3. Martingale

1. Quadratic Variation

지난시간에는 확률과정의 개념에서 시작하여 symmetric random walk, scaled symmetric random walk, 위너과정(브라운 운동)에 대해 다루었다. 위너과정은 독립증분을 만족하며 t시점에서 평균이 0이고 분산이 t인 정규분포를 따르는 연속확률 과정임을 배웠다. 오늘은 먼저 확률과정을 분석할 때 쓰이는 새로운 개념 Quadratic variation을 다루겠다. Quadratic variation의 의미는 '2차 변동성'으로, 변화량의 제곱을 합하는 방식으로 구해진다. Quadratic variation은 다음주 부터 배울 확률 미분에서 중요한 역할을 하기 때문에 잘 이해를 하고 넘어가도록 하자!

$f(t)$가 에서 $0 \leq t \leq T$에서 정의된 함수라고 할 때, $f(t)$의 T 시점까지의 quadratic variation은 다음과 같이 표현된다.

$$[f, f](T)=\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(t_{j+1}\right)-f\left(t_j\right)\right]^2$$
$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$$

우리는 scaled random walk에서 했듯이 $0 \leq t \leq T$의 구간을 n개의 구간으로 쪼갤 것이다. 이 때 나누어진 n개의 구간들은 반드시 등분은 아니며 각각의 구간들의 간격이 다를 수 있다.

$\|\pi\|=\max_j\left|t_{j+1}-t_j\right|$ 는 n개로 나누어진 구간 중 가장 간격이 넓은 구간을 의미한다.

우리는 저번 시간에 scaled symmetric random walk $W^{(n)}(t)$에서 n을 무한으로 늘리면 평균이 0, 분산이 t인 정규 분포로 수렴한다는 것을 배웠고 $(W^{(n)}(t) \sim N(0, t) \text{ as n} \rightarrow \infty$)

이것을 위너 과정이라고 부른다고 했다. $n \rightarrow \infty$의 의미는 유한한 구간을 무한 개로 쪼개는 것과 같다. 구간을 무한히 쪼갤 경우 모든 구간들이 0에 가까운 값을 갖게 되고, 결국 가장 큰 간격을 가진 구간인 $||\pi||$도 0으로 수렴하게 된다.(당연히 $||\pi||$보다 작은 구간들 역시 0으로 수렴한다.) 따라서 $n \rightarrow \infty$은 $||\pi|| \rightarrow 0$과 동일한 의미를 갖는다.

1.1 $QV(f)=0$

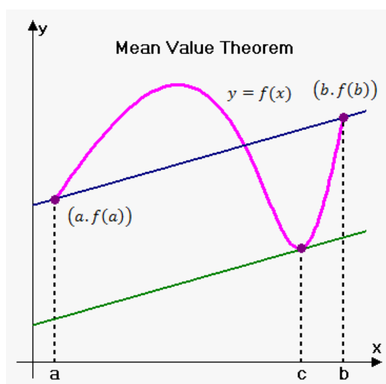
$[0, T]$에서 정의되는 한 번 미분 가능하고 $f'(x)$가 연속인 f가 있을 때 $(f \in C^1)$, quadratic variation 값을 구해보자.

cf. C^n은 n번 미분 가능하고 n계 도함수($f^{(n)}(x)$)가 연속인 함수

$$
\begin{aligned}
QV(f) &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left|f\left(t_{j+1}\right) - f\left(t_j\right)\right|^2 \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left|f'\left(t_j^*\right)\right|^2 \cdot \left|t_{j+1} - t_j\right|^2 \, (\because \text{중간값정리}) \\
&\leq \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \|\pi\| \cdot \left|f'\left(t_j^*\right)\right|^2 \cdot \left|t_{j+1} - t_j\right| \, (\because \|\pi\| = \max_j \left|t_{j+1} - t_j\right|) \\
&\Delta t = t_{j+1} - t_j \text{ (finite change)} \\
&\text{as } \|\pi\| \to 0, \ \Delta t \to dt \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0} \|\pi\| \sum_{j=0}^{n-1} \left|f'\left(t_j^*\right)\right|^2 dt \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0} \|\pi\| \cdot \int_0^T f'\left(t_j^*\right)^2 dt = 0 (\because \text{구분구적법}) \\
&\therefore QV(f) \leq 0
\end{aligned}
$$

