

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

QM2, ROS, Kap. 1, ReThink\_v1, Kap. 1

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

- 1 Was ist Inferenzstatistik?
- 2 Regression und Inferenz
- 3 Klassische vs. Bayes-Inferenz
- 4 Ungewissheit quantifizieren
- 5 Hinweise

## Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Was ist Inferenzstatistik?

# Deskriptiv- vs. Inferenzstatistik

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

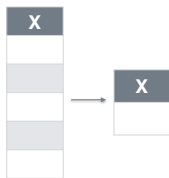
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

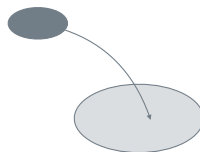
Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Deskriptivstatistik



Inferenzstatistik



# Wozu ist die Inferenstatistik da?

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

## Inferenz

Inferenz bedeutet logisches Schließen; auf Basis von vorliegenden Wissen wird neues Wissen generiert.

## Inferenzstatistik

Inferenzstatistik ist ein Verfahren, das mathematische Modelle verwendet, um von einer bestimmten Datenlage, die eine Stichprobe einer Grundgesamtheit darstellt, allgemeine Schlüsse zu ziehen.

# Deskriptiv- und Inferenzstatistik gehen Hand in Hand

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Für jede Kennzahl der Deskriptivstatistik (d.h. Stichprobendaten) kann man die Methoden der Inferenzstatistik verwenden (auf eine Grundgesamtheit schließen), z.B.:

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit
Mittelwert	$\bar{X}$	$\mu$
Streuung	$sd$	$\sigma$
Anteil	$p$	$\pi$
Korrelation	$r$	$\rho$
Regression	$b$	$\beta$

Für Stichprobendaten verwendet man lateinische Buchstaben ( $X, p, b, \dots$ ); für Populationsdaten verwendet man griechische Buchstaben.

# Schätzen von Parametern einer Grundgesamtheit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Meist begnügt man sich nicht mit Aussagen für eine Stichprobe, sondern will auf eine Grundgesamtheit verallgemeinern.

Leider sind die Parameter einer Grundgesamtheit zumeist unbekannt, daher muss man sich mit *Schätzungen* begnügen.

Schätzwerte werden mit einem “Dach” über dem Kennwert gekennzeichnet, z.B.

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit	Schätzwert
Mittelwert	$\bar{X}$	$\mu$	$\hat{\mu}$
Streuung	$sd$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$
Anteil	$p$	$\pi$	$\hat{\pi}$
Korrelation	$r$	$\rho$	$\hat{\rho}$
Regression	$b$	$\beta$	$\hat{\beta}$



# Beispiel für eine inferenzstatistische Fragestellung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Sie testen zwei Varianten Ihres Webshops (V1 und V2), die sich im Farbschema unterscheiden und ansonsten identisch sind.

- Hat das Farbschema einen Einfluss auf den Umsatz?
- Dazu vergleichen Sie den mittleren Umsatz pro Tag von V1 vs. V2,  $\bar{X}_{V1}$  und  $\bar{X}_{V2}$ .
- Die Mittelwerte unterscheiden sich etwas,  $\bar{X}_{V1} > \bar{X}_{V2}$
- Sind diese Unterschiede “zufällig” oder “substanziell”? Gilt also  $\mu_{V1} > \mu_{V2}$  oder  $\mu_{V1} \leq \mu_{V2}$ ?

# Was heißt “zufällig”?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Definition

Unter einem zufälligen Ereignis (random) verstehen wir ein Ereignis, das nicht (komplett) vorherzusehen ist, wie etwa die Augenzahl Ihres nächsten Würfelwurfs. Zufällig bedeutet nicht (zwangsläufig), dass das Ereignisse keine Ursachen besitzt. So gehorchen die Bewegungen eines Würfels den Gesetzen der Physik, nur sind uns diese oder die genauen Randbedingungen nicht (ausreichend) bekannt.

