第29卷 第1期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.29 No.1
2004年2月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Feb. 2004

应力空间内主应力及主方向的解析表达式

董 鑫[1],白 良[1],肖建军[2],李佳彬[3]
(1.昆明理工大学 建筑工程学院,云南 昆明 650051;2.中国飞机实验室,陕西 西安 710089;
3.同济大学 建筑工程系,上海 200092)

摘要:在应力偏张量主值三角函数解的基础上,推导了应力空间内主应力和主方向的通用解析解公式.并对解的几种特殊情况进行讨论,最后通过算例的计算,结果表明本文推导的公式是正确的.为塑性力学的主应力求解提供方便.

关键词:主应力;主方向;公式推导
中图分类号:O344.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1007-855X(2004)01-0089-04

Parsed Currency Formula of Main Stress and Main Direction in Stress Space

DONG Xin[1], BAI Liang[1], XIAO Jian-jun[2], LI Jia-bin[3]
(1.Faculty of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650051,China;
2.China Flight Test Engineerin, Xian 710089,China;
3.Department of Architectural Engineering, Toji University, Shanghai 200092,China;)

Abstract: Based on the stress partial tensor's trigonometric function answer, the main stress and main direction are established in parsed currency formula, and some special answers and examples are discussed. The results show that the formula are tested correctly. It can offer the reference to the solution to the questions of main stress.

Key words: principal stress; principal direc; formula derivationtion

0 引 言

在塑性力学中,主应力是表征材料应力状态的一个矢量.许多问题都要放在主应力空间内进行讨论,如:屈服条件、塑性力学问题的有限元分析等,都需要求出单元体主应力.在单元体上六个应力分量已知的情况下,主应力的大小可以通过求解一个三次应力状态特征方程得到.为了清晰理解各应力分量对主应力及主方向的影响,突出主应力的和主应变的某些特征,需要给出主应力和主方向的通用解析表达式.一般的弹塑性力学教材[1~14]中,均未给出该表达式.本文在应力偏张量主值的三角函数解[2]的基础上,推导了主应力和主方向的解析计算公式.

1 应力空间内主应力及主方向的求解方法[1]

对于变形体中的任一微单元,在其上的六个应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$ 已知的情况下,主应力的大小可通过求解下面三次方程(称为应力张量的特征方程)得到:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \tag{1}$$

式中:$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$J_2 = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij})$$

同样,应力偏张量的三个主值可通过求解下面的三次应力偏张量特征方程得到:

收稿日期:2003-04-01.基金项目:云南省应用基础研究基金(项目编号:2000E0036M).
第一作者简介:董鑫(1979.7~),女,硕士.主要研究方向:防灾减灾.E-mail:dongxin200175@163.com

$$S^3 - J'_1 S^2 - J'_2 S - J'_3 = 0 \tag{2}$$

式中：$J_1' = S_x + S_y + S_z = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 3\sigma m = 0$

$J_2' = -(S_xS_y + S_yS_z + S_zS_x) + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2$

$J_3' = \det(s_{ij})$

由于应力张量的主方向与应力偏张量的主方向重合，其主方向通过求解下述的方程组得到：

$$\begin{cases}(\sigma_x - \sigma)l + \sigma_{xy}m + \sigma_{XZ}n = 0\\ \sigma_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \sigma_{yz}n = 0\\ \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0\end{cases} \tag{3}$$

其中：

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{4}$$

在一般的弹塑性力学教材[1~14]中，大多仅限于结合算例给出主应力及主方向的数值解，而没有给出其解析表达式，这往往给计算带来很大麻烦.

2 应力偏张量主值的三角函数解[2]

应力偏张量特征方程(2)有三个根 $S_i(i = 1,2,3)$，假设：

$$S = -m\cos\omega_\sigma \tag{5}$$

其中：m 为待定常数，ω_σ 为应力特征角.将(5)代入方程(2)得：

$$m^3\cos^3\omega_\sigma - J_2' m\cos\omega_\sigma + J_3' = 0$$

即：

$$\frac{m^3}{4}\left(4\cos^3\omega_\sigma - \frac{4J'_2}{m^2}\cos\omega_\sigma\right) = -J_3' \tag{6}$$

