

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

QM2, ROS, Kap. 1, ReThink\_v1, Kap. 1

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

- 1 Was ist Inferenzstatistik?
- 2 Regression und Inferenz
- 3 Klassische vs. Bayes-Inferenz
- 4 Modelle
- 5 Wachstum
- 6 Wahrscheinlichkeit

## 7 Verteilungen

## 8 Hinweise

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

# Was ist Inferenzstatistik?

# Deskriptiv- vs. Inferenzstatistik

## Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

## Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

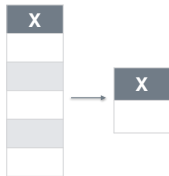
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

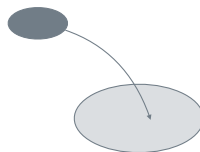
Verteilungen

Hinweise

Deskriptivstatistik



Inferenzstatistik



# Wozu ist die Inferenstatistik da?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

## Definition

Inferenzstatistik ist ein Verfahren, das mathematische Modelle verwendet, um von einer bestimmten Datenlage, die eine Stichprobe einer Grundgesamtheit darstellt, allgemeine Schlüsse zu ziehen.

# Deskriptiv- und Inferenzstatistik gehen Hand in Hand

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Für jede Kennzahl der Deskriptivstatistik (d.h. Stichprobendaten) kann man die Methoden der Inferenzstatistik verwenden (auf eine Grundgesamtheit schließen), z.B.:

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit
Mittelwert	$\bar{X}$	$\mu$
Streuung	$sd$	$\sigma$
Anteil	$p$	$\pi$
Korrelation	$r$	$\rho$
Regression	$b$	$\beta$

Für Stichprobendaten verwendet man lateinische Buchstaben ( $X, p, b, \dots$ ); für Populationsdaten verwendet man griechische Buchstaben.

# Schätzen von Parametern einer Grundgesamtheit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Meist begnügt man sich nicht mit Aussagen für eine Stichprobe, sondern will auf eine Grundgesamtheit verallgemeinern.

Leider sind die Parameter einer Grundgesamtheit zumeist unbekannt, daher muss man sich mit *Schätzungen* begnügen.

Schätzwerte werden mit einem “Dach” über dem Kennwert gekennzeichnet, z.B.

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit	Schätzwert
Mittelwert	$\bar{X}$	$\mu$	$\hat{\mu}$
Streuung	$sd$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$
Anteil	$p$	$\pi$	$\hat{\pi}$
Korrelation	$r$	$\rho$	$\hat{\rho}$
Regression	$b$	$\beta$	$\hat{\beta}$



# Beispiel für eine inferenzstatistische Fragestellung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Sie testen zwei Varianten Ihres Webshops (V1 und V2), die sich im Farbschema unterscheiden und ansonsten identisch sind.
- Hat das Farbschema einen Einfluss auf den Umsatz?
- Dazu vergleichen Sie den mittleren Umsatz pro Tag von V1 vs. V2,  $\bar{X}_{V1}$  und  $\bar{X}_{V2}$ .
- Die Mittelwerte unterscheiden sich etwas,  $\bar{X}_{V1} > \bar{X}_{V2}$
- Sind diese Unterschiede “zufällig” oder “substanziell”? Gilt also  $\mu_{V1} > \mu_{V2}$  oder  $\mu_{V1} \leq \mu_{V2}$ ?

# Was heißt “zufällig”?

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

## Definition

Unter einem zufälligen Ereignis (random) verstehen wir ein Ereignis, das nicht (komplett) vorherzusehen ist, wie etwa die Augenzahl Ihres nächsten Würferwurfs. Zufällig bedeutet nicht (zwangsläufig), dass es keine Ursachen gibt. So gehorchen die Bewegungen eines Würfels den Gesetzen der Physik, nur sind uns diese oder die genauen Randbedingungen nicht unbekannt (ausreichend) bekannt.

