

# Thema 2: Bayes-Modelle einer kleinen Welt

## QM2, ReThink\_v1, Kap. 2

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

- 1 Kleine Welt, große Welt
- 2 Bayes-Statistik als Zählen
- 3 Ein erstes Modell
- 4 Bayes berechnen mit R
- 5 Hinweise

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Kleine Welt, große Welt

# Behaims Globus, Kolumbus glücklicher Fehler

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

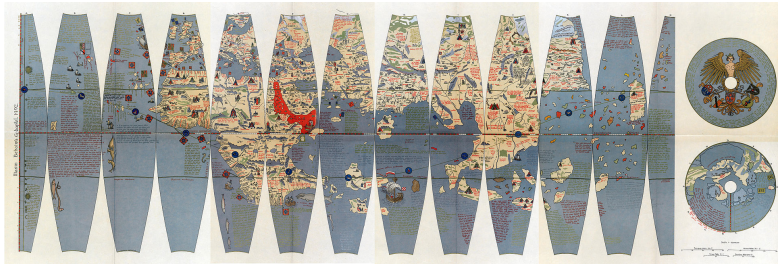
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Quelle

# Kleine Welt, große Welt

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

## Kleine Welt

- Die Welt, wie sie der Golem sieht
- entspricht dem Modell

## Große Welt

- Die Welt, wie sie in Wirklichkeit ist
- entspricht nicht (zwangsläufig) dem Modell

- Die kleine Welt ist nicht die große Welt.
- Was in der kleinen Welt funktioniert, muss nicht in der großen Welt funktionieren.
- Modelle zeigen immer nur die kleine Welt: Vorsicht vor schnellen Schlüssen und vermeintlicher Gewissheit.

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Bayes-Statistik als Zählen

# Murmeln im Säckchen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

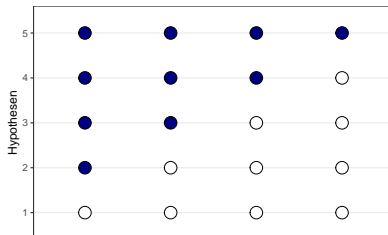
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Sie haben ein Säckchen mit vier Murmeln darin.
- Sie wissen nicht, welche Farben die Murmeln haben.
- Murmeln gibt's in zwei Farben: weiß (W) oder blau (B).
- Es gibt daher fünf *Hypothesen* zur Farbe der Murmeln im Säckchen: [WWWW], [BWWW], [BBWW], [BBBW], [BBBB.]
- Unsere Aufgabe ist, die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen nach Ziehen von Murmeln zu bestimmen.



# Unsere Daten

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Wir ziehen eine Murmel, merken uns die Farbe und legen sie zurück. Das wiederholen wir noch zwei Mal (Ziehen mit Zurücklegen).
- Wir erhalten: BWB.
- Voilà: unsere Daten.



(Kurz 2021)



# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BW WW], 1. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wenn Hypothese [BW WW] der Fall sein sollte, dann können wir im *ersten* Zug entweder die eine blaue Murmel erwischen oder eine der drei weißen.



Nachdem wir die Murmel gezogen haben (und die Farbe gemerkt haben), legen wir sie wieder ins Säckchen: Ziehen mit Zurücklegen.

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1. und 2. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

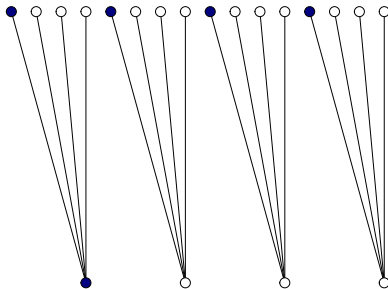
Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wenn Hypothese [BWWW] der Fall sein sollte, dann haben wir im *zweiten* Zug natürlich die gleichen Möglichkeiten wie im ersten.

Zug 1 und Zug 2 zusammen genommen gibt es  $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$  Kombinationen an gezogenen Murmeln:



Die ersten vier Kombinationen sind: BB, BW, BW, BW

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1.-3. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

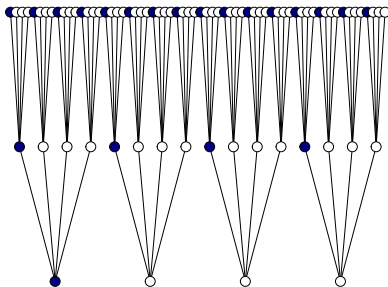
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Zug 1, Zug 2 und Zug 3 zusammen genommen, gibt es dann  
 $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$  Kombinationen, drei Murmeln zu ziehen.



