Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Was ist Inferenzstatistik?

Regression un Inferenz

Klassische vs. Bayes-

Modelle

Himmoico

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik? QM2, ROS, Kap. 1.

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

Regression un Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

- 1 Was ist Inferenzstatistik?
- 2 Regression und Inferenz
- 3 Klassische vs. Bayes-Inferenz
- 4 Modelle
- 5 Hinweise

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Saue

Was ist Inferenzstatistik?

Regression un Inferenz

Klassische vs. Bayes

Modelle

Hinweise

## Was ist Inferenzstatistik?

#### Deskriptiv- vs. Inferenzstatistik

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

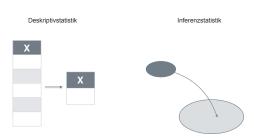
Was ist Inferenzstatistik?

Regression un

Klassische

vs. Bayes Inferenz

Hipwoise



#### Wozu ist die Inferenstatistik da?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauei

Was ist Inferenzstatistik?

Klassische

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

#### Definition

Inferenzstatistik ist ein Verfahren, das mathematische Modelle verwendet, um von einer bestimmten Datenlage, die eine Stichprobe einer Grundgesamtheit darstellt, allgemeine Schlüsse zu ziehen.

## Die drei Aufgaben der Inferenzstatistik

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Saue

#### Was ist Inferenzstatistik?

- Regression un
- Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

linweise

- 1 Von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen
- 2 Von der Experimental- auf die Kontrollgruppe zu schließen
- 3 Vom beobachteten Messwert auf das zugrundeliegende Konstrukt zu schließen

# Deskriptiv- und Inferenzstatistik gehen Hand in Hand

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sau

Was ist Inferenzstatistik?

Regression un Inferenz

Klassische vs. Bayes-

Modelle

Hinweise

Für jede Kennzahl der Deskriptivstatistik (d.h.

Stichprobendaten) kann man die Methoden der Inferenzstatistik verwenden (auf eine Grundgesamtheit schließen), z.B.:

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit
Mittelwert	X	$\mu$
Streuung	sd	σ
Anteil	р	$\pi$
Korrelation	r	ρ
Regression	Ь	β

Für Stichprobendaten verwendet man lateinische Buchstaben  $(X, p, b, \ldots)$ ; für Populationsdaten verwendet man griechische Buchstaben.

#### Schätzen von Parametern einer Grundgesamtheit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

Meist begnügt man sich nicht mit Aussagen für eine Stichprobe, sondern will auf eine Grundgesamtheit verallgemeinern.

Leider sind die Parameter einer Grundgesamtheit zumeist unbekannt, daher muss man sich mit *Schätzungen* begnügen.

Schätzwerte werden mit einem "Dach" über dem Kennwert gekennzeichnet, z.B.

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit	Schätzwert
Mittelwert	X	$\mu$	$\hat{\mu}$
Streuung	sd	σ	$\hat{\sigma}$
Anteil	р	$\pi$	$\hat{\pi}$
Korrelation	r	ρ	$\hat{ ho}$
Regression	Ь	β	$\hat{\beta}$

## Beispiel für eine inferenzstatistische Fragestellung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Was ist Inferenzstatistik?

- Sie testen zwei Varianten Ihres Webshops (V1 und V2), die sich im Farbschema unterscheiden und ansonsten identisch sind.
- Hat das Farbschema einen Einfluss auf den Umsatz?
- Dazu vergleichen Sie den mittleren Umsatz pro Tag von V1 vs. V2,  $\bar{X}_{V1}$  und  $\bar{X}_{V2}$ .
- Die Mittelwerte unterscheiden sich etwas,  $\bar{X}_{V1} > \bar{X}_{V2}$
- Sind diese Unterschiede "zufällig" oder "substanziell"? Gilt also  $\mu_{V1} > \mu_{V2}$  oder  $\mu_{V1} \leq \mu_{V2}$ ?

## Was heißt "zufällig"?

Thema 1: Was ist Inferenzsta-

Prof. Sau

Was ist Inferenzstatistik?

Klassische vs. Bayes-

Madalla

. .