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

# Regression und Inferenz

# Für jede Fragestellung einen anderen Test

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

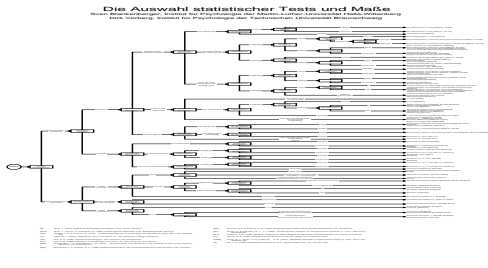
Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Quelle

Oder man nimmt einfach immer die Regression

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

## Regression und Inferenz

## Wachstum






## Wahrscheinlichkeit

### Common statistical tests are linear models

Last updated: 02 April, 2019

See worked examples and more details at the accompanying  
[multivariable chain rule derivative of a dot product](https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/differentiating-vector-valued-functions/a/multivariable-chain-rule-derivative-of-a-dot-product/a/multivariable-chain-rule-derivative-of-a-dot-product/a/multivariable-chain-rule-derivative-of-a-dot-product)

notebook: <https://indelible.github.io/tests-as-linear>

	Common name	Built-in function in R	Equivalent linear model in R	Exact?	The linear model in words	Icon
Simple regression: $\text{lm}(y \sim 1 + x)$	y is independent of x P: One-sample t-test N: Wilcoxon signed-rank test	lm.test(y) wilcox.test(testy)	$\text{lm}(y \sim 1)$ $\text{lm}(\text{signed\_rank}(y) \sim 1)$	✓ for N > 14	One number (intercept), i.e., the median predicts y. - (Same, but it predicts the signed rank of y.)	
	P: Paired-sample t-test N: Wilcoxon matched pairs	lm.test(y, y.paired=TRUE) wilcox.test(y, y.paired=TRUE)	$\text{lm}(y \sim y.p)$ $\text{lm}(\text{signed\_rank}(y - y.p) \sim 1)$	✓ for N > 14	One internal predictor predicts the pairwise y-y.p differences. - (Same, but it predicts the signed rank of y-y.p.)	
	y ~ continuous x P: Pearson correlation N: Spearman correlation	cov.test(x, y, method='Pearson') cov.test(x, y, method='Spearman')	$\text{lm}(y \sim 1 + x)$ $\text{lm}(\text{rank}(x) \sim 1 + \text{rank}(x))$	✓ for N > 10	One intercept (plus x multiplied by a number (slope)) predicts y. - (Same, but with ranked x and y)	
	y ~ discrete x P: Two-sample t-test P: Welch's t-test N: Mann-Whitney U	lm.test(y, x, var.equal=FALSE) var.equal=FALSE MannWhitney.U(y)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1)$ $\text{glm}(y \sim 1 + G_1, weights = .Y)$ $\text{lm}(\text{signed\_rank}(y) \sim 1 + \text{rank}(G_1))$	✓ for N > 11	An intercept for group 1 plus a difference if group 2 predicts y. - (Same, but with one variance pair-group instead of one common.) - (Same, but it predicts the signed rank of y.)	
	P: One-way ANOVA N: Kruskal-Wallis	anovf(~group) kruskal.test(~group)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k)$ $\text{lm}(\text{rank}(y) \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k)$	✓ for N > 11	An intercept for group 1 plus a difference if group k predicts y. - (Same, but it predicts the rank of y.)	
	P: One-way ANCOVA N: Chi-square test	anovf(~group + cov)	$\text{lm}(y \sim G_1 + G_2 + \dots + G_k + X^T)$	✓	- (Same, but plus a slope on x.) Note: This is discrete ANCOVA, ANCOVAs are ANOVAs with a continuous x.	
Multiple regression: $\text{lm}(y \sim 1 + x_1 + \dots + x_n)$	P: Two-way ANOVA	anovf(~group * sex)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k + S_1 + S_2 + \dots + S_m)$ $G_{k+1} = S_1 + S_2 + \dots + S_m$	✓	Interaction term: changing sex changes the effect of group parameters. Note: Sex is an indicator (0 or 1), so the result is a shift in the mean response for those with Sex=1. The first step (G) is in no way affected of course, the second (with S) would just be "on", and the 3 would be 1, multiplied with rank 5.	(Corresponding)
	Counts ~ discrete x	chisq.test(group sex, labels)	Equivalent log-linear model: $\text{logit}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k + S_1 + S_2 + \dots + S_m)$ $G_{k+1} = S_1 + S_2 + \dots + S_m$ $\text{family} = "poisson"$	✓	Interaction term: Is the following ANOVA... As discussed, the Chi-Square test is highly significant (p-value < 0.001) which is also the p proportion. See more here in the corresponding notebook.	Note: Many uses like (Same as Two-way ANOVA). As discussed, the Chi-Square test is highly significant (p-value < 0.001) which is also the p proportion. See more here in the corresponding notebook.
	N: Goodness of fit	chisq.test(y)	$\text{glm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k, \text{family} = "poisson")$	✓	(Same as One-way ANOVA and see Chi-Square note.)	See the Same as ANOVA

