8주차: 다양한 파생상품

👩🏻‍🏫🤟🏻

이색옵션(Exotic Option)

기본형 상품(Plain Vanilla Products)

- 계약 내용의 표준화
- 활발한 거래
- 거래소와 브로커들에 의한 가격 및 내재변동성의 정기 공시

이색옵션

- 계약 내용의 비표준화
- 재무공학전문가(Financial Engineer)에 의한 개발
- 기본형 상품보다 훨씬 높은 수익성

패키지(Package)

표준 유러피언콜옵션, 표준 유러피안풋옵션, 선도계약, 현금 그리고 기초 자산으로 구성된 포트폴리오

Ex) 강세 스프레드, 나비형 스프레드, 스트래들, 스트랭글 등

비표준형 아메리칸옵션(Non-standard Option)

표준형 아메리칸옵션: 옵션만기 동안 언제든지 행사 가능하고, 행사가격은 일정하다.

비표준형 아메리칸옵션:

1. 조기행사는 특정일로만 제한 (Bermudan Option, 버뮤다 옵션)
2. 조기행사는 옵션만기 동안 일부 기간에서만 가능 (행사제한 기간(Lockup Period) 등 존재)
3. 행사가격이 옵션만기 동안에만 변동

⇒ 각 점(node)에서 조기행사를 할 것인지의 여부를 판단하는 이항과정을 통해 평가한다.

갭옵션(Gap Option)

갭 콜옵션: $S_T > K_2$일 때, 투자수익 $S_T - K_1$을 지급하는 유러피안 옵션

($K_2 > K_1$이냐 $K_1 > K_2$이냐에 따라 투자수익의 양수 또는 음수가 결정된다.)

▼ 갭 콜옵션의 가치

블랙-숄즈-머튼 모형을 수정하여 가치를 계산

q: 옵션의 기초자산 수익률

$$S_0 e^{-qT}\ N(d_1) - Ke^{-rT}\ N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

▼ 기본 콜옵션 가치

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

갭 풋옵션: $S_T < K_2$일 때, 투자수익 $K_1 - S_T$을 지급하는 유러피안 옵션

($K_2 > K_1$이냐 $K_1 > K_2$이냐에 따라 투자수익의 양수 또는 음수가 결정된다.)

▼ 갭 풋옵션의 가치

블랙-숄즈-머튼 모형을 수정하여 가치를 계산

q: 옵션의 기초자산 수익률

$$K_1 e^{-rT}\ N(-d_2) - S_0 e^{-qT}\ N(-d_1)$$

이때 d_1과 d_2는 콜옵션과 동일

선도유효옵션(Forward Start Option)

미래의 특정시점에서 효력이 발생하기 시작하는 옵션으로, 스톡옵션과 비슷한 계약 형태를 보인다.

▼ 등가격 유러피안 선도옵션의 가치

- T_1 시점에 시작해서 T_2 시점에 만기
- 현재시점에서 기초자산의 가격은 S_0, T_1 시점에서는 S_1

BSM 모형(유러피안옵션 가격결정 모형)에 따라 ,

"*등가격 콜옵션의 가치는 자산가치에 비례한다*"는 사실을 전제로 한다.

⇒ T_1 시점의 선도유효옵션 가치는 cS_1/S_0이다. (c는 $T_2 - T_1$ 동안 존속하는 등가격옵션의 현재시점에서의 가치)

$$e^{-rT_1}\,\hat{E}[c\frac{S_1}{S_0}]$$

- $\hat{E}$는 위험중립세계에서의 기대치
- c와 s_0값은 상수
- $\hat{E}[S_1] = S_0e^{(r-q)T_1}$ 을 만족

따라서 최종적인 선도유효옵션의 가치는 ce^{-qT_1} 을 만족시킨다.

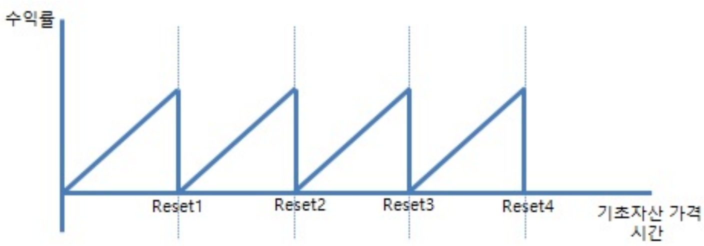
기초자산이 무배당주식인 경우에는 $q = 0$이므로 선도유효옵션의 가치는 동일한 만기의 등가격 표준옵션의 가치와 정확히 일치한다.