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Regression und Inferenz

# Für jede Fragestellung einen anderen Test

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

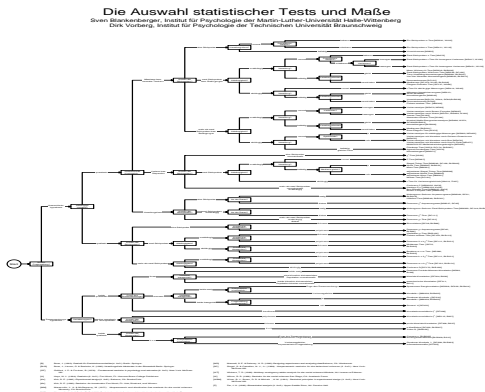
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Oder man nimmt einfach immer die Regression

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

## Regression und Inferenz

### Common statistical tests are linear models

See worked examples and more details at the accompanying  
[website: https://lib.arts.uwa.edu.au/learning/teaching-and-learning/teaching-strategies/active-learning/active-learning-techniques/active-learning-techniques-1](https://lib.arts.uwa.edu.au/learning/teaching-and-learning/teaching-strategies/active-learning/active-learning-techniques/active-learning-techniques-1)

[illegible]

List of common parametric (P) non-parametric (N) tests and equivalent linear models. The notation  $y = 1 + x$  is R shorthand for  $y = 1 + x$  which most of us learned in school. Models in similar colors are highly similar, but really, notice how similar they are to each other across colors! For non-parametric models, the linear models are reasonable approximations for non-small sample sizes (see "Exact" and "link" columns and click links to see simulations). Other less accurate approximations exist, e.g., Wilcoxon for the sign test and Goodness-of-Fit for the binomial test. The signed rank function is `signed.rank <- function(x) sign(x) * rank(abs(x))`. The variables G and S are: `library(codetools); indicators <- within(0:1)` exploiting the fact that when  $\Delta x = 1$  the differences across the difference equals the slope. Subscripts (e.g., G<sub>1</sub> or y<sub>1</sub>) indicate different columns in data. It requires long-form data for all non-continuous models. All of it is explained in greater detail and worked examples at <https://r4ds.wyke.com/chapters/10/>.

<sup>a</sup> See the note to the two-way ANOVA for explanation of the notation.

<sup>2</sup> Same model, but with one variance per dataset: `variance ~ 1 + G`; weights = variances; `m = gls(m0, method="REML")`.

 Jonas Kristoffer Lindén  
<https://lindenj.com>

Jonas Kristoffer L.  
[jonas.kristoffer.l@ntnu.no](mailto:jonas.kristoffer.l@ntnu.no)

Quelle

# Gängige statistische Tests sind Spezialfälle der Regression

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



# To rule 'em all

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

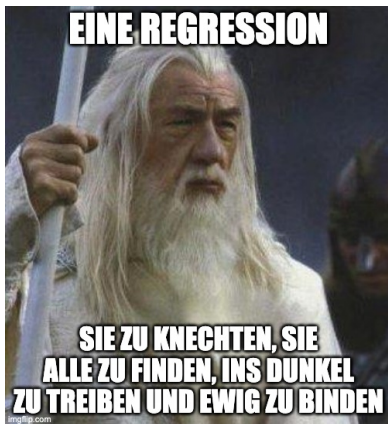
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Quelle

# Was war noch mal die Regression?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

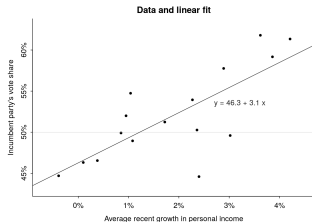
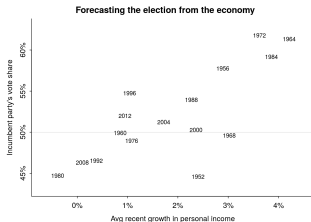
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Regression (Regressionsanalyse) ist eine Methode, um Zielvariablen in Abhängigkeit der Ausprägung von Prädiktorvariablen von Beobachtungen vorherzusagen.
- Dabei erlaubt die Regression die Quantifizierung der Ungewissheit der Vorhersagen.



