7. Fourier Series & Fourier Transform

수학부

1. 기초수학

2. Wiener Process

3. Martingale

4. Stochastic Calculus-1

5. Stochastic Calculus-2

6. Stochastic Calculus-3　　6차시 파생

$$dU(t) = (\frac{dU}{dt} + \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{dx^2})dt + \sigma\frac{dU}{dx}dW(t)$$

0. 배우는 이유

포트폴리오 $\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$가 있다고 할 때,

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

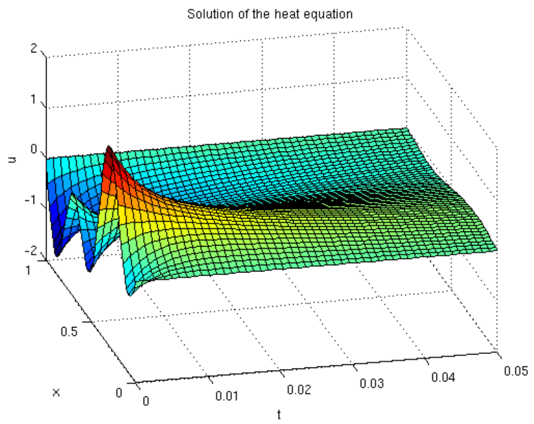
포트폴리오 Π는 Δt 동안 무위험상태이다. 따라서 포트폴리오의 수익률은 r이다.

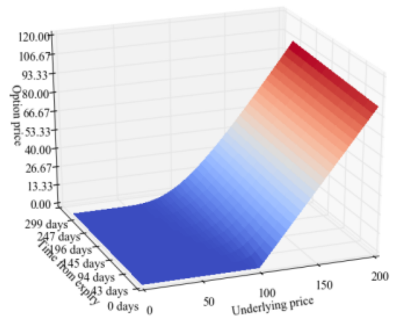
$$\Delta\Pi = r\Pi\,\Delta t$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

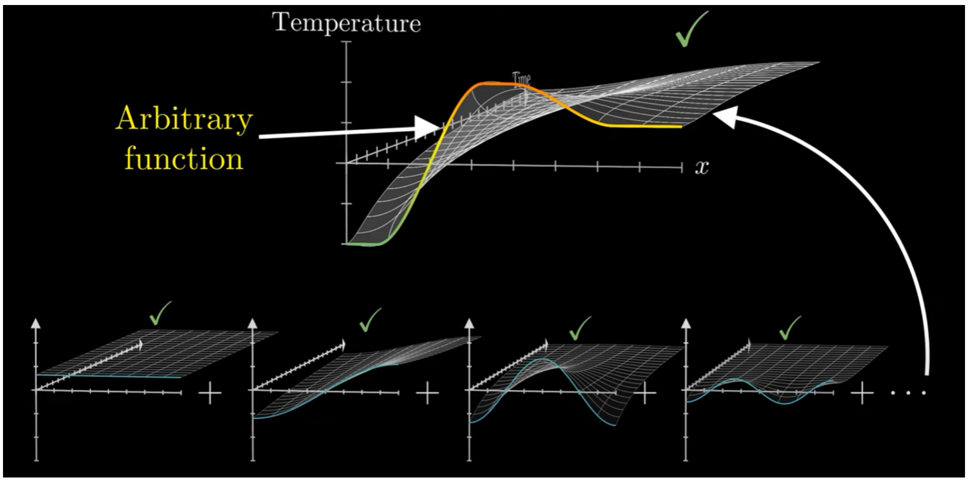
$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

저번 파생 스터디 6주차에서, 무위험 포트폴리오 구축 비용을 바탕으로 BSM의 PDE를 얻었다. 이는 기초자산과 시간의 변화율에 따라, 파생상품의 가치가 얼마나 변하는지를 나타내는 역학관계의 표현식이다. 여기에 더불어 몇 가지 조건이 추가되면, 오른쪽 그림과 같이 입체 곡면 형태의 옵션 가격 방정식을 구할 수 있다. 그때 사용하는 해법이, 열방정식의 해법과 동일하다. 열방정식과 그 해법에 대해서는 8강에서 자세히 배운다.





