主应力的计算公式

王 凯 1)

(东南大学交通学院，南京 210096)

摘要　在前人工作的基础上，运用一元三次方程的理论直接求解应力状态的特征方程，得到了实用的主应力计算公式.

关键词　主应力，计算公式，求解一元三次方程

中图分类号：O343　　**文献标识码**：A　　doi：10.6052/1000-0879-13-502

CALCULATION FORMULAS FOR PRINCIPAL STRESSES

WANG Kai 1)

(School of Transportation , Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract　For teaching purposes, practical calculation formulas for principal stresses are proposed, which are obtained by directly solving the characteristic equation of the stress state with the theory of one-variable cubic equation.

Key words　principal stress, calculation formula, solving of one-variable cubic equation

经典的弹性力学教材或专著中，均未列出主应力的计算公式. 在参考文献 [1] 和 [2] 中，仅结合算例给出主应力的数值解，而没有给出主应力的计算公式. 参考文献 [3] 在应力偏张量主值三角函数解的基础上，推导了主应力的计算公式，但存在两个不足之处，一是主应力计算仍需借助于计算应力偏张量的不变量来实现，不如一步到位直接利用应力张量的不变量计算来得直观和方便；二是由于推导过程过于简化，所采用的推导理论和中间算式因其来龙去脉交待不够清楚而让读者阅读和理解困难.

本文在参考文献 [4] 的基础上，运用一元三次方程的理论系统详尽地直接求解应力状态的特征方程，得到了实用的主应力计算公式，该公式已在多层弹性体系的力学计算中得到了成功的应用.

在弹性力学中求解主应力的一元三次应力状态特征方程如式 (1) 所示，它的 3 个实根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 即为所求的 3 个主应力.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{1}$$

式中

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

令 $\sigma = y + I_1/3$, 代入式 (1) 得

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2}$$

式中 $p = \dfrac{3I_2 - I_1^2}{3}$, $q = \dfrac{9I_1I_2 - 2I_1^3 - 27I_3}{27}$.

再令 $y = z - \dfrac{p}{3z}$, 代入式 (2) 得

$$(z^3)^2 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{3}$$

这是 z^3 的一元二次方程，它的解是

$$z^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{R}, \quad z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{R} \tag{4}$$

式中 $R = \dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4}$. 令

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{R}\right)^{1/3} \\ B &= -\frac{p}{3A} = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{R}\right)^{1/3} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

本文于 2013-12-16 收到.

1) 王凯，教授，研究方向为路基路面工程中的弹性力学问题. E-mail: wangkaiwjk@sina.com

代入式 (4) 中第 1 式，可得

$$z^3 - A^3 = (z - A)(z^2 + zA + A^2) = 0$$

又令 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，则 $\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\dfrac{1}{\omega} = \omega^2$，$\dfrac{1}{\omega^2} = \omega$.

由此可得 z 的 3 个根为

$$z_1 = A$$

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}A = \omega A$$

$$z_3 = \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}A = \omega^2 A$$

将 z_1, z_2, z_3 代入 $y = z - \dfrac{p}{3z}$ 并利用式 (5)，即可得到相应 y 的 3 个根为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A - \frac{p}{3A} = A + B \\ y_2 &= \omega A - \frac{p}{3\omega A} = \omega A + \omega^2 B \\ y_3 &= \omega^2 A - \frac{p}{3\omega^2 A} = \omega^2 A + \omega B \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

如将 A, B 代入式 (4) 中第 2 式，会得到相同的求解结果 (仅 y 的排列次序不完全相同)，故不再赘述.

式 (6) 就是求解一元三次方程的卡丹 (Cardan) 公式，在此基础上加上 $I_1/3$，即可得到 σ_1, σ_2 和 σ_3 的表达式.

三次方程 $y^3 + py + q = 0$ 的判别式为 $R = \dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4}$，当 $R > 0$ 时 y 一根为实根两根为虚根，当 $R \leqslant 0$ 时 y 为三实根，因此求解式 (1) 仅考虑 $R \leqslant 0$ 的情况. 当 $R = 0$ 时由式 (5) 可得 $A = B = -\left(\dfrac{q}{2}\right)^{1/3}$，代入式 (6) 可得 y 的 3 个根为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -2\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} \\ y_2 &= y_3 = -(\omega + \omega^2)\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} = \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

当 $R < 0$ 时，可以看出 $p < 0$，由式 (5) 可得 $A^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{-R}\,\mathrm{i} = a + b\mathrm{i}$，$B^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{-R}\,\mathrm{i} = a - b\mathrm{i}$ 为共轭复数.