#### Definition

Unter einem zufälligen Ereignis (random) verstehen wir ein Ereignis, das nicht (komplett) vorherzusehen ist, wie etwa die Augenzahl Ihres nächsten Würferwurfs. Zufällig bedeutet nicht (zwangsläufig), dass es keine Ursachen gibt. So gehorchen die Bewegungen eines Würfels den Gesetzen der Physik, nur sind uns diese oder die genauen Randbedingungen nicht unbekannt (ausreichend) bekannt.

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sau

Was ist Inferenzstatistik

#### Regression und Inferenz

Klassische

Modelle

Hinweise

## Regression und Inferenz

## Für jede Fragestellung einen anderen Test

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

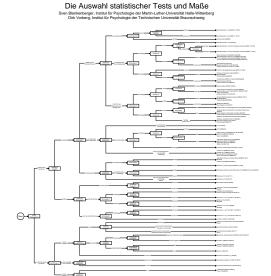
Was ist Infe-

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-

Mandalla

Hinweise



### Oder man nimmt einfach immer die Regression

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

Common name	Built-in function in R	Equivalent linear model in R	Exact?	The linear model in words	Icon
y is independent of x P: One-sample Hest N: Wiccson signed-rank	Limstly) wilcox instly)	lm(y ~ 1) lm(signed_rank(y) ~ 1)	Se N > 14	One number (intercept, i.e., the mean) predicts y (Same, but it predicts the signed rank of y.)	1
P: Paired-sample t-test N: Wilcoem matched pairs	t.test(yr, yr, paired=TRUE) wilcox.test(yr, yr, paired=TRUE)	$\begin{split} & lm(y_{\ell} - y_{\tau} \sim 1) \\ & lm(signoid_rsmk(y_{\ell} - y_{\tau}) \sim 1) \end{split}$	terN.E14	One intercept predicts the painvise y <sub>1</sub> -y <sub>2</sub> , differences (Same, but it predicts the signed rank of y <sub>1</sub> -y <sub>2</sub> .)	Z-
y ~ continuous x P. Pearson correlation N: Spearman correlation	contest(x, y, method="Pearson") contest(x, y, method="Spearmen")	lm(y - 1 + x) lm(sank(y) - 1 + rank(x))	tor N +10	One intercept plus x multiplied by a number (slope) predicts y.  - (Seme, but with ranked x and y)	J.W.
y ~ discrete x P: Two-sample Heat P: Welch's Heat N: Mann-Whitney U	Limity, y, var equal-TRUE; Limity, y, var equal-PALSE; wicco.imity, y,)	Im(y ~ 1 + G <sub>1</sub> )* gls(y ~ 1 + G <sub>1</sub> , velights*)* Im(signed_rank(y) ~ 1 + G <sub>1</sub> )*	Se N.+11	An intercept for group 1 (plus a difference if group 2) predicts y.  - (Same, but with one wariance per group instead of one common.)  - (Same, but it predicts the algrest rack of y.)	Y
P: One-way ANOVA N: Kruskal-Walls	sov(y - group) kruskal test(y - group)	$lm(y-1+G_1+G_1++G_k)^k$ $lm(nank(y)-1+G_1+G_1++G_k)^k$	6±N>11	An intercept for group 1 (plus a difference if group < 1) predicts y.  - (Same, but it predicts the rank of y.)	ķΉ
P: One-way ANCOVA	sov(y - group + x)	$lm(y-1+G_1+G_1++G_n+x)^n$	-	(Same, but plus a slope on x.)     Rote: this is discrete AND continuous. ANDOWAs are ANDWA with a continuous x.	-
P: Two way ANOVA	acv(y - group * sex)	iv(y - 1 + G <sub>1</sub> + G <sub>1</sub> + + G <sub>4</sub> + S <sub>1</sub> + S <sub>1</sub> + + S <sub>6</sub> + G <sub>1</sub> *S <sub>1</sub> + G <sub>1</sub> *S <sub>2</sub> + + G <sub>6</sub> *S <sub>6</sub> )	1	Interaction ferry, changing sex changos the y – group parameters.  Hote: Ge., at an ightigate (Eq. 1) for each non-interact level of the group variable.  Desirely for Ex., but no ext. The first line (with 0.4) is not either of group, in the second (with 5.) for sex and the find is the group + sex elementary. For two levels (a) or underformed, line or another than 5.0 for sex and the size of the group + sex elementary. For two levels (a) or makeformed, line or another than 5.0 for the size of t	(Coming)
Counts - discrete x N: Chi-square test	chieq.test(group/Keex_table)	Equivalent log-linear model glm(y - 1 + G <sub>1</sub> + G <sub>1</sub> + + G <sub>n</sub> + S <sub>1</sub> + S <sub>1</sub> + + S <sub>n</sub> + G <sub>1</sub> S <sub>2</sub> + G <sub>1</sub> S <sub>3</sub> + + G <sub>n</sub> S <sub>n</sub> (senitys)*		Interaction facts: (Same as Two-way ANOVA.) Note: they give sing the bibliosing argaments; just soon). Intellyrepoisson (I) As incernmonts for Changame ship is populy in Sign(1) + Sign(1	Same as Teo-way ANOW
N: Goodness of fit	chieq test(y)	glm(y = 1 + G <sub>1</sub> + G <sub>1</sub> + + G <sub>n</sub> , family=)*	-	(Same as One-way ANONA and see Chi-Square note.)	DIKANON