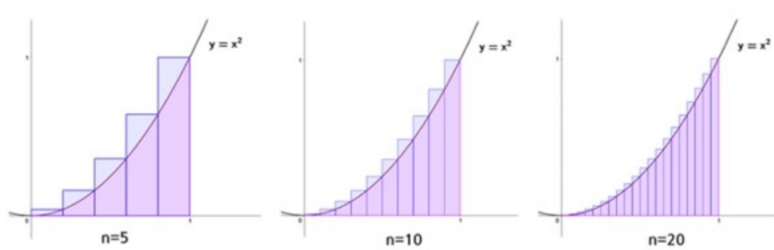
※ 중간값 정리(Mean Value Therorem)

$f(x)$가 [a,b]에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, a와 b 사이 임의의 점 c에 대해서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$가 항상 성립한다.



$$
\begin{aligned}
&\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum \left|f\left(t_{j+1}\right) - f\left(t_j\right)\right|^2 \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum \frac{\left|f\left(t_{j+1}\right) - f\left(t_j\right)\right|^2}{\left|t_{j+1} - t_j\right|^2} \cdot \left|t_{j+1} - t_j\right|^2 \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum \left|f'(c)\right|^2 \cdot \left|t_{j+1} - t_j\right|^2 \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum \left|f'\left(t_j^*\right)\right|^2 \cdot \left|t_{j+1} - t_j\right|^2
\end{aligned}
$$

※ 구분구적법



$\lim_{\|\pi\| \to 0} \|\pi\| \cdot \int_0^T f'\left(t_j^*\right)^2 dt$에서 $\|\pi\|$가 0으로 갈 때, 유한한 함수에 대해 정적분한 값은 상수이기 때문에 결국 0이 된다.

여기까지 $QV(f) \leq 0$ 인 것을 증명했다. 그런데 QV 식은 제곱의 합이기 때문에 무조건 0보다 크거나 같은 값을 갖게 되므로 $QV(f) \geq 0$ 이다. 결론적으로 $QV(f) = 0$이다.

1.2 $QV(W) = T$

[정리]

$$[W, W](T) = T, \forall T \geq 0$$
$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right]^2 = T$$

$QV(f) = 0$인 반면 $QV(f) \neq QV(W)$인 이유는 $f \in C^1$이지만 $W \notin C^1$이기 때문이다. $W \notin C^1$을 증명해보자.

$$W'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$
$$\text{Let } X = \lim_{h \to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$
$$\mathbb{E}[X] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \mathbb{E}[W(t+h) - W(t)] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (0 - 0) = 0 (\because \mathbb{E}[W(t)] = 0)$$
$$Var[X] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot Var[W(t+h) - W(t)] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot (t + h - t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$
$$(\because Var(W(t) - W(s)) = t - s, t \geq s)$$

분산이 발산하면 극한값을 갖지 못하고 미분이 불가능하기 때문에 $W \notin C^1$이다. 위너는 연속함수이지만, 모든 점에서 미분 불가능하므로 변화율(미분계수)로 $\frac{dW}{dt}$와 같이 쓰지 않고, 변화량 dW라고 표시한다.

※ $E(X) = m, \ \mathrm{Var}(X) = 0 \to X = m$

※ $Var(X) = E[X - E(X)]^2$

- $\mathbb{E}[Q_\pi]$ 구하기

$$\begin{aligned}
&\text{Let } Q_\pi = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)^2 \\
&\quad E\left[\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right) - 0\right)^2\right] (\because E[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = E[W(t_{j+1})] - E[W(t_j)] = 0 - 0 = 0) \\
&= E\left[\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right) - E[W(t_{j+1}) - W(t_j)]\right)^2\right] \\
&= \mathrm{Var}\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right) \\
&= t_{j+1} - t_j
\end{aligned}$$

$$\therefore E\left(Q_\pi\right) = E[\sum_{j=0}^{n-1} \left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)^2]$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} E\left[W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right]^2$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left(t_{j+1} - t_j\right) = \left(t_1 - t_0\right) + \left(t_2 - t_1\right) + \ldots + \left(t_n - t_{n-1}\right) = t_n - t_0 = T$$

