

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

QM2, ROS, Kap. 1, ReThink_v1, Kap. 1

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

- 1 Was ist Inferenzstatistik?
- 2 Regression und Inferenz
- 3 Klassische vs. Bayes-Inferenz
- 4 Wahrscheinlichkeit
- 5 Verteilungen
- 6 Hinweise

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Was ist Inferenzstatistik?

Deskriptiv- vs. Inferenzstatistik

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

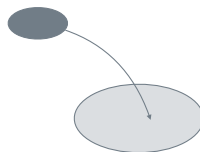
Verteilungen

Hinweise

Deskriptivstatistik



Inferenzstatistik



Wozu ist die Inferenstatistik da?

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Definition

Inferenzstatistik ist ein Verfahren, das mathematische Modelle verwendet, um von einer bestimmten Datenlage, die eine Stichprobe einer Grundgesamtheit darstellt, allgemeine Schlüsse zu ziehen.

Deskriptiv- und Inferenzstatistik gehen Hand in Hand

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Für jede Kennzahl der Deskriptivstatistik (d.h. Stichprobendaten) kann man die Methoden der Inferenzstatistik verwenden (auf eine Grundgesamtheit schließen), z.B.:

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit
Mittelwert	\bar{X}	μ
Streuung	sd	σ
Anteil	p	π
Korrelation	r	ρ
Regression	b	β

Für Stichprobendaten verwendet man lateinische Buchstaben (X, p, b, \dots); für Populationsdaten verwendet man griechische Buchstaben.

Schätzen von Parametern einer Grundgesamtheit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Meist begnügt man sich nicht mit Aussagen für eine Stichprobe, sondern will auf eine Grundgesamtheit verallgemeinern.

Leider sind die Parameter einer Grundgesamtheit zumeist unbekannt, daher muss man sich mit *Schätzungen* begnügen.

Schätzwerte werden mit einem “Dach” über dem Kennwert gekennzeichnet, z.B.

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit	Schätzwert
Mittelwert	\bar{X}	μ	$\hat{\mu}$
Streuung	sd	σ	$\hat{\sigma}$
Anteil	p	π	$\hat{\pi}$
Korrelation	r	ρ	$\hat{\rho}$
Regression	b	β	$\hat{\beta}$

Beispiel für eine inferenzstatistische Fragestellung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Sie testen zwei Varianten Ihres Webshops (V1 und V2), die sich im Farbschema unterscheiden und ansonsten identisch sind.
- Hat das Farbschema einen Einfluss auf den Umsatz?
- Dazu vergleichen Sie den mittleren Umsatz pro Tag von V1 vs. V2, \bar{X}_{V1} und \bar{X}_{V2} .
- Die Mittelwerte unterscheiden sich etwas, $\bar{X}_{V1} > \bar{X}_{V2}$
- Sind diese Unterschiede “zufällig” oder “substanziell”? Gilt also $\mu_{V1} > \mu_{V2}$ oder $\mu_{V1} \leq \mu_{V2}$?

Was heißt “zufällig”?

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Definition

Unter einem zufälligen Ereignis (random) verstehen wir ein Ereignis, das nicht (komplett) vorherzusehen ist, wie etwa die Augenzahl Ihres nächsten Würferwurfs. Zufällig bedeutet nicht (zwangsläufig), dass es keine Ursachen gibt. So gehorchen die Bewegungen eines Würfels den Gesetzen der Physik, nur sind uns diese oder die genauen Randbedingungen nicht unbekannt (ausreichend) bekannt.

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Regression und Inferenz

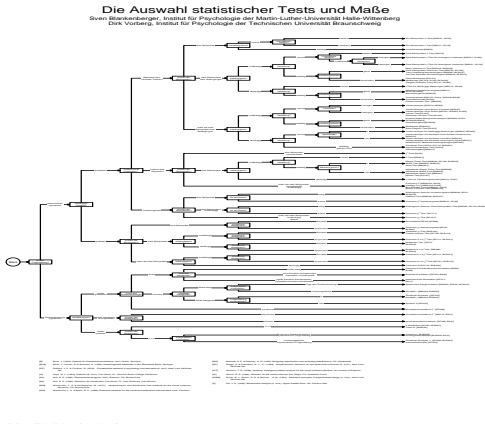
Für jede Fragestellung einen anderen Test

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Regression und Inferenz

Wahrscheinlichkeit



Quelle

Oder man nimmt einfach immer die Regression

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Common statistical tests are linear models

last updated 02 April 2019

See worked examples and more details at the accompanying notebook: <https://lindelov.github.io/tests-as-linear>

