

Thema 2: Bayes-Modelle einer kleinen Welt

QM2, ReThink, Kap. 2

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

2021-09-30

- 1 Kleine Welt, große Welt
- 2 Bayes-Statistik als Zählen
- 3 Ein erstes Modell
- 4 Bayes berechnen mit R
- 5 Hinweise

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Kleine Welt, große Welt

Behaims Globus, Kolumbus glücklicher Fehler

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

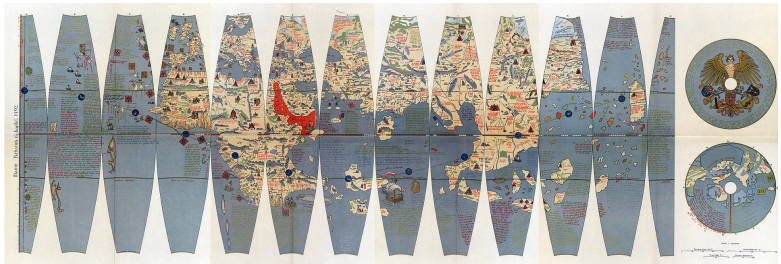
Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



Quelle

Kleine Welt, große Welt

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Kleine Welt

- Die Welt, wie sie der Golem sieht
- entspricht dem Modell (zwangsläufig)

Große Welt

- Die Welt, wie sie in Wirklichkeit ist
- entspricht nicht (zwangsläufig) dem Modell

- Die kleine Welt ist nicht die große Welt.
- Was in der kleinen Welt funktioniert, muss nicht in der großen Welt funktionieren.
- Modelle zeigen immer nur die kleine Welt: Vorsicht vor schnellen Schlüssen und vermeintlicher Gewissheit.



Nennen Sie ein Beispiel, in dem ein Modell nicht (exakt) der Wirklichkeit entspricht!

So denkt unser Bayes-Golem

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



🏆 Bayes-Inferenz ähnelt dem Lernen von Menschen. Geben Sie ein Beispiel von Lernen bei Menschen, das oben dargestelltem Prozess ähnelt!

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Bayes-Statistik als Zählen

Murmeln im Säckchen

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

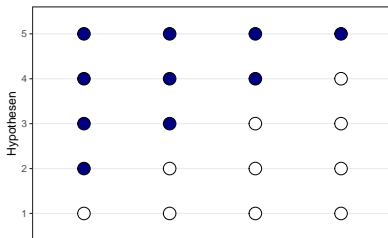
Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Sie haben ein Säckchen mit vier Murmeln darin.
- Sie wissen nicht, welche Farben die Murmeln haben.
- Murmeln gibt's in zwei Farben: weiß (W) oder blau (B).
- Es gibt daher fünf *Hypothesen* zur Farbe der Murmeln im Säckchen: [WWWW], [BWWW], [BBWW], [BBBW], [BBBB.]
- Unser Ziel ist, die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen nach Ziehen von Murmeln zu bestimmen.



Unsere Daten

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Wir ziehen eine Murmel, merken uns die Farbe und legen sie zurück. Das wiederholen wir noch zwei Mal (Ziehen mit Zurücklegen).
- Wir erhalten: **BWB**. Voilà: unsere Daten.



(Kurz 2021)



Wie groß ist die Stichprobe (N)? Ist die Wahrscheinlichkeit für B in jedem Zug gleich?

Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1. Zug

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Wenn Hypothese [BWWW] der Fall sein sollte, dann können wir im *ersten* Zug entweder die eine blaue Murmel erwischen oder eine der drei weißen.



Nachdem wir die Murmel gezogen haben (und die Farbe gemerkt haben), legen wir sie wieder ins Säckchen: Ziehen mit Zurücklegen.



Wie viele Elementarereignis hat dieses Zufallsexperiment?
Sind alle gleich wahrscheinlich?

Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1. und 2. Zug

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

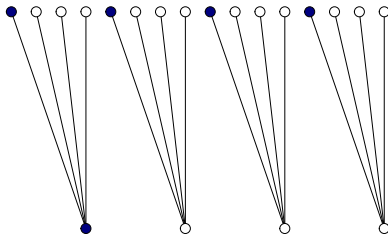
Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Wenn Hypothese [BWWW] der Fall sein sollte, dann haben wir im *zweiten* Zug natürlich die gleichen Möglichkeiten wie im ersten.