Quelle

\* See the note to the two-way ANOVA for explanation of the notation.

\* Same model, but with one wariance per group: glassalos - 1 = 0,, weights = varident (form = -1)group), method="mil").

#### To rule 'em all

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Vas ist Infe-

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-

Modelle

Hinweise



Quelle

#### Was war noch mal die Regression?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

/as ist Infe-

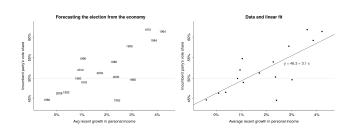
Regression und Inferenz Klassische

vs. Bayes-Inferenz

iviouciic

Hinweise

- Regression (Regressionsanalyse) ist eine Methode, um Zielvariablen in Abhängigkeit der Ausprägung von Prädiktorvariablen von Beobachtungen vorherzusagen.
- Dabei erlaubt die Regression die Quantifizierung der Ungewissheit der Vorhersagen.



Quelle

## In voller Pracht: Die Regressionsgleichung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauei

/as ist Infe-

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

iviodelle

$$y = b_0 + b_1 x + \epsilon$$

- *y*: Zielvariable (vorherzusagen)
- *b*<sub>0</sub>: Achsenabschnitt
- *b*<sub>1</sub>: Regressionsgewicht (Steigung der Regressionsgeraden)
- ullet  $\epsilon$ : "Fehler", Ungewissheit der Vorhersage

#### Datenbeispiel

```
Thema 1: Was
ist Inferenzsta-
           data(mtcars)
  tistik?
           library(rstanarm)
           lm1 <- stan_glm(mpg ~ hp, data = mtcars)</pre>
Regression und
           print(lm1)
Inferenz
                         Median MAD SD
           (Intercept) 30.0 1.7
                         -0.1 0.0
           hp
           Auxiliary parameter(s):
                  Median MAD_SD
           sigma 3.9
                          0.5
```

#### Visualisierung zum Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

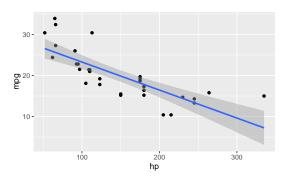
Was ist Inferenzstatistik?

#### Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-

vs. Bayes-Inferenz

Hinweise



#### Wozu man die Regression benutzt

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

/as ist Infe-

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

- Vorhersagen
- Zusammenhänge untersuchen
- Adjustieren (Zusammenhänge korrigieren)
- Kausalinferenz

# In Experimenten kann man die Ergebnisse kausal interpretieren<sup>1</sup>

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

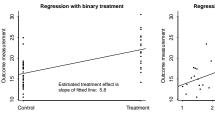
Was ist Infe-

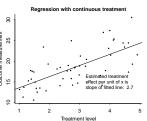
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-

mierenz

Himmoice





<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Wenn alles gut läuft.

#### Die lineare Regression ist erstaunlich flexibel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof Sauer

Nichtlineare Zusammenhänge

Interaktionen

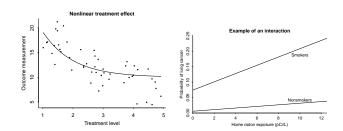
Z.B.

