

# Thema 2: Bayes-Modelle einer kleinen Welt

## QM2, ReThink\_v1, Kap. 2

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

## 1 Kleine Welt, große Welt

## 2 Bayes-Statistik als Zählen

## 3 Hinweise

# Kleine Welt, große Welt

# Behaims Globus, Kolumbus glücklicher Fehler

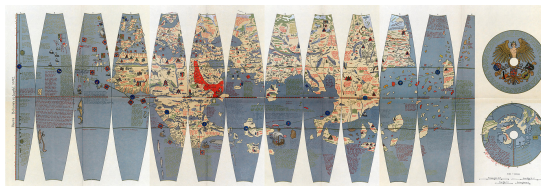
Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise



Quelle

# Kleine Welt, große Welt

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

## Kleine Welt

- Die Welt, wie sie der Golem sieht
- entspricht dem Modell

## Große Welt

- Die Welt, wie sie in Wirklichkeit ist
- entspricht nicht (zwangsläufig) dem Modell

- Die kleine Welt ist nicht die große Welt.
- Was in der kleinen Welt funktioniert, muss nicht in der großen Welt funktionieren.
- Modelle zeigen immer nur die kleine Welt: Vorsicht vor schnellen Schlüssen und vermeintlicher Gewissheit.

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

# Bayes-Statistik als Zählen

# Murmeln im Säckchen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

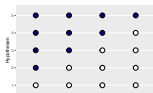
Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Sie haben ein Säckchen mit vier Murmeln darin.
- Sie wissen nicht, welche Farben die Murmeln haben.
- Murmeln gibt's in zwei Farben: weiß (W) oder blau (B).
- Es gibt daher fünf *Hypothesen* zur Farbe der Murmeln im Säckchen: WWWW, BWWW, BBWW, BBBW, BBBB.
- Unsere Aufgabe ist, die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen nach Ziehen von Murmeln zu bestimmen.



(Kurz 2021)

# Unsere Daten

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Wir ziehen eine Murmel, merken uns die Farbe und legen sie zurück. Das wiederholen wir noch zwei Mal (Ziehen mit Zurücklegen). Wir erhalten: BWB. Voilà: unsere Daten.





# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

Wenn Hypothese [BWWW] der Fall sein sollte, dann können wir im *ersten* Zug entweder die eine blaue Murmel erwischen oder eine der drei weißen.



Nachdem wir die Murmel gezogen haben (und die Farbe gemerkt haben), legen wir sie wieder ins Säckchen: Ziehen mit Zurücklegen.

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1. und 2. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

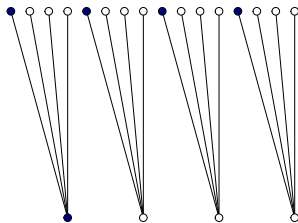
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

Wenn Hypothese [BWWW] der Fall sein sollte, dann haben wir im *zweiten* Zug natürlich die gleichen Möglichkeiten.

Zug 1 und Zug 2 zusammen genommen, gibt es also  $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$  Kombinationen, welche zwei Murmeln wir ziehen:



Die ersten vier Kombinationen sind: BB, BW, BW, BW

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1.-3. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

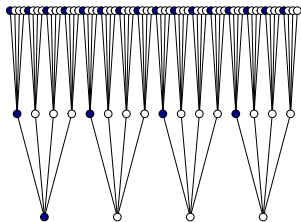
Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

Zug 1, Zug 2 und Zug 3 zusammen genommen, gibt es dann  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$  Kombinationen, drei Murmeln zu ziehen.



# Welche Züge sind logisch möglich?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

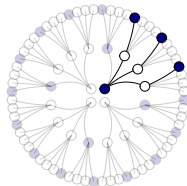
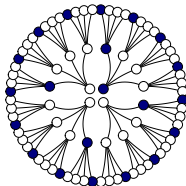
Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Bei 3 Zügen (mit jeweils 4 möglichen Murmeln) gibt es  $4^3$  Kombinationen an Murmeln.
- Aber einige Kombinationen lassen sich nicht mit unseren Daten (BWB) vereinbaren.
- Z.B. alle Kombinationen die mit W beginnen, sind nicht mit unseren Daten zu vereinbaren, denn in unseren Daten ist die erste Murmel vom Typ B.



Nur 3 der 64 "Pfade" (Kombinationen) sind mit unseren Daten

# Kombinationen pro Hypothese

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

Hyp	Häufigkeit WBW
[W W W W]	$0 * 4 * 0 = 0$
[B W W W]	$1 * 3 * 1 = 3$
[B B W W]	$2 * 2 * 2 = 8$
[B B B W]	$3 * 1 * 3 = 9$
[B B B B]	$4 * 0 * 4 = 0$

- Die Häufigkeiten der Kombinationen ist proportional zur Plausibilität einer Hypothese.
- Zusätzlich müssten wir noch beachten, ob bestimmte Hypothesen *per se* bzw. *a priori* wahrscheinlicher sind. So könnten blaue Murmeln selten sein. Dann wäre die Hypothese [BBBB] entsprechend unwahrscheinlich.
- Gehen wir der Einfachheit halber zunächst davon aus, dass alle Hypothesen *a priori* gleich wahrscheinlich sind.