- $\mathrm{Var}[Q_\pi]$ 구하기

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Var}[W(t_{j+1})-W(t_j))^2] \\
= & E\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))^2-E\left((W(t_{j+1})-W(t_j))^2\right)\right]^2 \\
= & E\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))^2-(t_{j+1}-t_j)\right]^2 \\
= & E\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))^4-2(t_{j+1}-t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))^2+(t_{j+1}-t_j)^2\right] \\
= & E\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))^4\right]-2(t_{j+1}-t_j)E\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))^2\right]+(t_{j+1}-t_j)^2 \\
= & E\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))^4\right]-2(t_{j+1}-t_j)^2+(t_{j+1}-t_j)^2 \\
& X \sim N(0,t) \rightarrow E(X^4)=3t^2, [W(t_{j+1})-W(t_j)] \sim N(0, t_{j+1}-t_j) \\
= & 3(t_{j+1}-t_j)^2-(t_{j+1}-t_j)^2 \\
= & 2(t_{j+1}-t_j)^2
\end{aligned}
$$

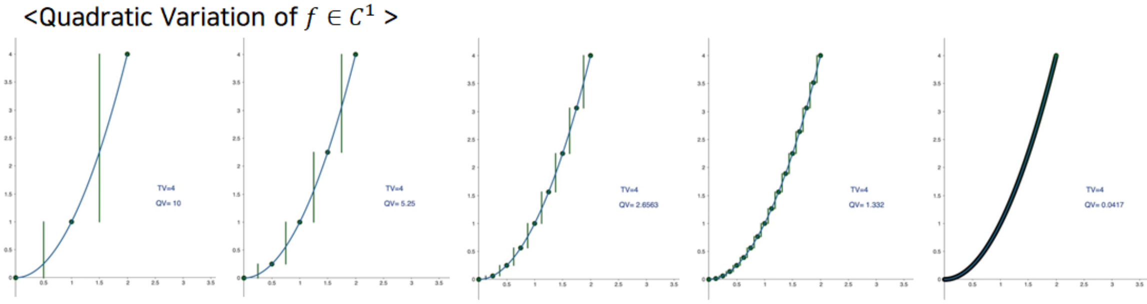
$$
\begin{aligned}
& \therefore \operatorname{Var}(Q_\pi)=\operatorname{Var}\left(\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^2\right) \\
& =\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Var}(W(t_{j+1})-W(t_j))^2\Big) \ (\because \text{독립}) \\
& =\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1}-t_j)^2 \\
& \leqslant 2 \cdot\|\pi\| \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j) \\
& =2T \cdot\|\pi\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} E[Q_\pi]=T \\
& \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \operatorname{Var}[Q_\pi]=\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} 2T \cdot\|\pi\|=0
\end{aligned}
$$

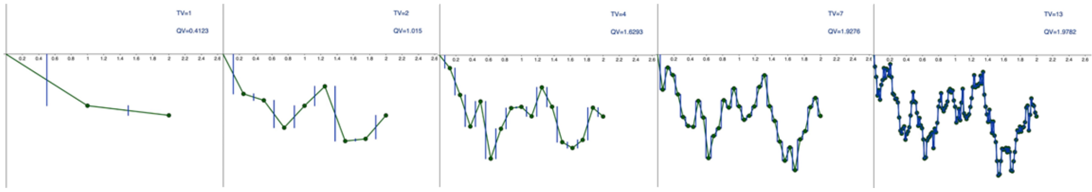
$$
\begin{aligned}
\therefore [W, W](T) & =\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1}[W(t_{j+1})-W(t_j)]^2 \\
& =\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} Q_\pi=T
\end{aligned}
$$

지금까지 수식적으로 $QV(f)=0,\ QV(W)=T$임을 증명해보았는데, C^1에 속하는 함수 f와 위너 함수가 갖는 특성을 통해서 직관적으로도 그 이유를 생각해볼 수 있다. 아래 그림은 각각 f와 W에서 구간을 점점 더 작게 나누었을때, Quadratic Variation 값이 어떻게 변화하는지를 나타내고 있다. 단조롭게 증가하는 형태를 갖는 f는 구간을 아주 작게 나눌수록 함수 값의 차이가 아주 작아져서 Quadratic variation 값이 0에 수렴하게 된다. 반면 위너 W는 끊임없이 다른 방향으로 등락을 반복하는데 이 반복이 단조롭지 않고 뾰족한 형태로 갖는 함수 형태를 갖고 있다. 따라서 구간을 작게 나누면 나눌수록 Quadratic Variation의 값은 점점 커지고, 마지막 시점의 QV 값인 2로 최종적으로 수렴하게 된다.

