也采用了更物理的方式进行定义。

的电荷。温度单位开尔文 (K) 定义为使得玻尔兹曼常数为

$$k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

的热力学温度。物理中所使用的其他物理量的量纲和单位均可以以上述基本量纲和单位为基础推导出来。这些单位本质上都是通过物理学常数定义的, 因此有些常数的值由于定义是精确的; 有些常数的值是根据精确的常数通过四则运算得到的, 因此在给定数位上是精确的。对于这部分常数, 我们将额外注明。

真空光速 (精确值, 定义):

$$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

普朗克常数 (精确值, 定义):

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

约化普朗克常数 (精确值):

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571817 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

电子电荷 (精确值, 定义):

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

电子质量:

$$m_e = 0.51099895000(15) \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} = 9.1093837015(28) \times 10^{-31} \text{ kg},$$

质子质量:

$$m_p = 938.27208816(29) \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} = 1.67262192369(51) \times 10^{-27} \text{ kg},$$

中子质量:

$$m_n = 939.56542052(54) \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} = 1.67492749828(96) \times 10^{-27} \text{ kg},$$

原子质量单位:

$$u = \frac{m(^{12}\text{C})}{12} = 931.49410242(28) \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} = 1.66053906660(50) \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

真空介电常数:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.8541878128(13) \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1},$$

真空磁导率:⁵

$$\frac{\mu_0}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.00000000055(15) \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}.$$

精细结构常数:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = 7.2973525693(11) \times 10^{-3} = \frac{1}{137.035999084(21)},$$

费米耦合常数:⁶

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.1663788(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}.$$

经典电子半径:⁷

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2.8179403262(13) \times 10^{-15} \text{ m},$$

⁵在早期, 人们曾经定义单位使得真空磁导率精确等于 $4\pi \times 10^{-7}$ 。只不过随着单位定义的修改, 其取值相对于之前发生了微小的变化, 因此真空磁导率不再是一个基本的物理量, 其取值也与 $4\pi \times 10^{-7}$ 发生了微小的偏差。

⁶费米耦合常数出现在四费米子理论的有效拉格朗日密度中。

⁷假设电子是一个电荷均匀分布的小球, 且其质量完全由该带电小球的电场自能提供, 则小球的半径就是电子经典半径。

电子约化康普顿波长:

$$\bar{\lambda}_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.8615926796(12) \times 10^{-13} \text{ m},$$

氢原子的玻尔 (Bohr) 半径:⁸

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{r_e}{\alpha^2} = 0.529177210903(80) \times 10^{-10} \text{ m},$$

能量为 1 eV/c 的粒子的波长 (精确值):

$$\frac{hc}{1 \text{ eV}} = 1.239841984 \dots \times 10^{-6} \text{ m},$$

里德伯 (Rydberg) 能量:⁹

$$\text{Ry} = \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2} = 13.605693122994(26) \text{ eV}.$$

电子玻尔磁矩:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.7883818060(17) \times 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{T}^{-1},$$

核子磁矩:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15245125844(96) \times 10^{-14} \text{ MeV} \cdot \text{T}^{-1},$$

电子回转频率:

$$\frac{\omega_e}{B} = \frac{e}{m_e} = 1.75882001076(53) \times 10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1},$$

质子回转频率:

$$\frac{\omega_p}{B} = \frac{e}{m_p} = 9.5788331560(29) \times 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}.$$

阿伏伽德罗 (Avogadro) 常数 (精确值, 定义):

$$N_A = 6.02214076 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

玻尔兹曼常数 (精确值, 定义):

$$k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

摩尔体积 (精确值):

$$N_A k_B \frac{273.15 \text{ K}}{101325 \text{ Pa}} = 22.41396954 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1},$$

维恩 (Weyn) 常数 (精确值):¹⁰

$$b = \lambda_{\max} T = 2.897771955 \dots \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K},$$

斯特藩 (Stefan)-玻尔兹曼常数 (精确值):¹¹

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.670374419 \dots \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

⁸假设氢原子核的质量为无穷大, 则一个携带有氢原子基态能量的经典电子绕氢原子核运动的轨道半径即为氢原子的玻尔半径。

⁹里德伯能量即氢原子基态能量的绝对值。

¹⁰绝对黑体的温度与其辐射光谱的峰值的乘积为一个常数, 这个定律被称为维恩位移定律, 这个常数被称为维恩常数。它与其他物理常数之间的关系为 $b = 2\pi\hbar c/xk_B T$, 其中 $x = 4.9651142 \dots$ 是超越方程 $(x-5)e^x + 5 = 0$ 的解。