Let of common parametric (P) non-parametric (N) tests and equivalent linear models. The notation  $y = 1 + x$  is R shorthand for  $y = 1; + x$  which most of us learned in school. Models in similar colors are highly similar, but really, notice how similar they are across colors! For non-parametric models, the linear models are reasonable approximations for non-small sample sizes (see "Exact" models and click links to see simulations). Other less accurate approximations exist, e.g., Wilcoxon for the sign test and Goodness-of-fit for the binomial test. The signed rank function is `signed.rank <- function(x) sign(x) * rank(abs(x))`. The variables G and S are "dummy coded" indicator variables (either 0 or 1) exploiting the fact that when  $\Delta x = 1$  between categories the difference equals the slope. Subscripts (e.g., G<sub>1</sub> or y<sub>1</sub>) indicate different columns in data. In requires long-format data for all non-continuous models. All of it is explained in speaker detail and worked exercises at <https://intellecolab.github.io/notes-as-a-slides>.

<sup>a</sup> See the note to the two-way ANOVAs for explanation of the notation.

<sup>b</sup> Same model, but with one variance per group: `nlslsvalm ~ 1 + G_1, weights = variancesiform ~ nlscovop, method="ML"`



Jonas Kristoffer Lindeløv  
<https://lindelov.net>

Quelle

# To rule 'em all

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Quelle

# Was war noch mal die Regression?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

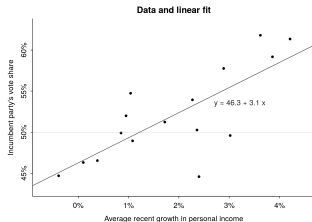
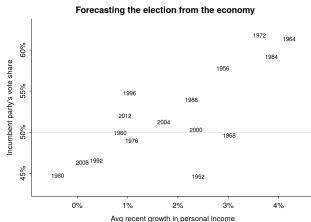
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Regression (Regressionsanalyse) ist eine Methode, um Zielvariablen in Abhängigkeit der Ausprägung von Prädiktorvariablen von Beobachtungen vorherzusagen.
- Dabei erlaubt die Regression die Quantifizierung der Ungewissheit der Vorhersagen.



Quelle

# In voller Pracht: Die Regressionsgleichung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

- $y$ : Zielvariable (vorherzusagen)
- $\beta_0$ : Achsenabschnitt
- $\beta_1$ : Regressionsgewicht (Steigung der Regressionsgeraden)
- $\epsilon$ : "Fehler"; Einflüsse auf  $y$ , die das Modell nicht kennt



# Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

```
data(mtcars)
library(rstanarm)
lm1 <- stan_glm(mpg ~ hp, data = mtcars)
```

```
print(lm1)
```

	Median	MAD_SD
(Intercept)	30.0	1.7
hp	-0.1	0.0

Auxiliary parameter(s):

	Median	MAD_SD
sigma	3.9	0.5

# Visualisierung zum Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

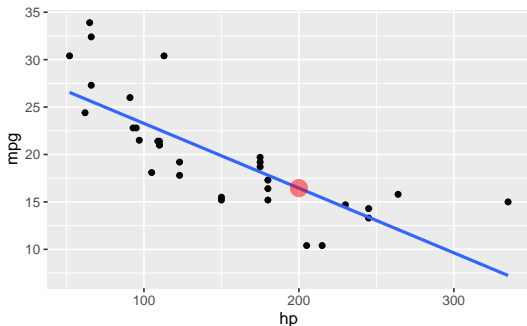
Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Rot markiert: Der *vorhergesagte* Wert von mpg für hp=200 (Punktschätzung).