<Quadratic Variation of $f \in C^1$ >



<Quadratic Variation of Wiener>



1.3. QV 관련 정리

1.3.1. $dWdW = dt$

※ $E(X) = m,\ \mathrm{Var}(X) = 0 \rightarrow X = m$

$$
\begin{aligned}
&E[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = t_{j+1} - t_j \\
&Var[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = 2(t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \\
&(\because n \rightarrow \infty,\ \|\pi\| \rightarrow 0,\ t_{j+1} - t_j \approx 0) \\
&\implies (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = t_{j+1} - t_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta W = W(t_{j+1}) - W(t_j),\ \Delta t = t_{j+1} - t_j \text{ (finite change)} \\
&\|\pi\| \rightarrow 0 \implies \Delta W \rightarrow dW,\ \Delta t \rightarrow dt \\
&\therefore (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = dWdW = dt
\end{aligned}
$$

1.3.2. $dWdt = 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) = 0 \\
&\sum_{j=0}^{n-1} \mid \left(W\left(t_{j+1}\right) - W(t_j)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) \mid \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left|W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right| \cdot \left(t_{j+1} - t_j\right) \\
&\leq \max_j \left|W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right| \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) \\
&= T \cdot \max_j \left|W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\pi\| \rightarrow 0 \implies \max_j \left|W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right| \rightarrow 0 \\
&\Delta W = W(t_{j+1}) - W(t_j),\ \Delta t = t_{j+1} - t_j \text{ (finite change)} \\
&\|\pi\| \rightarrow 0 \implies \Delta W \rightarrow dW,\ \Delta t \rightarrow dt \\
&\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left|\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)\right| = dWdt \leq 0 \\
&|\mathrm{X}| \geq 0 \text{ 이므로 } \left|\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)\right| \geq 0 \\
&0 \leq dWdt \leq 0 \\
&\therefore dWdt = 0
\end{aligned}
$$

1.3.3. $dtdt = 0$

$$
\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)^2 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)^2 &\le \|\pi\|\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j) \\
&= \|\pi\|\cdot T \to 0 \text{ as } \|\pi\|\to 0 \\
&\implies \Delta t\Delta t \to dtdt \le 0 \\
&\text{제곱합} \ge 0\text{이므로 } dtdt \ge 0 \\
&0 \le dtdt \le 0 \\
&\therefore dtdt = 0
\end{aligned}
$$

2. Filtration

확률공간은 확률적으로 일어나는 시행을 표현하는 공간으로, 다음 세가지로 구성되어 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$와 같이 표기한다.

- Ω는 가능한 모든 사건의 집합
- $\mathcal{F}$는 filtration이라고 하며, Ω의 부분집합
- $\mathbb{P}$는 $S\in\mathcal{F}$인 사건 S 확률

ex) 주사위 던지기

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\mathcal{F}$: 짝수가나오는사건 $\to \mathcal{F} = \{2,4,6\}$
$P(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}$

filtration $\mathcal{F}$는 단순히 부분집합 이상의 의미를 갖는데, 자세히 살펴보도록 하자.

2.1. Filtration

filtration은 특정시점까지 누적된 사건 정보들의 집합으로, 시간이 흐를수록 증가한다. 앞의 정보를 잊어버리지 않는다고 가정하면 일반적으로 시간의 흐름에 따라 정보량은 점점 증가해갈 것이다. 즉, $\mathcal{F}_n$은 1,2, ..., n시점까지의 정보가 주어졌을 때 미래에 가질 수 있는 정보의 집합이고 이 정보는 축적되어 간다. 수식적으로는 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots$의 관계를 갖는 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\cdots$를 의미한다. 예시로 이해를 해보자.