Quelle



# Die Regressionsgleichung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

In voller Pracht:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

- $y$ : Zielvariable (vorherzusagen)
- $\beta_0$ : Achsenabschnitt
- $\beta_1$ : Regressionsgewicht (Steigung der Regressionsgeraden)
- $\epsilon$ : "Fehler"; Einflüsse auf  $y$ , die das Modell nicht kennt

# Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

```
data(mtcars)
library(rstanarm)
lm1 <- stan_glm(mpg ~ hp, data = mtcars)
```

```
print(lm1)
```

	Median	MAD_SD
(Intercept)	30.0	1.7
hp	-0.1	0.0

Auxiliary parameter(s):

	Median	MAD_SD
sigma	3.9	0.5

# Visualisierung zum Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

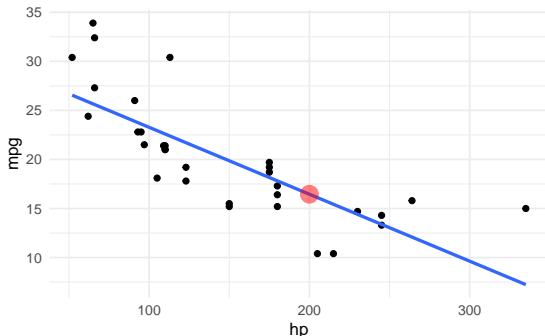
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Rot markiert: Der *vorhergesagte* Wert von mpg für hp=200 (Punktschätzung).

# Der Punktschätzer berücksichtigt nicht die Ungewissheit des Models

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

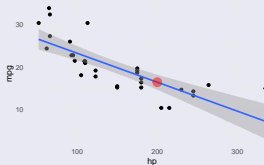
Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

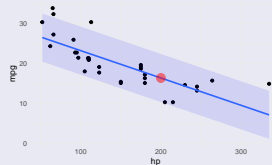
Mindestens zwei Arten von Ungewissheit müssen wir in unseren Vorhersagen berücksichtigen:

- zur Lage der Regressionsgeraden ( $\beta_0, \beta_1$ )
- zu Einflüssen, die unser Modell nicht kennt ( $\epsilon$ )

Ungewissheit in  $\beta_0, \beta_1$



Ungewissheit in  $\epsilon$



# Vorhersage-Intervall: berücksichtigt Ungewissheit in $\beta_0, \beta_1, \epsilon$

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

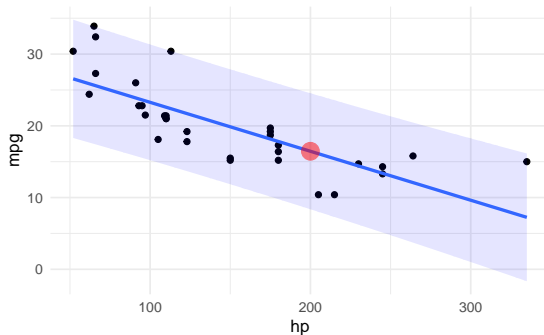
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Das Vorhersage-Intervall berücksichtigt Ungewissheit in  $\beta_0, \beta_1, \epsilon$  bei der Vorhersage von  $\hat{y}_i$ .



# Wozu man die Regression benutzt

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- *Vorhersagen* (Wie stehen die Aktien morgen? Wann wird die Maschine ausfallen?)
- *Zusammenhänge untersuchen* (Wie stark ist der Zusammenhang, der 'statistische Effekt' von Lernzeit und Klausurerfolg?)
- *Adjustieren* (Was ist der Einfluss von Lernzeit von Klausurerfolg, wenn man die Motivation konstant hält?)
- *Kausalinferenz* (Wie groß ist der kausale Einfluss von Lernzeit auf den Klausurerfolg?)