Zug 1 und Zug 2 zusammen genommen gibt es $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$ Kombinationen an gezogenen Murmeln:



🏆 Ist jedes Elementarereignis (z.B. BB, BW, ...) gleich wahrscheinlich?

Zugmöglichkeiten laut Hypothese [BWWW], 1.-3. Zug

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

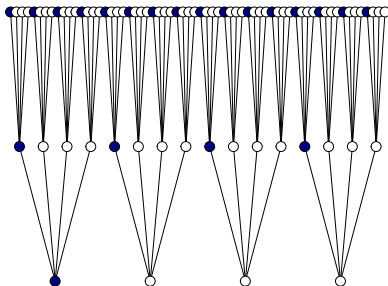
Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Zug 1, Zug 2 und Zug 3 zusammen genommen, gibt es dann $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ Kombinationen, drei Murmeln zu ziehen.



🏆 Wie wahrscheinlich ist ein bestimmtes dieser 64 Ereignisse (unter der Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit)?

Welche Züge sind logisch möglich?

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

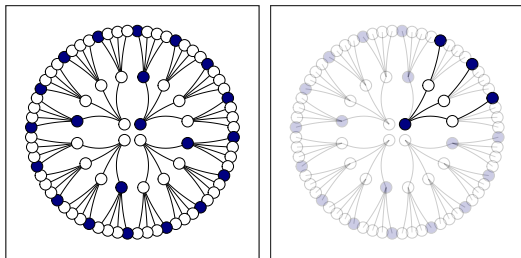
Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Einige Kombinationen („Pfade“) der Hypothese [BWWW] lassen sich nicht mit unseren Daten (BWB) vereinbaren.
- Z.B. alle Kombinationen die mit W beginnen, sind nicht mit unseren Daten zu vereinbaren.



Nur 3 der 64 „Pfade“ (Kombinationen), die Hypothese [BWWW] vorgibt, sind mit unseren Daten logisch zu vereinbaren.

Kombinationen für Hypothesen

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

| Hypothese | Häufigkeit BWB |
|-----------|-----------------|
| [W W W W] | $0 * 4 * 0 = 0$ |
| [B W W W] | $1 * 3 * 1 = 3$ |
| [B B W W] | $2 * 2 * 2 = 8$ |
| [B B B W] | $3 * 1 * 3 = 9$ |
| [B B B B] | $4 * 0 * 4 = 0$ |

- Die Häufigkeiten der Kombinationen (Pfade) ist proportional zur Plausibilität einer Hypothese: Je mehr Pfade laut Hypothese, desto wahrscheinlicher die Hypothese (unter sonst gleichen Bedingungen).
- Zusätzlich müssten wir noch beachten, ob bestimmte Hypothesen *per se* bzw. *a priori* wahrscheinlicher sind. So könnten blaue Murmeln selten sein. Gehen wir der Einfachheit halber zunächst davon aus, dass alle Hypothesen apriori gleich wahrscheinlich sind.

Pfadbaum für die Hypothesen [BWWW], [BBWW], [BBBW]

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

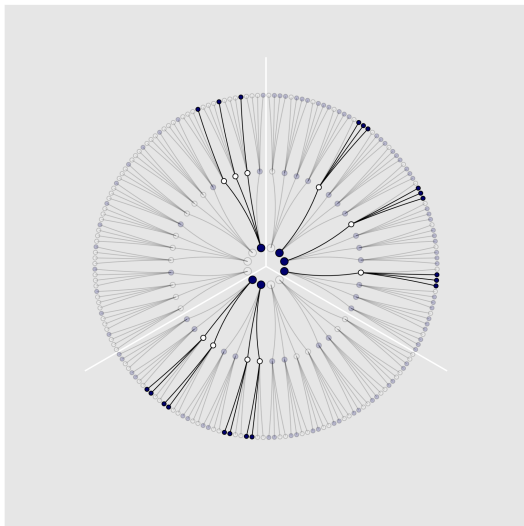
Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



Wir ziehen einer vierte Murmel: B

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Gehen wir zunächst davon aus, dass alle Hypothesen apriori gleich wahrscheinlich sind.
- Wir ziehen wieder eine Murmel. Sie ist blau (B)!
- Jetzt könnten wir den Pfadbaum für vier (statt drei) Züge aufmalen.
- Oder wir machen ein *Update*: Wir aktualisieren die bisherigen Kombinationshäufigkeiten um die neuen Daten. Die *alten* Daten dienen dabei als *Priori-Informationen* für die *neuen* Daten.

