Периодические орбиты и их устойчивость

Contents

1 Вступление

2 Линеаризация вблизи точек Лагранжа

Имеется система уравнений, описывающая движение тела вблизи коллинеарных точек Лагранжа L_1, L_2:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x + ax \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y - by \end{cases} \tag{1}$$

где ax, ay линейные части от U_x, U_y

Из уравнений Гамильтона следует, что

$$\begin{cases} ax = U_x = \ddot{x} - 2\dot{y} \\ by = U_y = \ddot{y} + 2\dot{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ax - \ddot{x} + 2\dot{y} = 0 \\ -by + \ddot{y} + 2\dot{x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

2.1 Нахождение характеристического уравнения системы с помощью матриц

Для удобства нахождения характеристического уравнения запишем систему в матричной форму, где каждая строка обозначает одно из уравнений системы, а столбцы — переменные (x — первый столбец, y — второй столбец). Характеристическое уравнений будет соответствовать определителю данной матрицы, приравненному к нулю.

$$\begin{vmatrix} ax - \ddot{x} & 2\dot{y} \\ 2\dot{x} & -by + \ddot{y} \end{vmatrix} = 0$$

Произведём замену переменных:

$$\begin{cases} y = x = 1 \\ \dot{y} = \dot{x} = \lambda \\ \ddot{y} = \ddot{x} = \lambda^2 \end{cases}$$

Перепишем матрицу с учётом этой замены и найдём её определитель

$$\begin{vmatrix} a - \lambda^2 & 2\lambda \\ 2\lambda & -b + \lambda^2 \end{vmatrix}$$

Определитель равен:

$$(a - \lambda^2)(-b + \lambda^2) - 4\lambda^2 = 0$$
$$-ab + b\lambda^2 + a\lambda^2 - \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$$
$$\boxed{\lambda^4 + (4 - a - b)\lambda^2 + ab = 0}$$

2.2 Характеристическое уравнение с помощью производных высших порядков

Для начала необходимо выразить $\dot{x}$

$$a\dot{x} - \dddot{x} + 2\ddot{y} = 0$$
$$\dot{x} = \frac{\dddot{x} - 2\ddot{y}}{a}$$

3 Проверка на устойчивость орбиты

Для проверки системы на устойчивость необходимо построить матрицу Гурвица, которая имеет общий вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Каждый угловой определитель данной матрицы должен быть больше нуля
Запишем матрицу в нашем случае

$$\begin{pmatrix} 0 & ab & 0 & 0 \\ 0 & b-a-4 & 0 & ab \\ 0 & 1 & 0 & b-a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что все угловые определители данной матрицы равны нулю, и, следовательно, система находится на грани устойчивости.

4 Периодические решения

Поиск периодических орбит будет осуществляться с помощью алгоритма градиентного спуска. Для начала остановимся на этом алгоритме.

4.1 Градиентный спуск

Метод градиентного спуска, также называемый методом наискорейшего спуск, служит для нахождения минимального экстремума функции.[1] Градиент функции определяется как:

$$\boldsymbol{\nabla} F(x,y,z) = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\vec{k} + \cdots$$

В нашем случае мы используем прямоугольную Декартову систему координат, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные вектора, направленные параллельно осям x и y соответственно. Будем рассматривать задачу в плоскости XOY, поэтому координата z не используется.

[1] Важный момент: градиентный спуск не гарантирует поиск глобального экстремума функции. В случае с двумя и более переменными возможно также нахождение седловой точки. Для поиска глобального экстремума необходимо менять начальные значения переменных и шага сходимости

Метод реализуется путём последовательных итераций, где каждое следующее значение получается:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x}$$
$$y_{n+1} = y_n - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y}$$

где λ_1, λ_2 — коэффициенты сходимости, определяемые экспериментальным путём в зависимости от начальных условий. Начальные значения x_0, y_0 выбираются по такому же принципу.

5 Метод численного интегрирования Leapfrog

Метод leapfrog - один из методов численного интегрирования.

Пусть у нас имеется задача, в которой $a = \ddot{x} = A(x)$, то есть ускорение можно выразить из начальных параметров. Тогда для численного интегрирования можно использовать следующие преобразования:

$$\dot{q}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \dot{q}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{q}(t) \cdot \Delta t$$
$$q\left(t + \Delta t\right) = q(t) + \dot{q}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t$$

где q - обобщённая координата.