# In Experimenten kann man die Ergebnisse kausal interpretieren

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

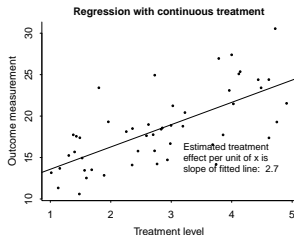
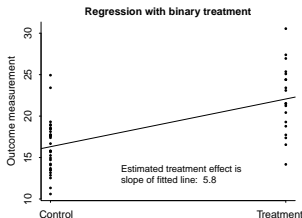
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



In einem gut gemachten Experiment geben die Koeffizienten der Regression den kausalen Effekt wider.

# Kausalmodell eines einfachen Experiments

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

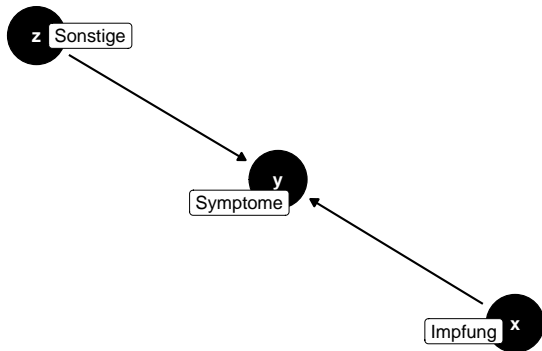
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Statistiken in (gut gemachten) Experimenten können kausal interpretiert werden: Der statistische Zusammenhang von *Impfung* auf *Symptome* entspricht dem kausalen Effekt.



# Beobachtungsstudien können nicht ohne Weiteres kausal interpretiert werden

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

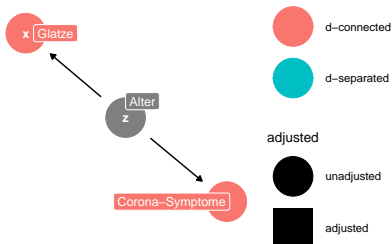
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Männer aufgepasst: Glatze macht Corona?!



Laut diesem Modell gibt es keinen kausalen Zusammenhang von *Glatze* zu *Corona*. Der statistische Zusammenhang ist ein *Scheinzusammenhang* (nichtkausal).

# Die lineare Regression ist erstaunlich flexibel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

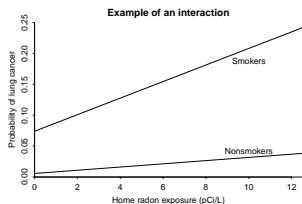
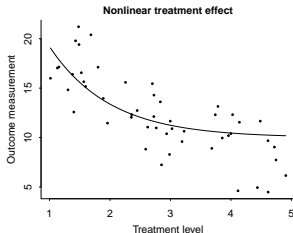
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Z.B.

- *Nichtlineare* Zusammenhänge
- Interaktionen



# Beispiel für nichtlineare Modelle: Die Log-Y-Regression

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Die Log-Y-Regression ist geeignet, um exponentielles Wachstum darzustellen.

$$\log(y) = \tilde{x}$$

mit  $\tilde{x} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$

Exponentiert man beide Seite, so erhält man:

$$y = e^{\tilde{x}} = e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot x}$$

$e$  ist die Eulersche Zahl: 2.71...

# Beispiele für exponentielle Zusammenhänge

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Eine Bakterienmenge verdoppelt sich jeden Tag
- Pro Jahr erzielt eine Kapitalanlage 10% Zinsen
- Während einer bestimmten Periode verdoppelten sich die Coronafälle alle 10 Tage
- Die Menge der Vitamine in einem Lebensmittel verringert sich pro Zeiteinheit um den Faktor  $k$

Generell bieten sich es an, zur Modellierung von Wachstumsprozessen auf exponentielles Zusammenhänge - und damit auf Log-Y-Regression - zurückzugreifen.

# So sieht exponentielles Wachstum aus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

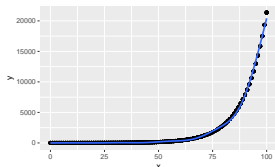
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

```
euler_e <- 2.71
d2 <-
  tibble(
    x = rep(0:100, 10),
    y_hat = euler_e^(0.1*x) %>% round(2),
    e = rnorm(n = (101)*10) %>% round(2),
    y = y_hat + e
  )
```



Steigt X um 1 Einheit, so steigt Y um einen konstanten Faktor:  
exponentielles Wachstum.