Priori-Information nutzen

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Mit den Daten BWBB ist die Hypothese [BBBW] am wahrscheinlichsten:

| Hyp | PB | HA | HN |
|-----------|----|----|--------------|
| [W W W W] | 0 | 0 | $0 * 0 = 0$ |
| [B W W W] | 1 | 3 | $1 * 3 = 3$ |
| [B B W W] | 2 | 8 | $2 * 8 = 16$ |
| [B B B W] | 3 | 9 | $3 * 9 = 27$ |
| [B B B B] | 4 | 0 | $4 * 0 = 0$ |

Hyp: Hypothese

PB: Anzahl von Pfaden für B

HA: alte (bisherige) Häufigkeiten

HN: neue (geupdatete) Häufigkeiten

Murmelfabrik streikt: Blaue Murmeln jetzt sehr selten!

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Berücksichtigen wir jetzt die Information, dass apriori (bevor wir die Daten gesehen haben), einige Hypothesen wahrscheinlicher (plausibler) sind als andere.
- Hier ist die Hypothese [BBWW] am wahrscheinlichsten:

| Hyp | HA | HF | HN |
|-----------|----|----|---------------|
| [W W W W] | 0 | 0 | $0 * 0 = 0$ |
| [B W W W] | 3 | 3 | $3 * 3 = 9$ |
| [B B W W] | 16 | 2 | $16 * 2 = 32$ |
| [B B B W] | 27 | 1 | $27 * 1 = 27$ |
| [B B B B] | 0 | 0 | $0 * 0 = 0$ |

HF: Häufigkeit des Säckchentyps laut Fabrik.

Zählen mit großen Zahlen nervt

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Malen Sie mal den Pfadbaum für 10 Züge ...
- Eine Umrechnung der Häufigkeiten in *Anteile* macht das Rechnen einfacher.
- Dazu definieren wir die *geupdatete Plausibilität einer Hypothese nach Kenntnis der Daten*:

Plausibilität von [BWWW] nach Kenntnis von BWB

\propto

Anzahl möglicher Pfade bei [BWWW] für BWB

\times

Priori-Plausibilität von [BWWW]

- \propto : proportional zu

Plausibilität berechnen

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Sei p der Anteil blauer Murmeln. Bei Hypothese [BWWW] gilt, dann ist $p = 1/4 = 0.25$. Sei $D_{neu} = \text{BWB}$, die Daten:

Plausibilität von p nach Kenntnis von D_{neu}

\propto

Anzahl Pfade von p für D_{neu}

\times

Priori-Plausibilität von p

Für jeden Wert von p beurteilen wir dessen Plausibilität als umso höher, je mehr Pfade durch den Pfadbaum führen und je höher die Plausibilität des Werts von p von vornherein ist.

Von Plausibilität zur Wahrscheinlichkeit

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Teilen wir die Anzahl Pfade einer Hypothese durch die Anzahl aller Pfade (aller Hypothesen), so bekommen wir einen Anteil. Damit haben wir eine Wahrscheinlichkeit:

$$\text{PI von } p \text{ mit Daten } D_{neu} = \frac{\text{Anzahl Pfade von } p \text{ für } D_{neu} \times \text{Prior-PI von } p}{\text{Summe aller Pfade}}$$

PI: Plausibilität



Was muss passieren, dass der Bruch gleich Null ist?

Plausibilität pro Hypothese

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

| Hyp | p | AP | PI |
|-----------|------|----|------|
| [W W W W] | 0.00 | 0 | 0.00 |
| [B W W W] | 0.25 | 3 | 0.15 |
| [B B W W] | 0.50 | 8 | 0.40 |
| [B B B W] | 0.75 | 9 | 0.45 |
| [B B B B] | 1.00 | 0 | 0.00 |

p: Anteil blauer Murmeln (Priori-Wissen)

AP: Anzahl von möglichen Pfaden; PI: Plausibilität

```
AP <- c(0, 3, 8, 9, 0)
PI <- AP / sum(AP)
PI
```

```
## [1] 0.00 0.15 0.40 0.45 0.00
```

- Kennwerte laut einer Hypothese, wie den Anteil blauer Murmeln p bezeichnet man als *Parameter*.
- Den Anteil gültiger Pfade pro Hypothese (bzw. pro Wert von p) bezeichnet man als *Likelihood*.
- Die Priori-Plausibilität nennt man *Priori-Wahrscheinlichkeit*.
- Die neue, geupdatete Plausibilität für einen bestimmten Wert von p nennt man *Posteriori-Wahrscheinlichkeit*.