# Welche Züge sind logisch möglich?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

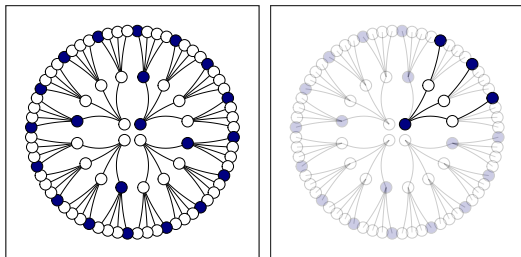
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Einige Kombinationen (“Pfade”) der Hypothese [BWWW] lassen sich nicht mit unseren Daten (BWB) vereinbaren.
- Z.B. alle Kombinationen die mit W beginnen, sind nicht mit unseren Daten zu vereinbaren.



Nur 3 der 64 “Pfade” (Kombinationen) sind mit unseren Daten logisch zu vereinbaren.

# Kombinationen für Hypothesen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

| Hypothese | Häufigkeit WBW  |
|-----------|-----------------|
| [W W W W] | $0 * 4 * 0 = 0$ |
| [B W W W] | $1 * 3 * 1 = 3$ |
| [B B W W] | $2 * 2 * 2 = 8$ |
| [B B B W] | $3 * 1 * 3 = 9$ |
| [B B B B] | $4 * 0 * 4 = 0$ |

- Die Häufigkeiten der Kombinationen (Pfade) ist proportional zur Plausibilität einer Hypothese.
- Zusätzlich müssten wir noch beachten, ob bestimmte Hypothesen *per se* bzw. *a priori* wahrscheinlicher sind. So könnten blaue Murmeln selten sein. Gehen wir der Einfachheit halber zunächst davon aus, dass alle Hypothesen *a priori* gleich wahrscheinlich sind.

# Pfadbaum für die Hypothesen [BWWW], [BBWW], [BBBW]

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

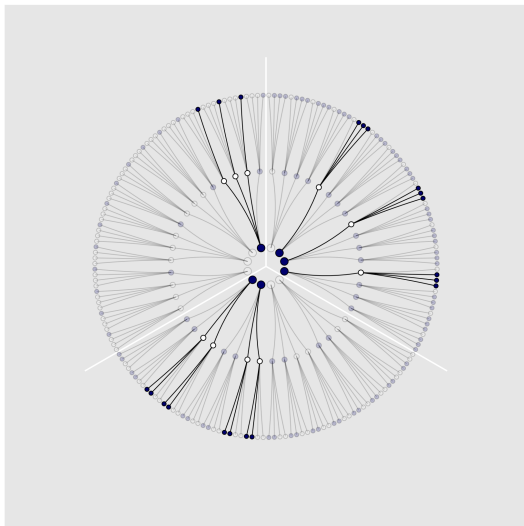
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



# Wir ziehen eine vierte Murmel: B

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Gehen wir zunächst davon aus, dass alle Hypothesen apriori gleich wahrscheinlich sind.
- Wir ziehen wieder eine Murmel. Sie ist blau (B)!
- Jetzt könnten wir den Pfadbaum für vier (statt drei) Züge aufmalen.
- Oder wir machen ein *Update*: Wir aktualisieren die bisherigen Kombinationshäufigkeiten um die neuen Daten. Die *alten* Daten dienen dabei als *Priori-Informationen* für die *neuen* Daten.

# Priori-Information nutzen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Mit den Daten BWBB ist die Hypothese [BBBW] am wahrscheinlichsten:

| Hyp       | PB | HA | HN           |
|-----------|----|----|--------------|
| [W W W W] | 0  | 0  | $0 * 0 = 0$  |
| [B W W W] | 1  | 3  | $1 * 3 = 3$  |
| [B B W W] | 2  | 8  | $2 * 8 = 16$ |
| [B B B W] | 3  | 9  | $3 * 9 = 27$ |
| [B B B B] | 4  | 0  | $4 * 0 = 0$  |