Common name	Built-in function in R	Equivalent linear model in R	Exact?	The linear model in words	Icon
Simple regression: $\text{lm}(y \sim 1 + x)$	y is independent of x P: One-sample t-test N: Wilcoxon signed-rank	$\text{lm}(y \sim 1)$ $\text{lm}(\text{signed_rank}(y) \sim 1)$	✓ for $N \leq 14$	One number (intercept, i.e., the mean) predicts y. - (Same, but it predicts the signed rank of y.)	
	P: Paired-sample t-test N: Wilcoxon matched pairs	$\text{lm}(y_1 - y_2 \sim 1)$ $\text{lm}(\text{signed_rank}(y_1 - y_2) \sim 1)$	✓ for $N \leq 14$	One intercept predicts the pairwise y-y ₂ differences. - (Same, but it predicts the signed rank of y-y ₂ .)	
	y ~ continuous x P: Pearson correlation N: Spearman correlation	$\text{lm}(y \sim 1 + x)$ $\text{lm}(\text{rank}(x) \sim 1 + \text{rank}(y))$	✓ for $N \leq 10$	One intercept (plus x multiplied by a number (slope)) predicts y. - (Same, but with ranked x and y.)	
	y ~ discrete x P: Two-sample t-test P: Welch's t-test N: Mann-Whitney U	$\text{lm}(y_1 - y_2 \sim \text{var.equal}=\text{TRUE})$ $\text{lm}(y_1 - y_2 \sim \text{var.equal}=\text{FALSE})$ $\text{lm}(\text{signed_rank}(y_1 - y_2) \sim 1 + G_1^2)$	✓ for $N \leq 11$	An intercept for group 1 (plus a difference if group 2) predicts y. - (Same, but with one variance per group instead of one common.) - (Same, but it predicts the signed rank of y.)	
Multiple regression: $\text{lm}(y \sim 1 + x_1 + x_2 + \dots)$	P: One-way ANOVA N: Kruskal-Wallis	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k)$ $\text{lm}(\text{rank}(y) \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k)$	✓ for $N \leq 11$	An intercept for group 1 (plus a difference if group 1) predicts y. - (Same, but it predicts the rank of y.)	
	P: One-way ANCOVA	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k + x)$	✓	- (Same, but plus a slope on x.) Note: this is always ANCOVA continuous. ANCOVAs are ANCOVAs with a continuous x.	
	P: Two-way ANOVA	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k + S_1 + S_2 + \dots + S_n + G_1:S_1 + G_1:S_2 + \dots + G_k:S_n + G_1:S_1:S_2 + \dots + G_k:S_1:S_n + \dots)$	✓	Interaction term: changing sex changes the y ~ group parameters. Note: $G_{i,j,k}$ is an indicator (0 or 1) for each non-referent level of the group variable. Similarly for $S_{i,j,k}$ for sex. The first line (path G_1) is main effect of group, the second (path $G_1:S_1$) for sex and the third is the group x sex interaction. (The two lastly (e.g. $G_1:S_1$), line 2 would just be "S ₁ " and line 3 would be "S ₁ " multiplied with each G_i .)	
	Counts ~ discrete x N: Chi-square test	Equivalent log-linear model $\text{glm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k + S_1 + S_2 + \dots + S_n + G_1:S_1 + G_1:S_2 + \dots + G_k:S_n + G_1:S_1:S_2 + \dots + G_k:S_1:S_n + \dots)$	✓	Interaction term: (Same as Two-way ANOVA.) Note: this gives using the following arguments: <code>var.equal = TRUE</code> , <code>family = poisson</code> . As implemented, the Chi-square test is $\text{loglik} + \text{loglik} + \text{loglik} + \text{loglik}$ where G_i and S_i are independent. See more info at the accompanying notebook.	
Multiple regression: $\text{lm}(y \sim 1 + x_1 + x_2 + \dots)$	N: Goodness of fit	$\text{glm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k, \text{family} = "poisson")$	✓	(Same as one-way ANOVA and see Chi-Square note.)	

List of common parametric (P) non-parametric (N) tests and equivalent linear models. The notation $y \sim 1 + x$ is shorthand for $y \sim 1 + x$ as which most of us learned in school. Models in similar colors are highly similar, but really, notice how similar they all are across colors! For non-parametric models, the linear models are reasonable approximations for non-small sample sizes (see "Exact" column and click links to see simulations). Other less accurate approximations exist, e.g., Wilcoxon for the sign test and Goodness-of-fit for the binomial test. The signed rank function is `signed_rank = function(x) { rank(x) - 0.5 * (rank(x) + 1) }`. The variables G_i and S_i are "dummy coded" indicator variables (either 0 or 1) explaining the fact that when $G_i = 1$ between-categories the difference equals the slope. Subscripts (e.g., G_1 or S_1) indicate different columns in data. Its require long-format data for all non-continuous models. All of this is exposed in greater detail and worked examples at <https://lindelov.github.io/tests-as-linear>.

