# 6. Stochastic Calculus-3

## 1. Stratonovich Integral

### 1-1. Stratonovich 적분은 무엇인가

이토 적분과 함께 확률미분방정식(SDE)의 한 종류이다. Stratonovich integral은 물리에서 자주 사용되는 개념으로 뒤에 나올 특정한 성질들 때문에 금융 수학에서 이론적으로 중요한 의미를 가지고 있지는 않지만, 이토 적분의 복잡성을 줄이기 위해 이토 적분의 대안으로 사용할 수 있다.

$\int_0^t Y(s)dX(s)$가 정의되는 adapted한 확률 과정 $X(t)$와 $Y(t)$가 있다고 하자. 이 때의 두 확률 과정의 Stratonovich integral은 다음과 같이 정의된다. 즉, 이토 적분으로 표현되는 부분과 quadratic variation으로 표현되는 부분의 합으로 볼 수 있다.

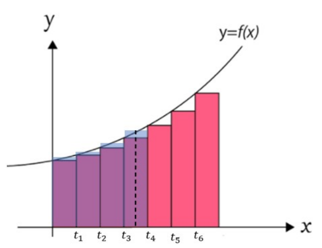
$$\int_0^t Y(s) \circ dX(s) = \int_0^t Y(S)dX(S) + \frac{1}{2}[Y,X](t)$$
$$Y(t) \circ dX(t) = Y(t)dX(t) + \frac{1}{2}dY(t)dX(t)$$

$$EX) \int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t$$
$$\begin{aligned} \therefore \int_0^t W(S) \circ dW(S) &= \int_0^t W(S)dW(s) + \frac{1}{2}[W,W](t) \\ &= \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}W(t)^2 \end{aligned}$$

### 1-2. Ito 와 Stratonovich의 차이

1. 이토와 달리 스트라토노비치는 일반적인 미적분 규칙을 따른다.
2. 이토와 달리 스트라토노비치는 미래의 기댓값이 현재의 기댓값과 동일한 martingale의 성질을 따르지 않는다.

   (이토는 시간 증분에 따라 정의되는 각 구간 $(t_0, t_1, t_2, ...)$이 독립이지만, 스트라토노비치는 독립이 아니다.)




※ 분홍색 면적인 이토 적분이고, 파란색 면적이 스트라토노비치 적분이다.

$$\begin{gathered} *\text{Ito} \\ t_0, t_1, t_2 ...\text{에서 적분} \\ *\text{Stratonovich} \\ \frac{t_0 + t_1}{2}, \frac{t_1 + t_2}{2} ...\text{에서 적분} \end{gathered}$$

$$*\text{Ito} : \sum X_{t_i}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})$$
$$*\text{Stratonovich} : \sum \frac{(X_{t_i} + X_{t_{i-}}}{2}$$

우리가 원래 알고 있는 기본적인 구분구적법(Riemann 적분)은 일반적인 smooth한 함수에 대해서 $[t_k, t_{k+1}]$ 사이에 있는 어떤 점을 선택해서 직사각형의 높이를 구하더라도 실제 적분값으로 빠르게 수렴한다. 그러나 우리가 다루는 위너 프로세스에 대해서는 그렇지 않기 때문에 구간을 정해주어야 하는데 이토의 경우는 왼쪽 끝 점으로 정한 것이고, 스트라토노비치의 경우는 중간점으로 정한 것이라고 생각하면 된다.

마틴게일은 금융공학에서 금융자산의 공정가격을 산출하는 데 조건이 되는 중요한 개념이기 때문에 직관적으로 이 성질을 따르는 이토 적분을 사용하는 것이 정석이다. 그러나 앞서 설명했듯이 이토 적분은 일반적인 미적분 규칙의 적용이 불가능하기에 계산 상의 편의를 위해서 이토 적분을 스트라토노비치 적분으로 바꾸어 계산을 하기도 한다. 이토 적분과 스트라토노비치 적분은 엄밀하게 다른 적분이고 물리학에서는 이를 구분하지만, 우리는 금융 수학을 다루고 있기 때문에 스트라토노비치 적분을 이토 적분을 편리하게 계산하기 위한 도구로만 사용할 것이다. 이는 이토 적분과 스트라토노비치 적분을 서로 변환할 수 있기 때문에 가능하다.

우리는 지금부터 스트라노비치를 이토로, 이토를 스트라노비치로 바꾸는 방법을 증명해 볼 것인데, 이러한 방법을 통해서 상황에 따라 더 편리한 정의를 사용하여 다른 하나로 변환하는 식으로 계산해서 적절하게 사용하면 될 것이다.