동전던지기 시행을 3회 반복한다면, 가능한 사건의 경우의수는 $2^3 = 8$이고, 모든 사건의 집합 Ω는 다음과 같다.

$$
\begin{gathered}
\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, \\
THH, THT, TTH, TTT\}
\end{gathered}
$$

이때의 filtration $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}$ 로 정의된다. 이렇게 되는 이유는 확률 공간에 대한 아주 깊은 이해가 필요하기 때문에 엄밀하게 따지지 말고, 일어나는 사건이 정의되면 그렇지 않을 사건도 정의 되어야 하기에 전체 사건 Ω와 $\Omega^C = \phi$가 filtration이라고 생각하자.

여기서 만약 우리가 첫번째 동전던지기 시행 결과가 앞이라는 것을 안다고 하면, 사건은 다음과 같이 정의된다.

$A_H = \{HHT, HTT, HTH, HHH\}$

이때 filtration $\mathcal{F}_1 = \{A_H, A_T, \Omega, \phi\}$으로 정의된다. 마찬가지로 A_H의 여집합은 첫 시행결과가 뒤인 사건이기에 A_T가 포함되고, 누적 집합이므로 Ω, ϕ도 포함된다.

만약 우리가 첫번째, 두번째 동전던지기 시행 결과를 안다고 할 때 사건은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
A_{HH} &= \{HHH, HHT\} \\
A_{HT} &= \{HTH, HTT\} \\
A_{TH} &= \{THH, THT\} \\
A_{TT} &= \{TTH, TTT\}
\end{aligned}
$$

이때의 filtration은

$\mathcal{F}_2 = \{\cdots, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A^C_{HH}, A^C_{HT}, A^C_{TH}, A^C_{TT}, A_H, A_T, \Omega, \phi\}$ 으로 정의된다. 마찬가지의 방법으로 $\mathcal{F}_3 = \{\cdots A_{HHH}, A_{HHT}, A_{HTH}, A_{HTT}, \cdots, A_{TTT}, A^C_{HHH}, A^C_{HHT}, A^C_{HTH}, A^C_{HTT}, \cdots, A^C_{TTT}, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A_H, A_T, \Omega$ 으로 정의된다. 이제 어떤 n시점에서의 filtration $\mathcal{F}_n$이 n시점 까지 누적된 가능한 모든 사건 정보들의 집합의 의미라는 것을 이해할 수 있을 것이다. 동전을 세 번 던진다는 의미는 주가의 등락이 세 번 일어나는 경우를 모델링하다 생각할 수 있고, 이는 t=0에서 발생가능한 모든 주가 정보가 $\mathcal{F}_0$에 있고, t=1에서 발생 가능한 모든 주가 정보가 $\mathcal{F}_1$에 있는 식이다.

2.2. Adapted

어떤 사건 $\xi \in \mathcal{F}$라면($\mathcal{F}$가 ξ의 값을 정의하기에 충분한 정보 집합인 경우), ξ를 $\mathcal{F}$-measurable하다고 한다. $\xi_1, \xi_2, \cdots$가 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots$에 대해 $\mathcal{F}$-measurable 할 때, $\xi_1, \xi_2, \cdots$를 filtration $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1, \cdots$에 adapted하다고 한다. $\mathcal{F}_n$이 n시점 까지의 사건 정보를 알 때의 가능한 모든 사건의 집합이고, ξ_n은 그 중 하나 인 것이다. 예를 들어 $\mathcal{F}_2$의 경우, ξ_2는 filtration에 속하는 원소들 중 임의의 원소 하나가 될 수 있을 것이다.

※ 기댓값의 속성

1. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$
2. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \text{ if X is independet of } \mathcal{G}$
3. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$

$\mathcal{G} = g$로 놓고 X에 대한 기댓값 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G} = g]$를 구하고, $\mathcal{G}$를 변수로 하여 모든 g에 대해 기대값 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$를 구하면 $\mathbb{E}[X]$가 된다.

3. Martingale

3.1. 정의

다음 조건을 만족하는 확률변수 $\xi_1, \xi_2, \cdots$가 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots$에 대한 martingale이라고 불린다.

$$\begin{aligned} &1. \text{ 모든 n에 대하여 } \xi_n \text{은 적분 가능(적분 불가능한 확률변수는 기댓값 계산 불가)} \\ &2. \ \xi_1, \xi_2, \cdots \text{은 } \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots \text{에 대해 각각 adapted } (\xi_n \in \mathcal{F}_n) \\ &3. \ \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \xi_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[\xi_n] \\ &\to \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = \mathbb{E}[\xi_n] \ (\text{by } 3.\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]) \end{aligned}$$

3번의 양 변에 기댓값을 취하면 미래($n+1$)의 기댓값이 현재 (n)의 기댓값과 동일하다는 것을 알 수 있다. 이 상황은 fair game이므로 차익거래가 불가능한데, 만약 이 상황이 깨지면 차익거래 기회가 생긴다. Martingale은 금융공학에서 금융자산의 공정가격 산출의 조건이 되는 중요한 개념이다.