* See the note to the two-way ANOVA for explanation of the notation.

* Same model, but with one variance per group: `glmer.nb ~ 1 + G_1, weights = variances, family = poisson, method="ML"`.

Jonas Klotzfeld Lindelov
<https://lindelov.net>

Quelle

To rule 'em all

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Quelle

Was war noch mal die Regression?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

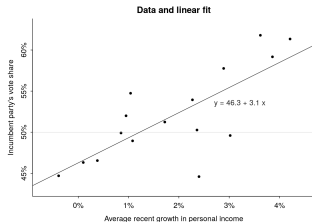
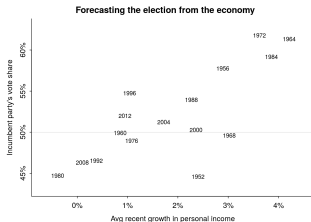
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Regression (Regressionsanalyse) ist eine Methode, um Zielvariablen in Abhängigkeit der Ausprägung von Prädiktorvariablen von Beobachtungen vorherzusagen.
- Dabei erlaubt die Regression die Quantifizierung der Ungewissheit der Vorhersagen.



Quelle

Die Regressionsgleichung

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

In voller Pracht:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

- y : Zielvariable (vorherzusagen)
- β_0 : Achsenabschnitt
- β_1 : Regressionsgewicht (Steigung der Regressionsgeraden)
- ϵ : "Fehler"; Einflüsse auf y , die das Modell nicht kennt

Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

```
data(mtcars)
library(rstanarm)
lm1 <- stan_glm(mpg ~ hp, data = mtcars)
```

```
print(lm1)
```

	Median	MAD_SD
(Intercept)	30.0	1.7
hp	-0.1	0.0

Auxiliary parameter(s):

	Median	MAD_SD
sigma	3.9	0.5

Visualisierung zum Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

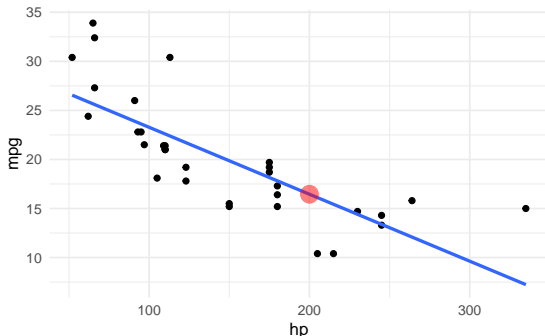
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Rot markiert: Der *vorhergesagte* Wert von mpg für hp=200 (Punktschätzung).

Der Punktschätzer berücksichtigt nicht die Ungewissheit des Models

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

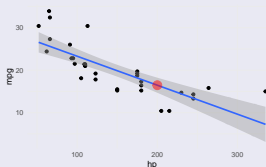
Verteilungen

Hinweise

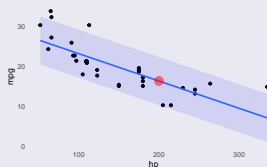
Mindestens zwei Arten von Ungewissheit müssen wir in unseren Vorhersagen berücksichtigen:

- zur Lage der Regressionsgeraden (β_0, β_1)
- zu Einflüssen, die unser Modell nicht kennt (ϵ)

Ungewissheit in β_0, β_1



Ungewissheit in ϵ



Vorhersage-Intervall: berücksichtigt Ungewissheit in $\beta_0, \beta_1, \epsilon$

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

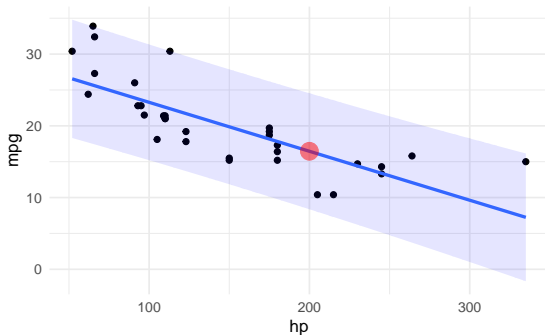
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Das Vorhersage-Intervall berücksichtigt Ungewissheit in $\beta_0, \beta_1, \epsilon$ bei der Vorhersage von \hat{y}_i .



Wozu man die Regression benutzt

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Vorhersagen
- Zusammenhänge untersuchen
- Adjustieren (Zusammenhänge korrigieren)
- Kausalinferenz

In Experimenten kann man die Ergebnisse kausal interpretieren¹

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

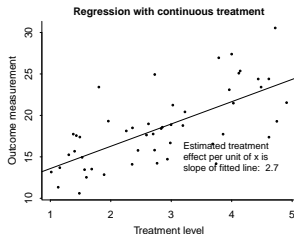
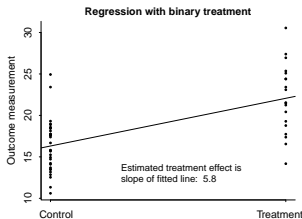
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



¹Wenn alles gut läuft.