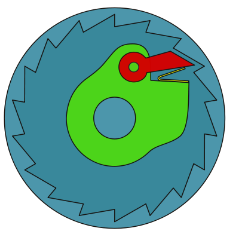
크리켓옵션(점성옵션, 행사가격 조정옵션)

행사가격을 결정하는 규칙이 포함된 일련의 콜옵션 또는 풋옵션

보통의 옵션에 $n-1$개의 선도유효옵션이 더해진 구조

- t_n은 옵션만기일, $t_1,\ t_2,\ ...,\ t_{n-1}$은 행사가격 조정일





* 여러개 콜옵션의 수익구조를 시간순서대로 연결해놓은 구조

▼ 크리켓옵션의 구조

첫 번째 옵션의 행사가격은 K(자산의 초기 가격과 동일하게 설정 가능)이고, 시점 t_0 과 t_1기간 동안 적용

두 번째 옵션은 시점t_1에서의 자산가격이 행사가격인 투자수익을 시점 t_2에서 지급하는 옵션

세 번째 옵션은 시점t_2에서의 가산가격이 행사가격인 투자수익을 시점 t_3에서 지급하는 옵션

⇒ 투자자는 개별 Reset(t) 기간 콜옵션 수익의 합을 수취하게 된다.

복합옵션(Compound Option)

옵션에 대한 옵션 (총 4가지)

1. 콜옵션에 대한 콜옵션/ 풋옵션
2. 풋옵션에 대한 콜옵션/ 풋옵션

▼ 콜옵션에 대한 콜옵션

복합옵션의 소유자는 첫 번째 옵션 행사일(T_1)에서 행사가격(K_1)을 지불하고 콜옵션을 매입할 권리를 행사할 수 있다. 이렇게 매입한 콜옵션은 옵션소유자에게 두 번째 옵션행사일인 T_2에서 행사가격 K_2를 지불하고 기초자산을 매입할 수 있는 권리를 부여한다.

복합옵션은 첫 번째 옵션 행사일에서 옵션의 가치(S_1)가 첫 번째 행사가격(K_1)보다 높은 경우에만 행사된다.

[전제]

- 기하 브라운 운동을 가정한다.
- 이변량 정규분포를 적분하여 분석적으로 평가한다.

[가치]

$$S_0e^{-qT_2}M(a_1,b_1;\sqrt{T_1/T_2})-K_2e^{-rT_2}M(a_2,b_2;\sqrt{T_1/T_2})-e^{-rT_1}K_1N(a_2)$$

단,

$$a_1=\frac{ln(S_0/S^*)+(r-q+\sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}},\ a_2=a_1-\sigma\sqrt{T_1}$$
$$b_1=\frac{ln(S_0/K_2)+(r-q+\sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}},\ b_2=b_1-\sigma\sqrt{T_2}$$

- 함수 $M(a,b:\rho)$:

  이변량 누적정규분포함수로서, 두 확률변수 간의 상관계수가 ρ이고 첫 번째 변수는 a보다 작고 두 번째 변수는 b보다 작은 경우의 누적확률 값을 나타낸다.

- 변수 S^*:

옵션가치가 K_1과 동일해지는 경우 T_1 시점에서의 자산가격이다. 만일 기초자산의 가치가 T_1 시점에서 S^*보다 낮으면 옵션은 가치 없이 소멸될 것이다.

선택옵션(Chooser Option, As-you-like-it-Option)

특정기간이 지난 후에 소유자가 옵션을 콜옵션으로 할 것인지 아니면 풋옵션으로 할 것인지를 결정할 수 있는 옵션

$$max(c,\ p)$$

- c : 선택옵션의 기초가 되는 콜옵션의 가치
- p : 선택옵션의 기초가 되는 풋옵션의 가치

▼ 선택옵션의 가치

풋-콜 패리티를 이용하여 선택옵션의 가치를 평가한다.

