

# Thema 2: Bayes-Modelle einer kleinen Welt

## QM2, ReThink\_v1, Kap. 2

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

- 1 Kleine Welt, große Welt
- 2 Bayes-Statistik als Zählen
- 3 Ein erstes Modell
- 4 Bayes berechnen mit R
- 5 Hinweise

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Kleine Welt, große Welt

# Behaims Globus, Kolumbus glücklicher Fehler

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

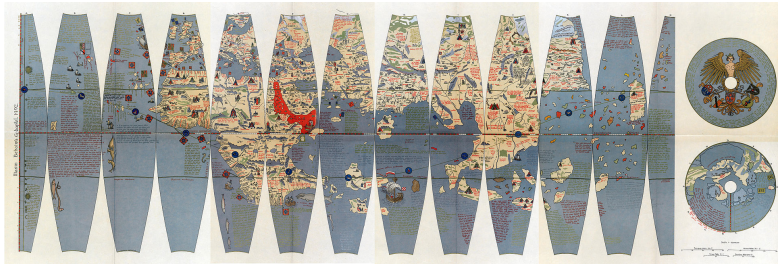
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Quelle

# Kleine Welt, große Welt

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

## Kleine Welt

- Die Welt, wie sie der Golem sieht
- entspricht dem Modell

## Große Welt

- Die Welt, wie sie in Wirklichkeit ist
- entspricht nicht (zwangsläufig) dem Modell

- Die kleine Welt ist nicht die große Welt.
- Was in der kleinen Welt funktioniert, muss nicht in der großen Welt funktionieren.
- Modelle zeigen immer nur die kleine Welt: Vorsicht vor schnellen Schlüssen und vermeintlicher Gewissheit.

# So denkt unser Bayes-Golem

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Bayes-Statistik als Zählen

# Murmeln im Säckchen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

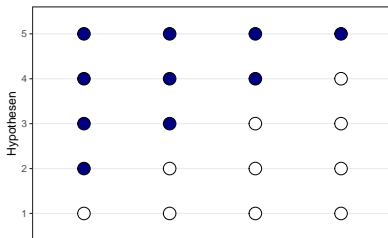
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Sie haben ein Säckchen mit vier Murmeln darin.
- Sie wissen nicht, welche Farben die Murmeln haben.
- Murmeln gibt's in zwei Farben: weiß (W) oder blau (B).
- Es gibt daher fünf *Hypothesen* zur Farbe der Murmeln im Säckchen: [WWWW], [BWWW], [BBWW], [BBBW], [BBBB.]
- Unser Ziel ist, die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen nach Ziehen von Murmeln zu bestimmen.





# Unsere Daten

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Wir ziehen eine Murmel, merken uns die Farbe und legen sie zurück. Das wiederholen wir noch zwei Mal (Ziehen mit Zurücklegen).
- Wir erhalten: **BWB**. Voilà: unsere Daten.



(Kurz 2021)

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BW WW], 1. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wenn Hypothese [BW WW] der Fall sein sollte, dann können wir im *ersten* Zug entweder die eine blaue Murmel erwischen oder eine der drei weißen.



Nachdem wir die Murmel gezogen haben (und die Farbe gemerkt haben), legen wir sie wieder ins Säckchen: Ziehen mit Zurücklegen.

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1. und 2. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

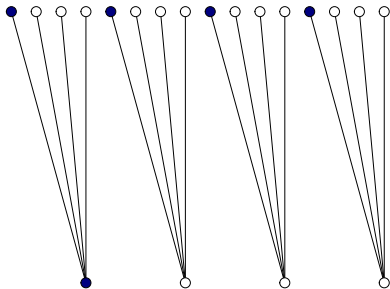
Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wenn Hypothese [BWWW] der Fall sein sollte, dann haben wir im *zweiten* Zug natürlich die gleichen Möglichkeiten wie im ersten.