Erklären Sie die Begriffe dem nächsten Menschen, den Sie treffen!

Zusammenfassung

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- 1 Schritt: Unser Vorab-Wissen zur Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese wird mit dem Begriff *Priori-Verteilung* gefasst.
- 2 Schritt: Wir zählen den Anteil gültiger Pfade für jede Hypothese; d.h. wir berechnen den *Likelihood* jeder Hypothese.
- 3 Schritt: Mit den Likelihoods *updaten* wir unsere *Priori-Verteilung*. Die Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese verändert sich entsprechend der Daten. Es resultiert die *Posteriori-Verteilung*.

Ein erstes Modell

Welcher Anteil der Erdoberfläche ist mit Wasser bedeckt?

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



Sie werden einen Globus-Ball in die Luft und fangen in wieder auf. Sie notieren dann, ob die Stelle unter Ihrem Zeigefinger Wasser zeigt (W) oder Land (L). Den Versuch wiederholen Sie 9 Mal.

Quelle CC 4.0 BY-NC

W L W W W L W L W



Besorgen Sie sich einen Globus (zur Not eine Münze) und stellen Sie den Versuch nach!

Der datengenierende Prozess: Wie entstanden die Daten?

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- 1 Der wahre Anteil von Wasser der Erdoberfläche ist p .
- 2 Ein Wurf des Globusballes hat die Wahrscheinlichkeit p , eine W -Beobachtung zu erzeugen.
- 3 Die Würfe des Globusballes sind unabhängig voneinander.
- 4 Wir haben kein Vorwissen über p ; jeder Wert ist uns gleich wahrscheinlich.



Welche Annahmen würden Sie ändern? Welche könnte man wegnehmen? Welche hinzufügen? Was wären die Konsequenzen?

Wissen updaten: Wir füttern Daten in das Modell

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

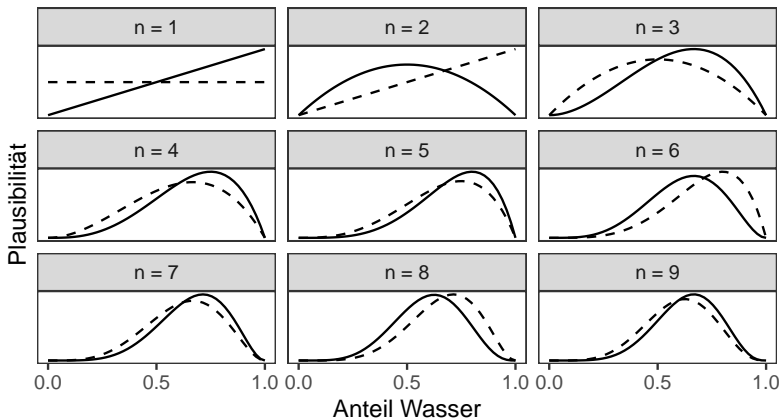
Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



Gestrichelte Linie: Priori-Verteilung (vor den Daten);
Durchgezogene Linie: Posteriori-Verteilung (nach Daten)

Erinnern wir uns an das Urnen-Beispiel

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Für jede Hypothese haben wir ein Vorab-Wissen, das die jeweilige Plausibilität der Hypothese angibt: *Priori-Verteilung*.
- Für jede Hypothese (d.h. jeden *Parameterwert* p) möchten wir den Anteil (die Wahrscheinlichkeit) gültiger Kombinationen wissen. Das gibt uns den *Likelihood*.
- Dann gewichten wir den Likelihood mit dem Vorabwissen, so dass wir die *Posteriori-Verteilung*¹ bekommen.



¹Anstatt von *Priori* liest man auch *Prior*; anstatt *Posteriori* auch *Posterior*

Die Binomialverteilung

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Wir nehmen an, dass die Daten unabhängig voneinander entstehen und sich der Parameterwert nicht zwischenzeitlich ändert.

Dann kann man die Wahrscheinlichkeit (Pr), W mal Wasser und L mal Land zu beobachten, wenn die Wahrscheinlichkeit für Wasser p beträgt, mit der *Binomialverteilung* berechnen.