3.2. supermartingale/submartingale

1. supermartingale : 미래($n+1$)의 기댓값이 현재 (n)의 기댓값보다 작거나 같은 경우

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq \mathbb{E}[\xi_n]$$

2. submartingale : 미래($n+1$)의 기댓값이 현재 (n)의 기댓값보다 크거나 같은 경우

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[\xi_n]$$

현재시점의 기대값과 미래시점의 기대값은 같은 것이 fair game의 이론이다. 하지만 기댓값의 차이가 생기면 차익거래의 기회가 생기고, 기댓값이 높은 시점에서는 short, 기댓값이 낮은 시점에서 long 을 취할 수 있다. 이렇게 차익거래가 발생하면 빠르게 원래의 균형 상태인 fair game으로 돌아가 차익거래가 불가능해진다.

4. Brownian Motion에 적용

4.1. Quadratic Variation

지난 시간에 배운 symmetric random walk, scaled symmetric random walk의 quadratic variation을 구해보겠다.

1. Symmetric Random Walk

$$
\begin{aligned}
&[M, M]_k \\
&= \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_{j-1})^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \ (\because M_j = \sum_{i=1}^{j} X_i) \\
&= X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2 \\
&= k \ (\because X_j = 1 \text{ or -1})
\end{aligned}
$$

2. Scaled Symmetric Random Walk

$$
\begin{aligned}
&[W^{(n)}, W^{(n)}](t) \\
&= \sum_{j=1}^{nt} \left[W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right]^2 \\
&= \left[W^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{0}{n}\right) \right]^2 + \cdots + \left[W^{(n)}\left(\frac{nt}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{nt-1}{n}\right) \right]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} (X_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} X_j^2 = \frac{1}{n} \left(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{nt}^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \times nt = t
\end{aligned}
$$

Symmetric random walk의 이차변동성$[M, M]_k$는 k이고, Scaled Symmetric Random Walk의 이차변동성 $[W^{(n)}, W^{(n)}](t)$는 t라는 것을 확인할 수 있다. 그런데 이 값은 각각 $M_k, W^{(n)}(t)$의 분산과 동일한 결과이다. 그렇다면 이차변동성과 분산은 같은 개념인 것일까? 그렇지 않다. 지금까지 우리가 분산이라고 다루어온 것은 어떤 특정 시점 t에서의 분산으로, 시간 t에 대한 함수 형태를 가지며 시간의 흐름에 따라 증가하는 분산에 대한 정보를 주었다. 반면 이차변동성은 특정시점이 아닌 모든 시점에서 하나의 확률 과정 자체에 대한 분산을 의미하는 개념이다.

그런데 어떤 확률 과정이 martingale이라면, 이차변동성과 분산은 동일한 값을 갖게된다. 앞서 언급한 Random Walk도 martingale을 만족하므로 이차변동성 값과 분산 값이 동일한 것이다. 따라서 분산이 정의되어 있지 않은 상황에서도 우리는 **이차변동성을 통해 확률과정의 분산에 대한 정보를 얻을 수 있는 것**이다.

4.2. Martingale

오늘 배운 내용을 바탕으로 **브라운 운동은 martingale임**을 증명해보자.

$$pf)\ \mathbb{E}[W(t) \mid \mathcal{F}(s)]\ (t \geq s)$$
$$= \mathbb{E}[W(t) - W(s) + W(s) | \mathcal{F}(s)]$$
$$= \mathbb{E}[W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s) \mid \mathcal{F}(s)]$$
$$= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s)$$
$$= W(s)$$

$$\therefore \mathbb{E}[W(t) \mid \mathcal{F}(s)] = W(s)$$
$$\rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[W(t) \mid \mathcal{F}(s)]] = \mathbb{E}[W(s)]$$
$$\rightarrow \mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[W(s)] : \text{martingale}$$