¹¹绝对黑体的辐射强度正比于温度的四次方, 这被称为斯特藩-玻尔兹曼定律, 比例系数被称为斯特藩-玻尔兹曼常数。

C.3 天文学常数

本节给出一些重要的天文学常数的取值, 数据引自 (Particle Data Group, 2022)。天文学常数反映的是当今的宇宙在此时此处的物理性质, 因此它不仅与物理规律有关, 还与宇宙的初始条件有关, 并且也与我们所处在的特殊星系有关。

引力常数:

$$G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2},$$

普朗克质量:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.220890(14) \times 10^{19} \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2} = 2.176434(24) \times 10^8 \text{ kg},$$

普朗克长度:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616255(18) \times 10^{-35} \text{ m}.$$

回归年:¹²

$$1 \text{ yr} = 31556925.1 \text{ s} = 365.242189 \text{ day},$$

恒星年:¹³

$$1 \text{ yr} = 31558149.8 \text{ s},$$

恒星日:¹⁴

$$1 \text{ day} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}}.09503.$$

太阳日:¹⁵

$$1 \text{ day} = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}.$$

天文单位 (精确值, 定义):¹⁶

$$1 \text{ au} = 149597870700 \text{ m},$$

秒差距 (精确值):¹⁷

$$1 \text{ pc} = 3.08567758149 \dots \times 10^{16} \text{ m} = 3.26156 \dots \text{ ly},$$

光年 (精确值):

$$1 \text{ ly} = 0.946073 \dots \times 10^{16} \text{ m} = 0.306601 \dots \text{ pc},$$

钱德拉塞卡 (Chandrasekhar) 极限:¹⁸

$$M_{\text{Ch}} = 3.097972 \mu^{-2} \frac{M_P^3}{m_H^2} = 1.43377(6) \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 M_{\odot},$$

爱丁顿 (Eddington) 光度:¹⁹

$$L_{\text{Ed}} = 1.2570651798(12) \times 10^{16} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ W} = 3.2838693308(31) \times 10^4 \frac{M}{M_{\odot}} L_{\odot}.$$

¹²回归年指太阳中心自西向东沿黄道从春分点到春分点所经历的时间。

¹³恒星年指相对于远处的恒星来说, 地球围绕太阳运动的周期。由于地轴进动的效应, 回归年和恒星年是不同的。

¹⁴恒星日指相对于远处的恒星来说, 地球自转的周期。

¹⁵太阳日指太阳连续两次经过同一子午线的时间间隔。由于地球公转的效应, 恒星日与太阳日是不同的。

¹⁶天文单位指日地之间的平均距离。

¹⁷以地球和太阳距离为底边, 视角大小为一角秒的恒星与地球之间的距离为一秒差距。

¹⁸钱德拉塞卡极限是白矮星的最大质量, 式中 μ 为组成星体的物质中每个分子所对应的平均相对分子质量, 而 m_H 为氢原子质量。如果恒星在演化末期耗尽核燃料后的质量超过了钱德拉塞卡极限, 那么恒星的电子简并压将无法抗衡其自身的引力作用, 此时恒星将坍缩为中子星。

¹⁹当恒星的引力与辐射压平衡时, 其光度将达到最大值, 此时恒星的光度被称为爱丁顿光度。它是吸积天体所能达到的最大光度。

太阳史瓦西半径:

$$r_{\odot} = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} = 2.9532501 \text{ km},$$

太阳质量:

$$M_{\odot} = 1.98841(4) \times 10^{30} \text{ kg},$$

名义太阳赤道半径 (精确值, 定义):²⁰

$$R_{\odot} = 6.957 \times 10^8 \text{ m},$$

名义太阳常数 (精确值, 定义):²¹

$$S_{\odot} = 1361 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2},$$

名义太阳光球层温度 (精确值, 定义):

$$T_{\odot} = 5772 \text{ K},$$

名义太阳亮度 (精确值, 定义):

$$L_{\odot} = 3.828 \times 10^{26} \text{ W},$$

地球施瓦西半径:

$$r_{\oplus} = \frac{2GM_{\oplus}}{c^2} = 8.870056 \text{ mm},$$

地球质量:

$$M_{\oplus} = 5.97217(13) \times 10^{24} \text{ kg},$$

名义地球赤道半径 (精确值, 定义):

$$R_{\oplus} = 6.3781 \times 10^6 \text{ m}.$$

地球表面标准重力加速度 (精确值, 定义):

$$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

太阳到银心的距离:

$$R_0 = 8.178 \pm 0.0013(\text{stat.}) \pm 0.0022(\text{sys.}) \text{ m},$$

太阳绕银心运动的线速度:

$$v_0 = 240(8) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

太阳绕银心运动的角速度:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R_0} = 27.1(5) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{kpc}^{-1},$$