Die Binomialverteilung zeigt die Verteilung der Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) der Ereignisse (z.B. 2 Mal Kopf) beim wiederholten Münzwurf (und allen vergleichbaren Zufallsexperimenten)².

$$Pr(W, L|p) = \frac{(W + L)!}{W!L!} p^W (1 - p)^L$$

² „Münzwurfverteilung“

Binomialverteilung mit R

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Was ist der Anteil der gültigen Pfade (Wahrscheinlichkeit), um 6 mal W bei $N = W + L = 9$ Würfeln zu bekommen, wenn wir von $p = 1/2$ ausgehen?

```
dbinom(x = 6, size = 9, prob = 1/2)
```

```
## [1] 0.1640625
```

Was ist die Wahrscheinlichkeit für $W = 9$ bei $N = 9$ und $p = 1/2$?

```
dbinom(x = 9, size = 9, prob = 1/2)
```

```
## [1] 0.001953125
```

Beispiele zur Berechnung einer binomial verteilten Wahrscheinlichkeit

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Ei Professori stellt einen Klausur mit 20 Richtig-Falsch-Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Münze werfen genau 15 Fragen richtig zu raten?³

```
dbinom(x = 15, size = 20, prob = .5)
```

```
## [1] 0.01478577
```

Was ist die Wahrscheinlichkeit bei 3 Münzwürfen (genau) 3 Treffer (Kopf) zu erzielen?

```
dbinom(3, 3, 1/2)
```

```
## [1] 0.125
```

³Hey, endlich mal was für echte Leben!

Unser Modell ist geboren

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Wir fassen das Globusmodell so zusammen:

$$W \sim \text{Bin}(N, p),$$

Lies: „ W ist *binomial* verteilt mit den Parametern N und p “. N gibt die Anzahl der Globuswürfe an: $N = W + L$.

Unser Vorab-Wissen zu p sei, dass uns alle Werte gleich plausibel erscheinen („uniform“):

$$p \sim \text{Unif}(0, 1).$$

Lies: „ p ist gleich (uniform) verteilt mit der Untergrenze 0 und der Obergrenze 1“.

So sehen die Verteilungen aus

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

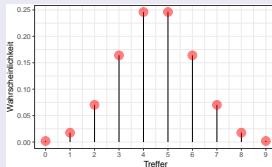
Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Binomialverteilung



$$N = 9, p = 1/2$$

Gleichverteilung



$$\text{Min} = 0, \text{Max} = 1$$



Was fällt Ihnen bei der Binomialverteilung auf? Ist sie symmetrisch? Verändert sich die Wahrscheinlichkeit linear? Was fällt Ihnen bei der Gleichverteilung auf?

Herleitung Bayes' Theorem 1/2: Gemeinsame Wahrscheinlichkeit

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit für *Regen* und *kalt* ist gleich der Wahrscheinlichkeit von *Regen*, *gegeben kalt* mal der Wahrscheinlichkeit von *kalt*. Entsprechend gilt: Die Wahrscheinlichkeit von W , L und p ist das Produkt von $Pr(W, L|p)$ und der Prior-Wahrscheinlichkeit $Pr(p)$:

$$Pr(W, L, p) = Pr(W, L|p) \cdot Pr(p)$$

Genauso gilt: Die Wahrscheinlichkeit von *Regen* und *kalt* ist gleich der Wahrscheinlichkeit *kalt*, *wenn's regnet* mal der Wahrscheinlichkeit von *Regen*:

$$Pr(W, L, p) = Pr(p|W, L) \cdot Pr(W, L)$$

Herleitung Bayes' Theorem 2/2:

Posteriori-Wahrscheinlichkeit

Wir setzen die letzten beiden Gleichungen gleich:

$$Pr(W, L|p) \cdot Pr(p) = Pr(p|W, L) \cdot (W, L)$$

Und lösen auf nach der Posteriori-Wahrscheinlichkeit, $Pr(p|W, L)$:

$$Pr(p|W, L) = \frac{Pr(W, L|p)Pr(p)}{Pr(W, L)}$$

$Pr(W, L)$ nennt man die *mittlere Wahrscheinlichkeit der Daten* oder *Evidenz*. Die Evidenz berechnet sich als Mittelwert der Likelihoods über alle Werte von p . Die Aufgabe dieser Größe ist nur dafür zu sorgen, dass insgesamt Werte zwischen 0 und 1 herauskommen.

