

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

QM2, ROS, Kap. 1, ReThink\_v1, Kap. 1

Prof. Sauer

AWM, HS Ansbach

WiSe 21

- 1 Was ist Inferenzstatistik?
- 2 Regression und Inferenz
- 3 Klassische vs. Bayes-Inferenz
- 4 Ungewissheit quantifizieren
- 5 Hinweise

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Was ist Inferenzstatistik?

# Deskriptiv- vs. Inferenzstatistik

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

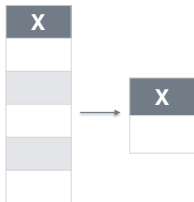
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

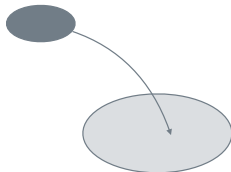
Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Deskriptivstatistik



Inferenzstatistik



*Deskriptivstatistik* fasst Stichprobenmerkmale zu Kennzahlen (Statistiken) zusammen.

*Inferenzstatistik* schließt von Statistiken auf Parameter (Kennzahlen von Grundgesamtheiten).

# Wozu ist die Inferenstatistik gut?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Inferenz

Inferenz bedeutet logisches Schließen; auf Basis von vorliegenden Wissen wird neues Wissen generiert.

## Inferenzstatistik

Inferenzstatistik ist ein Verfahren, das mathematische Modelle verwendet, um von einer bestimmten Datenlage, die eine Stichprobe einer Grundgesamtheit darstellt, allgemeine Schlüsse zu ziehen.

# Deskriptiv- und Inferenzstatistik gehen Hand in Hand

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Für jede Kennzahl der Deskriptivstatistik (d.h. Stichprobendaten) kann man die Methoden der Inferenzstatistik verwenden (auf eine Grundgesamtheit schließen), z.B.:

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit
Mittelwert	$\bar{X}$	$\mu$
Streuung	$sd$	$\sigma$
Anteil	$p$	$\pi$
Korrelation	$r$	$\rho$
Regression	$b$	$\beta$

Für Statistiken (Stichprobe) verwendet man lateinische Buchstaben ( $X, p, b, \dots$ ); für Parameter (Population) verwendet man griechische Buchstaben.

# Schätzen von Parametern einer Grundgesamtheit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Meist begnügt man sich nicht mit Aussagen für eine Stichprobe, sondern will auf eine Grundgesamtheit verallgemeinern.

Leider sind die Parameter einer Grundgesamtheit zumeist unbekannt, daher muss man sich mit *Schätzungen* begnügen.

Schätzwerte werden mit einem “Dach” über dem Kennwert gekennzeichnet, z.B.

Kennwert	Stichprobe	Grundgesamtheit	Schätzwert
Mittelwert	$\bar{X}$	$\mu$	$\hat{\mu}$
Streuung	$sd$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$
Anteil	$p$	$\pi$	$\hat{\pi}$
Korrelation	$r$	$\rho$	$\hat{\rho}$
Regression	$b$	$\beta$	$\hat{\beta}$

# Beispiel für eine inferenzstatistische Fragestellung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Sie testen zwei Varianten Ihres Webshops (V1 und V2), die sich im Farbschema unterscheiden und ansonsten identisch sind: Hat das Farbschema einen Einfluss auf den Umsatz?

- Dazu vergleichen Sie den mittleren Umsatz pro Tag von V1 vs. V2,  $\bar{X}_{V1}$  und  $\bar{X}_{V2}$ .
- Die Mittelwerte unterscheiden sich etwas,  $\bar{X}_{V1} > \bar{X}_{V2}$
- Sind diese Unterschiede “zufällig” oder “substanziell”? Gilt also  $\mu_{V1} > \mu_{V2}$  oder  $\mu_{V1} \leq \mu_{V2}$ ?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit<sup>1</sup>  $Pr(\mu_{V1} > \mu_{V2})$ ?

---

<sup>1</sup>oft mit  $Pr$  oder  $p$  abgekürzt, für *probability*



# Was heißt “zufällig”?

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

## Definition

Unter einem zufälligen Ereignis (random) verstehen wir ein Ereignis, das nicht (komplett) vorherzusehen ist, wie etwa die Augenzahl Ihres nächsten Würfelwurfs. Zufällig bedeutet nicht (zwangsläufig), dass das Ereignisse keine Ursachen besitzt. So gehorchen die Bewegungen eines Würfels den Gesetzen der Physik, nur sind uns diese oder die genauen Randbedingungen nicht (ausreichend) bekannt.

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

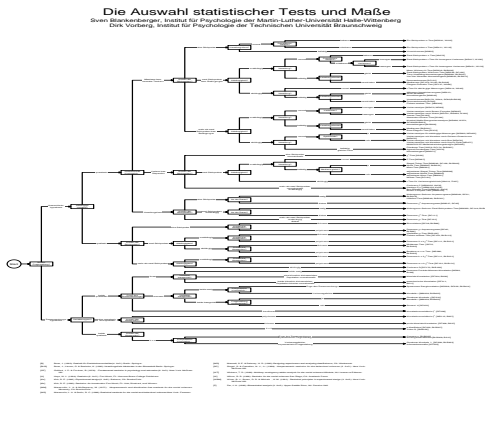
# Regression und Inferenz

Für jede Fragestellung einen anderen Test

# Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

# Regression und Inferenz



Quelle

# Oder man nimmt einfach immer die Regression

## Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

## Was ist Inferenzstatistik?

## Regression und Inferenz

## Klassische vs. Bayes-Inferenz

## Ungewissheit quantifizieren

## Hinweise

### Common statistical tests are linear models

last updated 02 April 2019

See worked examples and more details at the accompanying notebook: <https://lindsey.github.io/tests-as-linear>