银河系逃逸速度:

$$492 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} < v_{\text{esc}} < 587 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

太阳系局域银晕 (普通物质) 密度:

$$\rho_{\text{disk}} = 6.6(9) \times 10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 3.7(5) \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2} \cdot \text{cm}^{-3}$$

太阳系局域暗物质密度:

$$\rho_{\chi} = 0.3 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

²⁰这里的各“名义”量都是仅仅是定义, 它与真实的物理数值是非常接近的, 但并不完全代表真实的物理数值。事实上诸如太阳半径、太阳亮度等量与精确的物理常数不同, 它们是时刻发生变化的, 因此我们并不能够确切地说明这些量究竟等于多少。在实际的研究之中, 为简便起见我们将它们的取值固定下来, 并利用它们作为单位来度量其他的天文学量。

²¹太阳常数指在日地平均距离上, 大气顶层垂直于太阳光线的单位面积每秒钟接受的太阳辐射。

现今宇宙微波背景辐射温度：²²

$$T_0 = 2.7255(6) \text{ K},$$

现今微波背景辐射偶极振幅：

$$d = 3.3621(10) \text{ mK},$$

太阳相对于微波背景辐射的运动速度：

$$v_{\odot} = 369.82(11) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ towards } (l, b) = (264.021(11)^{\circ}, 48.253(5)^{\circ}),$$

相对于微波背景辐射的局域群速度：

$$v_{\text{LG}} = 620(15) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ towards } (l, b) = (271.9(20)^{\circ}, 29.6(14)^{\circ}),$$

微波背景辐射光子数密度：²³

$$n_{\gamma} = 410.73(27) \left(\frac{T}{2.7255 \text{ K}} \right)^3 \text{ cm}^{-3},$$

微波背景辐射光子（质量/能量）密度：

$$\rho_{\gamma} = 4.645(4) \left(\frac{T}{2.7255 \text{ K}} \right)^4 \times 10^{-34} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 0.260 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3},$$

熵密度：

$$\frac{s}{k_B} = 2891.2 \left(\frac{T}{2.7255 \text{ K}} \right)^3 \text{ cm}^{-3}.$$

现今哈勃常数：

$$H_0 = 100 h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} = h \times 9.777752 \text{ Gyr}^{-1},$$

哈勃常数比例因子：

$$h = 0.674(5),$$

哈勃长度：

$$\frac{c}{H_0} = 0.9250629 \times 10^{-26} h^{-1} \text{ m} = 1.372(10) \times 10^{26} \text{ m},$$

宇宙临界密度：²⁴

$$\begin{aligned} \rho_{\text{crit}} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.87834(4) \times 10^{-29} h^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \\ &= 1.053672(24) \times 10^{-5} h^2 \text{ GeV} \cdot \text{c}^{-2} \cdot \text{cm}^{-3} \\ &= 2.77536627 \times 10^{11} h^2 M_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}, \end{aligned}$$

重子-光子比值：

$$\eta = \frac{n_b}{n_{\gamma}} = 6.14(19) \times 10^{-10},$$

重子数密度：²⁵

$$n_b = 2.515(17) \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3},$$

²² 宇宙空间背景存在一种近乎于各向同性的微波辐射，这被称为微波背景辐射，它来源于宇宙大爆炸的残留。

²³ 根据宇宙学标准模型和统计物理学的知识，我们可以求出光子数密度、光子密度和熵密度与更基本的物理常数之间的关系：

$$n_{\gamma} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3, \quad \rho_{\gamma} = \frac{\pi^2 k_B T}{15c^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3, \quad \frac{s}{k_B} = \frac{2.43\pi^2}{11.45} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3.$$

²⁴ 如果宇宙中的物质密度大于临界密度，则宇宙最终会收缩为一个奇点。反之，宇宙则会无限膨胀下去。

²⁵ 这里的重子数密度来源于微波背景辐射的直接测量，而非是 $\eta \times n_{\gamma}$ 。

微波背景辐射参数:

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{crit}}} = 2.473 \times 10^{-5} \left(\frac{T}{2.7255 \text{ K}} \right)^4 h^{-2} = 5.38(15) \times 10^{-5},$$

重子参数:

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_{\text{crit}}} = 0.02237(15) h^{-2} = 0.0493(6),$$

冷暗物质参数:

$$\Omega_c = \frac{\rho_c}{\rho_{\text{crit}}} = 0.1200(12) h^{-2} = 0.265(7),$$

物质参数:

$$\Omega_m = \Omega_c + \Omega_b = 0.315(7),$$

暗能量参数:²⁶

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m = 0.685(7),$$

暗能量密度:

$$\rho_\Lambda = 5.83(16) \times 10^{-30} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3},$$

宇宙学常数:

$$\Lambda = 1.088(30) \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2},$$

在 $8h^{-1} \text{ Mpc}$ 尺度内的涨落幅度:

$$\sigma_8 = 0.811(6).$$

宇宙年龄:

$$t_0 = 13.797(23) \text{ Gyr},$$

中微子种类:

$$N_{\text{eff}} = 2.99(17),$$

中微子质量之和:

$$0.06 \text{ eV} < \sum m_\nu < 0.12 \text{ eV},$$

宇宙曲率:

$$\Omega_k = 0.0007(19),$$

暗能量物态参数:²⁷

$$w = -1.028(31).$$

²⁶天文学观测表明, 宇宙中的总物质(能量)密度极为接近于其临界密度, 因此我们有 $\Omega_\gamma + \Omega_b + \Omega_c + \Omega_\Lambda = 1$ 。这里的各个参数实际上就代表了相应的组分在宇宙中所占的比例。

²⁷暗能量的物态参数定义为 $w = p/\rho$ 。如果暗能量由宇宙学常数提供, 则其物态参数为 $w = -1$ 。如果暗能量由其他机制提供, 则其物态参数可以不等于 -1 。

C.4 宇宙的演化过程

本节简要地介绍宇宙学标准模型所给出的宇宙演化过程，表中标注“?”的项表示尚无理论或天文观测结果。

表 C.1: 宇宙的演化过程。

演化阶段	时间	红移	温度/K
大爆炸	0 s	∞	∞
普朗克时间 ²⁸	10^{-43} s	?	?
暴涨 ²⁹	10^{-36} s	10^{28}	?
重子数生成 ³⁰	?	?	?
电弱相变 ³¹	10^{-12} s	10^{15}	10^{22}
QCD 相变 ³²	10^{-6} s	10^{12}	10^{16}
暗物质脱耦 ³³	?	?	?
中微子脱耦	1 s	10^{10}	10^{10}
正负电子湮灭	6 s	2×10^9	5×10^9
原初核合成	2×10^2 s	4×10^8	10^9
辐射-物质平衡 ³⁴	5×10^4 yr	3400	8700
原子形成（复合）	3×10^5 yr	1300	3600
光子脱耦（最后散射）	3.5×10^5 yr	1100	3100
物质-暗能量平衡 ³⁵	10^{10} yr	0.4	3.8
现今	1.4×10^{10} yr	0	2.7

²⁸在小于普朗克时间的尺度内，广义相对论将彻底失效，我们应代之以量子引力。

²⁹在宇宙演化的极早期，人们认为宇宙的尺度因子曾经经历过一个在短时间内急剧增加的过程，这被称为暴涨。

³⁰在这一过程中，宇宙的粒子数和反粒子数开始发生破缺，从而使得我们的宇宙成为一个由物质主导的世界。我们目前对重子数生成的机制知之甚少，因此尚无法对这一时期的物理过程进行有效的预测。

³¹电弱统一理论自发破缺为电磁相互作用和弱相互作用的过程称为电弱相变。

³²宇宙中的物质由夸克-胶子等离子体相变为强子气的过程称为 QCD 相变。

³³暗物质脱耦指的是随着能量的降低，暗物质不再与其他组分发生相互作用的过程。我们目前对暗物质知之甚少，因此尚无法对暗物质脱耦过程进行有效的预测。

³⁴物质密度随尺度因子的变化关系为 $\rho_m \sim a^{-3}$ ，而光子密度随尺度因子的变化关系为 $\rho_\gamma \sim a^{-4}$ 。因此随着膨胀的持续进行，宇宙将由辐射主导状态转变为物质主导状态。根据弗里德曼方程，辐射主导时期宇宙的尺度因子随时间的变化关系为 $a \sim t^{1/2}$ ，而物质主导时期宇宙的尺度因子随时间的变化关系为 $a \sim t^{2/3}$ 。