令 $\frac{4J_2'}{m^2} = 3$，则：

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'} \tag{7}$$

将(7)式代入(6)式，则：

$$\frac{m^3}{4}(4\cos^3\omega_\sigma - 3\cos\omega_\sigma) = -J_3'$$

即：

$$\frac{m^3}{4}\cos 3\omega_\sigma = -J_3' \tag{8}$$

由(8)式得：

$$\cos 3\omega_\sigma = -\frac{4J_3'}{m^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3'}{J_2'\sqrt{J_2'}} \tag{9}$$

由于 $-1 \le \cos\omega_\sigma \le 1$ 故 $0 \le \omega_\sigma \le \frac{\pi}{3}$，又因 $\cos\omega_\sigma$ 是周期函数

故：

$$\cos 3\omega_\sigma = \cos(3\omega_\sigma + 2k\pi) = \cos 3\left(\omega_\sigma + \frac{2k\pi}{3}\right) = \cos 3\omega^*_{\sigma K} \tag{10}$$

(10)式中 $\omega^*_{\sigma K} = \omega_\sigma + \frac{2k\pi}{3}$，它有三个主值，分别取 $k = 0,1,2$，得其三个主值如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } k = 0 \text{ 时}, \omega^*_{\sigma K} = \omega_\sigma, S = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\omega_\sigma\\ &\text{当 } k = 1 \text{ 时}, \omega^*_{\sigma K} = \omega_\sigma + \frac{2\pi}{3}, S = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right)\\ &\text{当 } k = 2 \text{ 时}, \omega^*_{\sigma K} = \omega_\sigma + \frac{4\pi}{3}, S = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

将(7)式和(11)式代入(5)式，并按 $S_1 \ge S_2 \ge S_3$ 排列，得

$$\begin{cases}S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right)\\ S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right)\\ S_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\omega_\sigma\end{cases} \tag{12}$$

其中,应力特征主角 ω_σ 由式(9) 给出:

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3'}{J_2'\sqrt{J_2'}}\right) \tag{13}$$

3 主应力及主方向的解析解

应力空间内,应力偏张量和应力张量间的关系为[1]

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m \tag{14}$$

将(12) 式代入(14) 式,即得主应力的计算公式: $\sigma_i = S_i + \sigma_m$

即:

$$\begin{cases} \sigma_1 = s_1 + \sigma_m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_2 = s_2 + \sigma_m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma + \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_3 = s_3 + \sigma_m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\omega_\sigma + \dfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{cases} \tag{15}$$

也即:

$$\begin{cases} \sigma_1 = s_1 + \sigma_m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{3}J_1 \\ \sigma_2 = s_2 + \sigma_m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma + \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{3}J_1 \\ \sigma_3 = s_3 + \sigma_m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}\cos\omega_\sigma + \dfrac{1}{3}J_1 \end{cases} \tag{16}$$

上式即为用应力(偏) 张量不变量表示主应力的解析表达式.进一步得到主剪应力的解析表达式如下:

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = -\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma - \dfrac{\pi}{3}\right) \\ \tau_2 = \dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = -\sqrt{J_2'}\cos\left(\omega_\sigma + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ \tau_3 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{J_2'}\sin\omega_\sigma \end{cases}$$

其中: $\omega_\sigma = \dfrac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{J_3'}{J_2'\sqrt{J_3'}}\right)$

将(15) 式代入(3) 式,得:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n = 0 \\ \sigma_{yx}l + (\sigma_y - \sigma_i)m + \sigma_{yz}n = 0 \\ \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + (\sigma_z - \sigma_i)n = 0 \end{cases} \tag{17}$$

由于方程组(17) 中只有两个方程是相互独立的,由其中的任意两个方程并联立(4) 式可求得主方向的值如下:

$$\begin{cases} l_i = \dfrac{|\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)|}{\sqrt{[\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)]^2 + [\tau_{xy}\tau_{xz} - \tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_i)]^2 + [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2]^2}} \\ m_i = \dfrac{\tau_{xz}\tau_{xy} - \tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_i)}{\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)}l_i \\ n_i = \dfrac{(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2}{\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)}l_i \end{cases} \tag{18}$$