Common name	Built-in function in R	Equivalent linear model in R	Exact?	The linear model in words	Icon
<b>y is independent of x</b> P: One-sample t-test N: Wilcoxon signed-rank	t.test(y) wilcox.test(y)	$\text{lm}(y \sim 1)$ $\text{lm}(\text{signed\_rank}(y) \sim 1)$	✓ for $N \leq 14$	One number (intercept, i.e., the mean) predicts y. - (Same, but it predicts the signed rank of y.)	
P: Paired-sample t-test N: Wilcoxon matched pairs	t.test(y1, y2, paired=TRUE) wilcox.test(y1, y2, paired=TRUE)	$\text{lm}(y_1 - y_2 \sim 1)$ $\text{lm}(\text{signed\_rank}(y_1 - y_2) \sim 1)$	✓ for $N \leq 14$	One intercept predicts the pairwise y-y2 differences. - (Same, but it predicts the signed rank of y-y2.)	
<b>y ~ continuous x</b> P: Pearson correlation N: Spearman correlation	cor.test(x, y, method="Pearson") cor.test(x, y, method="Spearman")	$\text{lm}(y \sim 1 + x)$ $\text{lm}(\text{rank}(x) \sim 1 + \text{rank}(y))$	✓ for $N \leq 10$	One intercept plus x multiplied by a number (slope) predicts y. - (Same, but with ranked x and y.)	
<b>y ~ discrete x</b> P: Two-sample t-test P: Welch's t-test N: Mann-Whitney U	t.test(y1, y2, var.equal=TRUE) t.test(y1, y2, var.equal=FALSE) wilcox.test(y1, y2)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1^*^2)$ $\text{glm}(y \sim 1 + G_1, weights = "n")$ $\text{lm}(\text{signed\_rank}(y) \sim 1 + G_1^*^2)$	✓ ✓ for $N \leq 11$	An intercept for group 1 (plus a difference if group 2 predicts y). - (Same, but with one variance per group instead of one common.) - (Same, but it predicts the signed rank of y.)	
P: One-way ANOVA N: Kruskal-Wallis	oneway.test ~ group) kruskal.test(y ~ group)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k^*^2)$ $\text{lm}(\text{rank}(y) \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k^*^2)$	✓ for $N \leq 11$	An intercept for group 1 (plus a difference if group i predicts y). - (Same, but it predicts the rank of y.)	
P: One-way ANCOVA	oneway.test ~ group + x)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k^*^2 + x)$	✓	- (Same, but plus a slope on x.) Note: this is always ANCOVA; ANCOVAs are ANCOVAs with a continuous x.	
P: Two-way ANOVA	oneway.test ~ group * sex)	$\text{lm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k^*^2 + S_1 + S_2 + \dots + S_m + G_1^*S_1 + G_2^*S_2 + \dots + G_k^*S_m)$	✓	Interaction term: changing sex changes the y ~ group parameters. Note: $G_{i,j}$ is an indicator ( $G_{i,j} = 1$ for each non-referent level of the group variable, $G_{i,j} = 0$ otherwise). The first line ( $G_1$ ) is main effect of group, the second (with $G_1$ for one and the third is the group * sex interaction). For two levels (e.g., male/female), line 2 would just be " $S_1$ " and line 3 would be " $G_1$ multiplied with each $G_i$ ".	(Coming)
<b>Counts ~ discrete x</b> N: Chi-square test	chisq.test(group obs_table)	<b>Equivalent log-linear model</b> $\text{glm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k^*^2 + S_1 + S_2 + \dots + S_m + G_1^*S_1 + G_2^*S_2 + \dots + G_k^*S_m, family = "poisson")$	✓	Interaction term: (Same as Two-way ANOVA). Note: this gives the following equation: $\log(\text{count}_{i,j}) = \mu + G_i + S_j + G_i^*S_j$ . As interpreted, the Chi-square test is right? + right? + right? + right? where $G_i$ and $S_j$ are proportions. See more info at the accompanying notebook.	Same as Two-way ANOVA
N: Goodness of fit	chisq.test(y)	$\text{glm}(y \sim 1 + G_1 + G_2 + \dots + G_k^*^2, family = "poisson")$	✓	(Same as one-way ANOVA and use Chi-Square model.)	fit ANOVA

List of common statistical (P) non-parametric (N) tests and equivalent linear models. The notation  $y \sim 1 + x$  is shorthand for  $y \sim 1 + x$  which model of we learned in school. Models in similar colors are highly similar, but really, notice how similar they all are across colors! For non-parametric models, the linear models are reasonable approximations for non-small sample sizes (see "Exact" column and click links to see simulations). Other less accurate approximations exist, e.g., Wilcoxon for the sign test and Goodness-of-fit for the binomial test. The signed rank function is  $\text{signed\_rank} = \text{rank}(\text{abs}(y)) - \text{rank}(\text{abs}(y) + 1)$ . The variables  $G$  and  $S$  are "dummy coded" indicator variables (either 0 or 1) explaining the fact that when  $G_k = 1$  between-categories the difference equals the slope. Subscripts (e.g.,  $G_1$  or  $S_1$ ) indicate different columns in data. In my long-format data for all non-continuous models. All of this is exposed in greater detail and worked examples at <https://lindsey.github.io/tests-as-linear>.