Zug 1 und Zug 2 zusammen genommen gibt es  $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$  Kombinationen an gezogenen Murmeln:



Die ersten vier Kombinationen sind: BB, BW, BW, BW

# Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1.-3. Zug

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

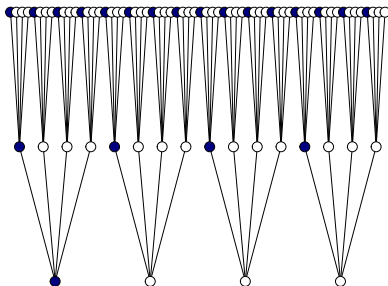
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Zug 1, Zug 2 und Zug 3 zusammen genommen, gibt es dann  
 $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$  Kombinationen, drei Murmeln zu ziehen.



# Welche Züge sind logisch möglich?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

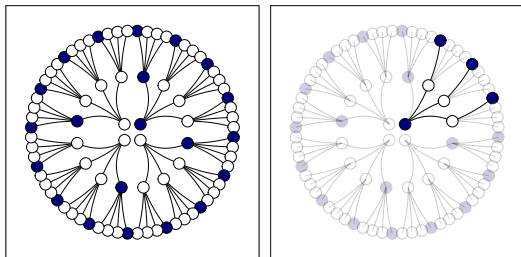
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Einige Kombinationen („Pfade“) der Hypothese [BWWW] lassen sich nicht mit unseren Daten (BWB) vereinbaren.
- Z.B. alle Kombinationen die mit W beginnen, sind nicht mit unseren Daten zu vereinbaren.



Nur 3 der 64 „Pfade“ (Kombinationen), die Hypothese [BWWW] vorgibt, sind mit unseren Daten logisch zu vereinbaren.

# Kombinationen für Hypothesen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Hypothese	Häufigkeit BWB
[W W W W]	$0 * 4 * 0 = 0$
[B W W W]	$1 * 3 * 1 = 3$
[B B W W]	$2 * 2 * 2 = 8$
[B B B W]	$3 * 1 * 3 = 9$
[B B B B]	$4 * 0 * 4 = 0$

- Die Häufigkeiten der Kombinationen (Pfade) ist proportional zur Plausibilität einer Hypothese.
- Zusätzlich müssten wir noch beachten, ob bestimmte Hypothesen *per se* bzw. *a priori* wahrscheinlicher sind. So könnten blaue Murmeln selten sein. Gehen wir der Einfachheit halber zunächst davon aus, dass alle Hypothesen *a priori* gleich wahrscheinlich sind.

# Pfadbaum für die Hypothesen [BWWW], [BBWW], [BBBW]

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

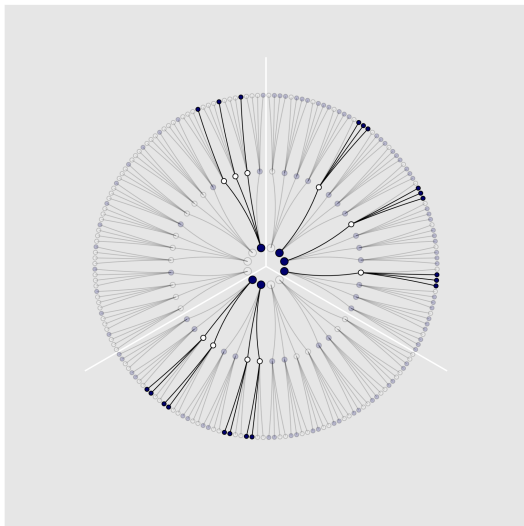
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



# Wir ziehen einer vierte Murmel: B

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Gehen wir zunächst davon aus, dass alle Hypothesen apriori gleich wahrscheinlich sind.
- Wir ziehen wieder eine Murmel. Sie ist blau (B)!
- Jetzt könnten wir den Pfadbaum für vier (statt drei) Züge aufmalen.
- Oder wir machen ein *Update*: Wir aktualisieren die bisherigen Kombinationshäufigkeiten um die neuen Daten. Die *alten* Daten dienen dabei als *Priori-Informationen* für die *neuen* Daten.