오늘 배울 푸리에 변환은 8강에 배울 열방정식의 해법을 구하는 과정에서 필요하다.
그 이유는 아래의 그림에서 확인할 수 있다.

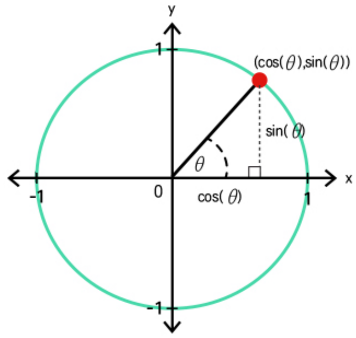


어떤 임의의 함수에 대해서, 평형상태에 도달하는 입체 함수를 그리는 것은 어려운 일이다. 하지만, 만일 기존의 함수를 여러개의 주기성 함수(=삼각함수)로 바꿔준 다음, 각 삼각함수들의 입체 곡면을 그려, 전부 더해준다면 기존의 함수의 입체 함수를 그릴 수 있다. 큰 문제를 작은 문제들로 쪼개서 해결하는 것이다.

1. 삼각함수

삼각함수는 각의 크기를 삼각비로 나타내는 함수이다. 가장 근본적인 주기 함수이며, 각종 주기적 현상을 다룰 때 푸리에 급수의 형태로 등장한다.

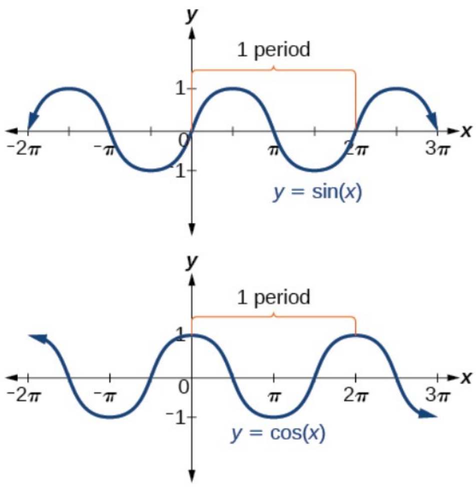
삼각함수의 삼각비는 직각삼각형의 변의 비율로 찾을 수 있다. 직각을 마주 보고 있는 빗변의 길이에 대한 높이의 길이의 비가 ‘사인(sine)’이다. 빗변의 길이에 대한 밑변의 길이의 비는 ‘코사인(cosine)’이다. 밑변의 길이에 대한 높이의 길이 비를 ‘탄젠트(tangent)’라고 한다.



1) $y=\sin(x), y=\cos(x)$

중심이 원점인 단위원($r=1$)에서 각도 x 라디안(각도)에 대응되는 위치의 y 좌표값의 자취가 아래 그림과 같이 나타나는 삼각함수의 그래프이다.

$\sin(x)$는 주기가 2π이고 원점을 대칭으로 하는 기함수이며, $\cos(x)$는 주기가 2π이고 y축을 대칭으로 하는 우함수이다.



2) 삼각함수의 덧셈정리

- 뒷 부분에 나올 증명에 필요한 정리들이며 증명은 하지 않고 넘어가도록 하겠다.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

2. 오일러 공식 Euler's Formula

오일러 공식은 삼각함수와 지수함수에 대한 관계를 나타낸다. 복소수에 의한 지수함수와 실수 각도에 의한 삼각함수를 밀접하게 관련시켜 주고 있다.e는 자연로그의 밑인 상수이고, i는 제곱하여 -1이 되는 ($i^2=-1$) 허수 단위를 나타낸다.

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\
e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}
\end{aligned}
$$

위의 첫 번째 식을 테일러 전개를 이용해서 증명해보도록 하겠다.

$$\text{Taylor expansion: } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

우리는 테일러 급수에서 $a = 0$인 것을 맥클로린 급수라고 한다는 것을 배웠다. 이러한 방법으로 정리해서 일반식으로 나타낸 것이 첫 주차에 배운 다음의 식들이다.