Die lineare Regression ist erstaunlich flexibel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

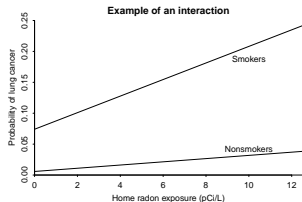
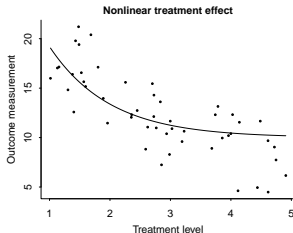
Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Z.B.

- *Nichtlineare* Zusammenhänge
- Interaktionen



Häufig sind Gruppen nicht direkt vergleichbar

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

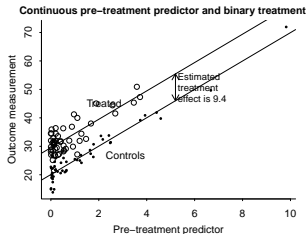
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- *Beispiel:* Die Heilungsraten in der Experimentalgruppe waren höher als in der Kontrollgruppe. Allerdings waren die Personen der Experimentalgruppe auch gesünder (als die Personne der Kontrollgruppe). Um den Kausaleffekt der Behandlung zu schätzen, müssen solche vorab bestehenden Unterschiede zwischen den Gruppen berücksichtigt (adjustiert) werden.



Keine vorschnelle Kausalinterpretation

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Kausalinterpretationen statistischer Ergebnisse (z.B. Mittelwertsdifferenz von Behandlungs- vs. Kontrollgruppe) ist nur möglich, wenn
 - die Studie gut kontrolliert und randomisiert ist (und die Stichprobe groß ist) oder
 - bestehende Unterschiede nicht randomisiert, aber kontrolliert wurden oder
 - diese gemessen und in der Regressionsanalyse berücksichtigt wurden

Ansonsten muss auf eine Kausalinterpretation verzichtet werden.

Allerdings ist es möglich, Art und Stärke von Zusammenhängen zu schätzen.

Was ist ein (statistisches) Modell?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

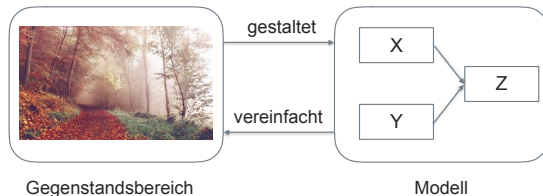
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit, z.B. in Form einer Landkarte, eines Modellauto oder einer Gleichung (Sauer 2019).
- Greift relevante Aspekte der Wirklichkeit heraus (und vernachlässigt andere).
- Die Regression eignet sich gut zum Modellieren mit Statistik.



Beispiel für ein statistisches Modell

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

$$E = \beta_0 + \beta_1 \cdot L + \epsilon,$$

wobei E für *Erfolg in der Klausur* steht, L für die *Lernzeit* und ϵ für den “Fehler” des Modells, sprich sonstige Einflussgrößen, die im Modell nicht berücksichtigt werden.

Der Golem von Prag

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Der Golem von Prag, eine vom Menschen geschaffene Kreatur gewaltiger Kraft, die Befehle wörtlich ausführt.

Bei kluger Führung kann ein Golem Nützliches vollbringen. Bei unüberlegter Verwendung wird er jedoch großen Schaden anrichten.

Quelle

Wissenschaftliche Modelle sind wie Golems

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Golem

- Besteht aus Lehm
- Belebt durch "Wahrheit"
- Mächtig
- dumm
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Märchen

Modell

- Besteht aus ~~Lehm~~Silikon
- Belebt durch Wahrheit (?)
- Manchmal mächtig
- simpler als die Realität
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Nicht einmal falsch

Wir bauen Golems.

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Klassische Inferenz: Frequentismus

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Die Berücksichtigung von Vorwissen zum Sachgegenstand wird vom Frequentismus als subjektiv zurückgewiesen.
- Nur die Daten selber fließen in die Ergebnisse ein
- Wahrscheinlichkeit wird über relative Häufigkeiten definiert.
- Es ist nicht möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese anzugeben.
- Stattdessen wird angegeben, wie häufig eine vergleichbare Datenlage zu erwarten ist, wenn die Hypothese gilt und der Versuch sehr häufig wiederholt ist.
- Ein Großteil der Forschung (in den Sozialwissenschaften) verwendet diesen Ansatz.