Hyp: Hypothese

PB: Anzahl von Pfaden für B

HA: alte (bisherige) Häufigkeiten

HN: neue (geupdatete) Häufigkeiten



# Murmelfabrik streikt: Blaue Murmeln jetzt sehr selten!

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Berücksichtigen wir jetzt die Information, dass apriori (bevor wir die Daten gesehen haben), einige Hypothesen wahrscheinlicher (plausibler) sind als andere.
- Hier ist die Hypothese [BBWW] am wahrscheinlichsten:

| Hyp       | HA | HF | HN            |
|-----------|----|----|---------------|
| [W W W W] | 0  | 0  | $0 * 0 = 0$   |
| [B W W W] | 3  | 3  | $3 * 3 = 9$   |
| [B B W W] | 16 | 2  | $16 * 2 = 32$ |
| [B B B W] | 27 | 1  | $27 * 1 = 27$ |
| [B B B B] | 0  | 0  | $0 * 0 = 0$   |

HF: Häufigkeit des Säckchentyps laut Fabrik.

# Zählen mit großen Zahlen nervt

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Malen Sie mal den Pfadbaum für 10 Züge ...
- Eine Umrechnung der Häufigkeiten in *Anteile* macht das Rechnen einfacher.
- Dazu definieren wir die *geupdatete Plausibilität einer Hypothese nach Kenntnis der Daten*:

Plausibilität von [BWWW] nach Kenntnis von BWB

$\propto$

Anzahl möglicher Pfade bei [BWWW] für BWB

$\times$

Priori-Plausibilität von [BWWW]

- $\propto$ : proportional zu

# Plausibilität berechnen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Sei  $p$  der Anteil blauer Murmeln. Bei Hypothese [BWWW] gilt dann:  $p = 1/4 = 0.25$ . Sei  $D_{neu} = \text{BWB}$ , die Daten:

Plausibilität von  $p$  nach Kenntnis von  $D_{neu}$

$\propto$

Anzahl Pfade von  $p$  für  $D_{neu}$

$\times$

Priori-Plausibilität von  $p$

“Für jeden Wert von  $p$  beurteilen wir dessen Plausibilität als umso höher, je mehr Pfade durch den Pfadbaum führen und je höher die Plausibilität des Werts von  $p$  von vornherein ist.”

# Von Plausibilität zur Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Teilen wir die Anzahl Pfade einer Hypothese durch die Anzahl aller Pfade (aller Hypothesen), so bekommen wir einen Anteil. Damit haben wir eine Wahrscheinlichkeit:

$$\text{PI von } p \text{ mit Daten } D_{\text{neu}} = \frac{\text{Anzahl Pfade von } p \text{ für } D_{\text{neu}} \times \text{Prior-PI von } p}{\text{Summe aller Pfade}}$$

PI: Plausibilität

# Plausibilität pro Hypothese

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

| Hyp       | p    | AP | PI   |
|-----------|------|----|------|
| [W W W W] | 0.00 | 0  | 0.00 |
| [B W W W] | 0.25 | 3  | 0.15 |
| [B B W W] | 0.50 | 8  | 0.40 |
| [B B B W] | 0.75 | 9  | 0.45 |
| [B B B B] | 1.00 | 0  | 0.00 |

p: Anteil blauer Murmeln (Priori-Information)

AP: Anzahl von möglichen Pfaden

PI: Plausibilität

```
AP <- c(0, 3, 8, 9, 0)
```

```
PI <- AP / sum(AP)
```

```
PI
```

```
## [1] 0.00 0.15 0.40 0.45 0.00
```

- Kennwerte laut einer Hypothese, wie den Anteil blauer Murmeln  $p$  bezeichnet man als *Parameter*.
- Den Anteil gültiger Pfade pro Hypothese (bzw. pro Wert von  $p$ ) bezeichnet man als *Likelihood*.
- Die Priori-Plausibilität nennt man *Priori-Wahrscheinlichkeit*.
- Die neue, geupdatete Plausibilität für einen bestimmten Wert von  $p$  nennt man *Posteriori-Wahrscheinlichkeit*.

# Zusammenfassung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- 1 Schritt: Unser Vorab-Wissen zur Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese wird mit dem Begriff *Priori-Verteilung* gefasst.
- 2 Schritt: Wir zählen den Anteil gültiger Pfade für jede Hypothese; d.h. wir berechnen den *Likelihood* jeder Hypothese.
- 3 Schritt: Mit den Likelihoods *updaten* wir unsere *Priori-Verteilung*. Die Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese verändert sich entsprechend der Daten. Es resultiert die *Posteriori-Verteilung*.