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

마지막 식을 이용해서 오일러 공식을 증명할 수 있다.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$
\begin{aligned}
\text{pf) } e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\therefore e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots) \\
&= \cos x + i\sin x
\end{aligned}
$$

3. 푸리에 급수 Fourier Series

같은 형태를 반복하는 주기를 가지는 파동은 아무리 복잡한 것이라도 단순한 파동의 결합으로 이루어진다. 푸리에 급수는 주기 함수를 삼각함수의 가중치로 분해한 급수다. 이것을 고안한 푸리에는 열이 시간에 따라 전도되는 과정을 수식으로 나타낸 열 방정식을 풀기 위한 방법을 찾던 중 만들었는데 이것은 우리의 최종적인 목표인 금융학의 블랙-숄즈 방정식(Black–Scholes equation)을 다룰 때도 쓰이게 된다.

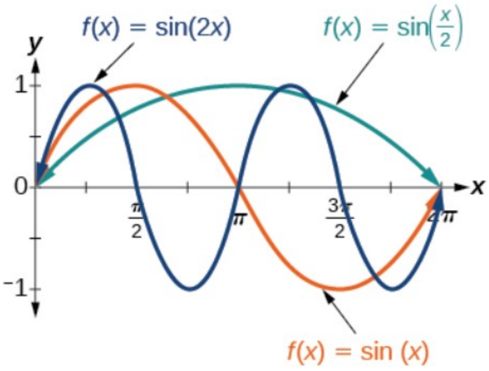
*복잡한 파동 = 단순한 파동 1 + 단순한 파동 2 + 단순한 파동 3 + ...

$$f(t) = a_0 + a_1\cos wt + a_2\cos 2wt + \cdots + a_n\cos nwt + b_1\sin wt + b_2\sin 2wt + \cdots + b_n\sin nwt$$

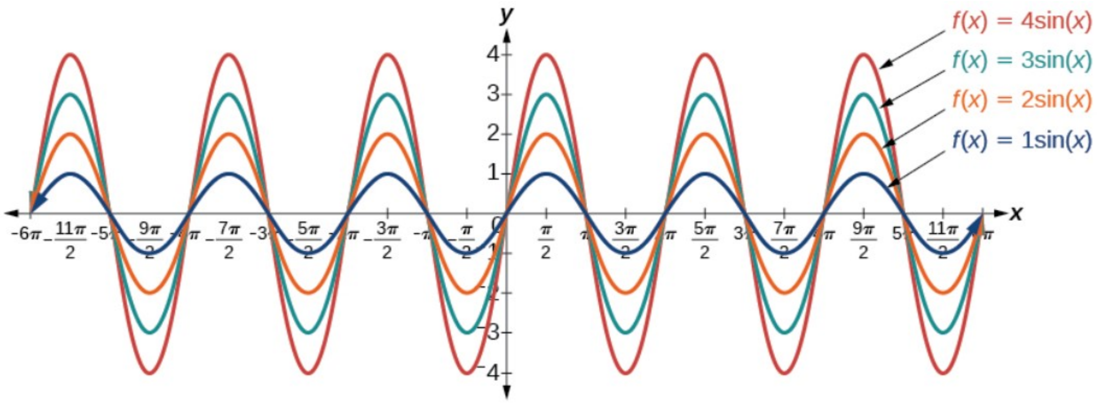
$$f(x) = a_0 + a_1\cos kx + a_2\cos 2kx + \cdots + a_n\cos nkx + b_1\sin kx + b_2\sin 2kx + \cdots + b_n\sin nkx$$

※ 위 식은 주기가 T인 경우의 함수로 $w = \frac{2\pi}{T}$이고, 아래 식은 뒤에 나올 주기가 $2L$인 함수로 $k = \frac{\pi}{L}$이다.

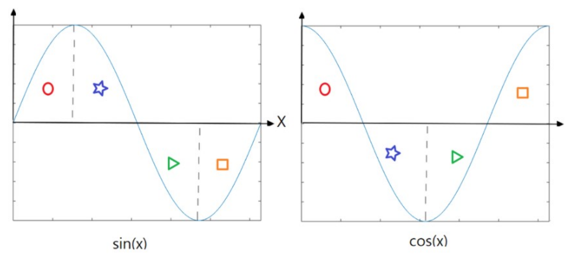
1. $\sin x$와 $\cos x$는 모두 0을 중심으로 하는 함수이기 때문에 0이 중심이 아닌 복잡한 함수를 표현할 수 없다. 따라서 a_0가 필요하다.
2. 주기적 파동은 주파수가 기본주파수의 정수배인 파동으로 이루어져 있다. 단순한 파동 모두 $w, 2w, 3w$ ... 처럼 기본주파수의 정수배로 이루어져 있다.