可进一步表示成:

$$\begin{cases} l^2 = \dfrac{\tau_i^2 + (\sigma_i - \sigma_2)(\sigma_i - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ m^2 = \dfrac{\tau_i^2 + (\sigma_i - \sigma_3)(\sigma_i - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 = \dfrac{\tau_i^2 + (\sigma_i - \sigma_2)(\sigma_i - \sigma_1)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} \end{cases} \tag{19}$$

4 主应力解析表达式的讨论

(15)、(16)式明确反应了主应力的特征以及各应力分量对主应力的影响,下面对几种特殊情况进行讨论:

1)当 $2J_2'\sqrt{J_2'}+3\sqrt{3}J_3'=0$ 时,$\omega_\sigma=0$,此时有:

$$\begin{cases}\sigma_1=\sqrt{\dfrac{J_2'}{3}}+\sigma_m,\tau_1=-\dfrac{1}{2}\sqrt{J_2'}\\ \sigma_2=\sigma_1=\sqrt{\dfrac{J_2'}{3}}+\sigma_m,\tau_2=-\dfrac{1}{2}\sqrt{J_2'}\\ \sigma_3=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}+\sigma_m,\tau_3=0\end{cases}$$

2)当 $J_3'=0$ 时,$\omega_\sigma=\dfrac{\pi}{6}$,此时有:

$$\begin{cases}\sigma_1=\sqrt{J_2'}+\sigma_m,\tau_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{J_2'}\\ \sigma_2=\sigma_m,\tau_2=0\\ \sigma_3=-\sqrt{J_2'}+\sigma_m,\tau_3=\dfrac{1}{2}\sqrt{J_2'}\end{cases}$$

3)当 $2J_2'\sqrt{J_2'}=3\sqrt{3}J_3'$ 时,$\omega_\sigma=\dfrac{\pi}{3}$,此时有:

$$\begin{cases}\sigma_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}+\sigma_m,\tau_1=-\sqrt{J_2'}\\ \sigma_2=-\sqrt{\dfrac{J_2'}{3}}+\sigma_m,\tau_2=-\dfrac{1}{2}\sqrt{J_2'}\\ \sigma_3=\sigma_2=-\sqrt{\dfrac{J_2'}{3}}+\sigma_m,\tau_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{J_2'}\end{cases}$$

5 算例

算例选自文献[1],已知 $\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}-10 & 9 & 5\\ 9 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 8\end{bmatrix}$,求主应力及主方向.

计算结果见表1,由表1可见,计算结果相同,从而证明本文推导的公式是正确的.

表1 主应力及主方向的计算结果

利用 Maltlab 的计算结果	$\sigma_1=10.08$	$l_1=0.363$	$m_1=0.324$	$n_1=0.874$
	$\sigma_2=4$	$l_2=0.362$	$m_2=0.814$	$n_2=-0.453$
	$\sigma_3=-16.08$	$l_3=0.854$	$m_3=-0.478$	$n_3=-0.203$
由本文中(15)式的计算结果	$\sigma_1=10.08$	$l_1=0.386$	$m_1=0.324$	$n_1=0.874$
	$\sigma_2=4$	$l_2=0.362$	$m_2=0.814$	$n_2=-0.453$
	$\sigma_3=-16.08$	$l_3=0.854$	$m_3=-0.478$	$n_3=-0.203$

6 结论

本文在应力偏张量主值的三角函数解的基础上,推导了应力空间内主应力和主方向的解析表达式,通过对算例的计算,表明本文推导的解析解公式是正确的,为求解主应力和主方向提供方便.

(下转第96页)