T_2은 선택옵션의 만기일, r은 무위험이자율

$$\begin{aligned} max(c,\ p) &= max(c,\ c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1e^{-q(T_2-T_1)}) \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)}max(0,\ Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1) \end{aligned}$$

위 식을 통해 선택옵션이 다음 두 포지션으로 구성된 패키지임을 알 수 있다.

1. 행사가격이 K이고 만기가 T_2인 콜옵션 1주
2. 행사가격이 $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$이고 만기가 T_2인 풋옵션 $e^{-q(T_2-T_1)}$주

콜옵션과 풋옵션이 상이한 행사가격과 만기를 갖도록 구성하게 되면 선택옵션은 더욱 복잡한 형태가 되어 이 경우 더 이상 패키지로 볼 수 없게 되고, 복합옵션과 유사한 속성을 갖게 된다.

장애물옵션(Barrier Option)

기초자산의 가격이 일정기간 동안에 일정 수준에 도달했는지 여부에 의하여 이득이 결정되는 옵션

기본형 옵션보다 가격이 저렴해 일부 시장참여자에게 인기있다.

1. 실격옵션(Knock-out Option): 기초자산의 가격이 장애물 가격에 도달하면 효력이 소멸하는 옵션

   ▼ 하향실격콜옵션(down-and-out call)

   기초자산의 가격이 일정한 장애물가격 H에 도달하면 효력이 소멸되는 표준콜옵션

   이때 장애물가격은 옵션 개시 때의 기초자산의 가격보다 낮게 설정된다.

- ▼ 상향실격풋옵션(up-and-out put)

  기초자산의 가격이 일정한 장애물가격 H에 도달하면 효력을 상실하는 표준풋옵션

  이때 장애물가격은 옵션 개시 때의 기초자산의 가격보다 높게 설정된다.

2. 진입옵션(Knock-in Option): 기초자산의 가격이 장애물 가격에 도달하면 효력이 발생하기 시작하는 옵션

   - ▼ 상향진입풋옵션(up-and-in put)

     기초자산의 가격이 장애물가격에 도달할 때에만 효력이 발생하기 시작하는 표준풋옵션

   - ▼ 하향진입콜옵션(down-and-in call)

     기초자산의 가격이 장애물가격에 도달하면 효력이 발생하기 시작하는 표준콜옵션

- ▼ 장애물옵션과 표준옵션의 차이점

  베가(ν): 자산 내재변동성의 변화에 따른 옵션 가치의 변화율

  옵션가격은 변동성에 비례하므로, 일반적으로 옵션 매수자는 풋/콜에 관계없이 $\nu > 0$을 가진다.

  그러나 장애물옵션의 베가는 0보다 작은 경우도 있다.

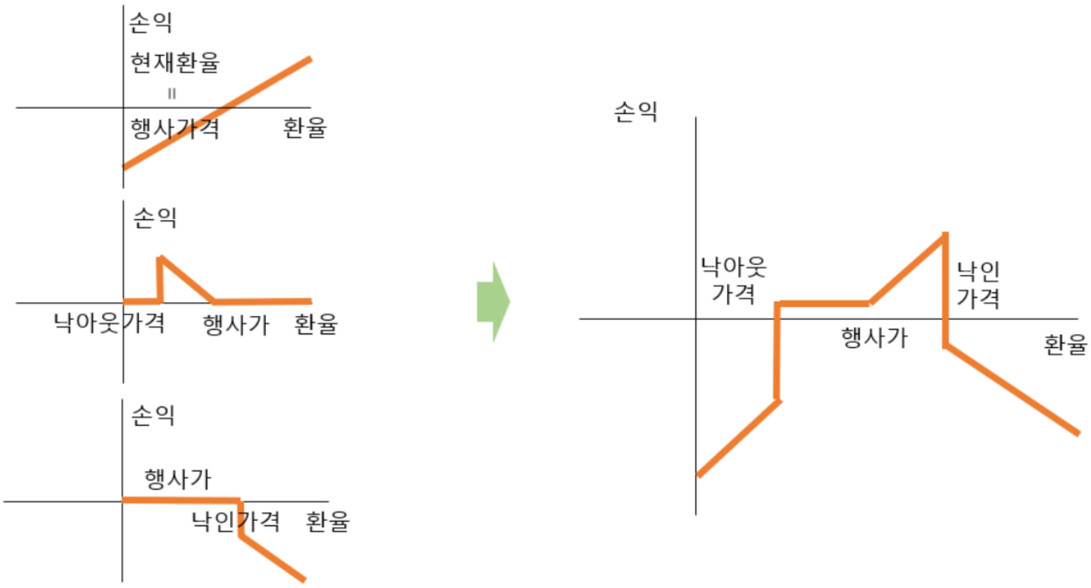
  ⇒ 예를 들어, 기초자산의 가격이 장애물가격에 근접한 경우의 상향실격 콜옵션을 생각해보자.