# Häufig sind Gruppen nicht direkt vergleichbar

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

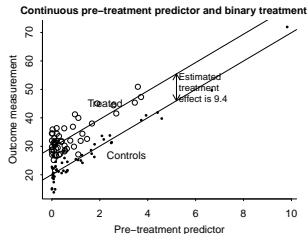
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- *Beispiel:* Die Heilungsraten in der Experimentalgruppe waren höher als in der Kontrollgruppe. Allerdings waren die Personen der Experimentalgruppe auch gesünder (als die Personen der Kontrollgruppe). Um den Kausaleffekt der Behandlung zu schätzen, müssen solche vorab bestehenden Unterschiede zwischen den Gruppen berücksichtigt (adjustiert) werden; mit der Regression ist dies möglich.



# Keine vorschnelle Kausalinterpretation

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Kausalinterpretationen statistischer Ergebnisse (z.B. Mittelwertsdifferenz von Behandlungs- vs. Kontrollgruppe) ist nur möglich, wenn
  - die Studie gut kontrolliert und randomisiert ist (und die Stichprobe groß ist) oder
  - bestehende Unterschiede nicht randomisiert, aber kontrolliert wurden oder
  - diese gemessen und in der Regressionsanalyse berücksichtigt wurden

Ansonsten muss auf eine Kausalinterpretation verzichtet werden.

Allerdings ist es möglich, Art und Stärke von Zusammenhängen zu schätzen.

# Was ist ein (statistisches) Modell?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

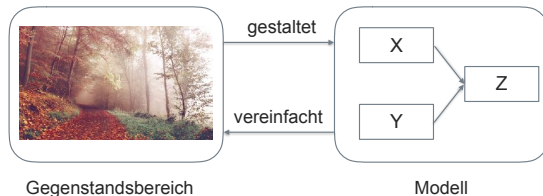
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit, z.B. in Form einer Landkarte, eines Modellauto oder einer Gleichung (Sauer 2019).
- Greift relevante Aspekte der Wirklichkeit heraus (und vernachlässigt andere).
- Die Regression eignet sich gut zum Modellieren mit Statistik.





# Beispiel für ein statistisches Modell

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

$$E = \beta_0 + \beta_1 \cdot L + \epsilon,$$

wobei  $E$  für *Erfolg in der Klausur* steht,  $L$  für die *Lernzeit* und  $\epsilon$  für den “Fehler” des Modells, sprich sonstige Einflussgrößen, die im Modell nicht berücksichtigt werden.

# Vorsicht bei Extrapolation von Trends

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

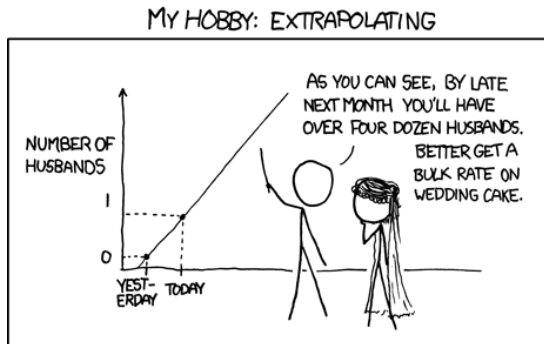
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Quelle

# Der Golem von Prag

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Der Golem von Prag, eine vom Menschen geschaffene Kreatur gewaltiger Kraft, die Befehle wörtlich ausführt.

Bei kluger Führung kann ein Golem Nützliches vollbringen. Bei unüberlegter Verwendung wird er jedoch großen Schaden anrichten.