## 2. Sratonovich → Itô

앞으로의 증명에서 지난번에 배운 다음 세 가지의 정리를 잘 기억해 놓으면 도움이 될 것이다.

$$\begin{gathered} dWdW = dt \\ dWdt = 0 \\ dtdt = 0 \end{gathered}$$

### 2-1. Product Rule

Product rule을 Stratonovich 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} d(XY) &= YdX + XdY + dXdY \\ &= YdX + \frac{1}{2}dYdX + XdY + \frac{1}{2}dXdY \\ &= Y \circ dX + X \circ dY \end{aligned}$$

### 2-2. Sratonovich → Itô로 역계산

Stratonovich 형태에서의 $dX(t)$를 $\mu(t)dt + \sigma(x) \circ dW(t)$라고 정의하면,

$$\begin{aligned} & dX(t) \\ & = \mu(t)dt + \sigma(x) \circ dW(t) \\ & = \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t) \end{aligned}$$

여기서 $d\sigma(x)$는 다음과 같이 정리되고 세번째 항부터는 이토 적분의 기본 공식을 사용해서 0이 된다.

$$d\sigma(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2}dX(t)dX(t) + ...$$

$$\begin{aligned} & * \; dX(t)dX(t) \\ & = [\mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)]^2 \\ & = [\sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)]^2 \\ & = \sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt \end{aligned}$$

$$\therefore d\sigma(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2}(\sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt)$$

이 식을 대입해준다.

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}[\frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}(\sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt)]dW(t)$$

$$\therefore dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t)dW(t)$$

여기서 $dX(t)dW(t)$를 따로 정리해주면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &dX(t)dW(t) \\ &= [\mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)]dW(t) \\ &= \sigma(x)dt + \frac{1}{2}d\sigma(x)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &* \, d\sigma(x) \cdot dt \\ &= [\frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}(\sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt)] \cdot dt \\ &= \frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t)dt = 0 \end{aligned}$$

$$(\because dX(t) \cdot dt = [\mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)] \cdot dt = 0)$$

$$\therefore dX(t)dW(t) = \sigma(x)dt$$

따라서

$$\begin{aligned} &dX(t) \\ &= \mu(t)dt + \sigma(x) \circ dW(t) \\ &= \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial X}\sigma(x)dt \\ &= (\mu(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial X}\sigma(x))dt + \sigma(x)dW(t) \end{aligned}$$

이렇게 Stratonovich에서 Ito 형태를 도출해냈다.

## 3. Itô → Sratonovich

### 3-1. Itô → Sratonovich로 역계산

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \Rightarrow Ito \\ &dX(t) = a(t, X(t) - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}(t, X(t))b(t, X(t)))dt + b(t, X(t)) \circ dW(t) \Rightarrow Stratonovich \end{aligned}$$

$b(t, X(t)) \circ dW(t)$를 Stratonovich 정의에 따라 정리해보면 다음과 같다.

$$b(t, X(t)) \circ dW(t) = b(t, X(t))dW(t) + \frac{1}{2}db(t, X(t))dW(t)$$
$$b(t, X(t))dW(t) = b(t, X(t)) \circ dW(t) - \frac{1}{2}db(t, X(t))dW(t)$$

$$\therefore dX(t) = [a(t, X(t))dt + b(t, X(t))] \circ dW(t) - \frac{1}{2}db(t, X(t))dW(t)$$

여기서 $\frac{1}{2}db(t,X(t))dW(t)$를 이토 적분의 기본형을 사용해서 정리해주겠다.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}db(t,X(t))dW(t)\\&=\frac{1}{2}[\frac{\partial b}{\partial t}dt+\frac{\partial b}{\partial X}dX(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial X^2}dX(t)dX(t)]dW(t)\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}dX(t)dW(t)\\&*\, dX(t)=a(t,X(t))dt+b(t,X(t))dW(t)\end{aligned}$$

여기서 $\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}dX(t)dW(t)$를 정리해준다.

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}(a(t,X(t))dt+b(t,X(t))dW(t))dW(t)\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}b(t,X(t))dt\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}(t,X(t))b(t,X(t))dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b(t,X(t))\circ dW(t)=b(t,X(t))dW(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}(t,X(t))b(t,X(t))dt\\b(t,X(t))dW(t)=b(t,X(t))\circ dW(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial X}(t,X(t))b(t,X(t))dt\end{aligned}$$

이걸 대입해주면

$$\begin{aligned}\therefore\, dX(t)=a(t,X(t))dt+b(t,X(t))dW(t)\\=a(t,X(t))dt+b(t,X(t))\circ dW(t)-\frac{1}{2}b(t,X(t))\frac{\partial b}{\partial X}(t,X(t))dt\\=[a(t,X(t))-\frac{1}{2}b(t,X(t))\frac{\partial b}{\partial X}(t,X(t))]dt+b(t,X(t))\circ dW(t)\end{aligned}$$

이렇게 Ito에서 Stratonovich 형태를 도출해냈다.

Ito의 SDE형과 Stratonovich의 SDE형을 다시 정리해보면 다음과 같다.

$$\begin{gathered}\text{* Itô SDE형}\\dX(t)=a\left(t,x(t)\right)dt+b(t,X(t))dW(t)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{* Stratonovich SDE형}\\dX(t)=(a(t,x(t)-\frac{1}{2}b(t,x(t))\frac{\partial b}{\partial X}(t,X(t)))dt+b(t\cdot x(t))\circ dW(t)\end{gathered}$$

보다 간단하게 표현하면 각각을 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned}dX(t)&=adt+bdW(t)\\dX(t)&=(a-\frac{b}{2}\frac{\partial b}{\partial X})dt+b\circ dW(t)\end{aligned}$$

## 4. 예제

이제 지금까지 배운 Ito와 Stratonovich의 SDE형을 다루는 몇 가지 예제를 풀어보겠다. 여기서 변수분리라는 개념을 사용하는데 한 쪽 변에 한 변수를 몰아 옮긴 후, 각 변수에 대해 따로 방정식을 세워 쉽게 풀기 위한 방법이다.