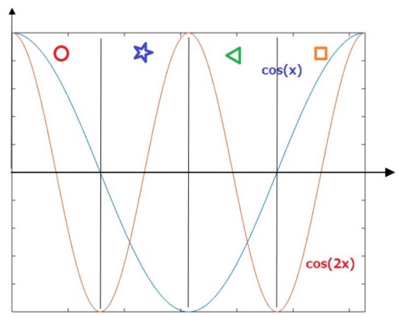
3. $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nwt + b_n \sin nwt)$ 에서 그래프의 폭을 결정하는 것은 a_n과 b_n이고n은 한 주기 안에 단순한 파동이 몇 번 반복되는지에 대한 것이다.



우리는 함수의 직교성을 이용하여 a_n과 b_n을 찾을 것이다. '직교한다'는 것의 의미는 내적이 0이라는 것이다. 여기서 함수의 직교는 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$로 나타낼 수 있다. 직접 적분하는 대신 그래프를 이용해 직관적으로 이해해 보도록 하겠다.



[1번 그림]

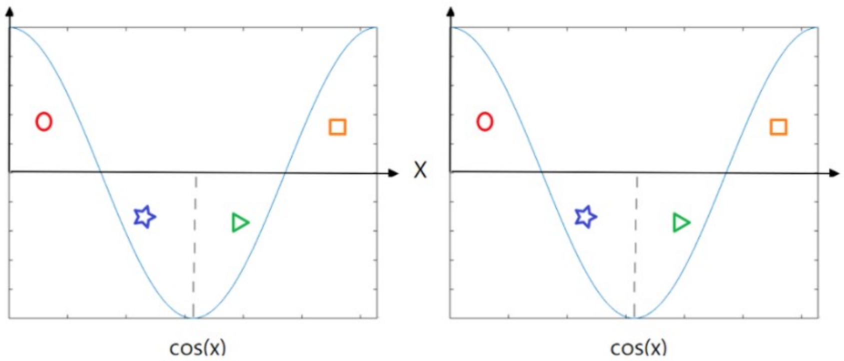


[2번 그림]

$\sin x$와 $\cos x$의 내적은 0을 기준으로 네 가지 영역으로 나누어 생각해 볼 수 있다. 삼각함수이기 때문에 모든 영역들의 넓이는 동일하다.

1번 그림에서 ○ 영역은 양수*양수이기 때문에 양수, ☆ 영역은 양수*음수이기 때문에 음수, ▷ 영역은 음수*음수이기 때문에 양수, □ 영역은 음수*양수이기 때문에 음수이다. 따라서 네 영역의 합은 0이 되고 $\sin x$와 $\cos x$는 주기 내에서 직교한다는 사실을 알 수 있다.

마찬가지로 2번 그림에서 $\cos x$와 $\cos 2x$의 직교성도 확인할 수 있다. 동일하게 모든 영역들의 넓이는 동일하기 때문이다.



그런데 $\cos x$와 $\cos x$의 내적을 생각해보면 ○ 영역은 양수*양수이기 때문에 양수, ☆ 영역은 음수*음수이기 때문에 양수, ▷ 영역은 음수*음수이기 때문에 양수, □ 영역은 양수*양수이기 때문에 합이 양수가 된다. 즉, 내적한 값이 0이 되지 않기 때문에 직교하지 않는다.

따라서 삼각함수의 직교성을 정리해보면 다음과 같다. 간단히 말해 자기 자신을 내적하는 경우를 제외하고는 항상 0이 나온다. 이 성질을 이용해 푸리에 급수를 계산해 볼 것이다.