# Der Punktschätzer berücksichtigt nicht die Ungewissheit des Models

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

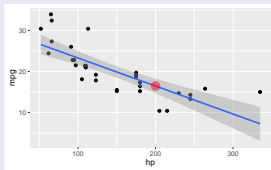
Verteilungen

Hinweise

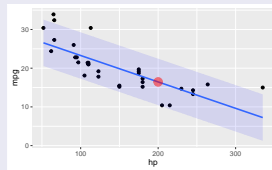
Mindestens zwei Arten von Ungewissheit müssen wir in unseren Vorhersagen berücksichtigen:

- zur Lage der Regressionsgeraden ( $\beta_0, \beta_1$ )
- zu Einflüssen, die unser Modell nicht kennt ( $\epsilon$ )

## Ungewissheit in $\beta_0, \beta_1$



## Ungewissheit in $\epsilon$



# Vorhersage-Intervall: berücksichtigt Ungewissheit in $\beta_0, \beta_1, \epsilon$

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

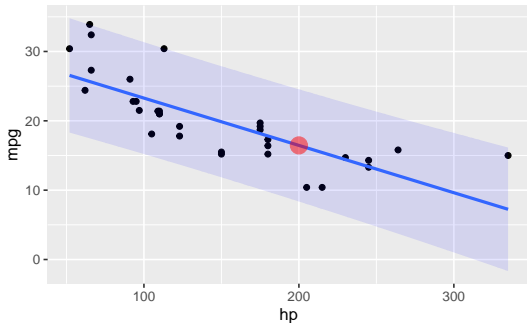
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Das Vorhersage-Intervall berücksichtigt Ungewissheit in  $\beta_0, \beta_1, \epsilon$  bei der Vorhersage von  $\hat{y}_i$ .



# Wozu man die Regression benutzt

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Vorhersagen
- Zusammenhänge untersuchen
- Adjustieren (Zusammenhänge korrigieren)
- Kausalinferenz

# In Experimenten kann man die Ergebnisse kausal interpretieren<sup>1</sup>

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

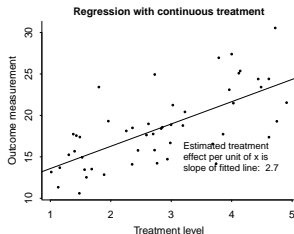
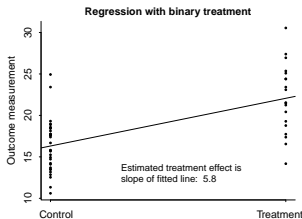
Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



<sup>1</sup>Wenn alles gut läuft.

# Die lineare Regression ist erstaunlich flexibel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

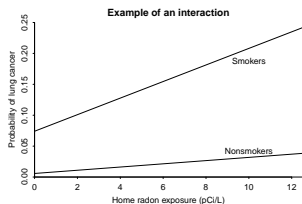
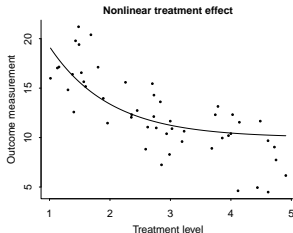
Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Z.B.

- *Nichtlineare* Zusammenhänge
- Interaktionen



# Häufig sind Gruppen nicht direkt vergleichbar

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

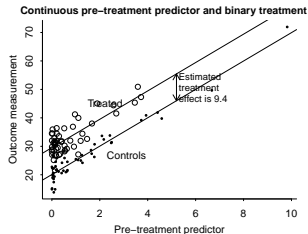
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- *Beispiel:* Die Heilungsraten in der Experimentalgruppe waren höher als in der Kontrollgruppe. Allerdings waren die Personen der Experimentalgruppe auch gesünder (als die Personne der Kontrollgruppe). Um den Kausaleffekt der Behandlung zu schätzen, müssen solche vorab bestehenden Unterschiede zwischen den Gruppen berücksichtigt (adjustiert) werden.





# Keine vorschnelle Kausalinterpretation

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Kausalinterpretationen statistischer Ergebnisse (z.B. Mittelwertsdifferenz von Behandlungs- vs. Kontrollgruppe) ist nur möglich, wenn
  - die Studie gut kontrolliert und randomisiert ist (und die Stichprobe groß ist) oder
  - bestehende Unterschiede nicht randomisiert, aber kontrolliert wurden oder
  - diese gemessen und in der Regressionsanalyse berücksichtigt wurden

Ansonsten muss auf eine Kausalinterpretation verzichtet werden.

Allerdings ist es möglich, Art und Stärke von Zusammenhängen zu schätzen.