Bayesianische Inferenz

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Vorwissen (Priori-Wissen) fließt explizit in die Analyse ein (zusammen mit den Daten).
- *Wenn* das Vorwissen gut ist, wird die Vorhersage genauer, ansonsten ungenauer.
- Die Wahl des Vorwissens muss explizit (kritisierbar) sein.
- In der Bayes-Inferenz sind Wahrscheinlichkeitsaussagen für Hypothesen möglich.
- Die Bayes-Inferenz erfordert mitunter viel Rechenzeit und ist daher erst in den letzten Jahren (für gängige Computer) komfortabel geworden.

Vergleich von Wahrscheinlichkeitsaussagen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Frequentismus

- zentrale Statistik: *p-Wert*
- “Wie wahrscheinlich ist der Wert der Teststatistik (oder noch extreme Werte), vorausgesetzt die Nullhypothese gilt und man wiederholt den Versuch unendlich oft (unter gleichen Bedingungen aber zufällig verschieden)?”

Bayes-Statistik

- zentrale Statistik: *Posterior-Verteilung*
- “Wie wahrscheinlich ist die Forschungshypothese, jetzt nachdem wir die Daten kennen laut unserem Modell?”

Frequentist und Bayesianer

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

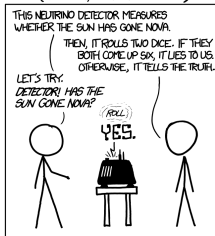
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

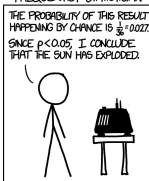
Verteilungen

Hinweise

DID THE SUN JUST EXPLODE?
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)



FREQUENTIST STATISTICIAN:



BAYESIAN STATISTICIAN:



Quelle

Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 1

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Ein Betrunkener behauptet, er könne hellsehen.
- Er wirft eine Münze 10 Mal und sagt jedes Mal korrekt vorher, welche Seite oben landen wird.
- Die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist sehr gering (2^{-10}) unter der Hypothese, dass die Münze fair ist, dass Ergebnis also “zufällig” ist.
- Unser Vorwissen lässt uns allerdings trotzdem an der Hellsichtigkeit des Betrunkenen zweifeln, so dass die meisten von uns die Hypothese von der Zufälligkeit des Ergebnisses wohl nicht verwerfen.

Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 2

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Eine Studie fand einen “großen Effekt” auf das Einkommen von Babies, eine Stunde pro Woche während zwei Jahren an einem psychosozialen Entwicklungsprogramm teilnahmen (im Vergleich zu einer Kontrollgruppe), $n = 127$.
- Nach 20 Jahren war das mittlere Einkommen der Experimentalgruppe um 42% höher (als in der Kontrollgruppe) mit einem Konfidenzintervall von $[+2\%, +98\%]$.
- Allerdings lässt uns unser Vorwissen vermuten, dass so ein Treatment das Einkommen nach 20 Jahren kaum verdoppeln lässt. Wir würden den Effekt lieber in einem konservativeren Intervall schätzen (enger um Null).

Regression in R, der schnelle Weg zum Glück

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Bayesianische Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- stan_glm(y ~ x, data = meine_daten)
```

Klassische Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- lm(y ~ x, data = meine_daten)
```

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichk

Verteilungen

Hinweise

Wahrscheinlichkeit

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verteilungen

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit p quantifiziert Ungewissheit im Hinblick auf eine Aussage bzw. ein Ereignis A , gegeben eines Hintergrundwissen H . $p = 0$ heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für falsch (unmöglich); $p = 1$ heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für wahr (sicher). $0 < p < 1$ heißt, wir sind (mehr oder weniger) unsicher bzgl. der Aussage bzw. ob das Ereignis zutrifft.

- A: "Sokrates ist sterblich."; H: "Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch." $\implies p(A|H) = 1$.
- A: "Die Münze zeigt Kopf."; H: "Wir haben keinen Grund anzunehmen, dass eine der beiden Seiten häufiger oben liegt oder das sonst etwas passiert." $\implies p(A|H) = 1/2$.
- A: "Schorsch, das rosa Einhorn, mag Bier."; H: "50% der rosa Einhörner mögen Bier." $\implies p(A|H) = 1/2$.

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeiten

Verteilungen

Hinweise

Axiome von Kolmogorow:

- 1 $p(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)
- 2 $p(A) + p(\neg A) = 1$ (Normierung; $\neg A$ ist das logische Gegenteil von A)
- 3 Die Wahrscheinlichkeit zweier unabhängiger Ereignisse ist die Summe ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten:
$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) + p(A_2)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- $p(A|H)$: Die Wahrscheinlichkeit von A , gegeben H . Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln (A), gegeben, dass der Würfel "fair" ist (H), d.h. wir kein Wissen haben, dass eine Augenzahl häufiger auftritt, ist $1/6$.