\* See the note to the two-way ANOVA for explanation of the notation.

\* Same model, but with one variance per group: `glmer(y ~ 1 + G, weights = variances, data = ~lipoop, method="ML")`.



Jonas Knäuper-Lindner  
<https://lindsey.net>

Quelle

# Gängige statistische Tests sind Spezialfälle der Regression

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



- *t-Test*: Unterscheiden sich zwei (metrische) Mittelwerte?
- *Wilcoxon-Test*: Unterscheiden sich zwei Verteilungen?
- *Korrelationstest*: Korrelieren zwei Merkmale?
- *Varianzanalyse*: Unterscheiden sich die (metrischen) Mittelwerte in zwei oder mehr Gruppen?
- $\chi^2$ -Test: Hängen zwei nominale Merkmale zusammen?

Diese (und mehr) Fragestellungen können mit der Regression beantwortet werden.

# To rule 'em all

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

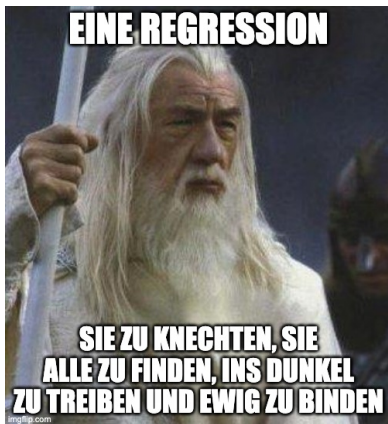
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Quelle

# Was war noch mal die Regression?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

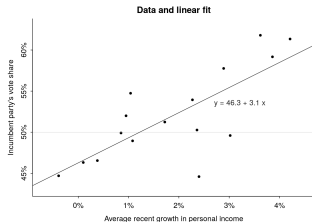
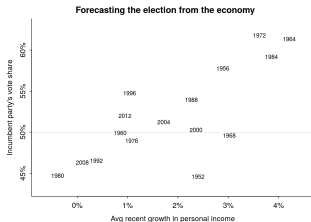
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Regression (Regressionsanalyse) ist eine Methode, um Zielvariablen in Abhängigkeit der Ausprägung von Prädiktorvariablen von Beobachtungen vorherzusagen.
- Dabei erlaubt die Regression, unter gewissen Annahmen, die Quantifizierung der Ungewissheit der Vorhersagen.



Quelle

# Beispiele zur Quantifizierung von Ungewissheit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Morgen regnet's  $\Leftrightarrow$  Morgen wird es hier mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% mehr als 0 mm Niederschlag geben.
- Methode  $A$  ist besser als Methode  $B$   $\Leftrightarrow$  Mit einer Wahrscheinlichkeit von 57% ist der Mittelwert für Methode  $A$  höher als für Methode  $B$ .
- Die Maschine fällt demnächst aus  $\Leftrightarrow$  Mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% wird die Maschine in den nächsten 1-3 Tagen ausfallen, laut unserem Modell.
- Die Investition lohnt sich  $\Leftrightarrow$  Die Investition hat einen Erwartungswert von 42 Euro; mit 90% Wahrscheinlichkeit liegt der zu erwartende Gewinn zwischen -10000 und 100 Euro.



# Die Regressionsgleichung

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

In voller Pracht:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

- $y$ : Zielvariable<sup>2</sup> (vorherzusagen)
- $\beta_0$ : Achsenabschnitt
- $\beta_1$ : Regressionsgewicht (Steigung der Regressionsgeraden)
- $\epsilon$ : "Fehler"; Einflüsse auf  $y$ , die das Modell nicht kennt

---

<sup>2</sup>Abhängige Variable, Kriterium

# Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

```
data(mtcars)
library(rstanarm)
lm1 <- stan_glm(mpg ~ hp, data = mtcars)
```

```
print(lm1)
```

	Median	MAD_SD
(Intercept)	30.0	1.7
hp	-0.1	0.0

Auxiliary parameter(s):

	Median	MAD_SD
sigma	3.9	0.5

# Visualisierung zum Datenbeispiel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

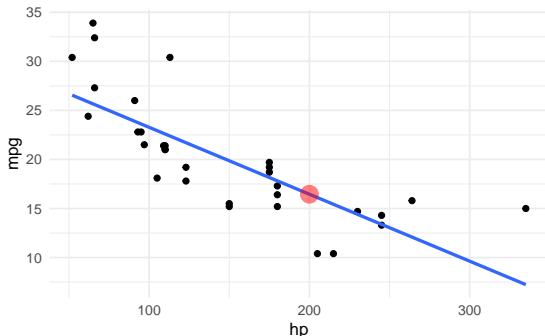
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Rot markiert: Der *vorhergesagte* Wert von mpg für hp=200 (Punktschätzung).