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Bayes' Theorem

Formel Bayes' Theorem

$$Pr(H|D) = \frac{Pr(D|H)Pr(H)}{Pr(D)}$$

- Bestandteile:
 - Posteriori-Wahrscheinlichkeit: $Pr_{Post} := Pr(H|D)$
 - Likelihood: $L := Pr(D|H)$
 - Priori-Wahrscheinlichkeit: $Pr_{Priori} := Pr(H)$
 - Evidenz: $E := Pr(D)$
- Bayes' Theorem gibt die Pr_{Post} an, wenn man die Gleichung mit der Pr_{Priori} und dem L füttert.
- Bayes' Theorem wird häufig verwendet, um die Pr_{Post} zu quantifizieren.
- Die Pr_{Post} ist proportional zu $L \times Pr_{Priori}$.

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

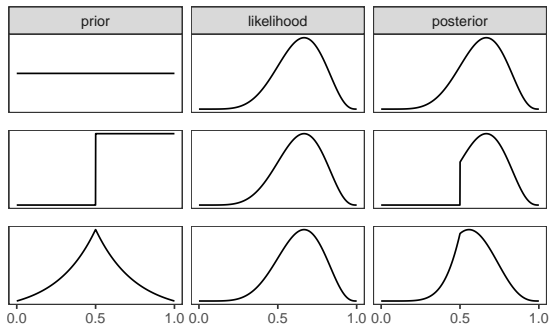
Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Posteriori als Produkt von Priori und Likelihood

$$\text{Posteriori} = \frac{\text{Likelihood} \times \text{Priori}}{\text{Evidenz}}$$



Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Bayes berechnen mit R

Die Methode *Gitter-Annäherung*⁴

Thema 2:

Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- 1 Teile den Wertebereich des Parameter in ein „Gitter“ auf, z.B. 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1 („Gitterwerte“).
- 2 Bestimme den Priori-Wert des Parameters für jeden Gitterwert.
- 3 Berechne den Likelihood für Gitterwert.
- 4 Berechne den unstandardisierten Posteriori-Wert für jeden Gitterwert (Produkt von Priori und Likelihood).
- 5 Standardisiere den Posteriori-Wert durch teilen anhand der Summe alle unstand. Posteriori-Werte.

⁴Grid Approximation

Gitterwerte in R berechnen

Thema 2:

Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

```
d <-  
  tibble(  
    # definiere das Gitter:  
    p_Gitter = seq(from = 0, to = 1, length.out = 10),  
    # bestimme den Priori-Wert:  
    Priori = 1) %>%  
  mutate(  
    # berechne Likelihood für jeden Gitterwert:  
    Likelihood = dbinom(6, size = 9, prob = p_Gitter),  
    # berechne unstand. Posteriori-Werte:  
    unstd_Post = Likelihood * Priori,  
    # berechne stand. Posteriori-Werte (summiert zu 1):  
    Post = unstd_Post / sum(unstd_Post))
```

Unsere Gitter-Daten

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

| p_Gitter | Priori | Likelihood | unstd_Post | Post |
|----------|--------|------------|------------|------|
| 0.00 | 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.11 | 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0.22 | 1 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 0.33 | 1 | 0.03 | 0.03 | 0.04 |
| 0.44 | 1 | 0.11 | 0.11 | 0.12 |
| 0.56 | 1 | 0.22 | 0.22 | 0.24 |
| 0.67 | 1 | 0.27 | 0.27 | 0.30 |
| 0.78 | 1 | 0.20 | 0.20 | 0.23 |
| 0.89 | 1 | 0.06 | 0.06 | 0.06 |
| 1.00 | 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |



Was wohl mit *Post* passiert, wenn wir *Priori* ändern?