Was ist Inferenzstatistik? Regression und

Inferenz Klassische vs. Bayes-

Inferenz

Hinweise



#### Häufig sind Gruppen nicht direkt vergleichbar

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

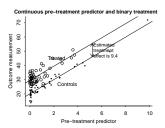
Regression und

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

Beispiel: Die Heilungsraten in der Experimentalgruppe waren höher als in der Kontrollgruppe. Allerdings waren die Personen der Experimentalgrupe auch gesünder (als die Personne der Kontrollgruppe). Um den Kausaleffekt der Behandlung zu schätzen, müssen solche vorab bestehenden Unterschiede zwischen den Gruppen berücksichtigt (adjustiert) werden.



#### Keine vorschnelle Kausalinterpretation

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

/as ist Infe-

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modell

 Kausalinterpretationen statistischer Ergebnisse (z.B. Mittelwertsdifferenz von Behandlungs- vs. Kontrollgruppe) ist nur möglich, wenn

- die Studie gut kontrolliert und randomisiert ist (und die Stichprobe groß ist) oder
- bestehende Unterschiede nicht randomisiert, aber kontrolliert wurden oder
- diese gemessen und in der Regressionsanalyse berücksichtigt wurden

Ansonsten muss auf eine Kausalinterpretation verzichtet werden.

Allerdings ist es möglich, Art und Stärke von Zusammenhängen zu schätzen.

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

i ioi. Sauci

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

## Klassische vs. Bayes-Inferenz

## Klassische Inferenz: Frequentismus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

renzstatistik? Regression unc

Inferenz

vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

- Die Berücksichtigung von Vorwissen zum Sachgegenstand wird vom Frequentismus als subjektiv zurückgewiesen.
- Nur die Daten selber fließen in die Ergebnisse ein
- Wahrscheinlichkeit wird über relative Häufigkeiten definiert.
- Es ist nicht möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese anzugeben.
- Stattdessen wird angegeben, wie häufig eine vergleichbare Datenlage zu erwarten ist, wenn die Hypothese gilt und der Versuch sehr häufig wiederholt ist.
- Ein Großteil der Forschung (in den Sozialwissenschaften) verwendet diesen Ansatz.

#### Bayesianische Inferenz

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

VVas ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

- Vorwissen (Priori-Wissen) fließt explizit in die Analyse ein (zusammen mit den Daten).
- Wenn das Vorwissen gut ist, wird die Vorhersage genauer, ansonsten ungenauer.
- Die Wahl des Vorwissens muss explizit (kritisierbar) sein.
- In der Bayes-Inferenz sind Wahrscheinlichkeitsaussagen für Hypothesen möglich.
- Die Bayes-Inferenz erfordert mitunter viel Rechenzeit und ist daher erst in den letzten Jahren (für gängige Computer) komfortabel geworden.

#### Vergleich von Wahrscheinlichkeitsaussagen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

renzstatistik?

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

#### Frequentismus

- zentrale Statistik: p-Wert
- "Wie wahrscheinlich ist der Wert der Teststatistik (oder noch extereme Werte), vorausgesetzt die Nullhypothese gilt und man wiederholt den Versuch unendlich oft (unter gleichen Bedingungen aber zufällig verschieden)?"

#### Bayes-Statistik

- zentrale Statistik: Posterior-Verteilung
- "Wie wahrscheinlich ist die Forschungshypothese, jetzt nachdem wir die Daten kennen laut unserem Modell?"

#### Frequentist und Bayesianer

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression un

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hipweise

# DID THE SUN JUST EXPLODE? (IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE)



#### FREQUENTIST STATISTICIAN:

THE PROBABILITY OF THIS RESULT HAPPENING BY CHANCE IS \$\frac{1}{36} = 0.027.

SINCE P<0.05, I CONCLUDE

#### BAYESIAN STATISTICIAN:

BET YOU \$50 IT HASN'T.

#### Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 1

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

renzstatistik?

