$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & & \text{—— } \div 3^0 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \text{—— } \div 3^1 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \text{—— } \div 3^2 \\
 & 1 & \boxed{3+6+7} & & & 6 & 3 & 1 & & & \text{—— } \div 3^3 \\
1 & 4 & 10 & \underset{\boxed{16}}{\shortparallel} & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & & \text{—— } \div 3^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \\
\frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
(x+1)^0 &= 1 \\
(x+1)^1 &= x+1 \\
(x+1)^2 &= x^2+2x+1 \\
(x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
(x^2+x+1)^0 &= 1 \\
\text{〃}\ ^1 &= x^2+x+1 \\
\text{〃}\ ^2 &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \\
\text{〃}\ ^3 &= x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1
\end{aligned}
$$

研究 $(x^2+x+1)^n$ 可转化为研究 $(x+1+\frac{1}{x})^n$（更便于理解）

$(x+1+\frac{1}{x})^n$ 的展开共有 $2n+1$ 项

当 x 的次数为 t（$0 \le t \le n$）时：在 n 个 $\underline{(x+1+\frac{1}{x})}_{\text{称作“单位”}}$ 中，

易得 $t<0$ 时情况同 $|t|$

取 1 的“单位”可有

- $n-t$ 个（剩余全取 x） $C_n^{n-t}C_t^0$
- $n-t-2$ 个（剩余取 1 个 $\frac{1}{x}$，$t+1$ 个 x） $C_n^{n-t-2}C_{t+2}^1$
- $\underbrace{n-t-4}$ 个（ 〃 2 〃 $t+2$ 〃 ） $C_n^{n-t-4}C_{t+4}^2$

…… 直至该数小于 0

因此该项系数为 $\sum C_n^{n-t-2k}C_{t+2k}^k$（其中 $k\in\mathbb{N}$，$t+2k\le n$）

$$= \sum C_n^{t+2k}C_{t+2k}^k$$

$$= \sum \frac{n!\,(t+2k)!}{(n-t-2k)!\,(t+2k)!\,(t+2k-k)!\,k!}$$

$$= \sum \frac{n!}{(n-t-2k)!\,(t+k)!\,k!}$$

验证：当 $n=3$，$t=1$：$\frac{3!}{2!\,1!\,0!}+\frac{3!}{0!\,2!\,1!}=3+3=6$

当 $n=4$，$t=0$：$\frac{4!}{4!\,0!\,0!}+\frac{4!}{2!\,1!\,1!}+\frac{4!}{0!\,2!\,2!}=19$