³⁵暗能量密度随尺度因子的变化关系为 $\rho_\Lambda \sim \text{const.}$ ，因此随着膨胀的持续进行，宇宙将由物质主导状态转变为暗能量主导状态。根据弗里德曼方程，辐射主导时期宇宙的尺度因子随时间的变化关系为 $a \sim e^{Ht}$ ，其中 $H = \sqrt{\Lambda/3}$ ， Λ 为宇宙学常数。

参考文献

- [1] PENROSE R. The road to reality:a complete guide to the laws of the universe[M]. New York: Knopf Publishing Group, 2005.
- [2] FEYNMAN R P. The feynman lectures on physics[M]. New York: Basic Books, 2011.
- [3] 漆安慎, 杜婵英. 普通物理学教程 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [4] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [5] 秦允豪, 黄凤珍, 应学农. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [6] 赵建林. 光学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [7] 杨福家. 原子物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [8] LANDAU L D, LIFSHITZ E. Mechanics[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976.
- [9] GOLDSTEIN H, POOLE C P, SAFKO J L. Classical mechanics[M]. Boston: Addison Wesley, 2001.
- [10] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [11] 刘川. 理论力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2019.
- [12] V.I. ARNOLD A W, K. Vogtmann. Mathematical methods of classical mechanics[M]. New York: Springer, 1989.
- [13] PATHRIA R K, BEALE P D. Statistical mechanics[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996.
- [14] 汪志诚. 热力学统计物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [15] 林宗涵. 热力学与统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2018.
- [16] 刘川. 热力学与统计物理[M]. 北京: 北京大学出版社, 2022.
- [17] LANDAU L D, LIFSHITZ E. Statistical physics, part 1[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014.
- [18] 郑志刚, 胡岗. 从动力学到统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2016.
- [19] 何凯芬. 从孤立波到湍流[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [20] 刘辽, 费保俊, 张允中. 狭义相对论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [21] JACKSON J D. Classical electrodynamics[M]. New Jersey: Wiley, 1999.

- [22] GRIFFITHS D J. Introduction to electrodynamics[M]. Ohio: Prentice Hall, 1999.
- [23] 郭硕宏. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [24] 尹真. 电动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [25] LANDAU L D, LIFSHITZ E. The classical theory of fields[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980.
- [26] NASTASE H. Classical field theory[M]. Cambridge: Cambridge University Express, 2010.
- [27] LANDAU L D, LIFSHITZ E. Fluid mechanics[M]. London: Pergamon Press, 1987.
- [28] LANDAU L D, LIFSHITZ E. Theory of elasticity[M]. London: Pergamon Press, 1981.
- [29] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 南京: 南京大学出版社, 2012.
- [30] LANDAU L D, LIFSHITZ E. Physical kinetics[M]. London: Pergamon Press, 1981.
- [31] 沈贤勇. 破解引力: 广义相对论的诞生之路[M]. 北京: 化学工业出版社, 2022.
- [32] WEINBERG S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity[M]. New Jersey: Wiley, 1972.
- [33] MISNER C, THORNE K, WHEELER J. Gravitation[M]. Berkeley: Freeman, 1973.
- [34] 陈斌. 广义相对论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2018.
- [35] 俞允强. 广义相对论引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.
- [36] BAMBI C. Introduction to general relativity[M]. New York: Springer, 2018.
- [37] 金洪英. 广义相对论入门[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2022.
- [38] 黄超光. 广义相对论讲义[M]. 北京: 科学出版社, 2023.
- [39] 刘辽, 赵峥. 广义相对论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [40] 赵峥, 刘文彪. 广义相对论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- [41] 王永久. 引力理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [42] 段一士. 广义相对论与引力规范理论[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
- [43] 赵柳. 相对论与引力理论导论[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [44] CHANDRASEKHAR S. The mathematical theory of black holes[M]. Oxford: Oxford University Press, 1983.
- [45] LAWRIE I. A unified grand tour of theoretical physics[M]. London: Taylor and Francis, 2001.
- [46] WEINBERG S. Cosmology[M]. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [47] 胡中为, 孙扬. 天文学教程[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2019.
- [48] 陆埏. 现代天体物理[M]. 北京: 北京大学出版社, 2014.
- [49] 龚云贵. 宇宙学基本原理[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