# Priori-Information nutzen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Mit den Daten BWBB ist die Hypothese [BBBW] am wahrscheinlichsten:

Hyp	PB	HA	HN
[W W W W]	0	0	$0 * 0 = 0$
[B W W W]	1	3	$1 * 3 = 3$
[B B W W]	2	8	$2 * 8 = 16$
[B B B W]	3	9	$3 * 9 = 27$
[B B B B]	4	0	$4 * 0 = 0$

Hyp: Hypothese

PB: Anzahl von Pfaden für B

HA: alte (bisherige) Häufigkeiten

HN: neue (geupdatete) Häufigkeiten

# Murmelfabrik streikt: Blaue Murmeln jetzt sehr selten!

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Berücksichtigen wir jetzt die Information, dass apriori (bevor wir die Daten gesehen haben), einige Hypothesen wahrscheinlicher (plausibler) sind als andere.
- Hier ist die Hypothese [BBWW] am wahrscheinlichsten:

Hyp	HA	HF	HN
[W W W W]	0	0	$0 * 0 = 0$
[B W W W]	3	3	$3 * 3 = 9$
[B B W W]	16	2	$16 * 2 = 32$
[B B B W]	27	1	$27 * 1 = 27$
[B B B B]	0	0	$0 * 0 = 0$

HF: Häufigkeit des Säckchentyps laut Fabrik.

# Zählen mit großen Zahlen nervt

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Malen Sie mal den Pfadbaum für 10 Züge ...
- Eine Umrechnung der Häufigkeiten in *Anteile* macht das Rechnen einfacher.
- Dazu definieren wir die *geupdatete Plausibilität einer Hypothese nach Kenntnis der Daten*:

Plausibilität von [BWWW] nach Kenntnis von BWB

$\propto$

Anzahl möglicher Pfade bei [BWWW] für BWB

$\times$

Priori-Plausibilität von [BWWW]

- $\propto$ : proportional zu

# Plausibilität berechnen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Sei  $p$  der Anteil blauer Murmeln. Bei Hypothese [BWWW] gilt, dann ist  $p = 1/4 = 0.25$ . Sei  $D_{neu} = \text{BWB}$ , die Daten:

Plausibilität von  $p$  nach Kenntnis von  $D_{neu}$

$\propto$

Anzahl Pfade von  $p$  für  $D_{neu}$

$\times$

Priori-Plausibilität von  $p$

Für jeden Wert von  $p$  beurteilen wir dessen Plausibilität als umso höher, je mehr Pfade durch den Pfadbaum führen und je höher die Plausibilität des Werts von  $p$  von vornherein ist.

# Von Plausibilität zur Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Teilen wir die Anzahl Pfade einer Hypothese durch die Anzahl aller Pfade (aller Hypothesen), so bekommen wir einen Anteil. Damit haben wir eine Wahrscheinlichkeit:

$$\text{PI von } p \text{ mit Daten } D_{\text{neu}} = \frac{\text{Anzahl Pfade von } p \text{ für } D_{\text{neu}} \times \text{Prior-PI von } p}{\text{Summe aller Pfade}}$$

PI: Plausibilität

# Plausibilität pro Hypothese

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Hyp	p	AP	PI
[W W W W]	0.00	0	0.00
[B W W W]	0.25	3	0.15
[B B W W]	0.50	8	0.40
[B B B W]	0.75	9	0.45
[B B B B]	1.00	0	0.00

p: Anteil blauer Murmeln (Priori-Wissen)

AP: Anzahl von möglichen Pfaden; PI: Plausibilität

```
AP <- c(0, 3, 8, 9, 0)
PI <- AP / sum(AP)
PI
```

```
## [1] 0.00 0.15 0.40 0.45 0.00
```

- Kennwerte laut einer Hypothese, wie den Anteil blauer Murmeln  $p$  bezeichnet man als *Parameter*.
- Den Anteil gültiger Pfade pro Hypothese (bzw. pro Wert von  $p$ ) bezeichnet man als *Likelihood*.
- Die Priori-Plausibilität nennt man *Priori-Wahrscheinlichkeit*.
- Die neue, geupdatete Plausibilität für einen bestimmten Wert von  $p$  nennt man *Posteriori-Wahrscheinlichkeit*.

