

# Периодические орбиты и их устойчивость

## Contents

<b>1</b>	<b>Вступление</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Линеаризация вблизи точек Лагранжа</b>	<b>2</b>
2.1	Нахождение характеристического уравнения системы с помощью матриц	2
2.2	Характеристическое уравнение с помощью производных высших порядков	3
<b>3</b>	<b>Проверка на устойчивость орбиты</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Периодические решения</b>	<b>3</b>
4.1	Градиентный спуск . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Метод численного интегрирования Leapfrog</b>	<b>4</b>

# 1 Вступление

## 2 Линеаризация вблизи точек Лагранжа

Имеется система уравнений, описывающая движение тела вблизи коллинеарных точек Лагранжа  $L_1, L_2$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x + ax \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y - by \end{cases} \quad (1)$$

где  $ax, ay$  линейные части от  $U_x, U_y$

Из уравнений Гамильтона следует, что

$$\begin{cases} ax = U_x = \ddot{x} - 2\dot{y} \\ by = U_y = \ddot{y} + 2\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - \ddot{x} + 2\dot{y} = 0 \\ -by + \ddot{y} + 2\dot{x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

### 2.1 Нахождение характеристического уравнения системы с помощью матриц

Для удобства нахождения характеристического уравнения запишем систему в матричной форму, где каждая строка обозначает одно из уравнений системы, а столбцы — переменные ( $x$  — первый столбец,  $y$  — второй столбец). Характеристическое уравнений будет соответствовать определителю данной матрицы, приравненному к нулю.

$$\begin{vmatrix} ax - \ddot{x} & 2\dot{y} \\ 2\dot{x} & -by + \ddot{y} \end{vmatrix} = 0$$

Произведём замену переменных:

$$\begin{cases} y = x = 1 \\ \dot{y} = \dot{x} = \lambda \\ \ddot{y} = \ddot{x} = \lambda^2 \end{cases}$$

Перепишем матрицу с учётом этой замены и найдём её определитель

$$\begin{vmatrix} a - \lambda^2 & 2\lambda \\ 2\lambda & -b + \lambda^2 \end{vmatrix}$$

Определитель равен:

$$\begin{aligned} (a - \lambda^2)(-b + \lambda^2) - 4\lambda^2 &= 0 \\ -ab + b\lambda^2 + a\lambda^2 - \lambda^4 - 4\lambda^2 &= 0 \\ \boxed{\lambda^4 + (4 - a - b)\lambda^2 + ab} &= 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Характеристическое уравнение с помощью производных высших порядков

Для начала необходимо выразить  $\dot{x}$

$$a\dot{x} - \ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$$
$$\dot{x} = \frac{\ddot{x} - 2\ddot{y}}{a}$$

## 3 Проверка на устойчивость орбиты

Для проверки системы на устойчивость необходимо построить матрицу Гурвица, которая имеет общий вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Каждый угловой определитель данной матрицы должен быть больше нуля  
Запишем матрицу в нашем случае

$$\begin{pmatrix} 0 & ab & 0 & 0 \\ 0 & b - a - 4 & 0 & ab \\ 0 & 1 & 0 & b - a - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что все угловые определители данной матрицы равны нулю, и, следовательно, система находится на грани устойчивости.

## 4 Периодические решения

Поиск периодических орбит будет осуществляться с помощью алгоритма градиентного спуска. Для начала остановимся на этом алгоритме.

### 4.1 Градиентный спуск

Метод градиентного спуска, также называемый методом наискорейшего спуска, служит для нахождения минимального экстремума функции.<sup>1</sup> Градиент функции определяется как:

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} + \dots$$

В нашем случае мы используем прямоугольную Декартову систему координат, где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  - единичные вектора, направленные параллельно осям  $x$  и  $y$  соответственно. Будем рассматривать задачу в плоскости  $XOY$ , поэтому координата  $z$  не используется.

---

<sup>1</sup>Важный момент: градиентный спуск не гарантирует поиск глобального экстремума функции. В случае с двумя и более переменными возможно также нахождение седловой точки. Для поиска глобального экстремума необходимо менять начальные значения переменных и шага сходимости

Метод реализуется путём последовательных итераций, где каждое следующее значение получается:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x} \\y_{n+1} &= y_n - \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y}\end{aligned}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — коэффициенты сходимости, определяемые экспериментальным путём в зависимости от начальных условий. Начальные значения  $x_0, y_0$  выбираются по такому же принципу.

## 5 Метод численного интегрирования Leapfrog

Метод leapfrog - один из методов численного интегрирования.

Пусть у нас имеется задача, в которой  $a = \ddot{x} = A(x)$ , то есть ускорение можно выразить из начальных параметров. Тогда для численного интегрирования можно использовать следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\dot{q}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \dot{q}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{q}(t) \cdot \Delta t \\q(t + \Delta t) &= q(t) + \dot{q}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

где  $q$  - обобщённая координата.