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

**Ein erstes  
Modell**

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

## Ein erstes Modell



# Welcher Anteil der Erdoberfläche ist mit Wasser bedeckt?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Sie werden einen Globus-Ball in die Luft und fangen in wieder auf. Sie notieren dann, ob die Stelle unter Ihrem Zeigefinger Wasser (W) oder Land (L). Den Versuch wiederholen Sie 9 Mal.

Quelle CC 4.0 BY-NC

W L W W W L W L W

# Der datengenierende Prozess: Wie entstanden die Daten?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- 1 Der wahre Anteil von Wasser der Erdoberfläche ist  $p$ .
- 2 Ein Wurf des Globusballes hat die Wahrscheinlichkeit  $p$ , eine  $W$ -Beobachtung zu erzeugen.
- 3 Die Würfe des Globusballes sind unabhängig voneinander.
- 4 Wir haben kein Vorwissen über  $p$ ; jeder Wert ist uns gleich wahrscheinlich.

# Wissen updaten: Wir füttern Daten in das Modell

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

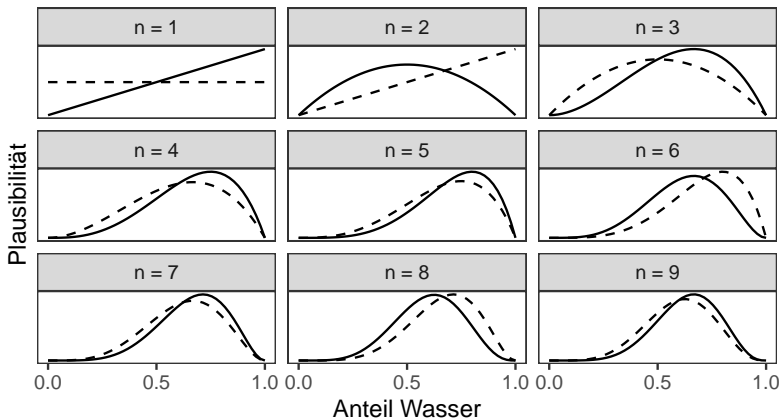
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Gestrichelte Linie: Priori-Verteilung (vor den Daten);  
Durchgezogene Linie: Posteriori-Verteilung (nach Daten)

# Erinnern wir uns an das Urnen-Beispiel

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Für jede Hypothese haben wir ein Vorab-Wissen, das die jeweilige Plausibilität der Hypothese angibt: *Priori-Verteilung*.
- Für jede Hypothese (d.h. jeden *Parameterwert*  $p$ ) möchten wir den Anteil (die Wahrscheinlichkeit) gültiger Kombinationen wissen. Das gibt uns den *Likelihood*.
- Dann gewichten wir den Likelihood mit dem Vorabwissen, so dass wir die *Posteriori-Verteilung* bekommen.



# Die Binomialverteilung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wir nehmen an, dass die Daten unabhängig voneinander entstehen und sich der Parameterwert nicht zwischenzeitlich ändert.

Dann kann man die Wahrscheinlichkeit ( $Pr$ ),  $W$  mal Wasser und  $L$  mal Land zu beobachten, wenn die Wahrscheinlichkeit für Wasser  $p$  beträgt, mit der *Binomialverteilung* berechnen:

$$Pr(W, L|p) = \frac{(W + L)!}{W!L!} p^W (1 - p)^L$$

# Binomialverteilung mit R

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Was ist der Anteil der gültigen Pfade, um 6 mal  $W$  bei  $N = W + L = 9$  Würfeln zu bekommen, wenn wir von  $p = 1/2$  ausgehen?

```
## [1] 0.1640625
```

# Unser Modell ist geboren

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wir fassen das Globusmodell so zusammen:

$$W \sim \text{Bin}(N, p),$$

Lies: “ $W$  ist *binomial* verteilt mit den Parametern  $N$  und  $p$ ”.  $N$  gibt die Anzahl der Globuswürfe an:  $N = W + L$ .

Unser Vorab-Wissen zu  $p$  sei, dass uns alle Werte gleich plausibel erscheinen (“uniform”):

$$p \sim \text{Unif}(0, 1).$$

Lies:  $p$  ist gleich (uniform) verteilt mit der Untergrenze 0 und der Obergrenze 1.