# Zusammenfassung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- 1 Schritt: Unser Vorab-Wissen zur Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese wird mit dem Begriff *Priori-Verteilung* gefasst.
- 2 Schritt: Wir zählen den Anteil gültiger Pfade für jede Hypothese; d.h. wir berechnen den *Likelihood* jeder Hypothese.
- 3 Schritt: Mit den Likelihoods *updaten* wir unsere *Priori-Verteilung*. Die Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese verändert sich entsprechend der Daten. Es resultiert die *Posteriori-Verteilung*.



## Ein erstes Modell

# Welcher Anteil der Erdoberfläche ist mit Wasser bedeckt?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Sie werden einen Globus-Ball in die Luft und fangen in wieder auf. Sie notieren dann, ob die Stelle unter Ihrem Zeigefinger Wasser zeigt (W) oder Land (L). Den Versuch wiederholen Sie 9 Mal.

Quelle CC 4.0 BY-NC

W L W W W L W L W

# Der datengenierende Prozess: Wie entstanden die Daten?

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- 1 Der wahre Anteil von Wasser der Erdoberfläche ist  $p$ .
- 2 Ein Wurf des Globusballes hat die Wahrscheinlichkeit  $p$ , eine  $W$ -Beobachtung zu erzeugen.
- 3 Die Würfe des Globusballes sind unabhängig voneinander.
- 4 Wir haben kein Vorwissen über  $p$ ; jeder Wert ist uns gleich wahrscheinlich.

# Wissen updaten: Wir füttern Daten in das Modell

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

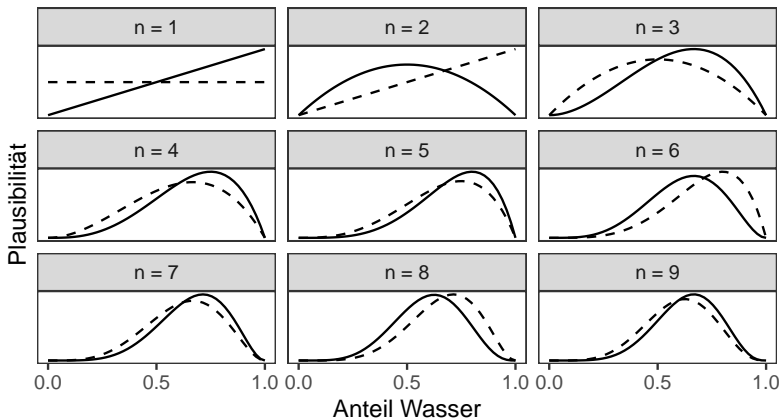
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Gestrichelte Linie: Priori-Verteilung (vor den Daten);  
Durchgezogene Linie: Posteriori-Verteilung (nach Daten)

# Erinnern wir uns an das Urnen-Beispiel

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Für jede Hypothese haben wir ein Vorab-Wissen, das die jeweilige Plausibilität der Hypothese angibt: *Priori-Verteilung*.
- Für jede Hypothese (d.h. jeden *Parameterwert*  $p$ ) möchten wir den Anteil (die Wahrscheinlichkeit) gültiger Kombinationen wissen. Das gibt uns den *Likelihood*.
- Dann gewichten wir den Likelihood mit dem Vorabwissen, so dass wir die *Posteriori-Verteilung* bekommen.



# Die Binomialverteilung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wir nehmen an, dass die Daten unabhängig voneinander entstehen und sich der Parameterwert nicht zwischenzeitlich ändert.

Dann kann man die Wahrscheinlichkeit ( $Pr$ ),  $W$  mal Wasser und  $L$  mal Land zu beobachten, wenn die Wahrscheinlichkeit für Wasser  $p$  beträgt, mit der *Binomialverteilung* berechnen.