Wahrscheinlichkeit ist abhängig vom Hintergrundwissen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verteilungen

Hinweise

Ich habe gerade einen Stift in meiner Hosentasche (links oder rechts). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stift in meiner linken Tasche ist (und nicht in der rechten)?

Bezogen auf *Ihr* Hintergrundwissen gilt:

$$p(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"kein besonderes Wissen zu der Frage"}) = 1/2.$$

Bezogen auf *mein* Hintergrundwissen gilt:

$$p(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"Der Stift ist links"}) = 1.$$

Briggs (2016)

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Verteilungen

Häufigkeitsverteilung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

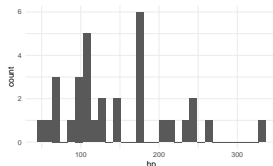
Hinweise

Die Verteilung eines *diskreten* Merkmals X mit k Ausprägungen zeigt, wie häufig die einzelnen Ausprägungen sind.

```
mtcars %>%  
  count(cyl)
```

```
##   cyl  n  
## 1    4 11  
## 2    6  7  
## 3    8 14
```

Ein *stetiges* Merkmal lässt sich durch Klassenbildung diskretisieren:



Wahrscheinlichkeitsverteilung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Merkmals X ordnet jeder der k Ausprägungen $X = x$ eine Wahrscheinlichkeit p zu. So hat die Variable *Geschlecht eines Babies* die beiden Ausprägungen *Mädchen* und *Junge* mit den Wahrscheinlichkeiten $p_M = 51.2\%$ bzw. $p_J = 48.8\%$ (Gelman, Hill, und Vehtari 2021).

Bei *stetigen* Merkmalen geht man von unendlich vielen Ausprägungen aus; die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Ausprägung ist (praktisch) Null: $p(X = x_j) = 0$, $j = 1, \dots, k$. Daher gibt man stattdessen die *Dichte* der Wahrscheinlichkeit an: Das ist die Wahrscheinlichkeit(smasse) pro eine Einheit von X .

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

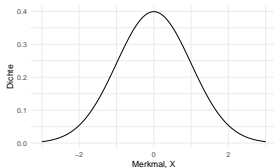
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

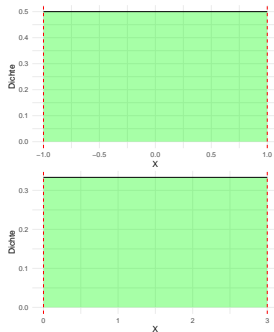
Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Bei $X = 0$ hat eine Einheit von X die Wahrscheinlichkeitsmasse von 40%.



Bei $X = 0$ hat eine Einheit von X die Wahrscheinlichkeitsmasse von 50% bzw. 33%.

Gesetz der großen Zahl

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

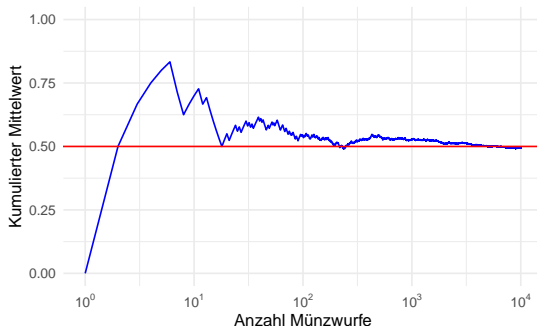
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Zieht man (zufällig) immer mehr Werte aus einer Verteilung², nähert sich der Mittelwert der Stichprobe immer mehr mit dem Mittelwert³ der Verteilung an (Taleb 2019).



²mit endlichem Mittelwert

³oft als Erwartungswert bezeichnet

Normal auf dem Fußballfeld

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

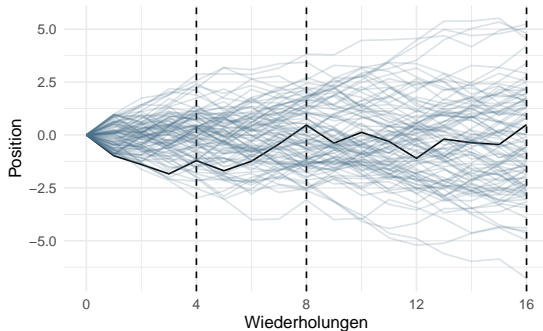
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Sie und 1000 Ihrer besten Freunde stehen auf der Mittellinie eines Fußballfelds (eng). Auf Kommando werfen alle jeweils eine Münze; bei Kopf geht man einen Schritt nach links, bei Zahl nach rechts. Das wird 16 Mal wiederholt. Wie wird die Verteilung der Positionen wohl aussehen?