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

# Klassische vs. Bayes-Inferenz

# Klassische Inferenz: Frequentismus

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Die Berücksichtigung von Vorwissen zum Sachgegenstand wird vom Frequentismus als subjektiv zurückgewiesen.
- Nur die Daten selber fließen in die Ergebnisse ein
- Wahrscheinlichkeit wird über relative Häufigkeiten definiert.
- Es ist nicht möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese anzugeben.
- Stattdessen wird angegeben, wie häufig eine vergleichbare Datenlage zu erwarten ist, wenn die Hypothese gilt und der Versuch sehr häufig wiederholt ist.
- Ein Großteil der Forschung (in den Sozialwissenschaften) verwendet diesen Ansatz.

# Bayesianische Inferenz

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Vorwissen (Priori-Wissen) fließt explizit in die Analyse ein (zusammen mit den Daten).
- *Wenn* das Vorwissen gut ist, wird die Vorhersage genauer, ansonsten ungenauer.
- Die Wahl des Vorwissens muss explizit (kritisierbar) sein.
- In der Bayes-Inferenz sind Wahrscheinlichkeitsaussagen für Hypothesen möglich.
- Die Bayes-Inferenz erfordert mitunter viel Rechenzeit und ist daher erst in den letzten Jahren (für gängige Computer) komfortabel geworden.

# Vergleich von Wahrscheinlichkeitsaussagen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

## Frequentismus

- zentrale Statistik: *p-Wert*
- “Wie wahrscheinlich ist der Wert der Teststatistik (oder noch extreme Werte), vorausgesetzt die Nullhypothese gilt und man wiederholt den Versuch unendlich oft (unter gleichen Bedingungen aber zufällig verschieden)?”

## Bayes-Statistik

- zentrale Statistik: *Posterior-Verteilung*
- “Wie wahrscheinlich ist die Forschungshypothese, jetzt nachdem wir die Daten kennen laut unserem Modell?”

# Frequentist und Bayesianer

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

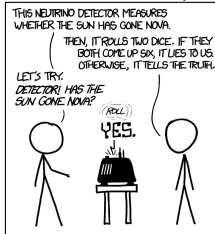
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

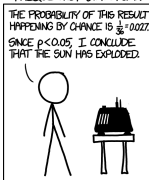
Verteilungen

Hinweise

DID THE SUN JUST EXPLODE?  
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)



FREQUENTIST STATISTICIAN:



BAYESIAN STATISTICIAN:



Quelle

# Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 1

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Ein Betrunkener behauptet, er könne hellsehen.
- Er wirft eine Münze 10 Mal und sagt jedes Mal korrekt vorher, welche Seite oben landen wird.
- Die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist sehr gering ( $2^{-10}$ ) unter der Hypothese, dass die Münze fair ist, dass Ergebnis also “zufällig” ist.
- Unser Vorwissen lässt uns allerdings trotzdem an der Hellsichtigkeit des Betrunkenen zweifeln, so dass die meisten von uns die Hypothese von der Zufälligkeit des Ergebnisses wohl nicht verwerfen.

# Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 2

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Eine Studie fand einen “großen Effekt” auf das Einkommen von Babies, eine Stunde pro Woche während zwei Jahren an einem psychosozialen Entwicklungsprogramm teilnahmen (im Vergleich zu einer Kontrollgruppe),  $n = 127$ .
- Nach 20 Jahren war das mittlere Einkommen der Experimentalgruppe um 42% höher (als in der Kontrollgruppe) mit einem Konfidenzintervall von  $[+2\%, +98\%]$ .
- Allerdings lässt uns unser Vorwissen vermuten, dass so ein Treatment das Einkommen nach 20 Jahren kaum verdoppeln lässt. Wir würden den Effekt lieber in einem konservativeren Intervall schätzen (enger um Null).



# Regression in R, der schnelle Weg zum Glück

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

*Bayesianische* Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- stan_glm(y ~ x, data = meine_daten)
```

*Klassische* Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- lm(y ~ x, data = meine_daten)
```

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

**Modelle**

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

# Modelle

# Was ist ein (statistisches) Modell?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

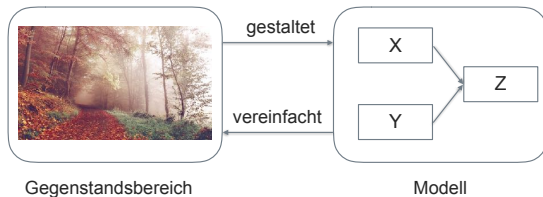
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit, z.B. in Form einer Landkarte, eines Modellauto oder einer Gleichung (Sauer 2019).
- Greift relevante Aspekte der Wirklichkeit heraus (und vernachlässigt andere).