Pr_{Post} zeigt, wie plausibel wir jeden Wert von p halten

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

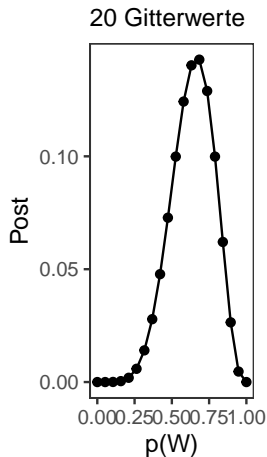
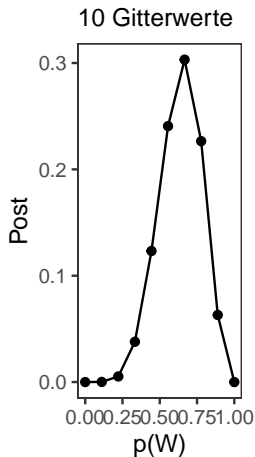
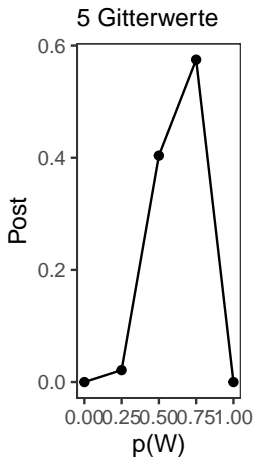
Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



Mehr Gitterwerte glätten die Annäherung.

Quadratische Anpassung⁵

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- Komfortabler noch ist die *quadratische Anpassung*, die bestimmte statistische Eigenschaften von linearen Modellen ausnutzt.
- Der R-Befehl `quap` gibt zentrale Statistiken zu den Parametern des Modells zurück.

```
library(rethinking)

globus_qa <- quap( # "quadratic approximation"
  alist( # definiere die Modellgleichungen
    W ~ dbinom(W + L, p), # Likelihood ist binomial verteilt
    p ~ dunif(0, 1)       # Priori ist gleich (uniform) verteilt
  ),
  data = list(W = 6, L = 3) # Daten
)

precis(globus_qa) # Gibt uns die zentralen Ergebnisse
```

```
##           mean          sd        5.5%        94.5%
## p 0.6666664 0.1571338 0.4155362 0.9177966
```

⁵Quadratic Approximation

Je größer die Stichprobe (N), desto zuverlässiger wird unsere Berechnung

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

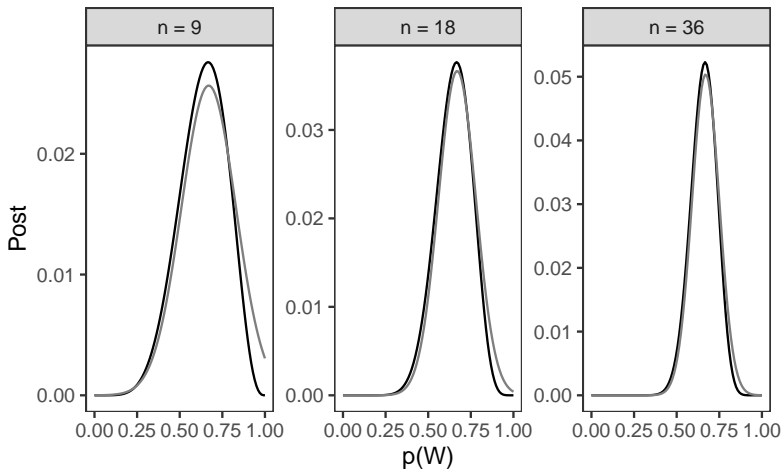
Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise



Grau: Quadratische Anpassung; schwarz: wahre Verteilung

Zusammenfassung

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

- In unserem Modell haben wir Annahmen zu Pr_{Priori} und L getroffen.
- Auf dieser Basis hat der Golem sein Wissen geupdated zu Pr_{Post} .
- Mit der Gitter-Methode haben wir viele Hypothesen (Parameterwerte) untersucht und jeweils die Pr_{Post} berechnet.
- Unser Modell bildet die kleine Welt ab; ob es in der großen Welt nützlich ist, steht auf einem anderen Blatt.



Wenn Sie auf einen Prozentwert für W tippen müssten, welchen würden Sie nehmen, laut dem Modell (und gegeben der Daten)?

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Hinweise

Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 2:
Bayes-Modelle
einer kleinen
Welt

Prof. Sauer

Kleine Welt,
große Welt

Bayes-
Statistik als
Zählen

Ein erstes
Modell

Bayes
berechnen mit
R

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 2 aus McElreath (2020)
- R-Code für die Diagramme stammt aus Kurz (2021)

Kurz, A. Solomon. 2021. *Statistical Rethinking with Brms, Ggplot2, and the Tidyverse: Second Edition*.

<https://bookdown.org/content/4857/>.

McElreath, Richard. 2020. *Statistical Rethinking: A Bayesian Course with Examples in R and Stan*. 2. Aufl. CRC Texts in Statistical Science. Boca Raton: Taylor and Francis, CRC Press.