  > 이때 기초자산의 변동성이 증가함에 따라 기초자산의 가치 또한 장애물가격에 도달할 가능성이 증가한다. 따라서 기초자산의 변동성의 증가는 장애물 옵션의 가격을 하락시키는 원인이 되기도 한다.

- ▼ 키코 (KIKO)

  수출업체의 환헤지 수단

  기업의 기본 손익구조 + 실격풋옵션 매수 + 진입콜옵션 매도$\times$2

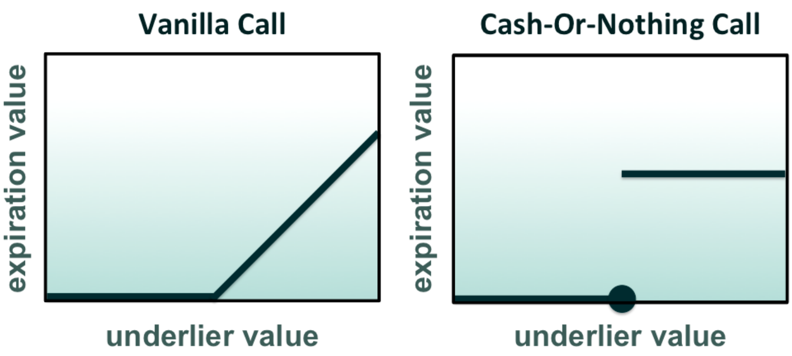


이원옵션(Binary Option)

이득패턴이 불연속적인(discontinuous) 옵션

▼ 현금이원콜옵션(Cash-or-nothing Call Option)

T시점에서 $S_T < K$일 경우 아무런 이득도 지급하지 않고, $S_k \geq K$일 경우 고정금액 Q를 지급한다. 위험중립 가정 하에서 옵션의 만기일에 자산가격이 행사가격보다 높은 확률은 $N(d_2)$이므로, 현금이원콜옵션의 가치는 $Qe^{-rT}N(d_2)$가 된다.

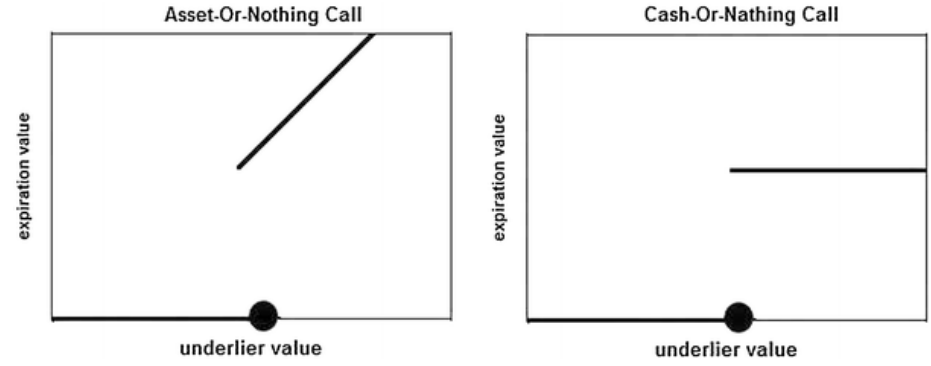


▼ 현금이원풋옵션(Cash-or-nothing Put Option)

T시점에서 $S_T > K$일 경우 아무런 이득도 지급하지 않고, $S_k \leq K$일 경우 주가에 해당하는 금액을 지급한다. 위험중립 가정 하에서 옵션의 만기일에 자산가격이 행사가격보다 높은 확률은 $N(-d_2)$이므로, 현금이원풋옵션의 가치는 $Qe^{-rT}N(-d_2)$가 된다.