# Beispiel für ein statistisches Modell

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

$$E = \beta_0 + \beta_1 \cdot L + \epsilon,$$

wobei  $E$  für *Erfolg in der Klausur* steht,  $L$  für die *Lernzeit* und  $\epsilon$  für den “Fehler” des Modells, sprich sonstige Einflussgrößen, die im Modell nicht berücksichtigt werden.

# Der Golem von Prag

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Quelle

Der Golem von Prag, eine vom Menschen geschaffene Kreatur gewaltiger Kraft, die Befehle wörtlich ausführt.

Bei kluger Führung kann ein Golem Nützliches vollbringen. Bei unüberlegter Verwendung wird er jedoch großen Schaden anrichten.

# Wissenschaftliche Modelle sind wie Golems

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

## Golem

- Besteht aus Lehm
- Belebt durch "Wahrheit"
- Mächtig
- dumm
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Märchen

## Modell

- Besteht aus ~~Lehm~~Silikon
- Belebt durch Wahrheit (?)
- Manchmal mächtig
- einfacher als die Wirklichkeit
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Nicht einmal falsch

*Wir bauen Golems.*

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

**Wachstum**

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

# Wachstum

- Eine Seerose wächst auf einem Teich. Schön.
- Tag 1: 1 Seerose. Tag 2: 2 Seerosen. Tag 3: 4 Seerosen, etc.
- Am Tag 100 ist der See komplett mit Seerosen bedeckt.

**An welchem Tag ist der See zu 50% mit Seerosen bedeckt?**



# Wachstumsschritte der Seerose

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

$$\text{Menge} = 2^{\text{Tag}}$$

```
d <- tibble(Tag = 0:10,  
             Menge = 2^Tag)
```

Tag	Menge
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

# Der Logarithmus gibt die Anzahl der (Wachstums-)Tage

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

##	[1]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
----	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

*Logarithmieren* liefert von einer Zahl (hier Menge) den Exponenten zu einer Basis (hier 2) zurück.

Umgekehrt liefert *Potenzieren* zu einer Basis (hier 2) die Menge zurück.

##	[1]	1	2	4	8	16	32	64	128	256
----	-----	---	---	---	---	----	----	----	-----	-----

Wachstumsprozesse sind oft multiplikativ, z.B. eine Seerose, die sich in einem Zeitabschnitt  $t$  verdoppelt.

# Rechenregeln für Potenzen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$  ( $n$  Faktoren,  $n \in \mathbb{N}$ )

- $a^1 = a$

- $a^0 = 1$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- $a^n \cdot a^m = (a \cdot b)^n$

- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

- $(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$

# Logarithmus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Die Zahl  $x \in \mathbb{R}$  mit  $b^x = a$  heißt Logarithmus von  $a$  zur Basis  $b$ . Sie wird mit  $x = \log_b(a)$  bezeichnet (Cramer und Nešlehová 2015). Dabei seien  $a, b > 0$  mit  $b \neq 1$ .

```
log(c(2, 4, 8), base = 2)
```

```
## [1] 1 2 3
```

```
log(c(10, 100, 1000), base = 10)
```

```
## [1] 1 2 3
```

```
log(c(2.71, 2.71^2)) %>% round()
```

```
## [1] 1 2
```

Gängige Basen sind 2, 10 und  $e$  (Eulersche Zahl: 2.7178...).

# Rechenregeln zum Logarithmus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

- $\log_b(1) = 0$
- $\log_b(b) = 1$
- $b^{\log_b(a)} = a$
- $\log_b(b^a) = a$
- $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$
- $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$
- $\log_c(b^a) = a \cdot \log_c(b)$

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichk

Verteilungen

Hinweise

# Wahrscheinlichkeit

# Was ist Wahrscheinlichkeit?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verteilungen

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit  $p$  quantifiziert Ungewissheit im Hinblick auf eine Aussage bzw. ein Ereignis  $A$ , gegeben eines Hintergrundwissen  $H$ .  $p = 0$  heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für falsch (unmöglich);  $p = 1$  heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für wahr (sicher).  $0 < p < 1$  heißt, wir sind (mehr oder weniger) unsicher bzgl. der Aussage bzw. ob das Ereignis zutrifft.