# Der Punktschätzer berücksichtigt nicht die Ungewissheit des Models

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

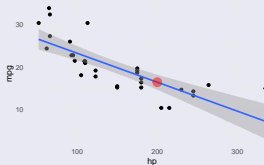
Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

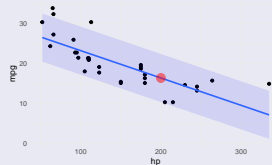
Mindestens zwei Arten von Ungewissheit müssen wir in unseren Vorhersagen berücksichtigen:

- zur Lage der Regressionsgeraden ( $\beta_0, \beta_1$ )
- zu Einflüssen, die unser Modell nicht kennt ( $\epsilon$ )

Ungewissheit in  $\beta_0, \beta_1$



Ungewissheit in  $\epsilon$



# Vorhersage-Intervall: berücksichtigt Ungewissheit in $\beta_0, \beta_1, \epsilon$

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

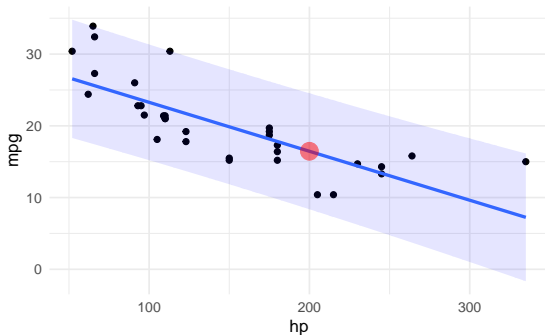
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Das Vorhersage-Intervall berücksichtigt Ungewissheit in  $\beta_0, \beta_1, \epsilon$  bei der Vorhersage von  $\hat{y}_i$ .



# Wozu man die Regression benutzt

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- *Vorhersagen* (Wie stehen die Aktien morgen? Wann wird die Maschine ausfallen?)
- *Zusammenhänge untersuchen* (Wie stark ist der Zusammenhang, der 'statistische Effekt' von Lernzeit und Klausurerfolg?)
- *Adjustieren* (Was ist der Einfluss von Lernzeit von Klausurerfolg, wenn man die Motivation konstant hält?)
- *Kausalinferenz* (Wie groß ist der kausale Einfluss von Lernzeit auf den Klausurerfolg?)

# In Experimenten kann man die Ergebnisse kausal interpretieren

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

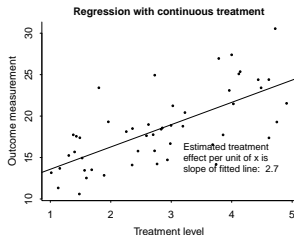
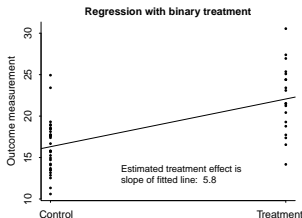
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



In einem gut gemachten Experiment geben die Koeffizienten der Regression den kausalen Effekt wider.

# Kausalmodell eines einfachen Experiments

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

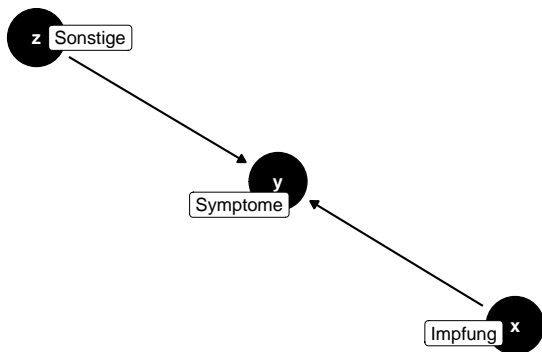
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Statistiken in (gut gemachten) Experimenten können kausal interpretiert werden: Der statistische Zusammenhang von *Impfung* auf *Symptome* entspricht dem kausalen Effekt.



# Beobachtungsstudien können nicht ohne Weiteres kausal interpretiert werden

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

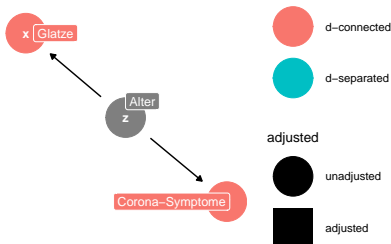
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Männer aufgepasst: Glatze macht Corona?!



Laut diesem Modell gibt es keinen kausalen Zusammenhang von *Glatze* zu *Corona*. Der statistische Zusammenhang ist ein *Scheinzusammenhang* (nichtkausal).

# Die lineare Regression ist erstaunlich flexibel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

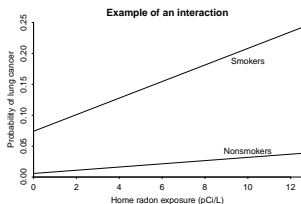
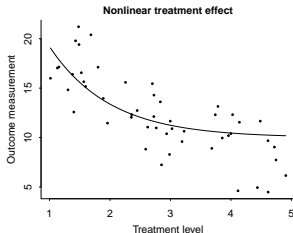
Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Z.B.

- *Nichtlineare* Zusammenhänge
- Interaktionen



# Beispiel für nichtlineare Modelle: Die Log-Y-Regression

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Die Log-Y-Regression ist geeignet, um exponentielles Wachstum darzustellen.

$$\log(y) = \tilde{x}$$

mit  $\tilde{x} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$

Exponentiert man beide Seite, so erhält man:

$$y = e^{\tilde{x}} = e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot x}$$

$e$  ist die Eulersche Zahl: 2.71...

# Beispiele für exponentielle Zusammenhänge

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Eine Bakterienmenge verdoppelt sich jeden Tag
- Pro Jahr erzielt eine Kapitalanlage 10% Zinsen
- Während einer bestimmten Periode verdoppelten sich die Coronafälle alle 10 Tage
- Die Menge der Vitamine in einem Lebensmittel verringert sich pro Zeiteinheit um den Faktor  $k$

Generell bieten sich es an, zur Modellierung von Wachstumsprozessen auf exponentielles Zusammenhänge - und damit auf Log-Y-Regression - zurückzugreifen.