표준 유러피안콜옵션 = 자산이원콜옵션에 매입포지션 + 현금이원콜옵션에 매도포지션

표준 유러피안풋옵션 = 자산이원풋옵션에 매입포지션 + 현금이원풋옵션에 매도포지션



▼ 단점

불연속적인 이득패턴을 가지고 있기 때문에 가격 변동을 위해 시장조작을 야기할 가능성이 존재한다.

⇒ 예를 들어, $K = \$20,\ Q = \$100$인 현금이월콜옵션을 고려해보자. 만약 최종 자산가격(S_t)이 $\$19.9$라면 이득이 없지만, $\$20$를 조금이라도 상회하면 이득은 $\$100$만이 되기 되기 때문에 현금이원콜옵션 보유자는 기초자산의 매입주문을 통해 가격을 $\$20$ 이상으로 끌어올리려고 시도할 것이다.

룩백옵션(Lookback Option)

옵션만기 동안의 기초자산의 최대가격 또는 최소가격에 따라 이득이 결정되는 옵션

▼ 변동 룩백콜옵션(Floating Lookback Call)

옵션만기일의 기초자산 최종가격이 옵션 잔존기간 동안의 최소가격을 얼만큼 초과하느냐에 따라 이득이 정해진다. 변동 룩백콜옵션은 옵션 잔존기간 동안 기초자산의 최소가격에 기초자산을 매수할 수 있는 방편을 제공하게 된다.

[가치]

$c_{fl} = S_0 e^{-qT} N(a_1) - S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{min} e^{-rT} [N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_1} N(-a_3)]$

$$a_1 = \frac{ln(S_0/S_{min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$
$$a_3 = \frac{ln(S_0/S_{min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$Y_1 = -\frac{2(r - q - \sigma^2/2)ln(S_0/S_{min})}{\sigma^2}$$

S_{min}은 현재까지 기초자산의 최소가격

▼ 변동 룩백풋옵션(Floating Lookback Put)

옵션 잔존기간 동안의 기초자산의 최대가격이 만기일의 최종가격을 얼만큼 초과하느냐에 따라 이득이 정해진다. 변동 룩백풋옵션은 옵션 잔존기간 동안 기초자산의 최대가격에 자산을 매도할 수 있는 방편을 제공하게 된다.

[가치]

$p_{fl} = S_{max}e^{-rT}[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_2}N(-b_3)] + S_0e^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-b_2) - S_0e^{-qT}N(b_2)$

$$b_1 = \frac{ln(S_{max}/S_0) + (-r+q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$
$$b_3 = \frac{ln(S_{max}/S_0) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$Y_2 = \frac{2(r-q-\sigma^2/2)ln(S_{max}/S_0)}{\sigma^2}$$

S_{max}은 현재까지 기초자산의 최대가격

고정 룩백콜/풋옵션의 경우 보통의 유러피언콜옵션의 가치와 같은 방법으로 계산하지만, 기초자산의 최종가격 대신 옵션 잔존기간 동안의 최대가격을 이용한다는 점에서만 차이가 존재한다.

샤우트옵션(Shout Option)

소유자가 만기 동안 단 한 번 발행자에게 선언(Shout)할 수 있는 유러피안 옵션

옵션만기일에 옵션소유자는 표준 유러피언 옵션의 이득 또는 선언한 시점에서의 내재가치 중 큰 금액을 수령한다.

▼ 샤우트옵션의 가치

$K = \$50$의 콜옵션보유자가 $S_t = \$60$일 때 선언을 했다고 가정하자.

만기일에서 기초자산의 최종가격(S_T)에 따라 최종이득은 결정된다.

최종 이득 $= \begin{cases} \$10 & \text{if } S_T < S_t \\ S_T - K & \text{if } S_T \geq S_t \end{cases}$

다르게 표현하면,

$$max(0,\ S_T - S_t) + (S_t - K)$$

아시안옵션(Asian Option)

옵션 만기기간 중 일부기간 동안의 기초자산의 평균가격에 의해 이득이 결정되는 옵션
$\Rightarrow$ 일정 기간 동안 비슷한 거래가 자주 일어날 때 가격 위험을 제한

평균가격콜옵션(Average Price Call)의 이득: $max(0,\ S_{ave} - K)$

평균가격풋옵션(Average Price Put)의 이득: $max(0,\ K - S_{ave})$

S_{ave}가 대수정규분포라고 가정하면 보통의 옵션 평가에 이용하는 공식과 유사한 방법으로 가치를 평가할 수 있다.