# Pfadbaum für alle vier Hypothesen

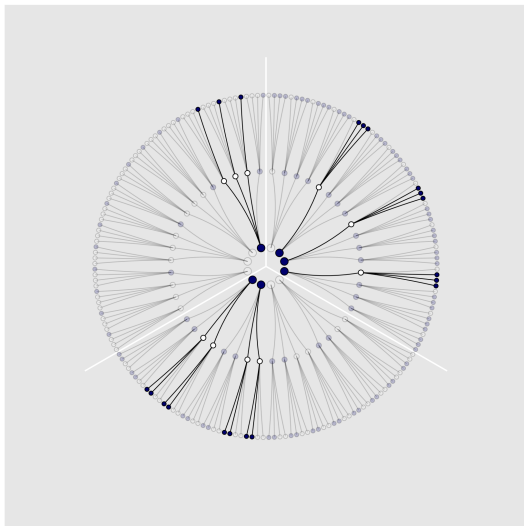
Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise



# Wir ziehen einer vierte Murmel: B

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Gehen wir davon aus, dass alle Hypothesen apriori gleich wahrscheinlich sind.
- Wir ziehen wieder eine Murmel. Sie ist blau (B)!
- Jetzt könnten wir den Pfadbaum für vier (statt drei) Züge aufmalen.
- Oder wir machen ein *Update*: Wir aktualisieren die bisherigen Kombinationshäufigkeiten um die neuen Daten. Die *alten* Daten dienen dabei als *Priori-Informationen* für die *neuen* Daten.

# Priori-Information nutzen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

Mit den Daten BWBB ist die Hypothese [BBBW] am wahrscheinlichsten:

Hyp	PB	HA	HN
[W W W W]	0	0	$0 * 0 = 0$
[B W W W]	1	3	$1 * 3 = 3$
[B B W W]	2	8	$2 * 8 = 16$
[B B B W]	3	9	$3 * 9 = 27$
[B B B B]	4	0	$4 * 0 = 0$

Hyp: Hypothese

PB: Anzahl von Pfaden für B

HA: alte (bisherige) Häufigkeiten

HN: neue (geupdatete) Häufigkeiten



# Murmelfabrik streikt: Blaue Murmeln jetzt sehr selten!

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Berücksichtigen wir die Information, dass apriori (bevor wir die Daten gesehen haben), einige Hypothesen wahrscheinlicher (plausibler) sind.
- Dann ist die Hypothese [BBWW] am wahrscheinlichsten.

Hyp	HA	HF	HN
[W W W W]	0	0	$0 * 0 = 0$
[B W W W]	3	3	$3 * 3 = 9$
[B B W W]	16	2	$16 * 2 = 32$
[B B B W]	27	1	$27 * 1 = 27$
[B B B B]	0	0	$0 * 0 = 0$

HF: Häufigkeit des Säckchentyps laut Fabrik

# Zählen mit großen Zahlen nervt

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Malen Sie mal den Pfadbaum für 10 Züge ...
- Eine Umrechnung der Häufigkeiten in *Anteile* macht das Rechnen einfacher.
- Dazu definieren wir die *geupdatete Plausibilität einer Hypothese nach Kenntnis der Daten*:

Plausibilität von [BWWW] nach Kenntnis von BWB

$\propto$

Anzahl möglicher Pfade bei [BWWWW] für BWB

$\times$

Priori-Plausibilität von [BWWWW]

- $\propto$ : proportional zu

# Plausibilität berechnen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Sei  $p$  der Anteil blauer Murmeln. Bei Hypothese [BWWW] gilt dann:  $p = 1/4 = 0.25$ . Sei  $D_{neu} = \text{BWB}$ , die Daten.
- Es gilt:

Plausibilität von  $p$  nach Kenntnis von  $D_{neu}$

$\propto$

Anzahl Pfade von  $p$  für  $D_{neu}$

$\times$

Priori-Plausibilität von  $p$

“Für jeden Wert von  $p$  beurteilen wir dessen Plausibilität als umso höher (proportional), je mehr Pfade durch den Pfadbaum führen.”

# Von Plausibilität zur Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

- Teilen wir die Anzahl Pfade einer Hypothese durch die Anzahl aller Pfade (aller Hypothesen), so bekommen wir einen Anteil. Damit haben wir eine Wahrscheinlichkeit:

$$\text{PI von } p \text{ mit Daten } D_{neu} = \frac{\text{Anzahl Pfade von } p \text{ für } D_{neu} \times \text{Prior-PI von } p}{\text{Summe aller Pfade}}$$

PI: Plausibilität

# Plausibilität pro Hypothese

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

Hyp	p	AP	Pl
[W W W W]	0.00	0	0.00
[B W W W]	0.25	3	0.15
[B B W W]	0.50	8	0.40
[B B B W]	0.75	9	0.45
[B B B B]	1.00	0	0.00

p: Anteil blauer Murmeln (Priori-Information)

AP: Anzahl von möglichen Pfaden

Pl: Plausibilität

```
AP <- c(0, 3, 8, 9, 0)
```

```
Pl <- AP / sum(AP)
```

```
Pl
```

```
## [1] 0.00 0.15 0.40 0.45 0.00
```

- Kennwerte laut einer Hypothese, wie den Anteil blauer Murmeln  $p$  bezeichnet man als *Parameter*.
- Den Anteil gültiger Pfade pro Hypothese (bzw. pro  $p$ ) bezeichnet man als *Likelihood*.
- Die Priori-Plausibilität nennt man *Priori-Wahrscheinlichkeit*.
- Die neue, geupdatete Plausibilität für einen bestimmten Wert von  $p$  nennt man *Posteriori-Wahrscheinlichkeit*.

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Hinweise

# Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 2 aus McElreath (2016) (“ReThink\_v1”)
- R-Code für die Diagramme stammt aus Kurz (2021)



Kurz, A. Solomon. 2021. *Statistical Rethinking with Brms, Ggplot2, and the Tidyverse: Second Edition*.  
<https://bookdown.org/content/4857/>.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.