# So sieht exponentielles Wachstum aus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

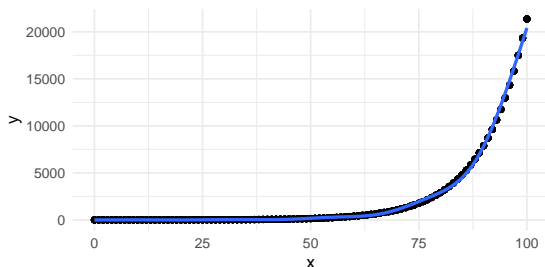
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



- Steigt  $X$  um 1 Einheit, so steigt  $Y$  um einen konstanten Faktor: exponentielles Wachstum.
- Beispiel: Verdopplung: 1, 2, 4, ..., nach 10 Schritten:  $2^{10} = 1024$ , nach 20 Schritten:  $2^{20} \approx 10^6$ .
- Exponentielles Wachstum wächst am Anfang (scheinbar) langsam, später sehr schnell. Die Geschwindigkeit wird leicht unterschätzt.

# Häufig sind Gruppen nicht direkt vergleichbar

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

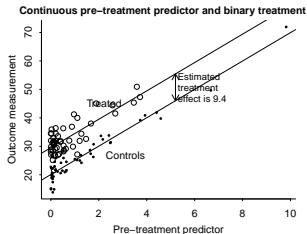
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- *Beispiel:* Die Heilungsraten in der Experimentalgruppe waren höher als in der Kontrollgruppe. Allerdings waren die Personen der Experimentalgruppe auch gesünder (als die Personen der Kontrollgruppe). Um den Kausaleffekt der Behandlung zu schätzen, müssen solche vorab bestehenden Unterschiede zwischen den Gruppen berücksichtigt (adjustiert) werden; mit der Regression ist dies möglich.



# Keine vorschnelle Kausalinterpretation

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Kausalinterpretationen statistischer Ergebnisse (z.B. Mittelwertsdifferenz von Behandlungs- vs. Kontrollgruppe) ist nur möglich, wenn
  - die Studie gut kontrolliert und randomisiert ist (und die Stichprobe groß ist) oder
  - bestehende Unterschiede nicht randomisiert, aber kontrolliert wurden oder
  - diese gemessen und in der Regressionsanalyse berücksichtigt wurden

Ansonsten muss auf eine Kausalinterpretation verzichtet werden.

Allerdings ist es möglich, Art und Stärke von Zusammenhängen zu schätzen.

# Was ist ein (statistisches) Modell?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

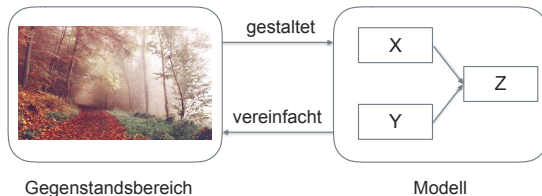
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit, z.B. in Form einer Landkarte, eines Modellauto oder einer Gleichung (Sauer 2019).
- Greift relevante Aspekte der Wirklichkeit heraus (und vernachlässigt andere).
- Die Regression eignet sich gut zum Modellieren mit Statistik.





# Beispiel für ein statistisches Modell

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

$$E = \beta_0 + \beta_1 \cdot L + \epsilon,$$

wobei  $E$  für *Erfolg in der Klausur* steht,  $L$  für die *Lernzeit* und  $\epsilon$  für den “Fehler” des Modells, sprich sonstige Einflussgrößen, die im Modell nicht berücksichtigt werden.

# Vorsicht bei Extrapolation von Trends

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

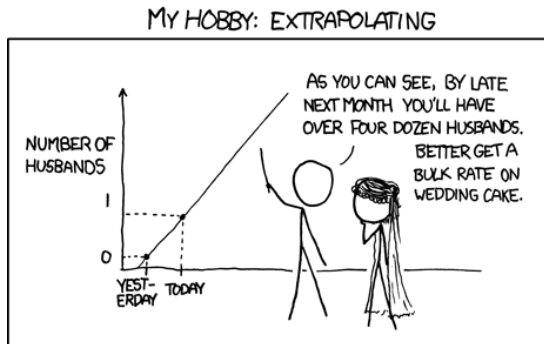
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Quelle

# Der Golem von Prag

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Der Golem von Prag, eine vom Menschen geschaffene Kreatur gewaltiger Kraft, die Befehle wörtlich ausführt.

Bei kluger Führung kann ein Golem Nützliches vollbringen. Bei unüberlegter Verwendung wird er jedoch großen Schaden anrichten.

Quelle

# Wissenschaftliche Modelle sind wie Golems

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Golem

- Besteht aus Lehm
- Belebt durch "Wahrheit"
- Mächtig
- dumm
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Märchen

## Modell

- Besteht aus ~~Lehm~~Silikon
- Belebt durch Wahrheit (?)
- Manchmal mächtig
- simpler als die Realität
- Führt Befehle wörtlich aus
- Missbrauch leicht möglich
- Nicht einmal falsch

*Wir bauen Golems.*

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Klassische vs. Bayes-Inferenz

# Klassische Inferenz: Frequentismus

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Die Berücksichtigung von Vorwissen zum Sachgegenstand wird vom Frequentismus als subjektiv zurückgewiesen.
- Nur die Daten selber fließen in die Ergebnisse ein
- Wahrscheinlichkeit wird über relative Häufigkeiten definiert.
- Es ist nicht möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese anzugeben.
- Stattdessen wird angegeben, wie häufig eine vergleichbare Datenlage zu erwarten ist, wenn die Hypothese gilt und der Versuch sehr häufig wiederholt ist.
- Ein Großteil der Forschung (in den Sozialwissenschaften) verwendet diesen Ansatz.