교환옵션(Exchange Option)

한 유형의 자산을 다른 유형의 자산과 교환할 수 있는 권리가 부여된 옵션

Ex) 호주 달러로 일본 엔화를 매입할 수 있는 옵션 ⇒ 미국 투자자 입장에서 한 유형의 외화자산을 다른 유형의 외화자산과 교환하는 옵션

▼ 교환옵션의 가치

$$max(V_T - U_T,\ 0) \\ = max(V_0 e^{-qvT} N(d_1) - U_0 e^{-qUT} N(d_2),\ 0)$$

단,

$$d_1 = \frac{ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T} \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_u\sigma_v}$$

- U와 V의 변동성은 각각 σ_u와 σ_v인 기하 브라운 운동을 따른다고 가정
- U와 V간의 순간 상관계수는 ρ
- U와 V가 제공하는 수익률은 각각 q_U와 q_V
- U와 V의 현재가치는 각각 U_0와 V_0

여러 형태의 스왑

기본형 금리스왑(Plain Vanilla Swap)의 가치평가

선도이자율이 실현될 것이라는 가정하에서 가치평가를 실시한다.

[과정]

1. 미래의 LIBOR 이자율들이 현재의 시장에서 거래되고 있는 투자수단으로부터 계산된 선도이자율들과 같으리라는 가정 아래 스왑의 순현금흐름을 계산한다.
2. 스왑의 순현금흐름의 현재가치를 계산하고, 이를 스왑의 가치로 이용한다.

기본형 스왑의 변형

- 시간의 흐름에 따라 명목원금이 미리 정해진 방식으로 변하는 형태의 스왑 계약
  - ▼ 체증스왑(Step-up Swap)

    명목원금이 시간의 증가함수인 스왑

    특정 프로젝트에 소요되는 자금을 조달하기 위해 변동금리 자금을 체증시키면서 차입하려는 건설회사에게 유용하다.
  - ▼ 상각스왑(Amortizing Swap)

    명목원금이 시간의 감소함수인 스왑

    조기상환이 가능한 고정금리 차입을 한 기업이 이를 변동금리 차입으로 변경하려는 경우에 유용하다.
- 양쪽 거래자에게 적용되는 이자지급의 횟수와 원금이 달라지는 형태의 스왑 계약

⇒기본형 금리스왑을 변형시킨다고 해서 스왑의 가치평가 방법이 변하는 것은 아니다. 즉, 여전히 *'선도이자율이 실현될 것이라는 가정'*하에서 이러한 변형 스왑의 가치를 평가할 수 있다.

지연-LIBOR 스왑(LIBOR-in-arrears swap)

특정 지급일에 지급되는 변동금리가 이자지급 당일에 관찰되는 변동금리에 따라 계산되는 스왑

기본형 금리스왑의 경우 어떠한 이자지급일에 관찰한 변동금리가 다음 지급일에 지급되도록 구성되기 마련이다.

▼ 지연-LIBOR 스왑의 가치

- 스왑의 금리조정일은 $t_i\ (i = 0,\ 1,\ ,2,\ ...,\ n)$이고, $\tau_i = t_{i+1} - t_i$라고 가정한다.
- R_i는 t_i와t_{i+1}시점 간의 LIBOR 이자율이고 F_i는 R_i의 선도이자율이며, σ_i는 이 선도이자율의 변동성이라고 가정한다.
- 가치평가 시에 선도이자율에 대한 볼록성 조정을 해주어야 한다.

$$F_i + \frac{F^2\sigma^2\tau_i t_i}{1+F_i\tau_i}$$

CMS(Constant Maturity Swap)와 CMT(Constant Maturity Treasury Swap)

CMS: 스왑계약에서의 변동금리를 일정한 만기의 스왑계약의 스왑률에 맞추는 금리스왑

일반적으로 특정 이자지급일의 이자율은 이전 지급일에 관찰된 스왑률이되므로, 스왑률 관측과 이자지급일 간에 시차가 존재하게 된다.