# So sehen die Verteilungen aus

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

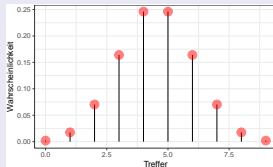
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

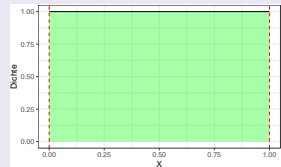
Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

## Binomialverteilung



## Gleichverteilung





# Bayes' Theorem 1/2: Gemeinsame Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit für *Regen* und *kalt* ist gleich der Wahrscheinlichkeit von *Regen*, gegeben *kalt* mal der Wahrscheinlichkeit von *kalt*. Entsprechend gilt: Die Wahrscheinlichkeit von  $W$ ,  $L$  und  $p$  ist das Produkt von  $Pr(W, L|p)$  und der Prior-Wahrscheinlichkeit  $Pr(p)$ :

$$Pr(W, L, p) = Pr(W, L|p) \cdot Pr(p)$$

Genauso gilt: Die Wahrscheinlichkeit von *Regen* und *kalt* ist gleich der Wahrscheinlichkeit *kalt*, wenn's regnet mal der Wahrscheinlichkeit von *Regen*:

$$Pr(W, L, p) = Pr(p|W, L) \cdot Pr(W, L)$$

# Bayes' Theorem 2/2: Posteriori-Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wir setzen die letzten beiden Gleichungen gleich:

$$Pr(W, L|p) \cdot Pr(p) = Pr(p|W, L) \cdot (W, L)$$

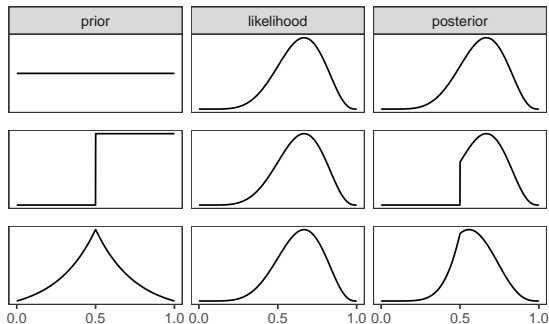
Und lösen auf nach der Posteriori-Wahrscheinlichkeit,  
 $Pr(p|W, L)$ :

$$Pr(p|W, L) = \frac{Pr(W, L|p)Pr(p)}{Pr(W, L)}$$

$Pr(W, L)$  nennt man die *mittlere Wahrscheinlichkeit der Daten* oder *Evidenz*. Die Evidenz berechnet sich als Mittelwert der Likelihoods über alle Werte von  $p$ . Die Aufgabe dieser Größe ist nur dafür zu sorgen, dass insgesamt Werte zwischen 0 und 1 herauskommen.

# Posteriori als Produkt von Priori und Likelihood

$$\text{Posteriori} = \frac{\text{Likelihood} \times \text{Priori}}{\text{Evidenz}}$$



Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Bayes berechnen mit R

# Die Methode *Gitter-Annäherung*<sup>1</sup>

Thema 2:

Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- 1 Teile den Wertebereich des Parameter in ein “Gitter” auf, z.B. 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1 (“Gitterwerte”).
- 2 Bestimme den Priori-Wert des Parameters für jeden Gitterwert.
- 3 Berechne den Likelihood für Gitterwert.
- 4 Berechne den unstandardisierten Posteriori-Wert für jeden Gitterwert (Produkt von Priori und Likelihood).
- 5 Standardisiere den Posteriori-Wert durch teilen anhand der Summe alle unstand. Posteriori-Werte.

---

<sup>1</sup>Grid Approximation

# Gitterwerte in R berechnen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

```
d <-  
  tibble(  
    # definiere das Gitter:  
    p_Gitter = seq(from = 0, to = 1, length.out = 10)  
    # bestimme den Priori-Wert:  
    Priori = 1) %>%  
  mutate(  
    # berechne Likelihood für jeden Gitterwert:  
    Likelihood = dbinom(6, size = 9, prob = p_Gitter)  
    # berechne unstand. Posteriori-Werte:  
    unstd_Post = Likelihood * Priori,  
    # berechne stand. Posteriori-Werte (summiert zu 1)  
    Post = unstd_Post / sum(unstd_Post))
```