### ◆ 4-1. : 첫 번째 예제는 Stratonovich 식에서 $X(t)$를 구하는 것이 목적이다.

$$dX(t) = X(t) \circ dW(t) \quad \text{with } X(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{X(t)} dx(t) = 1 \circ dW(t) \\
&\int_0^t \tfrac{1}{X(t)} dX(t) = \int_0^t 1 \circ dW(t) \\
&\ln X(t) - \ln X(0) = W(t) - W(0) \\
&\therefore X(t) = e^{W(t)}
\end{aligned}$$

### ◆ 4-2. : 두 번째 예제는 Ito 식에서 $X(t)$를 구하는 것이 목적이다.

$$dX(t) = X(t)dW(t) \quad \text{with } X(0) = 1$$

- **방법 1 )** Stratonovich를 사용하는 풀이

$$\begin{aligned}
* \quad & dX(t) = adt + bdW(t) \\
* \quad & dX(t) = (a - \frac{b}{2}\frac{\partial b}{\partial X})dt + b \circ dW(t)
\end{aligned}$$

여기서 $a = 0$이고, $b = X(t)$라고 할 수 있다. 따라서 $dX(t)$를 다음처럼 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&dX(t) = -\tfrac{1}{2} X(t)dt + X(t) \circ dW(t) \\
&\tfrac{1}{X(t)} dX(t) = -\tfrac{1}{2} dt + 1 \circ dW(t) \\
&\ln X(t) - \ln X(0) = -\tfrac{1}{2} t + W(t) - W(0) \\
&\therefore X(t) = e^{W(t) - \frac{1}{2}t}
\end{aligned}$$

- **방법 2)** Ito 형태로만 접근한 풀이

$$\frac{1}{X(t)} dX(t) = dW(t)$$

$$\begin{aligned}
&U = \ln X(t) \\
&d(\ln X(t)) = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} dX(t)dX(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d(\ln X(t)) \\
&= \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{X(t)^2} dX(t)dX(t) \\
&= dW(t) - \frac{1}{2} dWdW = dW(t) - \frac{1}{2} dt \\
&\ln X(t) - \ln X(0) = -\frac{1}{2} t + W(t) \\
&\therefore X(t) = e^{W(t) - \frac{1}{2}t}
\end{aligned}$$

### ◆ 4-3. 앞에 배운 식을 다시 한번 정리

$$\int_0^t W(s) \circ dW(s)$$

- **방법 1 )**

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t W(s) \circ dW(s) \\
&= \int_0^t W(s)dW(s) + \frac{1}{2}[W,W](t) \\
&= \left(\frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}W(t)^2
\end{aligned}
$$

- **방법 2 ) Product Rule**을 사용하는 방법

$$
\begin{aligned}
* \quad & d(XY) \\
&= YdX + XdY + dXdY \\
&= YdX + \frac{1}{2}dYdX + XdY + \frac{1}{2}dXdY \\
&= Y \circ dX + X \circ dY
\end{aligned}
$$

$X, Y$에 모두 $W(t)$를 대입해서 풀어준다.

$$
\begin{aligned}
&d\left(W(t)^2\right) = 2W(t) \circ dW(t) \\
&W(t)^2 - W(0)^2 = 2\int_0^t W(s) \circ dW(s) \\
&\therefore \int_0^t W(s) \circ dW(s) = \frac{1}{2}W(t)^2
\end{aligned}
$$

---

- Stratonovich → Ito

$$
\begin{aligned}
&dX(t) \\
&= \mu(t)dt + \sigma(x) \circ dW(t) \\
&= \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)
\end{aligned}
$$

$$d\sigma(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}dX(t)dX(t) + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
&* \ dX(t)dX(t) \\
&= [\mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)]^2 \\
&= [\sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)]^2 \\
&= \sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt
\end{aligned}
$$

$$d\sigma(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}(\sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt)$$

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}[\frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}(\sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt)]dW(t)$$

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t)dW(t)$$

$$
\begin{aligned}
&dX(t)dW(t) \\
&= [\mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}d\sigma(x)dW(t)]dW(t) \\
&= \sigma(x)dt + \frac{1}{2}d\sigma(x)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&* \ d\sigma(x) \cdot dt \\
&= [\frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial X^2}(\sigma^2(x)dt + \sigma(x)d\sigma(x)dt + \frac{1}{4}d\sigma^2(x)dt)] \cdot dt \\
&= \frac{\partial\sigma}{\partial X}dX(t)dt = 0
\end{aligned}
$$

$$= \sigma(x)dt$$

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \mu(t)dt + \sigma(x)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial X}\sigma(x)dt \\
&= (\mu(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial X}\sigma(x))dt + \sigma(x)dW(t)
\end{aligned}
$$