Die Binomialverteilung zeigt die Verteilung der Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) der Ereignisse (z.B. 2 Mal Kopf) beim wiederholten Münzwurf (und allen vergleichbaren Zufallsexperimenten)<sup>1</sup>.

$$Pr(W, L|p) = \frac{(W + L)!}{W!L!} p^W (1 - p)^L$$

---

<sup>1</sup> „Münzwurfverteilung“

# Binomialverteilung mit R

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Was ist der Anteil der gültigen Pfade (Wahrscheinlichkeit), um 6 mal  $W$  bei  $N = W + L = 9$  Würfeln zu bekommen, wenn wir von  $p = 1/2$  ausgehen?

```
dbinom(x = 6, size = 9, prob = 1/2)
```

```
## [1] 0.1640625
```

Was ist die Wahrscheinlichkeit für  $W = 9$  bei  $N = 9$  und  $p = 1/2$ ?

```
dbinom(x = 9, size = 9, prob = 1/2)
```

```
## [1] 0.001953125
```

# Beispiele zur Berechnung einer binomial verteilte Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Ein Prof. stellt eine Klausur mit 20 Richtig-Falsch-Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Münze werfen genau 15 Fragen richtig zu raten?<sup>2</sup>

```
dbinom(x = 15, size = 20, prob = .5)
```

```
## [1] 0.01478577
```

Was ist die Wahrscheinlichkeit bei 3 Münzwürfen 3 Treffer (Kopf) zu erzielen?

```
dbinom(3, 3, 1/2)
```

```
## [1] 0.125
```

---

<sup>2</sup>Hey, endlich mal was für echte Leben!



# Unser Modell ist geboren

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Wir fassen das Globusmodell so zusammen:

$$W \sim \text{Bin}(N, p),$$

Lies: „ $W$  ist *binomial* verteilt mit den Parametern  $N$  und  $p$ “.  $N$  gibt die Anzahl der Globuswürfe an:  $N = W + L$ .

Unser Vorab-Wissen zu  $p$  sei, dass uns alle Werte gleich plausibel erscheinen („uniform“):

$$p \sim \text{Unif}(0, 1).$$

Lies:  $p$  ist gleich (uniform) verteilt mit der Untergrenze 0 und der Obergrenze 1.

# So sehen die Verteilungen aus

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

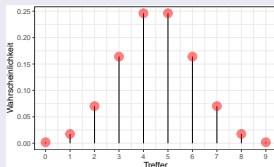
Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

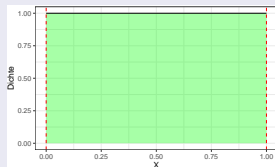
Hinweise

## Binomialverteilung



$$N = 9, p = 1/2$$

## Gleichverteilung



$$\text{Min} = 0, \text{Max} = 1$$

# Herleitung Bayes' Theorem 1/2: Gemeinsame Wahrscheinlichkeit

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit für *Regen* und *kalt* ist gleich der Wahrscheinlichkeit von *Regen*, *gegeben kalt* mal der Wahrscheinlichkeit von *kalt*. Entsprechend gilt: Die Wahrscheinlichkeit von  $W$ ,  $L$  und  $p$  ist das Produkt von  $Pr(W, L|p)$  und der Prior-Wahrscheinlichkeit  $Pr(p)$ :

$$Pr(W, L, p) = Pr(W, L|p) \cdot Pr(p)$$

Genauso gilt: Die Wahrscheinlichkeit von *Regen* und *kalt* ist gleich der Wahrscheinlichkeit *kalt*, *wennn's regnet* mal der Wahrscheinlichkeit von *Regen*:

$$Pr(W, L, p) = Pr(p|W, L) \cdot Pr(W, L)$$

# Herleitung Bayes' Theorem 2/2:

## Posteriori-Wahrscheinlichkeit

Wir setzen die letzten beiden Gleichungen gleich:

$$Pr(W, L|p) \cdot Pr(p) = Pr(p|W, L) \cdot (W, L)$$

Und lösen auf nach der Posteriori-Wahrscheinlichkeit,  $Pr(p|W, L)$ :

$$Pr(p|W, L) = \frac{Pr(W, L|p)Pr(p)}{Pr(W, L)}$$

$Pr(W, L)$  nennt man die *mittlere Wahrscheinlichkeit der Daten* oder *Evidenz*. Die Evidenz berechnet sich als Mittelwert der Likelihoods über alle Werte von  $p$ . Die Aufgabe dieser Größe ist nur dafür zu sorgen, dass insgesamt Werte zwischen 0 und 1 herauskommen.