- [50] 俞允强. 热大爆炸宇宙学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [51] 杨炳麟. 暗物质及相关宇宙学[M]. 柳国丽, 王雯宇, 王飞, 译. 北京: 科学出版社, 2019.
- [52] SCOTT D. Modern cosmology[M]. Boston: Academic Press, 2003.
- [53] BAMBI C, DOLGOV A D. Introduction to particle cosmology: The standard model of cosmology and its open problems[M]. Heidelberg: Springer, 2016.
- [54] RICHARD P. FEYNMAN A R H. Quantum mechanics and path integrals[M]. Los Angeles: McGraw-Hill, 2015.
- [55] 侯伯元, 云国宏, 杨战营. 路径积分与量子物理导引——现代高等量子力学初步[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [56] ZINN-JUSTIN J. Path integrals in quantum mechanics[M]. Oxford: Oxford University Express, 2005.
- [57] JAMES GLIMM A J. Quantum physics: a functional integral point of view[M]. Singapore: Springer, 1987.
- [58] 周世勋, 陈灏. 量子力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [59] DAVID J. GRIFFITHS D F S. Introduction to quantum mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [60] SAKURAI J J. Modern quantum mechanics[M]. Boston: Addison-Wesley Pub. Co, 1994.
- [61] 杨泽森. 高等量子力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2020.
- [62] 曾谨言. 量子力学[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [63] 喀兴林. 高等量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [64] 顾樵. 量子力学[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [65] 张永德. 高等量子力学[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [66] LANDAU L, LIFSHITZ E. Quantum mechanics: Non-relativistic theory[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2020.
- [67] CLAUDE COHEN-TANNOUDJI F L, Bernard Diu. Quantum mechanics[M]. New York: John Wiley Sons, 1977.
- [68] 王正行. 量子力学原理[M]. 北京: 北京大学出版社, 2020.
- [69] CVITANOVIC P, ARTUSO R, MAINIERI R, et al. Chaos: Classical and quantum[M]. 2022.
- [70] 杨展如. 量子统计物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [71] 张先蔚. 量子统计力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [72] 戴到生, 钱昆明. 铁磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [73] JAMMER M. The philosophy of quantum mechanics: The interpretations of quantum mechanics in historical perspective[M]. New Jersey: Wiley, 1974.

- [74] 张丽. 实在论视阈下的多世界理论[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 2020.
- [75] 李宏芳. 量子实在与“薛定谔猫佯谬”[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [76] DE BARROS J A, MONTEMAYOR C. Quanta and mind: Essays on the connection between quantum mechanics and consciousness[M]. New York: Springer Nature, 2019.
- [77] BENDER C M. Making sense of non-hermitian hamiltonians[J]. Reports on Progress in Physics, 2007(70): 947-1018.
- [78] 胡安, 张维益. 固体物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [79] 黄昆, 韩汝琦, 李延龄, 吕华平. 固体物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [80] 冯端, 金国钧. 凝聚态物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [81] 金国钧. 凝聚体物理学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [82] 李正中. 固体理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [83] 徐光宪, 黎乐民, 王德民. 量子化学——基本原理和从头计算法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [84] 麦松威, 周公度, 王颖霞, 张羽伸. 高等无机结构化学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.
- [85] 天津大学物理化学教研室. 物理化学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [86] SHOLL D S, STECKEL J A. Density functional theory: A practical introduction[M]. Hoboken: Wiley, 2009.
- [87] J.D.BJORKEN, S.D.DRELL. Relativistic quantum mechanics[M]. Los Angeles: McGraw-Hill, 1964.
- [88] STREATER R F, WIGHTMAN A S. Pct, spin and statistics, and all that[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2000.
- [89] HOLLAND P R. The quantum theory of motion an account of the de broglie-bohm causal interpretation of quantum mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [90] 周邦荣. 量子场论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [91] 郑汉青. 量子场论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2018.
- [92] 黄涛, 王伟. 量子场论导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.
- [93] 王正行. 简明量子场论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2020.
- [94] 李灵峰. 量子场论[M]. 古杰, 万林焱, 张洋, 译. 北京: 科学出版社, 2015.
- [95] 石康杰, 杨文力, 杨战营. 量子场论与重整化导论[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [96] 姜志进. 量子场论导论-电磁作用的阿贝尔规范理论[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [97] 曹昌琪. 量子非阿贝尔规范场论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2015.
- [98] 周邦荣. 规范场论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015.