又设 $A = (a+b\mathrm{i})^{1/3} = m + n\mathrm{i}$，$B = (a-b\mathrm{i})^{1/3} = m - n\mathrm{i}$. 代入式 (6)，可得

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A + B = 2m \\ y_2 &= \omega A + \omega^2 B = -m - n\sqrt{3} \\ y_3 &= \omega^2 A + \omega B = -m + n\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

引入复数的三角表示式，可得到

$$\left.\begin{aligned} A^3 &= a + b\mathrm{i} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ B^3 &= a - b\mathrm{i} = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$r = (a^2 + b^2)^{1/2} = \left(\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)^{1/2} = \left(-\frac{p^3}{27}\right)^{1/2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-q}{2r} = \frac{-q}{2}\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{-1/2}$$

再引人复数开方运算公式

$$\left.\begin{aligned} & A = (a + b\mathrm{i})^{1/3} = m + n\mathrm{i} = \\ & \quad r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) \\ & B = (a - b\mathrm{i})^{1/3} = m - n\mathrm{i} = \\ & \quad r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) \\ & \quad (k = 0, 1, 2) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

将式 (10) 代入式 (8) 三式中任何一式，都可得到 y 的 3 个根 y_1, y_2, y_3 (表达式完全一致，仅排列次序不完全相同)，现以代入第 1 式为例，即可得到

$$y = A + B = 2r^{1/3}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2) \tag{11}$$

即

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = 2r^{1/3}\cos\frac{\theta}{3} = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2}\cos\frac{\theta}{3} \\ & y_2 = 2r^{1/3}\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} = \\ & \quad -\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ & y_3 = 2r^{1/3}\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} = \\ & \quad -\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

再将式 (7) 和式 (12) 分别代入 $\sigma = y + I_1/3$，最后得到 3 个主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 的计算公式 (按 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ 排列) 为

当 $R = \dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} = 0$ 时

若 $q = 0$, 则

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = I_1/3 \tag{13}$$

若 $q < 0$, 则

$$\sigma_1 = I_1/3 - 2\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3}, \sigma_2 = \sigma_3 = I_1/3 + \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} \quad (14)$$

若 $q > 0$, 则

$$\sigma_1 = \sigma_2 = I_1/3 + \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3}, \sigma_3 = I_1/3 - 2\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} \quad (15)$$

当 $R = \dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} < 0$ 时

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3} \\ \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} - \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} - \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

以上诸式中

$$\theta = \arccos\left[-\frac{q}{2}\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (0 < \theta < \pi)$$

$$p = \frac{3I_2 - I_1^2}{3}$$

$$q = \frac{9I_1I_2 - 2I_1^3 - 27I_3}{27}$$

最后两点说明：

(1) 本文未采用中外文献中普遍介绍的利用三角函数公式间接比拟求解 y 的 3 个根的方法，而是采用参考文献 (4) 中利用复数运算公式直接求解 y 的 3 个根的方法，后一种方法求解思路更清晰，也有利于读者理解和接受.

(2) 式 (13) ～ 式 (16) 可以合并成一个计算公式，即式 (17)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3} \\ \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} - \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \\ \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} - \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

式中

$$\theta = \arccos\left[-\frac{q}{2}\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

$$p = \frac{3I_2 - I_1^2}{3}$$

$$q = \frac{9I_1I_2 - 2I_1^3 - 27I_3}{27}$$

证明如下：

由上文可知 $R = \dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} \leqslant 0$，故 $p \leqslant 0$.

当 $p = 0$ 时，代入式 (17)，式 (17) 即变成式 (13).

当 $p < 0$ 且 $-\dfrac{q}{2}\left(-\dfrac{p^3}{27}\right)^{-1/2} = 1$ 时，$\theta = 0$, $-\left(\dfrac{q}{2}\right)^{1/3} = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^{1/2}$，$q < 0$，代入式 (17)，式 (17) 即变成式 (14).

当 $p < 0$ 且 $-\dfrac{q}{2}\left(-\dfrac{p^3}{27}\right)^{-1/2} = -1$ 时，$\theta = \pi$, $\left(\dfrac{q}{2}\right)^{1/3} = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^{1/2}$，$q > 0$，代入式 (17)，式 (17) 即变成式 (15).

当 $p < 0$ 且 $-1 < -\dfrac{q}{2}\left(-\dfrac{p^3}{27}\right)^{-1/2} < 1$ 时，$0 < \theta < \pi$，式 (17) 与式 (16) 等价.

证毕. 因此主应力的计算公式也可以只列出式 (17)，这样做公式更简洁.

参 考 文 献

1 徐秉业，黄炎，刘信声等. 弹性力学与塑性力学解题指导及习题集. 北京：高等教育出版社，1986

2 Johnson W, Mellor PB. Plasticity for Mechanical Engineers. London: D Van Nostrand Company Ltd, 1962

3 董鑫等. 应力空间内主应力及主方向的解析表达式. 昆明理工大学学报 (理工版)，2004, 29(1): 89-92

4 中国数学会上海分会. 高次方程. 上海：新知识出版社，1957

(责任编辑：胡　漫)

(上接第 782 页)

参 考 文 献

1 陈滨. 分析动力学 (第 2 版). 北京：北京大学出版社，2012

2 梅凤翔，刘端，罗勇. 高等分析力学. 北京：北京理工大学出版社，1991

3 刘延柱. 高等动力学. 北京：高等教育出版社，2000

4 黄昭度，钟奉俄. 工程系统分析力学. 北京：高等教育出版社，1992

5 袁士杰，吕哲勤. 多刚体系统动力学. 北京：北京理工大学出版社，1991

6 Kalaba RE, Udwadia FE. Equations of motion for nonholonomic, constrained dynamical systems via Gauss's Principle. *J Appl Mech*, 1993, 60(3): 662-668

7 Udwadia FE, Kalaba RE. A new perspective on constrained motion. *Proc R Soc A*, 1992, 439: 407-410

(责任编辑：刘希国)