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Bayes' Theorem

## Formel Bayes' Theorem

$$Pr(H|D) = \frac{Pr(D|H)Pr(H)}{Pr(D)}$$

- Bestandteile:
  - Posteriori-Wahrscheinlichkeit:  $Pr_{Post} := Pr(H|D)$
  - Likelihood:  $L := Pr(D|H)$
  - Priori-Wahrscheinlichkeit:  $Pr_{Priori} := Pr(H)$
  - Evidenz:  $E := Pr(D)$
- Bayes' Theorem gibt die  $Pr_{Post}$  an, wenn man die Gleichung mit der  $Pr_{Priori}$  und dem  $L$  füttert.
- Bayes' Theorem wird häufig verwendet, um die  $Pr_{Post}$  zu quantifizieren.
- Die  $Pr_{Post}$  ist proportional zu  $L \times Pr_{Priori}$ .

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

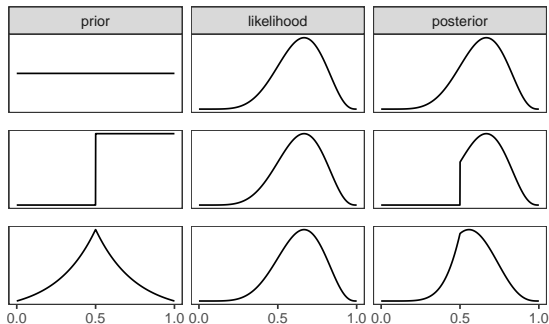
Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Posteriori als Produkt von Priori und Likelihood

$$\text{Posteriori} = \frac{\text{Likelihood} \times \text{Priori}}{\text{Evidenz}}$$



Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Bayes berechnen mit R

# Die Methode *Gitter-Annäherung*<sup>3</sup>

Thema 2:

Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- 1 Teile den Wertebereich des Parameter in ein „Gitter“ auf, z.B. 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1 („Gitterwerte“).
- 2 Bestimme den Priori-Wert des Parameters für jeden Gitterwert.
- 3 Berechne den Likelihood für Gitterwert.
- 4 Berechne den unstandardisierten Posteriori-Wert für jeden Gitterwert (Produkt von Priori und Likelihood).
- 5 Standardisiere den Posteriori-Wert durch teilen anhand der Summe alle unstand. Posteriori-Werte.

---

<sup>3</sup>Grid Approximation



# Gitterwerte in R berechnen

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

```
d <-  
  tibble(  
    # definiere das Gitter:  
    p_Gitter = seq(from = 0, to = 1, length.out = 10),  
    # bestimme den Priori-Wert:  
    Priori = 1) %>%  
  mutate(  
    # berechne Likelihood für jeden Gitterwert:  
    Likelihood = dbinom(6, size = 9, prob = p_Gitter),  
    # berechne unstand. Posteriori-Werte:  
    unstd_Post = Likelihood * Priori,  
    # berechne stand. Posteriori-Werte (summiert zu 1):  
    Post = unstd_Post / sum(unstd_Post))
```

# Unsere Gitter-Daten

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

p_Gitter	Priori	Likelihood	unstd_Post	Post
0.00	1	0.00	0.00	0.00
0.11	1	0.00	0.00	0.00
0.22	1	0.00	0.00	0.01
0.33	1	0.03	0.03	0.04
0.44	1	0.11	0.11	0.12
0.56	1	0.22	0.22	0.24
0.67	1	0.27	0.27	0.30
0.78	1	0.20	0.20	0.23
0.89	1	0.06	0.06	0.06
1.00	1	0.00	0.00	0.00

