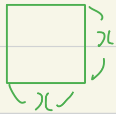
Def) Quadratic Variation (= 2차 변동성)

cf) Quadratic : 4차 X, 사각형을 만든다



'사각형' 넓이 = x^2

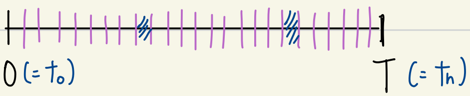
this is quadratic !

then) Quadratic Variation means "제곱만큼 움직인다"

QV는 브라운 운동이나 stochastic process를 분석할 때 쓰임.

$$[f,f](T) = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(t_{j+1}) - f(t_j)\right]^2$$

시간 구간 T에 대한 랜덤함수



[0,T]의 구간을 n으로 잘게 나눔!

cf) $\|\Pi\| = \max_j |t_{j+1} - t_j|$

=> 여기서 잘게 나눈 각 구간은 크기(간격)가 일치하지 않을 수 있음!

=> 따라서 $\max_j |t_{j+1} - t_j|$ 는 각 구간 중 가장 그 간격이 넓은 구간을 말하며, 상수임

=> 우리는 n을 무한대로 계속 보낼 것! 따라서 나눈 구간 중 최댓값인 $\|\Pi\|$는 0으로 감

=> 그래서 QV 일반식에서 $\lim_{\|\Pi\|\to 0}$ 으로 나타내고 있는 것

Remark) n을 무한대로 보내므로 $(n \to \infty)$, $\|\pi\|$를 0으로 보냄 $(\|\pi\| \to 0)$

Let $f \in C'_{[0,T]}$

cf) C^n ; n번 미분 가능하고, n계 도함수가 연속인 함수 $\Rightarrow$ C' ; 1번 미분 가능하고, $f'(x)$가 연속인 함수

$\Rightarrow$ if C^7 ; 7번 미분 가능하고, 7계 도함수($f'''''''(x)$가 연속인 함수)

$$QV(f) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2$$

$\Rightarrow$ 갑자기 왜 절댓값?

↳ 제곱이라서 무조건 ≥ 0. 무조건 ≥ 0 이라는 사실을 더 확실히 나타내기 위함!

절댓값은 씌우지 않아도 결과는 동일함

cf) 편의를 위해 앞으로 $\lim\limits_{\|\pi\| \to 0}$는 $\lim$으로,

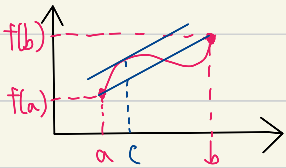
$\sum\limits_{j=0}^{n-1}$는 Σ로 표현하겠습니다!

$$= \lim \sum |f(t_j^*)|^2 \cdot |t_{j+1} - t_j|^2$$

※ 중간값 정리 (Mean Value Theorem) ; 함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일때,

a와 b 사이 임의의 점 c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$ 가 항상 성립!



$$= \lim \sum |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2$$ ← 이 식을

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$ ← 이 꼴로 만든 다음에 정리해줄 것!

$$= \lim \sum \frac{|f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2}{|t_{j+1} - t_j|^2} \cdot |t_{j+1} - t_j|^2$$

$$= \lim \sum |f'(c)|^2 \cdot |t_{j+1} - t_j|^2$$

$$= \lim \sum |f'(t_j^*)|^2 \cdot |t_{j+1} - t_j|^2$$ ← 임의의 점 t_j^*

cf) $\|\pi\| = \max_j |t_{j+1} - t_j|$ 이므로

$$\leq \lim \sum |f'(t_j^*)|^2 \cdot |t_{j+1} - t_j| \cdot \|\pi\|$$

얘를 맨 앞으로 보내면서 시그마 밖으로 빼줄 수 있음! (∵ 상수)

$$= \lim \|\pi\| \sum |f(t_j^*)|^2 \cdot |t_{j+1} - t_j|$$

각 구간 중 가장 큰 $\|\pi\| \to 0$ 이므로

$t_{j+1} - t_j$ $(= \Delta t)$ 역시 $\to 0$ $(\Delta t \to 0)$

$\therefore$ $|t_{j+1} - t_j|$ 는 dt로 표현 가능!

$$= \lim \|\pi\| \sum |f(t_j^*)|^2 \cdot dt$$

"구분구적법" : $|f(t_j^*)|^2$ 이므로 $y = x^2$ 의 그래프를 가정 (구간 $[0, T]$)

=> 시그마를 적분으로 나타낼 수 있다

$$= \lim \|\pi\| \cdot \int_0^T f(t_j^*)^2 \, dt = 0$$

절댓값 크게 신경쓸 필요 없다!

then, why 0 ? : 1) $\|\pi\| \to 0$

2) $\int_0^T f(t_j^*)^2 \, dt$ =  = 어떤 상수 (k)

$0 \times k$ (상수) $= 0$

근데, 아까 $\|\pi\|$로 변환하면서 $\leq$ 썼음!