Normal durch Addieren

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

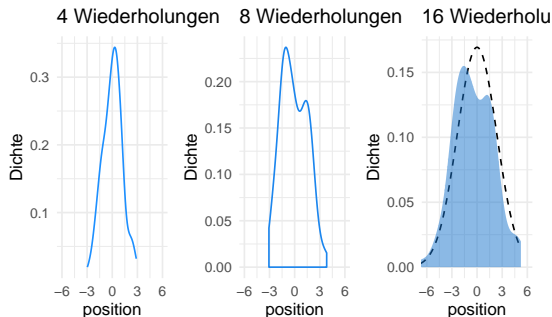
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Die Summe vieler (gleich starker) Zufallswerte (aus der gleichen Verteilung) erzeugt eine Normalverteilung; egal aus welcher Verteilung die Zufallswerte kommen (Zentraler Grenzwertsatz).



Nicht verwechseln

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

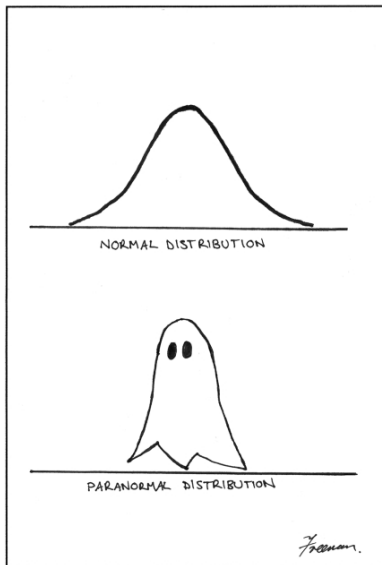
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Normalverteilung vs. randlastige Verteilungen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

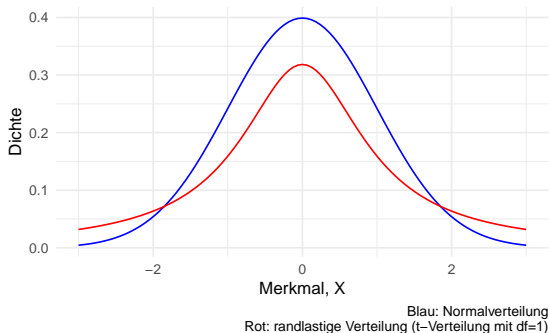
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Bei randlastigen Verteilungen (“fat tails”) kommen Extremereignisse viel häufiger vor als bei Normalverteilungen. Deshalb ist es wichtig sein, zu wissen, ob eine Normalverteilung oder eine randlastige Verteilung vorliegt. Viele statistische Methoden sind nicht zuverlässig bei (stark) randlastigen Methoden (Taleb 2019).

Beispiele für Normal- und randlastige Verteilungen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Normal verteilt

- Größe
- Münzwürfe
- Gewicht
- IQ
- Blutdruck
- Ausschuss einer Maschine

Randlastig verteilt

- Vermögen
- Verkaufte Bücher
- Ruhm
- Aktienkurse
- Erdbeben
- Pandemien
- Kriege
- Erfolg auf Tinder
- Meteoritengröße
- Stadtgrößen

Münzen werfen als Baum: nach 2 Würf

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

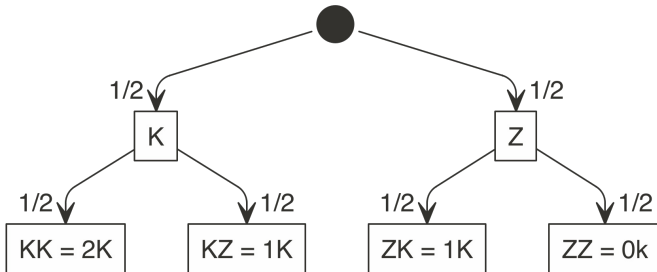
Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Wir zählen, wie oft Kopf (K) geworfen wird:

`\begin{figure}[H]`



Münzen werfen als Baum: nach 3 Würf

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

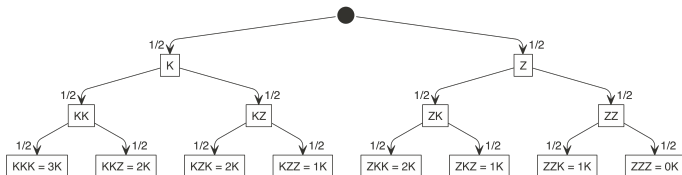
Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Wir zählen, wie oft Kopf (K) geworfen wird:

`\begin{figure}[H]`



Verteilung nach 3 Münzwürfen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

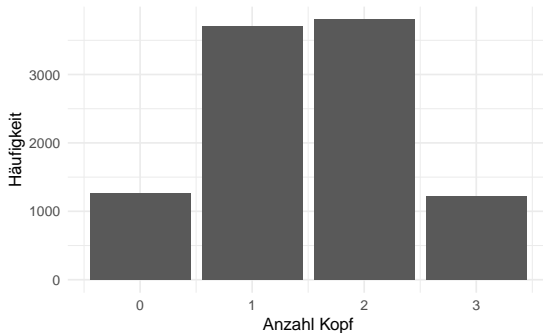
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Wir werfen sehr oft 3 Münzen:



