5. Risk Neutral - Levy THM & Girsanov THM

Brownian Motion (Wiener Process) $\xrightarrow{\text{O}}$ Martingale

Brownian Motion (Wiener Process) $\xleftarrow{\text{X}}$ Martingale

Martingale이 '정규분포'를 따른다는 조건이 필요함!

cf) Martingale (세 가지 조건)

; $\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Z_n$ for all n

$\downarrow$

$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[Z_n]$

5. Risk Neutral.

THM. Lévy THM.

Let $M(t)$, $t \geq 0$ be a martingale with respect to a filtration $\mathcal{F}(t)$. Assume $M(0) = 0$. $M(t)$ has continuous paths, $[M, M](t) = t$: $dMdM = dt$.

Then, $M(t)$ is a Brownian Motion (Wiener process)

노란색 부분 ; martingale 이라고 정의내림

하늘색 부분 ; $M(0) = 0$ 과 $[M, M](t) = t$ 를 통해 $M \sim N(0, t)$ 인 것, 즉 정규분포를 따른다고 가정할 수 있다.

cf) $[W, W](T) = T$ ··· 2단원 p.3

① + ② $\Rightarrow$ Then, $M(t)$ is Brownian Motion (Wiener Process).

=> $M(t)$가 정규분포를 따른다는 것을 증명해 볼까요? (증명하면, 레비 정리에 따라 $W \leftrightarrow M$은 서로 교환할 수 있다)

pf) show $M(t) \sim N(0, t)$

ㄴ 1단원에서 배운 "같은 mgf를 가지면 distribution이 같다"는 성질을 활용.

Let $\forall f \in C^2$. $f(t, M(t))$

cf) C^n : n번 미분 가능하고, n계 도함수가 연속인 함수.

Stochastic Chain Rule (Itô formula)

$$df = f_t\,dt + f_x\,dM(t) + \underline{\tfrac{1}{2} f_{xx}\,dM(t)\,dM(t)} \rightarrow dt \quad (\because [M, M](t) = t)$$

$(\because \forall f \in C^2)$

(4가지 항들은 $dt\,dt \cdot dt\,dW = 0$에 따라 소거)

=> 양변을 $\int_0^t$ 구간에서 적분.

$$\begin{aligned} f(t, M(t)) - f(0, M(0)) &= \int_0^t f_t(s, M(s))\,ds + \int_0^t f_x(s, M(s))\,dM(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, M(s))\,ds \\ &= \int_0^t f_t(s, M(s))\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, M(s))\,ds + \int_0^t f_x(s, M(s))\,dM(s) \\ &= \int_0^t \left(f_t + \frac{1}{2} f_{xx}\right) ds + \int_0^t f_x\,dM(s) \end{aligned}$$

set $f_t + \frac{1}{2} f_{xx} = 0 \Rightarrow f(t, \underset{(=M(t))}{x}) = e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t}$

※ set? : 정규분포꼴로 정리하기 위해서

※ 무슨 근거로 $e^{\square}$ 형태로 f를 정의하는 것인가?

: $\because$ WLOG (Without Loss of Generality). 일관성을 잃지 않고.

고려해야 하는 가짓수를 줄이기 위함

수학에서 증명할 때 많이 쓰이며, 기존의 조건들을 침해하지 않는 선에서 식을 하나로 지정할 수 있음

$$\left(\begin{aligned} \because\ f_t &= -\frac{1}{2}u^2 e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t} \\ f_{xx} &= u^2 e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t} \end{aligned} \Rightarrow f_t + \frac{1}{2} f_{xx} = 0 \right)$$

$f(t, x) = e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t}$에서 t와 x에 모두 0을 대입하면

$f(0, M(0)) = e^0 = 1$

가정식 i $f(t, M(t)) - f(0, M(0)) = \int_0^t f_t + \frac{1}{2} f_{xx}\, ds + \int_0^t f_x\, dM(s)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$e^{uM(t) - \frac{1}{2}u^2 t} - 1 = 0 + \underline{\int_0^t f_x\, dM(s)}$

cf) Properties of Itô Integral

④ $I(t)$ is a martingale $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[I(t)] = 0$

$\Rightarrow$ 양변에 기댓값 씌우기!