Quelle

# Wissenschaftliche Modelle sind wie Golems

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Golem

- Besteht aus Lehm
- Belebt durch "Wahrheit"
- Mächtig
- dumm
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Märchen

## Modell

- Besteht aus ~~Lehm~~Silikon
- Belebt durch Wahrheit (?)
- Manchmal mächtig
- simpler als die Realität
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Nicht einmal falsch

*Wir bauen Golems.*

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Klassische vs. Bayes-Inferenz

# Klassische Inferenz: Frequentismus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Die Berücksichtigung von Vorwissen zum Sachgegenstand wird vom Frequentismus als subjektiv zurückgewiesen.
- Nur die Daten selber fließen in die Ergebnisse ein
- Wahrscheinlichkeit wird über relative Häufigkeiten definiert.
- Es ist nicht möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese anzugeben.
- Stattdessen wird angegeben, wie häufig eine vergleichbare Datenlage zu erwarten ist, wenn die Hypothese gilt und der Versuch sehr häufig wiederholt ist.
- Ein Großteil der Forschung (in den Sozialwissenschaften) verwendet diesen Ansatz.

# Bayesianische Inferenz

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Vorwissen (Priori-Wissen) fließt explizit in die Analyse ein (zusammen mit den Daten).
- *Wenn* das Vorwissen gut ist, wird die Vorhersage genauer, ansonsten ungenauer.
- Die Wahl des Vorwissens muss explizit (kritisierbar) sein.
- In der Bayes-Inferenz sind Wahrscheinlichkeitsaussagen für Hypothesen möglich.
- Die Bayes-Inferenz erfordert mitunter viel Rechenzeit und ist daher erst in den letzten Jahren (für gängige Computer) komfortabel geworden.

# Vergleich von Wahrscheinlichkeitsaussagen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Frequentismus

- zentrale Statistik: *p-Wert*
- “Wie wahrscheinlich ist der Wert der Teststatistik (oder noch extremere Werte), vorausgesetzt die Nullhypothese gilt und man wiederholt den Versuch unendlich oft (unter gleichen Bedingungen aber zufällig verschieden)?”

## Bayes-Statistik

- zentrale Statistik: *Posterior-Verteilung*
- “Wie wahrscheinlich ist die Forschungshypothese, jetzt nachdem wir die Daten kennen laut unserem Modell?”



# Frequentist und Bayesianer

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

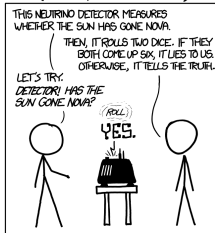
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

DID THE SUN JUST EXPLODE?  
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)



FREQUENTIST STATISTICIAN:

THE PROBABILITY OF THIS RESULT HAPPENING BY CHANCE IS  $\frac{1}{36} = 0.0277$ . SINCE  $p < 0.05$ , I CONCLUDE THAT THE SUN HAS EXPLODED.

BAYESIAN STATISTICIAN:

BET YOU \$50 IT HASN'T.

Quelle

# Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 1

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Ein Betrunkener behauptet, er könne hellsehen.
- Er wirft eine Münze 10 Mal und sagt jedes Mal korrekt vorher, welche Seite oben landen wird.
- Die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist sehr gering ( $2^{-10}$ ) unter der Hypothese, dass die Münze fair ist, dass Ergebnis also “zufällig” ist.
- Unser Vorwissen lässt uns allerdings trotzdem an der Hellsichtigkeit des Betrunkenen zweifeln, so dass die meisten von uns die Hypothese von der Zufälligkeit des Ergebnisses wohl nicht verwerfen.

# Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 2

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Eine Studie fand einen “großen Effekt” auf das Einkommen von Babies, eine Stunde pro Woche während zwei Jahren an einem psychosozialen Entwicklungsprogramm teilnahmen (im Vergleich zu einer Kontrollgruppe),  $n = 127$ .
- Nach 20 Jahren war das mittlere Einkommen der Experimentalgruppe um 42% höher (als in der Kontrollgruppe) mit einem Konfidenzintervall von  $[+2\%, +98\%]$ .
- Allerdings lässt uns unser Vorwissen vermuten, dass so ein Treatment das Einkommen nach 20 Jahren kaum verdoppeln lässt. Wir würden den Effekt lieber in einem konservativeren Intervall schätzen (enger um Null).