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

- Ein Betrunkener behauptet, er könne hellsehen.
- Er wirft eine Münze 10 Mal und sagt jedes Mal korrekt vorher, welche Seite oben landen wird.
- Die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist sehr gering (2<sup>-10</sup>) unter der Hypothese, dass die Münze fair ist, dass Ergebnis also "zufällig" ist.
- Unser Vorwissen lässt uns allerdings trotzdem an der Hellsichtigkeit des Betrunkenen zweifeln, so dass die meisten von uns die Hypothese von der Zufälligkeit des Ergebnisses wohl nicht verwerfen.

#### Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 2

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

VVas ist Inferenzstatistik

Regression u Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

- Eine Studie fand einen "großen Effekt" auf das Einkommen von Babies, eine Stunde pro Woche während zwei Jahren an einem psychosozialen Entwicklungsprogramm teilnahmen (im Vergleich zu einer Kontrollgruppe), n = 127.
- Nach 20 Jahren war das mittlere Einkommen der Experimentalgruppe um 42% höher (als in der Kontrollgruppe) mit einem Konfidenzintervall von [+2%,+98%].
- Allerdings lässt uns unser Vorwissen vermuten, dass so ein Treatment das Einkommen nach 20 Jahren kaum verdoppeln lässt. Wir würden den Effekt lieber in einem konservativeren Intervall schätzen (enger um Null).

#### Regression in R, der schnelle Weg zum Glück

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression un

Klassische vs. Bayes-Inferenz

/lodelle

Hinweise

Bayesianische Inferenz in der Regression:

Klassische Inferenz in der Regression:

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sau

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

## Modelle

#### Was ist ein (statistisches) Modell?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Vas ist Infeenzstatistik?

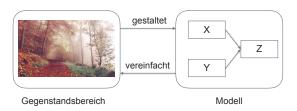
Regression un

Klassische vs. Bayes-

Modelle

Hinweis

- Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit, z.B. in Form einer Landkarte, eines Modellauto oder einer Gleichung (Sauer 2019).
- Greift relevante Aspekte der Wirklichkeit heraus (und vernachlässigt andere).



## Beispiel für ein statistisches Modell

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Saue

Was ist Inferenzstatistik?

Regression un

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweise

$$E = \beta_0 + \beta_1 \cdot L + \epsilon,$$

wobei E für Erfolg in der Klausur steht, L für die Lernzeit und  $\epsilon$  für den "Fehler" des Modells, sprich sonstige Einflussgrößen, die im Modell nicht berücksichtigt werden.

## Der Golem von Prag

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression u Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis



Der Golem von Prag, eine vom Menschen geschaffene Kreatur gewaltiger Kraft, die Befehle wörtlich ausführt.

Bei kluger Führung kann ein Golem Nützliches vollbringen. Bei unüberlegter Verwendung wird er jedoch großen Schaden anrichten.

Quelle

#### Wissenschaftliche Modelle sind wie Golems

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

VVas ist Inferenzstatistik?

Regression u Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle

Hinweis

#### Golem Modell

- Besteht aus Lehm
- Belebt durch "Wahrheit"
  - Mächtig
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
  - Märchen

ouch

- Besteht aus <del>Lehm</del>Silikon
- Belebt durch Wahrheit (?)
- Manchmal mächtig
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Nicht einmal falsch

Wir bauen Golems.

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Saue

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes

Interenz

Hinweise

## Hinweise

## Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Saue

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Modelle Hinweise

nferenz

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 1 aus Gelman, Hill, und Vehtari (2021), Regression and other Stories (mit "ROS" abgekürzt)
- Kapitel 1 aus McElreath (2016) ("ReThink\_v1")

Weitere Literaturhinweise sind am Ende der jeweiligen Kapitel der Lehrbücher zu finden

R-Code zum Buch ROS findet sich auf der Homepage des Buchs.

#### Literatur

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Saue

Was ist Inferenzstatistik?

Klassische vs. Bayes-

Modelle

Hinweise

Gelman, Andrew, Jennifer Hill, und Aki Vehtari. 2021.

Regression and Other Stories. Analytical Methods for Social Research. Cambridge: Cambridge University Press.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. New York City, NY: CRC Press.

Sauer, Sebastian. 2019. Moderne Datenanalyse mit R: Daten einlesen, aufbereiten, visualisieren und modellieren. 1.
Auflage 2019. FOM-Edition. Wiesbaden: Springer. https://www.springer.com/de/book/9783658215866.