$\mathbb{E}[e^{uM(t) - \frac{1}{2}u^2 t}] = 1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\mathbb{E}[e^{uM(t)} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2 t}] = 1$

cf) $\mathbb{E}$[변수] = 변수, $\mathbb{E}$[확률변수] $\neq$ 확률변수

$\mathbb{E}[e^{uM(t)}] \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2 t} = 1$

$\mathbb{E}[e^{uM(t)}] = e^{\frac{1}{2}u^2 t}$ $\quad$ ($\because$ mgf of $M(t) = \mathbb{E}[e^{uM(t)}] = e^{0 \cdot u + \frac{1}{2} t \cdot u^2} = e^{\frac{1}{2}u^2 t}$)

cf) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 일 때, mgf of $X = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

결론) 같은 mgf를 가지면 distribution이 같다.

$\therefore M(t) \sim N(0, t)$

Girsanov THM

실제 세계에서의 기대수익률과 확률을 구할 수 없기 때문에 우리는 위험 중립 세계로 전환해야 한다.

실제 세계) P measure "P"

위험 중립) P tilde measure "$\tilde{P}$"

Z: 실제 세계와 위험 중립 세계의 관계성을 나타내는 식

이를 라돈-니코딤 도함수라고 함

1) Z를 정의하고, 이를 이용하여 실제 세계의 확률 P에서 위험 중립 세계의 확률 P로 전환

2) 실제 세계의 기대수익률인 α 대신, 위험 중립 세계의 기대수익률인 r(risk-free rate)로 전환

3) 기대수익률은 α 에서 r(risk-free rate)로 변하나, 변동성 σ 는 변하지 않음

"정의"

$$\begin{cases} Z(t) = e^{-\int_0^t \theta(u)\, dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)\, du} > 0 \\ \tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u)\, du \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $d\tilde{W}(t) = dW(t) + \theta(t)\, dt$

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = Z \quad , \quad \tilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[X \cdot Z]$$

$\Rightarrow$ 관계성, 라돈-니코딤 도함수 , 위험 중립 확률로 전환

실제 세계에서 위험 중립 세계로 전환될 때 기대수익률은 변하나 변동성은 변하지 않는다.

cf) $dS(t) = \alpha S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$

$\alpha \to r$ (risk-free rate) $\qquad dW(t) \to d\tilde{W}(t)$

$= rS(t)\,dt + (\alpha - r)S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$

$= rS(t)\,dt + \sigma \cdot \dfrac{\alpha - r}{\sigma} S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$

Let $\dfrac{\alpha - r}{\sigma} = \theta$ (market price of risk)

$= rS(t)\,dt + \sigma S(t)\,(\theta\,dt + dW(t))$

차이점은 모르겠음.

cf) market price of risk (≈ sharpe ratio)

: the reward-to-risk ratio of the market portfolio.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{W}(t) &= W(t) + \int_0^t \theta(u)\,du \\ \Rightarrow d\tilde{W}(t) &= dW(t) + \theta(t)\,dt \end{aligned}}$$

$= rS(t)\,dt + \sigma S(t)\,d\tilde{W}(t)$

$\alpha \to r \qquad \sigma \to \sigma$

$$* \; dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

$$= rS(t)dt + \sigma S(t)d\widetilde{W}(t)$$

수익률만 변함

$$\therefore S(t) = S(0)\cdot e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widetilde{W}(t)}$$

3단원 p.3 좌측 하단 참고

$$\therefore \widetilde{\mathbb{E}}[S(T)] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[S(0)\cdot e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\widetilde{W}(T)}\right]$$

$$= S(0)\cdot e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\,\widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{\sigma\widetilde{W}(T)}\right]$$

확률변수 빼고 기댓값 밖으로 나옴

$\widetilde{W}(T) \sim N(0, T)$

$$= S(0)\cdot e^{(r-\cancel{\frac{1}{2}\sigma^2})T}\cdot e^{\cancel{\frac{1}{2}\sigma^2}T}$$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\mathbb{E}[e^{\sigma\widetilde{W}(T)}] = e^{0 + \frac{1}{2}T\sigma^2}$$

$$= S(0)e^{rT}$$

초기값 * 연속복리(무위험 이자율로)