# Regression in R, der schnelle Weg zum Glück

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

*Bayesianische* Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- stan_glm(y ~ x, data = meine_daten)
```

*Klassische* Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- lm(y ~ x, data = meine_daten)
```

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

**Ungewissheit  
quantifizieren**

Hinweise

# Ungewissheit quantifizieren

# Was ist Wahrscheinlichkeit?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit  $p$  quantifiziert *Ungewissheit* im Hinblick auf eine Aussage bzw. ein Ereignis  $A$ , gegeben eines Hintergrundwissen  $H$ .  $p = 0$  heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für falsch (unmöglich);  $p = 1$  heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für wahr (sicher).  $0 < p < 1$  heißt, wir sind (mehr oder weniger) unsicher bzgl. der Aussage bzw. ob das Ereignis zutrifft.

- A: "Sokrates ist sterblich."; H: "Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch."  $\implies p(A|H) = 1$ .
- A: "Die Münze zeigt Kopf."; H: "Wir haben keinen Grund anzunehmen, dass eine der beiden Seiten häufiger oben liegt oder das sonst etwas passiert."  $\implies p(A|H) = 1/2$ .
- A: "Schorsch, das rosa Einhorn, mag Bier."; H: "50% der rosa Einhörner mögen Bier."  $\implies p(A|H) = 1/2$ .

# Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Axiome von Kolmogorow:

- 1  $p(A) \geq 0$  (Nichtnegativität)
- 2  $p(A) + p(\neg A) = 1$  (Normierung;  $\neg A$  ist das logische Gegenteil von  $A$ )
- 3 Die Wahrscheinlichkeit zweier unabhängiger Ereignisse ist die Summe ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten:  
$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) + p(A_2)$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- $p(A|H)$ : Die Wahrscheinlichkeit von  $A$ , gegeben  $H$ . Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln ( $A$ ), gegeben, dass der Würfel "fair" ist ( $H$ ), d.h. wir kein Wissen haben, dass eine Augenzahl häufiger auftritt, ist  $1/6$ .

# Wahrscheinlichkeit ist abhängig vom Hintergrundwissen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Ich habe gerade einen Stift in meiner Hosentasche (links oder rechts). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stift in meiner linken Tasche ist (und nicht in der rechten)?

Bezogen auf *Ihr* Hintergrundwissen gilt:

$$p(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"kein besonderes Wissen zu der Frage"}) = 1/2.$$

Bezogen auf *mein* Hintergrundwissen gilt:

$$p(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"Der Stift ist links"}) = 1.$$

Briggs (2016)



Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Hinweise

# Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 1 aus Gelman, Hill, und Vehtari (2021), *Regression and other Stories* (mit “ROS” abgekürzt)
- Kapitel 1 aus McElreath (2016) (“ReThink\_v1”)
- Rechenregeln sind z.B. in Cramer und Nešlehová (2015) (Kap. 3) oder ähnlichen Lehrbüchern nachzulesen.

Weitere Literaturhinweise sind am Ende der jeweiligen Kapitel der Lehrbücher zu finden.

R-Code zum Buch ROS findet sich auf der Homepage des Buchs.

# Literatur

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Briggs, William M. 2016. *Uncertainty: The Soul of Modeling, Probability & Statistics*. Springer.

Cramer, Erhard, und Johanna Nešlehová. 2015. *Vorkurs Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46400-7>.

Gelman, Andrew, Jennifer Hill, und Aki Vehtari. 2021. *Regression and Other Stories*. Analytical Methods for Social Research. Cambridge: Cambridge University Press.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.

Sauer, Sebastian. 2019. *Moderne Datenanalyse mit R: Daten einlesen, aufbereiten, visualisieren und modellieren*. 1. Auflage 2019. FOM-Edition. Wiesbaden: Springer. <https://www.springer.com/de/book/9783658215866>.