Verteilung nach 10 Münzwürfen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

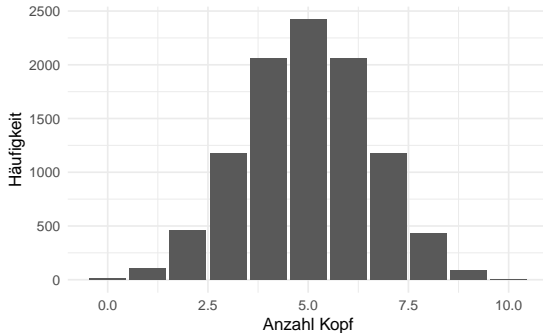
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Wir werfen sehr oft 10 Münzen:



Verteilung nach 20 Münzwürfen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

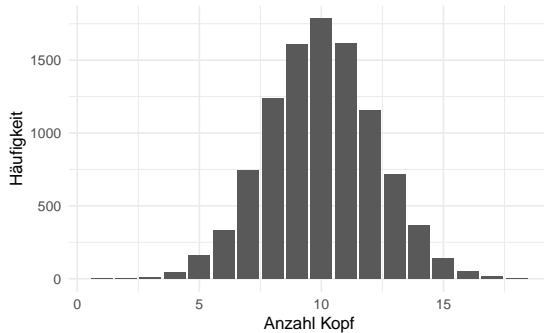
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Wir werfen sehr oft 20 Münzen:



Münzen werfen mit R

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

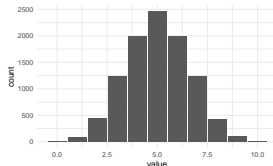
10 Mal 1 Münze werfen

```
rbinom(10, 1, 1/2)
```

```
## [1] 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0
```

10000 Mal 10 Münzen werfen

```
muenzvert <-  
  rbinom(1e04, 10, .5) %>%  
  as_tibble()  
ggplot(muenzvert,  
       aes(x = value)) +  
  geom_bar()
```



Definition

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Die Binomialverteilung beschreibt die Anzahl der Treffer (z.B. “Kopf”) in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die genau zwei mögliche Ergebnisse haben (“Treffer” vs. “Niete”).

Einsatzmöglichkeiten: Münzwürfe (Kopf/Zahl), Geburten (Mädchen/Junge), Zustand (ok/defekt), Diagnose (krank/gesund), Jobentscheidung (einstellen/nicht), Finanzinvestition (kaufen/nicht) ...

Wahrscheinlichkeit berechnen mit R

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Ein Prof. stellt eine Klausur mit 20 Richtig-Falsch-Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Münze werfen genau 15 Fragen richtig zu raten?⁴

```
dbinom(x = 15, size = 20, prob = .5)
```

```
## [1] 0.01478577
```

⁴Hey, endlich mal was für echte Leben!

Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-
renzstatistik?

Regression und
Inferenz

Klassische
vs. Bayes-
Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Hinweise

Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 1 aus Gelman, Hill, und Vehtari (2021), *Regression and other Stories* (mit "ROS" abgekürzt)
- Kapitel 1 aus McElreath (2016) ("ReThink_v1")
- Rechenregeln sind z.B. in Cramer und Nešlehová (2015) (Kap. 3) oder ähnlichen Lehrbüchern nachzulesen.

Weitere Literaturhinweise sind am Ende der jeweiligen Kapitel der Lehrbücher zu finden.

R-Code zum Buch ROS findet sich auf der Homepage des Buchs.

Literatur

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Briggs, William M. 2016. *Uncertainty: The Soul of Modeling, Probability & Statistics*. Springer.

Cramer, Erhard, und Johanna Nešlehová. 2015. *Vorkurs Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46400-7>.

Freeman, Matthew. 2006. „A Visual Comparison of Normal and Paranormal Distributions“. *Journal of Epidemiology and Community Health* 60 (1): 6. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2465539/>.

Gelman, Andrew, Jennifer Hill, und Aki Vehtari. 2021. *Regression and Other Stories*. Analytical Methods for Social Research. Cambridge: Cambridge University Press.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.

Sauer, Sebastian. 2019. *Moderne Datenanalyse mit R: Daten einlesen, aufbereiten, visualisieren und modellieren*. 1. Auflage 2019. FOM-Edition. Wiesbaden: Springer. <https://www.springer.com/de/book/9783658215866>.

Taleb, Nassim Nicholas. 2019. *The Statistical Consequences of Fat Tails, Papers and Commentaries*. Monograph. <https://nassimtaleb.org/2020/01/final-version-fat-tails/>.