그러면 아직 $QV(f) \leq 0$ 까지만 밝힌 것!

then, $QV(f)$가 0이 되려면

$0 \leq QV(f) \leq 0$ 이 돼야함!

우리는 첫줄에서 $0 \leq QV(f)$ 인 사실을 알 수 있음용

why? 제곱은 ≥ 0 이니깐!

그래서 마지막 결론에서 이를 굳이 설명하지 않았으며,

$QV(f)$가 항상 ≥ 0 인 사실을 강조하기 위해 절댓값을 씌우지 않았나 추측용 (이건 약간 뇌피셜)

$$\therefore QV(f) = 0$$

실컷 'QV(f) = 0' 이라는 사실을 증명해 봤습니다 ... !

그.런.데 QV(W) = T 라고 합니다 ... !

QV(f) ≠ QV(W) 인 이유는 바로 $f \in C^1$ 이지만,

$W \notin C^1$ 이기 때문입니다.

그래서, 우측으로 넘어가기 전에 $W \notin C^1$ 인 이유를 '증명'해 보겠습니다.

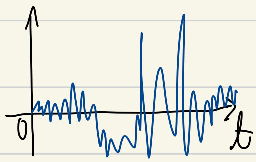
$$W'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$

$$\text{Let } X = \lim_{h \to 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \mathbb{E}[W(t+h) - W(t)] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (0 - 0) = 0$$

$$Var[X] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot Var[W(t+h) - W(t)] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \cdot (t+h-t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

⇒ 발산하면 극한값을 갖지 못하고 그래서 미분 불가능하다.



; 평균은 '0' 이지만, 무한히 발산함 (위 아래로 무한히 움직임)

위너 미분 불가능 = $W \notin C^1$

⇒ 위너는 연속 함수이다 ! (그냥 그렇구나 라고 받아들이는 게 빠를 수도)

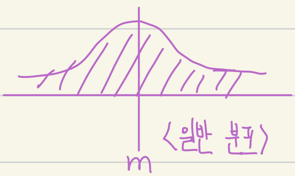
⇒ 모든 점에서 연속이나, 모든 점에서 미분 불가능 ; 바이어슈트라스 함수

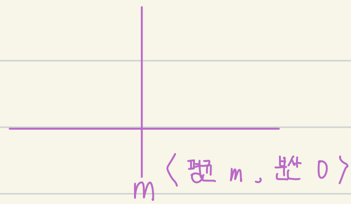
$\Rightarrow$ $\frac{dW}{dt}$ 와 같이 표시 X, dW로만 표시 O (∵ 미분 불가능)

THM) $QV(W) = T$ 임을 '증명' 하겠습니다 뿅

증명에 앞서 사용할 개념 2가지 먼저 정리

① $\mathbb{E}[X] = m$, $Var[X] = 0$ $\rightarrow$ $X = m$





② 계산의 편의를 위해 미리 값을 구함.

분산 = 편차의 제곱의 평균.

$Var(X) = \mathbb{E}(X-\mu)^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] = \mathbb{E}\left[\{(W(t_{j+1}) - W(t_j)) - 0\}^2\right]$

cf) $\mathbb{E}[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = \mathbb{E}[W(t_{j+1})] - \mathbb{E}[W(t_j)] = 0 - 0 = 0$

$= Var\left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right] = t_{j+1} - t_j$

※ 좌측과 마찬가지로 $n \rightarrow \infty \Rightarrow \|\Pi\| \rightarrow 0$

아까와 〃 $\lim\limits_{\|\Pi\| \to 0}$ 는 $\lim$으로, $\sum\limits_{j=0}^{n}$ 은 Σ로 표현함!

pf) Let $Q_\pi = \sum (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$

– 방금 전에 한 내용이라 생략 –

$\therefore \mathbb{E}[Q_\pi] = \mathbb{E}\left[\sum (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right]$

같은 결과 $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]$

$\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]$

Expectation 이랑 Σ는 서로 순서를 바꿔도 무관하다!

