作者：钟天睿。

二进制

什么是二进制

二进制是一种计算机常用的进制，因为晶体管只有两种形态：0 和 1。这种进制下的数都小于 2。二进制也可以用十进制的运算方法来进行运算。

对于所有十进制的数，都有一个二进制的表示法。

二进制的运算

加减

二进制的加减和十进制一样，我们可以用竖式解决，只不过是凑 2 进 1。比如 $(10010)_2+(10110)_2$：

```
  10010
+ 10110
--------
 101000
```

竖式的原理就是位值原理，从右往左的第 i 位等于十进制下数值乘 2^{i-1}。就拿上面的数为例：

$$
\begin{aligned}
(10010)_2 &= 1\times 2^4+1\times 2^1\\
(10110)_2 &= 1\times 2^4+1\times 2^2+1\times 2^1\\
(10010)_2+(10110)_2 &= 1\times 2^4+1\times 2^1+1\times 2^4+1\times 2^2+1\times 2^1\\
&= 2\times 2^4+1\times 2^2+2\times 2^1\\
&= 1\times 2^5+1\times 2^2+1\times 2^2\\
&= 1\times 2^5+2\times 2^2\\
&= 1\times 2^5+1\times 2^3\\
&= (10100)_2
\end{aligned}
$$

乘除

和加减同样，只不过是第一个数的每一位和第二个数相乘得到结果，同样是每 2 进 1。

建议列竖式。

二进制和十进制

二进制和十进制的转换，也是运用了位值原理。

我们可以用位值原理：从右往左的第 i 位就等于十进制下数值乘 2^{i-1}，从而转换进制。

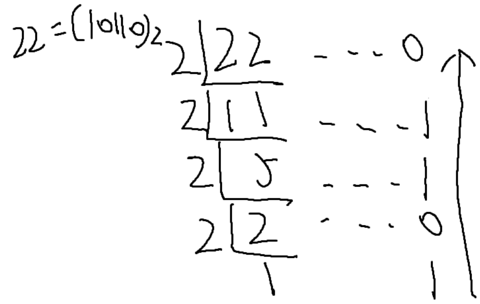
我们拿 $(10110)_2$ 来转为十进制：

$$\begin{aligned}(10110)_2 &= 1\times 2^4+1\times 2^2+1\times 2^1\\ &=16+4+2\\ &=22\end{aligned}$$

$$(10110)_2=22$$

十进制转二进制

这里，我们运用一个特殊的方法——短除法：



步骤：

1. 首先，用 22 去除 2，余 0。
2. 用商继续进行步骤 1，一直除直到剩下 1。
3. 把余数倒着读，记得读上最后的 1，读出来的数就是它对应的二进制数。

原理：

这个就是二进制转十进制的逆运算，最前面的余数就是最低为的二进制数，其次是第二位的二进制数，以此类推。但是算完后务必要倒着读，不然这个二进制数就是反的了。

多进制转十进制

在二进制转十进制中，n 进制的位值就从 2^{i-1} 变成 n_{i-1}，那么通过这个公式，我们也可以得出：从右往左的第 i 位就等于十进制下数值乘 n^{i-1}。假设一个 m 进制数的最低为是 m^x，最高位是 m^y，每一位从右到左是：$a_1, a_2, \ldots a_n$，那么这个多进制数对应的十进制的多项式就是：

$$a_1 \times m^x + a_2 \times m^{x+1} + \cdots + a_{n-1} \times m^{y-1} + a_n \times m^y$$

小数转二进制

之前写的都是关于十进制是整数的，现在我们来探讨一下十进制小数转二进制。

在这里，我们会用短除法的一种变形。

这种方法暂且称为短乘法。

思路是：

对于一个十进制的小数，我们每次把这个数乘 2，并把目前答案的整数位挑出来，用小数部分继续进行这个操作。

如果发现待处理的数是整数，那么说明换算完了。

现在我们把 0.3 变为 8 位小数的二进制小数：

$$\begin{aligned}
0.3 \times 2 = 0.6 \to 0.6 + 0 \\
0.6 \times 2 = 1.2 \to 0.2 + 1 \\
0.2 \times 2 = 0.4 \to 0.4 + 0 \\
0.4 \times 2 = 0.8 \to 0.8 + 0 \\
0.8 \times 2 = 1.6 \to 0.6 + 1 \\
0.6 \times 2 = 1.2 \to 0.2 + 1 \\
0.2 \times 2 = 0.4 \to 0.4 + 0 \\
0.4 \times 2 = 0.8 \to 0.8 + 0
\end{aligned}$$

得出：$0.3 = (0.01001100\ldots)_2$。

原理：

对于一个小数 x，我们设 $x = a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} \dots a_n \times 2^{-n}$。

当我们把这个数乘 2，那么这个数就变为 $a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^{-1} \dots a_n \times 2^{-(n-1)}$，这时候只有 $a_1 \times 2^0$ 是整数，所以现在的这个数的整数部分就是 $a_1 \times 2^0 = a_1 \times 1 = a_1$。

我们多次操作这个过程，啥时候只有整数了，说明这个单项式是 x 转为二进制的多项式的最后一项。

小数转 m 进制

把上面的结论推广，得到：

当把一个十进制的小数 x 转为 m 进制，我们用一下步骤：

1. 将 x 乘 m，把整数部分记下来然后保留小数部分。
2. 重复这个操作，直到到了要求的位数或乘到整数了。

总结

虽然二进制只是一种，但是从二进制的运算也可以运用位值原理推导出其他进制转十进制。