# Bayesianische Inferenz

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Vorwissen (Priori-Wissen) fließt explizit in die Analyse ein (zusammen mit den Daten).
- *Wenn* das Vorwissen gut ist, wird die Vorhersage genauer, ansonsten ungenauer.
- Die Wahl des Vorwissens muss explizit (kritisierbar) sein.
- In der Bayes-Inferenz sind Wahrscheinlichkeitsaussagen für Hypothesen möglich.
- Die Bayes-Inferenz erfordert mitunter viel Rechenzeit und ist daher erst in den letzten Jahren (für gängige Computer) komfortabel geworden.

# Vergleich von Wahrscheinlichkeitsaussagen

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## Frequentismus

- zentrale Statistik: *p*-Wert
- “Wie wahrscheinlich ist der Wert der Teststatistik (oder noch extremere Werte), vorausgesetzt die Nullhypothese gilt und man wiederholt den Versuch unendlich oft (mit gleichen Bedingungen aber zufällig verschieden)?”

## Bayes-Statistik

- zentrale Statistik: *Posteriori*<sup>a</sup>-Verteilung
- “Wie wahrscheinlich ist die Forschungshypothese, jetzt nachdem wir die Daten kennen laut unserem Modell?”

---

<sup>a</sup>synonym: Posterior



# Frequentist und Bayesianer

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

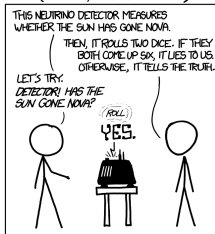
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

DID THE SUN JUST EXPLODE?  
(IT'S NIGHT, SO WE'RE NOT SURE.)



FREQUENTIST STATISTICIAN:

THE PROBABILITY OF THIS RESULT HAPPENING BY CHANCE IS  $\frac{1}{36} = 0.0277$ . SINCE  $p < 0.05$ , I CONCLUDE THAT THE SUN HAS EXPLODED.

BAYESIAN STATISTICIAN:

BET YOU \$50 IT HASN'T.

Quelle

# Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 1

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Ein Betrunkener behauptet, er könne hellsehen.
- Er wirft eine Münze 10 Mal und sagt jedes Mal korrekt vorher, welche Seite oben landen wird.
- Die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist sehr gering ( $2^{-10}$ ) unter der Hypothese, dass die Münze fair ist, dass Ergebnis also “zufällig” ist.
- Unser Vorwissen lässt uns allerdings trotzdem an der Hellsichtigkeit des Betrunkenen zweifeln, so dass die meisten von uns die Hypothese von der Zufälligkeit des Ergebnisses wohl nicht verwerfen.

# Beispiel zum Nutzen von Apriori-Wissen 2

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Eine Studie fand einen “großen Effekt” auf das Einkommen von Babies, eine Stunde pro Woche während zwei Jahren an einem psychosozialen Entwicklungsprogramm teilzunehmen (im Vergleich zu einer Kontrollgruppe),  $n = 127$ .
- Nach 20 Jahren war das mittlere Einkommen der Experimentalgruppe um 42% höher (als in der Kontrollgruppe) mit einem Konfidenzintervall von  $[+2\%, +98\%]$ .
- Allerdings lässt uns unser Vorwissen vermuten, dass so ein Treatment das Einkommen nach 20 Jahren kaum verdoppeln lässt. Wir würden den Effekt lieber in einem konservativeren Intervall schätzen (enger um Null).

# Regression in R, der schnelle Weg zum Glück

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

*Bayesianische* Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- stan_glm(y ~ x, data = meine_daten)
```

*Klassische* Inferenz in der Regression:

```
lm1 <- lm(y ~ x, data = meine_daten)
```

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

**Ungewissheit  
quantifizieren**

Hinweise

# Ungewissheit quantifizieren

# Was ist Wahrscheinlichkeit?

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit  $p$  quantifiziert *Ungewissheit* im Hinblick auf eine Aussage bzw. ein Ereignis  $A$ , gegeben eines Hintergrundwissen  $H$ .  $p = 0$  heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für falsch (unmöglich);  $p = 1$  heißt, wir halten die Aussage (das Ereignis) für wahr (sicher).  $0 < p < 1$  heißt, wir sind (mehr oder weniger) unsicher bzgl. der Aussage bzw. ob das Ereignis zutrifft.

- $p(\text{Kopf werfen mit einer fairen Münze}) = 1/2$ .
- $p(\text{eine 6 würfeln mit einer fairen Würfel}) = 1/6$ .
- $p(\text{Entweder ist heute Montag oder nicht}) = 1$ .
- $p(\text{Berlin ist die Hauptstadt von Frankreich}) = 0$ .

# Zufallsexperiment

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

- Als Zufallsexperiment bezeichnen wir einen Vorgang, bei dem wir wissen, was alles passieren könnte, aber nicht sicher sind, was genau passiert.
- Die Menge der möglichen Ergebnisse nennt man *Grundraum* (*Ergebnisraum*)  $\Omega$ . Beim Würfelwurf:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  nennt man ein *Ereignis*. Beim Würfelwurf: z.B.  $A = \{2, 4, 6\}$ , eine gerade Zahl werfen.

# Additionsregel

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden sich ausschließenden Ereignissen  $A$  und  $B$  der Fall ist, ist durch die Additionsregel gegeben:

$$Pr(A \text{ oder } B) = Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit mit einem "fairen" Würfel eine 1 oder 2 zu werfen:

$$Pr(1 \cup 2) = Pr(1) + Pr(2) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$



# Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Zwei Ereignisse sind (*stochastisch*) *unabhängig*, wenn Kenntnis des einen uns keine Information gibt, ob das andere der Fall ist. Ansonsten nennt man die beiden Ereignisse (stochastisch) *abhängig*.

Angenommen wir werfen zwei faire Münzen. Wir wissen, die erste Münze zeigt *Kopf*. Dieses Wissen gibt uns keine weitere Information, welche Seite bei der zweiten Münze oben liegt.

Auf der anderen Seite sind Aktienkurs häufig voneinander abhängig. Weiß man, dass eine Aktie gestiegen ist, so ist es (häufig) wahrscheinlich, dass die andere auch gestiegen ist.

*Achtung:* Stochastische (Un)abhängigkeit impliziert nicht kausale (Un)abhängigkeit.

# Beispiele für abhängige und unabhängige Ereignisse $A$ und $B$

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

## *Unabhängig*

- Münzwurf 1 ( $A$ ) und Münzwurf 2 ( $B$ ), jeweils fair
- Meine Stimmung ( $A$ ) und ob das heutige Datum eine Primzahl ist ( $B$ )
- Zwei Passanten getrennt zu ihrer Meinung zu einem politischen Thema befragen
- Die Körpergröße zweier zufällig gezogener Personen ( $A$  und  $B$ )

## *Abhängig*

- Körpergröße zweier Geschwister ( $A$  und  $B$ )
- Lernleistung zweier Schüleris  $A$  und  $B$  der gleichen Klasse
- PS-Zahl ( $A$ ) und Spritverbrauch ( $B$ )
- Augenzahl beim zweimaligen Wurf ( $A$  und  $B$ ) eines gezinkten Würfels
- Geschlecht ( $A$ ) und ob die Person Papst ist ( $B$ )

# Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Seien  $A$  und  $B$  zwei unabhängige Ereignisse, dann nennt man die *gemeinsame Wahrscheinlichkeit*  $Pr(A, B)$ , die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse eintreten. Sie berechnet sich als Produkt der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten von  $A$  und  $B$ :

$$Pr(A \text{ und } B) = Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$$

Wirft man zwei faire Münze, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kopf zeigen:  $Pr(KK) = Pr(K) \cdot Pr(K) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ .

# Beispiele für die Multiplikationsregel unabhängiger Ereignisse

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

- Zwei Mal hintereinander eine 6 werfen (fairer Würfel):  
 $Pr(6, 6) = Pr(6) \cdot Pr(6) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ .
- Beim Lotto wird erst die Zahl 42 und dann die Zahl 1 gezogen:  $Pr(42, 1) = 1/49 \cdot 1/48 \approx 4.3 \times 10^{-4}$ .
- Bei der Klausur alle 10 Richtig-Falsch-Fragen richtig zu raten:  $Pr(20r) = 1/2^{20} \approx 9.8 \times 10^{-4}$ .
- Wenn man in der Disko 10 Personen anspricht, Korb-Wahrscheinlichkeit  $p(K) = 9/10$  beträgt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nicht alleine nach hause zugehen?  
 $Pr(\neg 0) = 1 - 0.9^{10} \approx 0.65132$ .
- Ei Forscheri führt 10 statistische Tests durch, jeweils mit 10% Gefahr, dass ein falsch-positives Ergebnis zustande kommt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 1 falsch-positives Ergebnis?  $Pr(\neg 0FP) = 1 - 0.9^{10} \approx 0.65$

# Münzen werfen als Baum: Anzahl *Kopf* nach 2 Würfeln

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

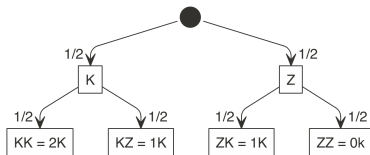
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Ereignis	Pr
0K	$1/2 * 1/2 = 1/4$
1K	$1/4 + 1/4 = 1/2$
2K	$1/2 * 1/2 = 1/4$

# Münzen werfen als Baum: Anzahl *Kopf* nach 3 Würfeln

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