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0 \\
&\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0 \quad (n \neq m) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq 0 \quad (n = m) \\
&\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = 0 \quad (n \neq m) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq 0 \quad (n = m)
\end{aligned}$$

- $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nkx + b_n \sin nkx)$를 $2L$의 주기를 가지는 복잡한 파동이라고 할 것이다.

  삼각함수의 주기를 생각해보면 $\sin x \to 2\pi, sin2x \to \pi, \sin 4x \to \frac{\pi}{2}$와 같이 나타난다. 따라서 주기가 $2L$인 함수에 대해서는 $\cos\frac{\pi}{L}x$와 $\sin\frac{\pi}{L}x$가 이 주기를 따르는 최소 함수라고 할 수 있다.

  - a_0 구하기

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})
\end{aligned}$$

  a_0를 구하기 위해 주기함수를 그것의 주기로 적분하면 0이 된다는 성질을 이용하여 적분하면,

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \int_{-L}^{L} a_0 dx + \int_{-L}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \\
&= \int_{-L}^{L} a_0 dx = 2La_0 \\
\therefore a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx
\end{aligned}$$

- a_n 구하기

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x)$$

내적의 성질을 이용하기 위해 양변에 $cos\frac{m\pi}{L}x$를 곱해준다.

$$f(x) \cdot cos\frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} \cdot cos\frac{m\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L} \cdot cos\frac{m\pi x}{L})$$

이를 주기 2L로 적분해주면

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x) \cdot cos\frac{m\pi x}{L}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-L}^{L}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} \cdot cos\frac{m\pi x}{L}dx + b_n sin\frac{n\pi x}{L} \cdot cos\frac{m\pi x}{L}dx) \\
&= a_m \int_{-L}^{L} cos\frac{m\pi x}{L} \cdot cos\frac{m\pi x}{L}\ dx \ \ \text{(n=m인 경우에만 0이 아님)} \\
&= a_m \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}(cos\frac{2\pi mx}{L} + cos0)dx \quad (*) \\
&= a_m \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}dx \\
&= a_m \times \frac{1}{2} \times 2L \\
&= a_m \times L \\
\therefore a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot cos\frac{m\pi x}{L}dx \\
(b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot sin\frac{m\pi x}{L}dx)
\end{aligned}$$

$$(*) \quad cosA \cdot cosB = \frac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]$$