$= \sum \underbrace{\mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right]}_{= t_{j+1} - t_j}$

$= t_{j+1} - t_j$ (방금 전에 한 내용)

$= \sum (t_{j+1} - t_j) = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots + (t_n - t_{n-1})$

$= t_n - t_0 = T - 0 = T$

=> 일단 $\mathbb{E}[Q_\pi]$ 구했음!

=> 이제는 $Var[Q_\pi]$ 구해볼게요!

분산 = 편차의 제곱의 평균

$Var[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2]$

$= \mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2]\right]^2$

$= t_{j+1} - t_j$

$= \underbrace{\mathbb{E}}_{평균}\left[\underbrace{(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2]}_{편차의}\right]^{2}$ 제곱의

그냥 제곱 전개한 것!

$$= \mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^4 - 2(t_{j+1} - t_j)\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^4\right] - 2(t_{j+1} - t_j)\,\mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2\right] + (t_{j+1} - t_j)^2$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^4\right]}_{\text{평균은 단순 분리 가능!}} - \underbrace{2(t_{j+1} - t_j)\,\mathbb{E}\left[\overbrace{\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2}^{t_{j+1} - t_j \text{ (계속 반복중)}}\right]}_{\text{위너(W)만 확률변수! } t_{j+1} - t_j \text{는 상수 취급!}} + \underbrace{(t_{j+1} - t_j)^2}_{\text{상수 취급!}}$$

※ 지난주 과제1)

$$X \sim N(0, t) \rightarrow \mathbb{E}[X^4] = 3t^2$$

$$\left[W(t_{j+1}) - W(t_j)\right] \sim N(0, t_{j+1} - t_j) \rightarrow \mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^4\right] = 3(t_{j+1} - t_j)^2$$

$$= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2$$

$$= 2(t_{j+1} - t_j)^2$$

$$\therefore \mathrm{Var}(Q_\Pi) = \mathrm{Var}\left[\sum \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2\right]$$

if X가 서로 독립, $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$$= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) \qquad (\because \text{공분산} = 0)$$

$$\mathrm{Var}\left[\left(W(t_1) - W(t_0)\right)^2 + \left(W(t_2) - W(t_1)\right)^2 + \cdots + \left(W(t_n) - W(t_{n-1})\right)^2\right]$$

↳ 구간이 겹치지 않는 각 increment의 제곱 or 단순히 $j+1$ 번째 시행의 결과 → 서로 독립

↳ Var과 Σ 자리 바꿔줄 수 있음!

$$= \sum Var[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2]$$

$$= \sum 2(t_{j+1} - t_j)^2$$

바로 위에서 구했음!

$$\leq 2 \cdot \|\Pi\| \cdot \sum (t_{j+1} - t_j)$$

max 값이라 고정값을 가지므로 상수화, 시그마 밖으로 !

$$= 2T \cdot \|\Pi\|$$

$$0 \leq Var(Q_\Pi) \leq 0$$

ㄴ 분산 = 편차의 제곱의 평균 ≥ 0

ㄴ 평균으로부터 값들이 얼마나 흩어져 있는지 그 '크기'를 보여줌!

$$\begin{cases} \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[Q_\Pi] = T \\ \lim_{n \to \infty} Var[Q_\Pi] = 0 \end{cases}$$

(as $n \to \infty$, Q_Π의 값은 모두 'T')

$\mathbb{E}[Q_\Pi]$는 $n \to \infty$과 상관없이

T 값을 가진다!

결론) $[W,W](T) = QV(W) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} Q_\Pi = \mathbb{E}[Q_\Pi] = T$

=> n을 무한대로 보내면, Q_Π의 모든 값은 'T'가 된다!

cf) $d[W,W](T) = dWdW$

ㄴ 시간 구간 [0, T]를 일반적으로 가정한다.

당연하게 받아들여지면, 생략 가능!

ㄴ 위에는 미분 불가하고 이런 표기(식)가 있구나~ 정도로 이해!