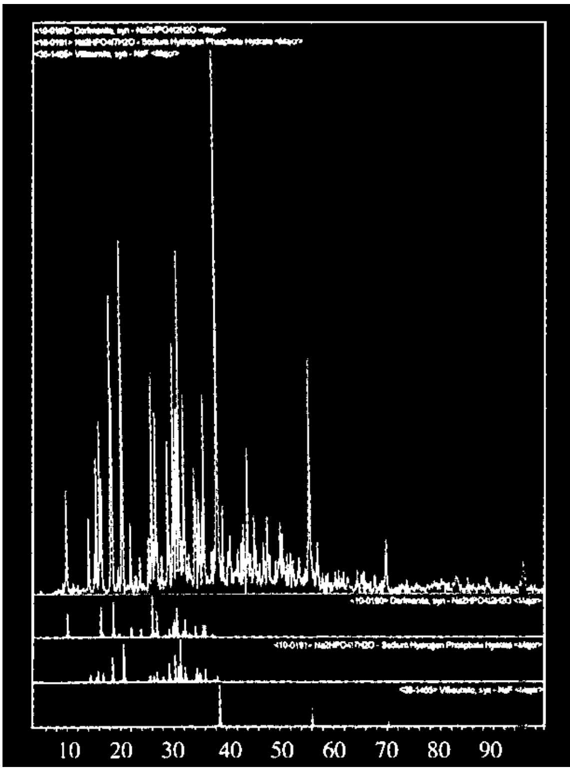

图1 4#胶结土的XRD谱图

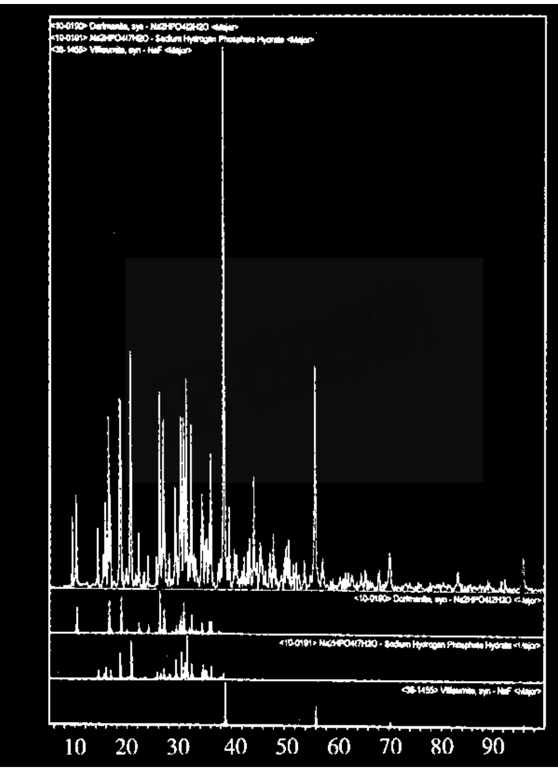

图4 6#胶结土的XRD谱图

参考文献:

[1] 赵希英,等.硅酸盐无机胶粘剂与土壤抗压强度关系的研究[J].昆明理工大学学报(理工版),2001,26(3):114~118.

[2] 速宝玉,等.碾压混凝土渗透性的评价指标及其间关系初探[J].红水河,2002,21(2):55~56.

[3] 贺孝先.相异土质的岩土对胶结后抗压强度的影响[J].昆明理工大学学报(理工版),2002,27(5):113~116.

(上接第92页)

参考文献:

[1] 王仁,等.塑性力学基础[M].北京:科学出版社,1982.30~35.

[2] 崔世杰,等.应用塑性力学[M].郑州:河南科学技术出版社,1992.12~20.

[3] 贾乃文.塑性力学[M].重庆:重庆大学出版社,1992.30~70.

[4] 王仁,等.塑性力学引论(修订版)[M].北京:北京大学出版社,1992.43~47.

[5] 蒋咏秋,等.塑性力学基础[M].北京:机械工业出版社,1981.47~68.

[6] 夏志皋.塑性力学[M].上海:同济大学出版社,1991.31~54.

[7] 李咏偕,等.塑性力学[M].北京:水利水电出版社,1987.26~47.

[8] 熊祝华.塑性力学基础知识[M].北京:高等教育出版社,1986.80~110.

[9] 熊祝华.塑性力学[M].上海:上海科学技术出版社,1984.126~150.

[10] 徐秉业.塑性力学[M].北京:高等教育出版社,1988.150~200.

[11] 赵祖武.塑性力学导论[M].北京:高等教育出版社,1989.39~175.

[12] 严宗达.塑性力学[M].天津:天津大学出版社,1988.27~80.

[13] 余同希.塑性力学[M].北京:高等教育出版社,1989.80~.159

[14] 杨桂通.塑性力学[M].北京:中国建材工业出版社,2000.30~256