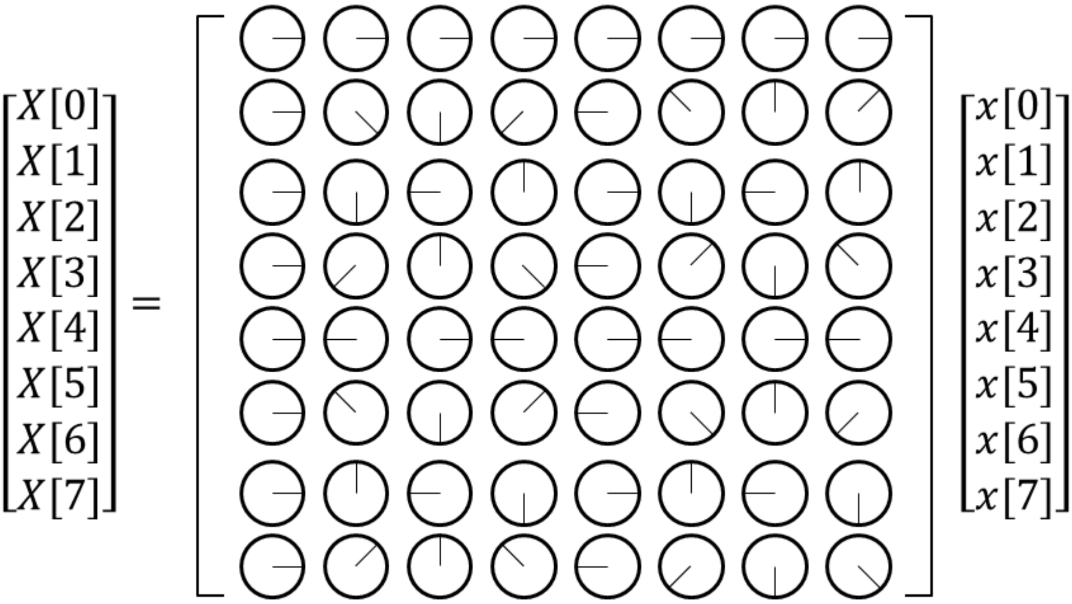
> 정리

m은 무시해라. 아래의 식은 n=m인 경우에 성립하는 일반형이다.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x)$$
$$\text{where} \ \ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos\frac{n\pi t}{L}dt, \ \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sin\frac{n\pi t}{L}dt$$
$$\therefore f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}[(\int_{-L}^{L} f(t)cos\frac{n\pi t}{L}dt)cos\frac{n\pi x}{L} + (\int_{-L}^{L} f(t)sin\frac{n\pi t}{L}dt)sin\frac{n\pi x}{L}]$$

4. 푸리에 변환 Fourier Transform

푸리에 변환의 직관은 다음의 그림으로 이해할 수 있다.



푸리에 변환은 주기를 [-L, L]에서 [-∞,∞]로 바꿔주어 주기가 없는 일반적인 함수(non periodic function)를 삼각함수로 표현하는 방법이다.

이는 함수의 주기를 무한으로 보냄으로서, 즉 곱해지는 삼각함수의 주파수의 촘촘한 정도를 바꿈으로서 분석의 질을 높인다. 또한, 이렇게 함으로서 비주기함수를 주기함수의 합들로 분석할 수 있다.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L})$$
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot cos\frac{n\pi t}{L}dt$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot sin\frac{n\pi t}{L}dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}[(\int_{-L}^{L} f(t)cos\frac{n\pi t}{L}dt)cos\frac{n\pi x}{L} + (\int_{-L}^{L} f(t)sin\frac{n\pi t}{L}dt)sin\frac{n\pi x}{L}]$$

이렇게 정의된 식에서 L을 무한으로 보내면 어떻게 되는지, 식 (1)과 식 (2)의 형태로 쪼개서 알아보자.

$(1) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$

$(2) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \cdot \cos\frac{n\pi x}{L} + \int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \cdot \ \sin\frac{n\pi x}{L})$

1. (1)

$$\text{Let} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty,$$
$$\text{then} \int_{-L}^{L} f(t)dt = C$$
$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \lim_{L\to\infty}\frac{C}{2L} = 0$$

2. (2)

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-L}^{L} f(t)\cdot cos\frac{n\pi t}{L}\cdot dt\ cos\frac{n\pi x}{L} + \int_{-L}^{L} f(t)\cdot sin\frac{n\pi t}{L}dt\ sin\frac{n\pi x}{L})\cdots(2)$$
$$\text{Let } k_n = \frac{n\pi}{L}$$
$$\Delta k = \frac{\pi(n+1)}{L} - \frac{\pi(n)}{L} = \frac{\pi}{L}$$

이때, 내부의 적분식을 아래와 같은 삼각비 곱셈공식으로 정리해준다.

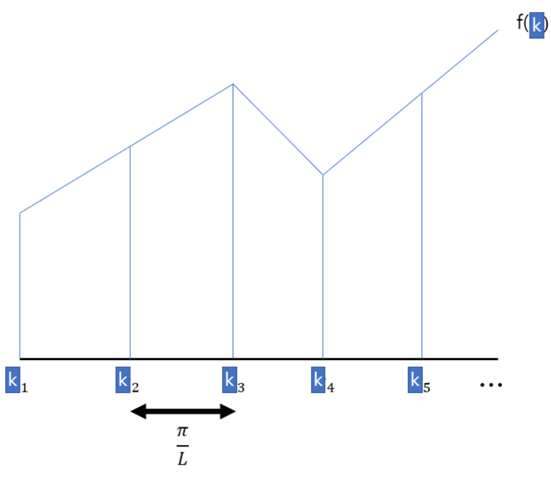
$$* \ \cos(k_n(t-x)) = \cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx$$
$$\cos(\frac{n\pi}{L}(t-x)) = \cos\frac{n\pi}{L}t\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x + \sin\frac{n\pi}{L}t\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\therefore \int_{-L}^{L}(f(t)\cdot\cos\frac{n\pi t}{L}\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x + f(t)\cdot\sin\frac{n\pi t}{L}\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x) \quad = \int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos k_n(t-x)dt$$