Remark) ① ; $E(X)=m$, $Var(X)=0$ $\rightarrow$ $X=m$

$$\mathbb{E}[(W(t_{j+1})-W(t_j))^2] = t_{j+1}-t_j$$

$$Var[(W(t_{j+1})-W(t_j))^2] = 2(t_{j+1}-t_j)^2 \underbrace{\lll}_{\text{1보다 훨씬 작다}} 1 \longrightarrow 0$$

$n\rightarrow\infty$, $\|\pi\|\rightarrow 0$ $\Rightarrow$ $t_{j+1}-t_j \approx 0$ (∵ 모든 $t_{j+1}-t_j$ 구간 중에서 max 값이 0으로 가기 때문)

cf $\mathbb{E}[\ \ ]=t_{j+1}-t_j$, $Var[\ \ ]=0$ $\rightarrow$ $[\ \ ]=t_{j+1}-t_j$

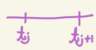
$$\therefore \underbrace{(W(t_{j+1})-W(t_j))^2}_{\Delta W \Delta W} \approx \underbrace{t_{j+1}-t_j}_{\Delta t}$$

($\|\pi\|\rightarrow 0$ 이므로 델타(△)는 d가 된다!)

$$\Rightarrow dWdW = dt$$

② $$\lim_{\|\pi\|\rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j) = 0$$

pf) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} |(W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j)|$

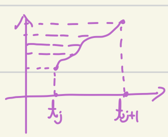
$= \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} |W(t_{j+1})-W(t_j)|\cdot(t_{j+1}-t_j)$ (∵ 

)

$\le \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \max_j |W(t_{j+1})-W(t_j)|\cdot(t_{j+1}-t_j)$

$= \max_j |W(t_{j+1})-W(t_j)| \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)$ (∵ $\max_j$ 는 상수)

$= T\cdot \underbrace{\max_j |W(t_{j+1})-W(t_j)|}$ $\rightarrow 0$



$n\rightarrow\infty$, $\|\pi\|\rightarrow 0$ t_{j+1}과 t_j의 간격이 좁아지면,

$W(t_{j+1})$과 $W(t_j)$의 간격도 같이 좁아진다.

$\sum_{j=0}^{n-1} \left|(W(t_{j+1}-t_j))\cdot(t_{j+1}-t_j)\right|$ 에서, Let $\qquad = X$

$0 \le |X| \le 0$ 이므로

$|X| = 0 \rightarrow X = 0$

기존 식 $\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j) = 0$ 에서

$dW \qquad dt \qquad = 0$

$\Rightarrow dWdt = 0$

③ $\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)^2 = 0$

pf) $\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)^2 \le \|\pi\| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1}-t_j)$ $\quad$ ($\because$ $\|\pi\|$ = 상수)

$= \|\pi\| \cdot T \rightarrow 0$ $\quad$ (as $n \to \infty$, $\|\pi\| \to 0$)

$\Rightarrow \Delta t \Delta t \Rightarrow dtdt = 0$

cf) General Properties of Expectation

④ → ② → ① → ③ → ⑤

④ X가 G에 독립이라면

② $\mathbb{E}[X|G]$에 기댓값을 씌우면, $\mathbb{E}[X]$가 된다!

↳ iterate (계산을) 반복하다

① Expectation의 선형성 (linearity)

③ X는 G로 충분히 정의된다. → X는 G 밖에서도 정의 가능!

Y는 G로만 정의할 수 있다.

cf) measurable ? → 해석학

- 그냥 이 정도만 알고 넘어가자!

⑤ H가 G에 속한다면, ⑤에 쓰인 식과 같다.

⇒ 외울 필요는 당연히 없으며, 나중에 계산할 때 필요시 skill로서 사용하면 됨!

cf) Convex, Jensen's Inequality - 생략!

Def) Filtration

↳ A sequence of σ-fields (표본공간) $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots$

such that $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ is called a filtration

Ⓐ Ⓑ

; Ⓐ는 Ⓑ라는 제약조건을 만족해야 한다.