- [99] 黄涛. 量子色动力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [100] SCHWARTZ M D. Quantum field theory and the standard model[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [101] ZEE A. Quantum field theory in a nutshell[M]. Princeton: Princeton University Press, 2010.
- [102] LURIE D. Particles and fields[M]. New York: John Wiley Sons, 1968.
- [103] MICHIO K. Quantum field theory: A modern introduction[M]. Oxford: Oxford University Express, 1993.
- [104] PESKIN M E, SCHROEDER D V. An introduction to quantum field theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [105] SREDNICKI M. Quantum field theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [106] SMIRNOV V A. Analytic tools for feynman integrals[M]. New York: Springer International Publishing, 2012.
- [107] PADMANABHAN T. Quantum field theory: The why, what and how[M]. New York: Springer International Publishing, 2016.
- [108] KLEINERT H. Particles and quantum fields[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2006.
- [109] GELIS F. Quantum field theory: From basics to modern topics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- [110] DU D S, YANG M Z. Introduction to particle physics[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2022.
- [111] 肖振军, 吕才典. 粒子物理学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [112] GRIFFITHS D. Introduction to elementary particles[M]. New York: John Wiley Sons, 1987.
- [113] JOHN F. DONOGHUE B R H, Eugene Golowich. Dynamics of the standard model[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [114] GROUP P D. Review of particle physics[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2022: 083C01.
- [115] HATFIELD B. Quantum field theory of point particles and strings[M]. Newyork: Perseus Books, 1992.
- [116] JOHN BAEZ J P M. Gauge fields, knots and gravity[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1994.
- [117] CAO T Y. Conceptual developments of 20th century field theories[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- [118] YAMATSU N. Finite-dimensional lie algebras and their representations for unified model building[M]. 2020.

- [119] GATTRINGER C, LANG C. Quantum chromodynamics on the lattice[M]. New York: Springer International Publishing, 2010.
- [120] 刘川. 格点量子色动力学导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2017.
- [121] KAPUSTA J I, GALE C. Finite-temperature field theory: Principles and applications[M]. New York: Springer International Publishing, 2006.
- [122] WEN X G. Quantum field theory of many-body systems: from the origin of sound to an origin of light and electrons[M]. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- [123] 王怀玉. 凝聚态物理的格林函数理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [124] FETTER A L, WALECKA J D. Quantum theory of many-particle systems[M]. New York: Dover Publications, 2003.
- [125] EBOLI O, GOMES M, SANTORO A. Field theory and particle physics[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1990.
- [126] 刘辽, 黄超光. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [127] 王永久. 经典宇宙和量子宇宙[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [128] 黄涛, 王伟. 量子色动力学专题[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [129] KOHSUKE YAGI Y M, Tetsuo Hatsuda. Quark-gluon plasma: from big bang to little bang[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [130] GAMBINI R, PULLIN J. A first course in loop quantum gravity[M]. Oxford: Oxford University Express, 2011.
- [131] 高福. Science 125 个前沿问题解读[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- [132] 10000 个科学难题物理学编委会. 10000 个科学难题 • 物理学卷[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [133] BAEZ J C, SEGAL I E, ZHOU Z. Introduction to algebraic and constructive quantum field theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 2014.
- [134] LANGACKER R. Grand unified theories and proton decay[J]. Physics Reports, 1980: 72, No.4, 185-385.
- [135] C.KOUNNAS, A.MASIERO, D.V.NANOPOULOS, et al. Grand unification with and without supersymmetry and cosmological implications[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1983.
- [136] ROSS G G. Grand unified theories[M]. California: The Benjaming/Cummings Publishing Company, 1984.
- [137] RABY S. Supersymmetric grand unified theories: From quarks to strings via susy guts [M]. New York: Springer International Publishing, 2017.
- [138] GREINER W, MULLER B. Gauge theory of weak interactions[M]. Heidelberg: Springer, 2009.