# $Pr_{Post}$ zeigt, wie plausibel wir jeden Wert von $p$ halten

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

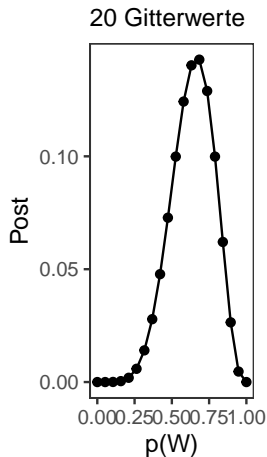
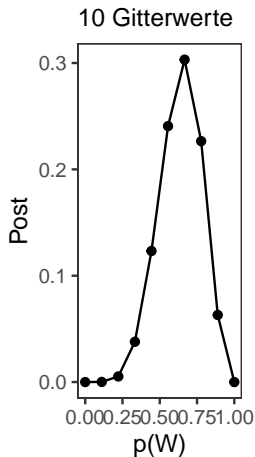
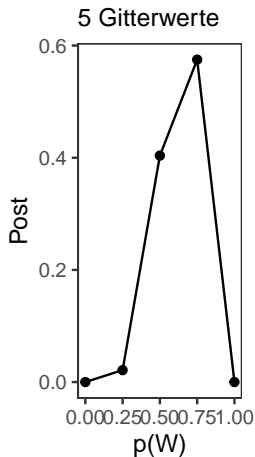
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Mehr Gitterwerte glätten die Annäherung.

# Quadratische Anpassung<sup>4</sup>

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- Komfortabler noch ist die *quadratische Anpassung*, die bestimmte statistische Eigenschaften von linearen Modellen ausnutzt.
- Der R-Befehl `quap` gibt zentrale Statistiken zu den Parametern des Modells zurück.

```
library(rethinking)

globus_qa <- quap( # "quadratic approximation"
  alist( # definiere die Modellgleichungen
    W ~ dbinom(W + L, p), # Likelihood ist binomial verteilt
    p ~ dunif(0, 1)       # Priori ist gleich (uniform) verteilt
  ),
  data = list(W = 6, L = 3) # Daten
)

precis(globus_qa) # Gibt uns die zentralen Ergebnisse
```

```
##           mean          sd        5.5%        94.5%
## p 0.6666671 0.1571337 0.4155372 0.9177971
```

---

<sup>4</sup>Quadratic Approximation

# Je größer $n$ , desto glatter die Anpassung an die wahre Verteilung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

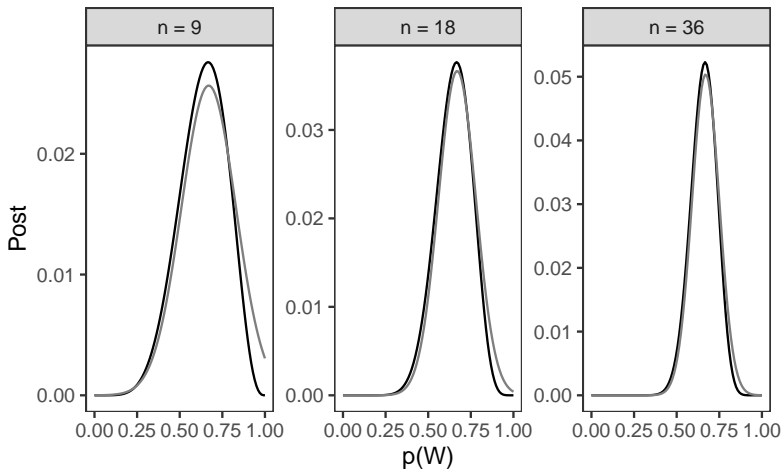
Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise



Grau: Quadratische Anpassung; schwarz: wahre Verteilung

# Zusammenfassung

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

- In unserem Modell haben wir Annahmen zu  $Pr_{Priori}$  und  $L$  getroffen.
- Auf dieser Basis hat der Golem sein Wissen geupdated zu  $Pr_{Post}$ .
- Mit der Gitter-Methode haben wir viele Hypothesen (Parameterwerte) untersucht und jeweils die  $Pr_{Post}$  berechnet.
- Unser Modell bildet die kleine Welt ab; ob es in der großen Welt nützlich ist, steht auf einem anderen Blatt.

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

# Hinweise

# Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 2:  
Bayes-Modelle  
einer kleinen  
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,  
große Welt

Bayes-  
Statistik als  
Zählen

Ein erstes  
Modell

Bayes  
berechnen mit  
R

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 2 aus McElreath (2016) („ReThink\_v1“)
- R-Code für die Diagramme stammt aus Kurz (2021)



Kurz, A. Solomon. 2021. *Statistical Rethinking with Brms, Ggplot2, and the Tidyverse: Second Edition*.  
<https://bookdown.org/content/4857/>.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.