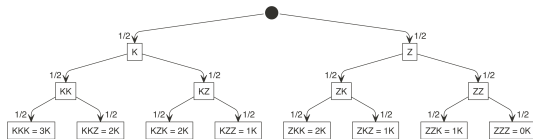
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



Ereignis	Pr
0K	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$
1K	$1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$
2K	$3 * 1/8 = 3/8$
3K	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$

# Wahrscheinlichkeit ist abhängig vom Hintergrundwissen ( $H$ )

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

$Pr(A|H)$ : Die Wahrscheinlichkeit von  $A$ , gegeben  $H$ .

- A: "Sokrates ist sterblich."; H: "Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch."  $\implies Pr(A|H) = 1$ .
- A: "Die Münze zeigt Kopf"; H: "Wir haben keinen Grund anzunehmen, dass eine der beiden Seiten häufiger oben liegt oder das sonst etwas passiert."  $\implies Pr(A|H) = 1/2$ .
- A: "Schorsch, das rosa Einhorn, mag Bier."; H: "50% der rosa Einhörner mögen Bier."  $\implies Pr(A|H) = 1/2$ .
- Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln ( $A$ ), gegeben dem Hintergrundwissen ( $H$ ), dass der Würfel "fair" ist, d.h. wir kein Wissen haben, dass eine Augenzahl häufiger auftritt, ist  $1/6$ .

# Hintergrundwissen ist subjektiv

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Ich habe gerade einen Stift in meiner Hosentasche (links oder rechts). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stift in meiner linken Tasche ist (und nicht in der rechten)?

Bezogen auf *Ihr* Hintergrundwissen gilt:

$$Pr(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"kein besonderes Wissen zu der Frage"}) = 1/2.$$

Bezogen auf *mein* Hintergrundwissen gilt:

$$Pr(A=\text{"Stift links"}|H=\text{"Der Stift ist links"}) = 1.$$

Briggs (2016)



# Bedingte Wahrscheinlichkeit

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit:

- die Klausur zu bestehen, *wenn* man gelernt hat?
- von schlechter Laune, *gegeben* es ist Montag?
- schwer an Corona zu erkranken, *unter der Bedingung*, man ist geimpft?

$Pr(A|H)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  eintritt, *gegeben* bzw. *unter der Bedingung*, dass  $H$  eingetreten ist.

Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$Pr(B|I) = \frac{Pr(B \cap I)}{Pr(I)}$$

# Beispiel aus der letzten Klausur

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

.	bestanden (B)	nicht ( $\neg B$ )	SUMME
hat gelernt (I)	36	6	42
nicht ( $\neg I$ )	12	24	36
SUMME	48	30	78

Randwahrscheinlichkeit:

$$Pr(B) = 48/78 \approx 0.61 \quad Pr(I) = 42/78 \approx 0.54$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$Pr(B|I) = 36/42 \approx \frac{0.46}{0.54} \approx 0.86 \quad Pr(I|B) = 42/48 \approx 0.88$$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeit:

$$Pr(B \cap I) = Pr(I \cap B) = Pr(B, I) = Pr(I, B) = 36/78 \approx 0.46$$

# Visualisierung zur Wahrscheinlichkeit zweier unabhängiger Ereignisse

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

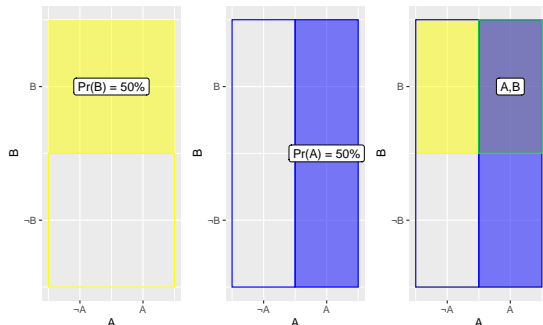
Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise



$$Pr(A, B) = Pr(A) \cdot Pr(B) = 50\% \cdot 50\% = 25\%$$

$$Pr(A|B) = Pr(A, B) / Pr(B) = 25\% / 50\% = 50\%$$

# Visualisierung zweier abhängiger Ereignisse

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

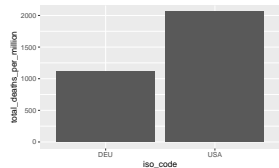
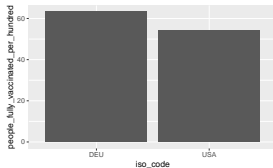
Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Sind die Ereignisse *Tod durch Covid* bzw. *Impfquote* und *Land* voneinander abhängig?



Hannah Ritchie und Roser (2020)

Thema 1: Was  
ist Inferenzsta-  
tistik?

Prof. Sauer

Was ist Infe-  
renzstatistik?

Regression und  
Inferenz

Klassische  
vs. Bayes-  
Inferenz

Ungewissheit  
quantifizieren

Hinweise

# Hinweise

# Lehrbuch und Homepage des Lehrbuchs

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Dieses Skript bezieht sich auf folgende Lehrbücher:

- Kapitel 1 aus Gelman, Hill, und Vehtari (2021), *Regression and other Stories* (mit “ROS” abgekürzt)
- Kapitel 1 aus McElreath (2016) (“ReThink\_v1”)
- Rechenregeln sind z.B. in Cramer und Nešlehová (2015) (Kap. 3) oder ähnlichen Lehrbüchern nachzulesen.

Weitere Literaturhinweise sind am Ende der jeweiligen Kapitel der Lehrbücher zu finden.

R-Code zum Buch ROS findet sich auf der Homepage des Buchs.

# Literatur

Thema 1: Was ist Inferenzstatistik?

Prof. Sauer

Was ist Inferenzstatistik?

Regression und Inferenz

Klassische vs. Bayes-Inferenz

Ungewissheit quantifizieren

Hinweise

Briggs, William M. 2016. *Uncertainty: The Soul of Modeling, Probability & Statistics*. Springer.

Cramer, Erhard, und Johanna Nešlehová. 2015. *Vorkurs Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46400-7>.

Gelman, Andrew, Jennifer Hill, und Aki Vehtari. 2021. *Regression and Other Stories*. Analytical Methods for Social Research. Cambridge: Cambridge University Press.

Hannah Ritchie, Cameron Appel, Edouard Mathieu, und Max Roser. 2020. „Coronavirus Pandemic (COVID-19)“. *Our World in Data*.

McElreath, Richard. 2016. *Statistical Rethinking*. 1. Aufl. New York City, NY: CRC Press.

Sauer, Sebastian. 2019. *Moderne Datenanalyse mit R: Daten einlesen, aufbereiten, visualisieren und modellieren*. 1. Auflage 2019. FOM-Edition. Wiesbaden: Springer. <https://www.springer.com/de/book/9783658215866>.