- A: "Sokrates ist sterblich."; H: "Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch."  $\implies p(A|H) = 1$ .
- A: "Die Münze zeigt Kopf."; H: "Wir haben keinen Grund anzunehmen, dass eine der beiden Seiten häufiger oben liegt oder das sonst etwas passiert."  $\implies p(A|H) = 1/2$ .
- A: "Schorsch, das rosa Einhorn, mag Bier."; H: "50% der rosa Einhörner mögen Bier."  $\implies p(A|H) = 1/2$ .

# Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeiten

Verteilungen

Hinweise

## Axiome von Kolmogorow:

- 1  $p(A) \geq 0$  (Nichtnegativität)
- 2  $p(A) + p(\neg A) = 1$  (Normierung;  $\neg A$  ist das logische Gegenteil von  $A$ )
- 3 Die Wahrscheinlichkeit zweier unabhängiger Ereignisse ist die Summe ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten:  
$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) + p(A_2)$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- $p(A|H)$ : Die Wahrscheinlichkeit von  $A$ , gegeben  $H$ . Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln ( $A$ ), gegeben, dass der Würfel "fair" ist ( $H$ ), d.h. wir kein Wissen haben, dass eine Augenzahl häufiger auftritt, ist  $1/6$ .



# Wahrscheinlichkeit ist abhängig vom Hintergrundwissen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeiten

Verteilungen

Hinweise

Ich habe gerade einen Stift in meiner Hosentasche (links oder rechts). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stift in meiner linken Tasche ist (und nicht in der rechten)?

Bezogen auf *Ihr* Hintergrundwissen gilt:

$$p(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"kein besonderes Wissen zu der Frage"}) = 1/2.$$

Bezogen auf *mein* Hintergrundwissen gilt:

$$p(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"Der Stift ist links"}) = 1.$$

Briggs (2016)

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

**Verteilungen**

Hinweise

# Verteilungen

# Häufigkeitsverteilung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

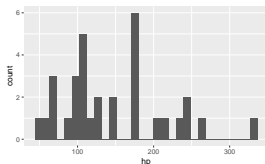
Hinweise

Die Verteilung eines *diskreten* Merkmals  $X$  mit  $k$  Ausprägungen zeigt, wie häufig die einzelnen Ausprägungen sind.

```
mtcars %>%  
  count(cyl)
```

```
##    cyl    n  
## 1     4   11  
## 2     6    7  
## 3     8   14
```

Ein *stetiges* Merkmal lässt sich durch Klassenbildung diskretisieren:



# Wahrscheinlichkeitsverteilung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Merkmals  $X$  ordnet jeder der  $k$  Ausprägungen  $X = x$  eine Wahrscheinlichkeit  $p$  zu. So hat die Variable *Geschlecht eines Babies* die beiden Ausprägungen *Mädchen* und *Junge* mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_M = 51.2\%$  bzw.  $p_J = 48.8\%$  (Gelman, Hill, und Vehtari 2021).

Bei *stetigen* Merkmalen geht man von unendlich vielen Ausprägungen aus; die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Ausprägung ist (praktisch) Null:  $p(X = x_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Daher gibt man stattdessen die *Dichte* der Wahrscheinlichkeit an: Das ist die Wahrscheinlichkeit(smasse) pro eine Einheit von  $X$ .

# Beispiele für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

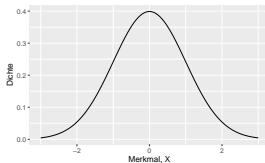
Modelle

Wachstum

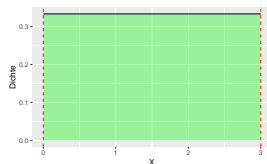
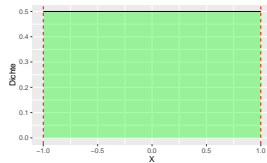
Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise



Bei  $X = 0$  hat eine Einheit von  $X$  die Wahrscheinlichkeitsmasse von 40%.



Bei  $X = 0$  hat eine Einheit von  $X$  die Wahrscheinlichkeitsmasse von 50% bzw. 33%.