위의 식에 $\frac{1}{\pi}$를 곱해주고 L을 극한으로 보낸 식을 $f(k)$라고 정의한다.

$$f(k) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(t)\cos k_n(t-x)dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos k(t-x)dt$$

해당 식에 앞서 정의한 Δk를 곱해준 다음 적분한다. 이는 그림과 같은 그래프의 면적을 구하는 것과 같다.



$$\begin{aligned}&\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(k)\cdot\Delta k\\&=\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}f(t)\cdot cosk(t-x)dt)\cdot\frac{\pi}{L})\\&=\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cdot cosk(t-x)dt))\\&=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(t)\cdot cosk(t-x)dt\end{aligned}$$

이는 (2)와 동일한 식임을 알 수 있다.

$$=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{-L}^{L}f(t)\cdot cos\frac{n\pi t}{L}\cdot dt\ cos\frac{n\pi x}{L}+\int_{-L}^{L}f(t)\cdot sin\frac{n\pi t}{L}dt\ sin\frac{n\pi x}{L})\cdots(2)$$

이제 아래의 형태를 적분형으로 바꾸자.

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(k)\cdot\Delta k$$

위의 무한급수를 정적분 식으로 변환하려면, 적분 구간을 설정해주고 가야 한다. 무한급수를 풀어서 써주면 다음과 같다.

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(k)\cdot\Delta k=\lim_{L\to\infty}(f(k_1)\cdot\frac{\pi}{L}+f(k_2)\cdot\frac{\pi}{L}+f(k_3)\cdot\frac{\pi}{L}+\cdots)$$

구간의 시작인 k_1은 n에 1을 대입한 $\frac{\pi}{L}$과 같으며, 외부의 극한에 의해 이는 0에 수렴한다.
즉, 위 식의 초항은 $f(0)\cdot\frac{\pi}{dL}$에 근접하며, 이 때문에 적분 구간이 0부터 시작한다고 해도 문제가 되지 않는다.
n은 무한대로 가기 때문에, 적분 구간은 0에서 ∞이다.

이를 감안해 적분형으로 적어주면 위의 식은 다음과 같아진다. 결론적으로, (2)식은 위의 과정을 거쳐 다음과 같이 정리된다.

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f(\alpha)\cdot\Delta k=\int_{0}^{\infty}f(k)\cdot dk$$

주의할 점은, 기존에 $f(k)$는 $f(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}f(t)\cdot cosk_k(t-x)dt$와 같이 정의됐지만, $\lim_{L\to\infty}$로 인해 적분 구간이 바뀐다는 점이다.

$$\begin{aligned}&\therefore\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{-L}^{L}f(t)\cdot cos\frac{n\pi t}{L}\cdot dt\ cos\frac{n\pi x}{L}+\int_{-L}^{L}f(t)\cdot sin\frac{n\pi t}{L}dt\ sin\frac{n\pi x}{L})\ \cdots(2)\text{식}\\&=\int_{0}^{\infty}f(k)\cdot dk\\&=\int_{0}^{\infty}(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot cosk(t-x)dt)dk\end{aligned}$$

$$※\lim_{L\to\infty}f(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot cosk(t-x)dt$$

3. (1)+ (2)

(1)식은 0이기 때문에 없어지고, (2)식은 극한으로 보냈을 때 위와 같이 정리돼 아래처럼 f(x)식이 정리된다. 이를 (3) 식이라 하자.