# Unsere Gitter-Daten

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

| p_Gitter | Priori | Likelihood | unstd_Post | Post |
|----------|--------|------------|------------|------|
| 0.00     | 1      | 0.00       | 0.00       | 0.00 |
| 0.11     | 1      | 0.00       | 0.00       | 0.00 |
| 0.22     | 1      | 0.00       | 0.00       | 0.01 |
| 0.33     | 1      | 0.03       | 0.03       | 0.04 |
| 0.44     | 1      | 0.11       | 0.11       | 0.12 |
| 0.56     | 1      | 0.22       | 0.22       | 0.24 |
| 0.67     | 1      | 0.27       | 0.27       | 0.30 |
| 0.78     | 1      | 0.20       | 0.20       | 0.23 |
| 0.89     | 1      | 0.06       | 0.06       | 0.06 |
| 1.00     | 1      | 0.00       | 0.00       | 0.00 |

# Mehr Gitterwerte, glattere Annäherung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

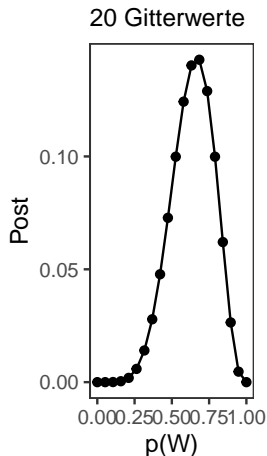
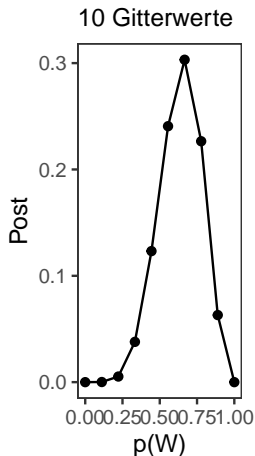
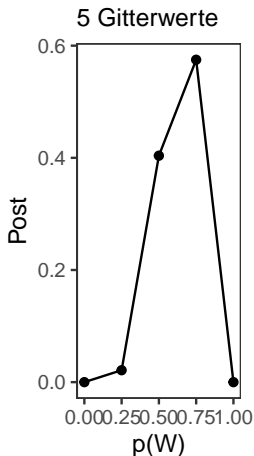
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise





# Quadratische Anpassung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Komfortabler noch ist die *quadratische Anpassung*, die bestimmte statistische Eigenschaften von linearen Modellen ausnutzt:

```
library(rethinking)

globus_qa <- quap(
  alist(
    W ~ dbinom(W + L, p), # Likelihood ist binomial verteilt
    p ~ dunif(0, 1)       # Priori ist gleich (uniform) verteilt
  ),
  data = list(W = 6, L = 3)
)

# Gib mir die zentralen Ergebnisse:
precis(globus_qa)
```

```
##           mean          sd      5.5%      94.5%
## p 0.6666668 0.1571337 0.4155368 0.9177969
```

# Je größer $n$ , desto glatter die Anpassung an die wahre Verteilung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

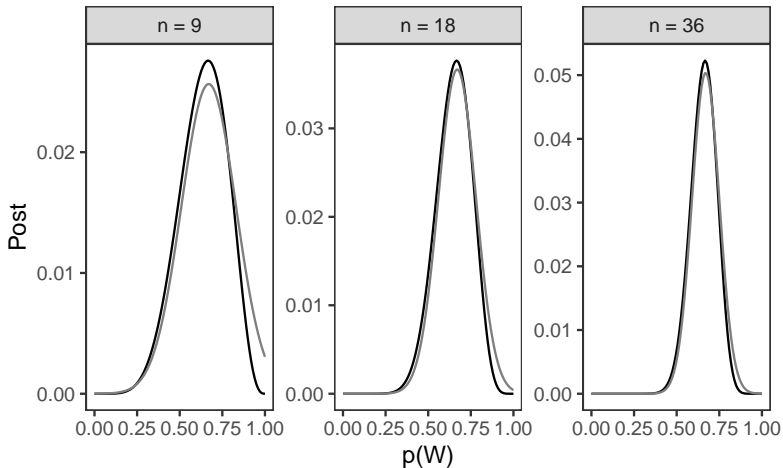
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Hinweise

# Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 2 aus McElreath (2016) (“ReThink\_v1”)
- R-Code für die Diagramme stammt aus Kurz (2021)

## Thema 2:

Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Kurz, A. Solomon. 2021. *Statistical Rethinking with Brms, Ggplot2, and the Tidyverse: Second Edition*.  
<https://bookdown.org/content/4857/>.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.