# Normal auf dem Fußballfeld

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

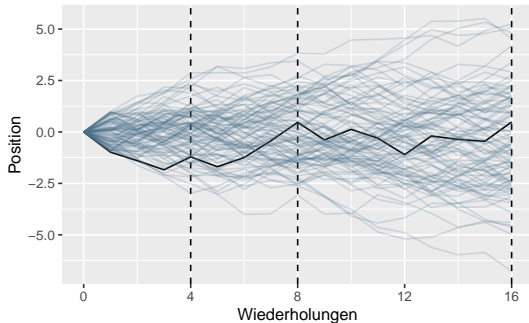
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Sie und 1000 Ihrer besten Freunde stehen auf der Mittellinie eines Fußballfelds (eng). Auf Kommando werfen alle jeweils eine Münze; bei Kopf geht man einen Schritt nach links, bei Zahl nach rechts. Das wird 16 Mal wiederholt. Wie wird die Verteilung der Positionen wohl aussehen?



# Normal durch Addieren

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

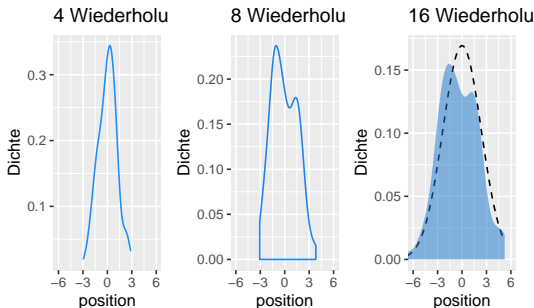
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Die Summe vieler (gleich starker) Zufallswerte (aus der gleichen Verteilung) erzeugt eine Normalverteilung; egal aus welcher Verteilung die Zufallswerte kommen (Zentraler Grenzwertsatz).



# Gesetz der großen Zahl

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

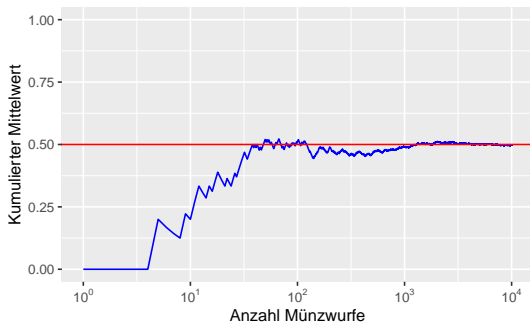
Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Zieht man (zufällig) immer mehr Werte aus einer Verteilung<sup>2</sup>, nähert sich der Mittelwert der Stichprobe immer mehr mit dem Mittelwert<sup>3</sup> der Verteilung an (Taleb 2019).



---

<sup>2</sup>mit endlichem Mittelwert

<sup>3</sup>oft als Erwartungswert bezeichnet



# Normalverteilungen

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

**Verteilungen**

Hinweise

# Binomialverteilung

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

**Verteilungen**

Hinweise

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

**Hinweise**

# Hinweise

# Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Wachstum

Wahrscheinlichkeit

Verteilungen

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 1 aus Gelman, Hill, und Vehtari (2021), *Regression and other Stories* (mit “ROS” abgekürzt)
- Kapitel 1 aus McElreath (2016) (“ReThink\_v1”)
- Rechenregeln sind z.B. in Cramer und Nešlehová (2015) (Kap. 3) oder ähnlichen Lehrbüchern nachzulesen.

Weitere Literaturhinweise sind am Ende der jeweiligen Kapitel der Lehrbücher zu finden.

R-Code zum Buch ROS findet sich auf der Homepage des Buchs.

Briggs, William M. 2016. *Uncertainty: The Soul of Modeling, Probability & Statistics*. Springer.

Cramer, Erhard, und Johanna Nešlehová. 2015. *Vorkurs Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-46400-7>.

Gelman, Andrew, Jennifer Hill, und Aki Vehtari. 2021. *Regression and Other Stories*. Analytical Methods for Social Research. Cambridge: Cambridge University Press.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.

Sauer, Sebastian. 2019. *Moderne Datenanalyse mit R: Daten einlesen, aufbereiten, visualisieren und modellieren*. 1. Auflage 2019. FOM-Edition. Wiesbaden: Springer.  
<https://www.springer.com/de/book/9783658215866>.

Taleb, Nassim Nicholas. 2010. *The Statistical Consequences of*