※ filtration ; n 시점까지 누적된 과거 사건 정보들의 집합

Def) Adapted

↳ $\xi_1, \xi_2, \cdots$ is "adapted" to a filtration $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots$

if $\mathcal{F}_n$ is $\mathcal{F}_n$-measurable for each $n = 1, 2, \cdots$

ξ_n ; n번째 시행에서 실제 발생한 사건 (H)
n번째 시행에서 실제 발생하진 않았지만, 가능했던 사건들 (T)

↳ $\xi_n = [H, T]$

=> filtration은 모든 경우의 수이며 ξ는 그 중 하나, 임의의 원소

=> $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$

$\xi_n \in \mathcal{F}_n$ (각각 대응)

Def) Martingale

- 제약조건 3가지

① 모든 n에 대하여 ξ_n은 적분 가능하다.

$\mathbb{E}[|\xi_n|] < \infty$ … 적분 가능하다!

1. 기초수학 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$

→ 적분은 쌓아서 합치는 것인데, 유한한 값에서만 가능.

→ 그냥 이 정도로만 이해…!

② ξ_n은 $\mathcal{F}_n$에 대하여 각각 adapted 하다.

③ $\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \xi_n$ for all n.

↳ ③의 의미를 잘 모르겠다.

그래서 우리가 martingale 하면 가장 많이 일반적으로 (??) 떠올리는 fair game 으로 ③을 측정해 보겠습니다.

↳ ③의 양변에 기댓값을 씌우면, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[\xi_n]$

좌변은 'Property 2'에 의해 정리하면 $\mathbb{E}[\xi_{n+1}] = \mathbb{E}[\xi_n]$

⇒ fair game (현재 기댓값 = 미래 기댓값) ⇒ if not, arbitrage !?

supermartingale ; 'n+1 (미래)'의 기댓값이 'n(현재)'의 기댓값보다 작거나 같을 때

submartingale ; 그 반대.

↳ 기댓값은 n+1 이나 n 이나 같아야 하므로, 기댓값 높은 시점에서 short, 기댓값 낮은 시점에서 Long을 하면 될 것이고 Long & Short 이 완료되면 원래의 균형 상태인 fair game (= no arbitrage)로 돌아갈 것!

For $k < l$,

$\mathbb{E}[\xi_l \mid \mathcal{F}_k] = \xi_k \quad \Rightarrow$ martingale

↳ ③을 똑같이 쓴 건데, 기호만 다름.

Ex) Brownian Motion is Martingale

pf) $\mathbb{E}[W(t) \mid \mathcal{F}(s)]$

for $t \geq s$, s까지의 누적 정보집합이 있을 때, $W(t)$의 기댓값

$\mathbb{E}[W(t) - W(s) + W(s) \mid \mathcal{F}(s)]$

$W(s)$를 빼고 더하기

$\mathbb{E}[W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s) \mid \mathcal{F}(s)]$

expectation "Property 1" + "Property 4" + s까지의 정보를 다 알고 있다!

$= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s)$

$E[W(t)] - E[W(s)] = 0 - 0 = 0$

$= W(s)$

go back to p.1) ⑤, ⑥ & ③, ④

⑤, ③ : Martingale 의 '조건 3'과 같음.

ㄴ $W^{(n)}(t)$ 에서 (n)의 의미 → 확률변수 W가 정의된 t의 구간 [0, T]를

n번 나눴다는 의미 (n등분 아님!)

ㄴ 보통은 $^{(n)}$은 몇 번 미분한 함수라는 뜻.

ㄴ 위너에서는 $^{(n)}$을 일반적으로 생략함.

⑥ : $[M, M]_k$ 에서 k는 k구간까지 더해주겠다는 의미.

$= \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_{j-1})^2$ $\left(= \sum_{j=0}^{k} (M_{j+1} - M_j)^2\right)$

$= \sum_{j=1}^{k} X_j^2$ $(\because M_j - M_{j-1} = j$번째 시행$)$

$= X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2 = k$ $(\because X$는 -1 or $1)$

④ : $[W^{(n)}, W^{(n)}](t)$ 에서는 nt 구간까지 더해주겠다는 의미.

→ ④는 ⑥을 scaled 한 것!

$= \sum_{j=1}^{nt} \left[W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \left[\left(W^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{0}{n}\right)\right)^2 + \cdots + \left(W^{(n)}\left(\frac{nt}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{nt-1}{n}\right)\right)^2\right]$

⑥처럼 j번째 시행으로 정리됨 + $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \to \frac{1}{n}$

$= \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n}(X_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} X_j^2 = \frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$

X는 -1 or 1 이므로

$= \frac{1}{n} \times nt = t$