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}+\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt\cdot\sin\frac{n\pi x}{L})\\&\to\lim_{L\to\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\cos k(t-x)dt)dk\ \cdots(3)\end{aligned}$$

4. (3) 정리

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\cos k(t-x)dt)dk \ \cdots(3)$$

(3)의 정리를 위해 아래의 삼각함수 공식을 재차 사용한다. 앞서 사용했을 때에는 L을 무한으로 보내는 경우를 적분형으로 간편하게 정리하기 위해 사용했고, '무한으로 보낸 경우'를 삼각함수의 형태로 풀어쓰기 위해 공식을 재사용하는 것이다.

$$*\ \cos(k(t-x))=\cos kt\cdot\cos kx+\sin kt\cdot\sin kx$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\ k(t-x)dtdk \ \cdots(3)\\ &=\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\cdot[\cos kt\cdot\cos kx+\sin kt\cdot\sin kx]dtdk\\ &=\int_0^\infty (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos kt\cdot dt)\cos kx\cdot dk+\int_0^\infty (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin kt\cdot dt)\cdot\sin kx\cdot dk\end{aligned}$$

이때, 각각의 괄호 부분을 다음과 같이 표기하고,

$$a(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\ kt\cdot dt$$
$$b(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\ kt\cdot dt$$

$$\begin{aligned}f(x)=&\int_0^\infty (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos kt\cdot dt)\cos kx\cdot dk+\int_0^\infty (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin kt\cdot dt)\sin kx\cdot dk\\ =&\int_0^\infty a(k)\cos kx\cdot dk+\int_0^\infty b(k)\sin kx\cdot dk\cdots(4)\end{aligned}$$

위의 일반식을 식 (4)라고 하자. 이는 식(3)을 일반형으로 표기한 것으로서, 삼각함수가 아닌 함수 f를 삼각함수로 표현해주는 변환식이다. 이제 식 (3)을 오일러 공식으로 가공해 푸리에 변환 함수의 더욱 간단한 형태를 찾아보자.

5. 식 (3)을 오일러 공식으로 가공

※

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$
$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$$

식 (3)을 다시 불러오자.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\cdot\cos k(t-x)dt)dk \ \cdots(3)$$

(3) 식 내부의 $\cos k(t-x)$를 아래의 공식으로 정리해주면

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Rightarrow\cos k(t-x)=\frac{e^{ik(t-x)}+e^{-ik(t-x)}}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\cdot\cos k(t-x)dt)dk&=\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\frac{e^{ik(t-x)}+e^{-ik(t-x)}}{2})dtdk\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(t-x)}dtdk+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dtdk\end{aligned}$$

첫 번째 항에 몇 가지 조작을 가해준다.

아래의 식은 첫 번째 항의 k를 $-k$로 치환했을 때의 식이다. 이 식은 거꾸로 결국에는 기존의 식과 동일하다.
생각해보면, k가 순서대로 0,1,2,3.....의 순서대로 숫자를 받아 적분하는 것과, $-k$의 형태로 0,-1,-2,-3....의 숫자를 받아 적분하는 것은 동일할 수 밖에 없다.

$$
\begin{aligned}
* \quad & \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(t-x)}dtdk \cdots (\text{기존 식}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dt(-dk)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
*k\text{를 } -k\text{로 치환} \\
\text{새로운 구간 위끝} = -\infty \\
\text{새로운 구간 아래 끝} = 0
\end{gathered}
$$

$$
※ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dt(-dk) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dtdk \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dt(-dk) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dtdk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dt \cdot dk + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dtdk
\end{aligned}
$$

위와 같이 나온 식은 적분 기호 내의 함수가 같으니, 두 식을 하나의 적분 기호로 합칠 수 있게 된다. 이후 추가적으로 가공해준다.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(t-x)}dtdk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\cdot e^{ikx}dtdk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt)\cdot e^{ikx}dk
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt)\cdot e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\cdot e^{ikx}dk
\end{aligned}
$$

이 식의 의미를 이해해보자. 내부의 괄호 친 식을 $F(k)$라고 하면, 이는 자연로그 형태로 표현된 어떠한 주기함수의 계수(=어떤 주기함수와 원본 함수의 곱)와 동일하다.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f) = F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\
\mathcal{F}^{-1}(F) = f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk
\end{aligned}
$$

결론부터 말하자면, $F(k)$는 **푸리에 변환 함수 이며,** 겉의 식 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\cdot e^{ikx}dk$는 **푸리에 역변환 함수**이다.
따라서, (3)을 정리한 결론은 함수를 **푸리에 변환한 다음, 또다시 푸리에 역변환 함수에 넣는다면** 기존의 식인 f(x)가 튀어나온다는, 푸리에 변환의 정의상 당연한 결론을 보이고 있다.