- [139] CHENG T P, LI L F. Gauge theory of elementary particle physics[M]. Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [140] COLLINS P D B, MARTIN A D, SQUIRES E J. Particle physics and cosmology[M]. New York: Wiley, 1989.
- [141] 戴元本. 相互作用的规范理论[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [142] ZEE A. Einstein gravity in a nutshell[M]. Princeton and Oxford: Princeton University Express, 2013.
- [143] APPELQUIST T, CHODOS A, FREUND P G O. Modern kaluza-klein theory[M]. Boston: Addison-Wesley Editing Company, 1987.
- [144] BAILIN D, LOVE A. Kaluza-klein theories[J]. Reports on Progress in Physics, 1987, 50 (9): 1087.
- [145] MARTIN S P. A supersymmetry primer[M]. 2016.
- [146] QUEVEDO F, KRIPPENDORF S, SCHLOTTERER O. Cambridge lectures on supersymmetry and extra dimensions[M]. 2010.
- [147] TONG D. Supersymmetric field theory[M].
- [148] TONG D. Supersymmetric quantum mechanics[M].
- [149] WEINBERG S. The quantum theory of fields[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [150] WESS J, BAGGER J. Supersymmetry and supergravity: Revised edition: Vol. 25[M]. Princeton university press, 2020.
- [151] LABELLE P. Supersymmetry demystified[M]. Los Angeles: McGraw-Hill Professional, 2009.
- [152] WEST P C. Introduction to supersymmetry and supergravity[M]. Singapore: World Scientific, 1990.
- [153] BAILIN D, LOVE A. Supersymmetric gauge field theory and string theory[M]. Oxford: Taylor & Francis, 1994.
- [154] 李新洲, 徐建军. 超对称物理导论[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1992.
- [155] GREEN M B, SCHWARZ J H, WITTEN E. Superstring theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [156] ZWIEBACH B. A first course in string theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [157] MCMAHON D. String theory demystified[M]. Los Angeles: McGraw-Hill Professional, 2008.
- [158] POLCHINSKI J. String theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [159] KIRITSIS E. String theory in a nutshell[M]. Princeton: Princeton University Press, 2019.

- [160] BECKER K, BECKER M, SCHWARZ J. String theory and m-theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [161] TONG D. String theory[M].
- [162] 李淼. 超弦史话[M]. 北京: 北京大学出版社, 2016.
- [163] 天津大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [164] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [165] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 王寿松. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [166] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [167] 梁昆淼. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [168] 周顺. 物理中的数学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2017.
- [169] RICHARD COURANT D H. Methods of mathematical physics[M]. New Jersey: Wiley, 1989.
- [170] 顾樵. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [171] NEEDHAM T. Visual complex analysis[M]. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [172] 龚昇. 简明复分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [173] OPPENHEIM A V, WILLISKY A S, HAMID S. Signals and systems[M]. Ohio: Prentice Hall, 1996.
- [174] GOWERS T, BARROW-GREEN J, LEADER I. The princeton companion to mathematics[M]. Princeton: Princeton University Press, 2014.
- [175] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012.
- [176] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 2002.
- [177] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [178] 叶其孝, 沈永欢. 实用数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [179] 蔡德勒. 数学指南: 实用数学手册[M]. 李文林, 译. 北京: 科学出版社, 2012.
- [180] GRADSHTEYN I, RYZHIK I. Table of integrals, series, and products[M]. Amsterdam: Elsevier, 2007.
- [181] 王怀玉. 物理学中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [182] 天津大学数学系. 概率论与数理统计讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [183] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [184] LAY D C. Linear algebra and its applications[M]. Boston: Addison-Wesley, 1998.
- [185] 谢树艺. 矢量分析与场论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [186] 侯伯元, 侯伯宇. 物理学家用微分几何[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

- [187] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [188] 汪容. 数学物理中的微分几何与拓扑学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1998.
- [189] VON WESTENHOLZ C. Differential forms in mathematical physics[M]. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [190] 韩其智, 孙洪洲. 群论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.
- [191] 李新征. 群论及其在凝聚态物理学中的应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2019.
- [192] 刘玉鑫. 物理学家用李群李代数[M]. 北京: 北京大学出版社, 2022.
- [193] 马中骐. 物理学中的群论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [194] HALL B C. Lie groups, lie algebras, and representations[M]. New York: Springer International Publishing, 2015.
- [195] LEMONS D. A student's guide to dimensional analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [196] 谈庆明. 相似分析[M]. 北京: 北京大学出版社, 2019.
- [197] 梁灿彬, 曹周键. 量纲理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
- [198] 赵凯华. 定性半定量物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [199] CHALMERS A. What is this thing called science: An assessment of the nature and status of science and its methods[M]. London: Open University Press, 1999.
- [200] WEINBERG S. Dreams of a final theory[M]. New York: Knopf Doubleday Publishing Group, 2011.
- [201] ALEXANDER ROSENBERG L M. The philosophy of science: A contemporary introduction[M]. New York: Routledge/Taylor Francis Group, 2019.