▼ t_{i+1}시점에서의 변동금리 이자

$$\tau_i L S_i$$

- $\tau_i = t_{i+1} - t_1$
- L : 원금액
- S_i : t_i시점에서의 스왑률

▼ 실현된 스왑률(S_i)

$$y_i - \frac{1}{2}y_i^2\sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)} - \frac{y_i\tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i}\sigma_{F,i}t_i}{1+F_i\tau_i}$$

볼록성 조정과 시기 조정을 모두 반영하고 있다.

- $\sigma_{y,i}$: 선도스왑률의 변동성 (스왑옵션에 내재된 변동성)
- F_i : t_i와 t_{i+1} 간의 선도이자율
- $\sigma_{F,i}$: 선도이자율의 변동성 (캡레트 가격에 내재된 변동성)
- ρ_i : 선도스왑률과 선도이자율 간의 상관계수 (과거의 자료로부터 추정)
- $G_i(x)$: 수익률 x의 함수로 나타낸 t_i시점에서의 특정 채권 가격

  (이 채권은 이표율 y_i에 따른 이표를 지급하고, 채권의 만기와 이표지급의 횟수는 CMS가 계산된 스왑계약의 내용과 동일하다.)

CMT: 특정 만기 T-bond의 수익률이 스왑계약에서의 변동금리가 되는 점을 제외하고는 CMS와 유사한 구조를 갖는 스왑

- S_i : t_i시점에서의 T-bond 스왑률

디프스왑(Differential Swap)

특정 통화에서 관찰한 변동금리를 다른 통화 원금에 적용하는 금리스왑

▼ 드프스왑의 가치

[사례]

t_i와 t_{i+1}간의 기간 동안에 Y통화로 LIBOR를 관찰하고, 해당 이자율을 X통화 원금에 적용하여t_{i+1}시점에서 이자가 지급되는 경우

[적용되는 LIBOR 이자율]

$$V_i + W_i\rho_i\sigma_{W,i}\sigma_{V,i}t_i$$

- V_i : t_i와 t_{i+1}간의 Y통화 선도이자율
- W_i : 만기가 t_{i+1}인 선도계약의 선도환율 (X통화 1단위와 동일한 가치를 갖는 Y통화의 양)
- $\sigma_{V,i}$: V_i의 변동성

- $\sigma_{W,i}$: W_i의 변동성
- ρ_i : V_i와 W_i간의 상관계수

Y통화 표시 LIBOR이자율을 X통화 원금에 적용하는 경우 콴토 조정을 해주어야 할 필요가 있다.

⇒ 콴토 조정(Quantity Adjusting, 수량 조정): 수익은 기초자산의 가격에 의해 결정되지만 위험에 노출된 정도나 크기는 다른 자산의 가격에 의해서 변동될 때, 선도환율을 설정하는 등의 방법을 통해 노출되는 위험의 크기를 고정시키는 행동

주식스왑(Equity Swap)

한 거래자가 스왑 원금에 지수 수익률을 적용한 금액을 지급하면 거래 상대방은 스왑 원금에 고정 또는 변동금리를 적용한 금액을 지급하기로 약정하는 스왑

펀드매니저들은 주식스왑을 통해 해당 주식을 직접 거래하지 않도고 지수에 노출되는 위험을 감소시킬 수 있게 된다. 지수에 대한 일련의 선도계약을 패키지한 상품이라고 생각하면 된다.

▼ 주식스왑의 가치

$$LE/E_0$$

- L : 원금
- E : 현재 지수
- E_0 : 직전 이자지급일의 지수

옵션이 부가된 스왑

1. 발생스왑(Accrual Swap)

   금리가 일정 범위 안에 있는 경우에만 한 거래 당사자의 현금흐름이 발생하는 스왑

   경우에 따라 이 범위는 스왑의 만기 동안 고정되기도 하고 정기적으로 재조정되기도 한다.

2. 취소가능스왑(Cancelable Swap)

   거래 일방이 미리 정해진 지급일(하루 또는 그 이상)에서 계약을 종료할 수 있는 옵션을 소유하는 기본형 금리스왑

   스왑을 종료한다는 것은 상쇄스왑(Offsetting Swap)을 체결하는 것과 같다.

8주차: 변동성의 추정

변동성

변동성의 추정

▼ u_i는 $i-1$일부터 i일까지의 연속복리 수익률

$$u_i = ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$$

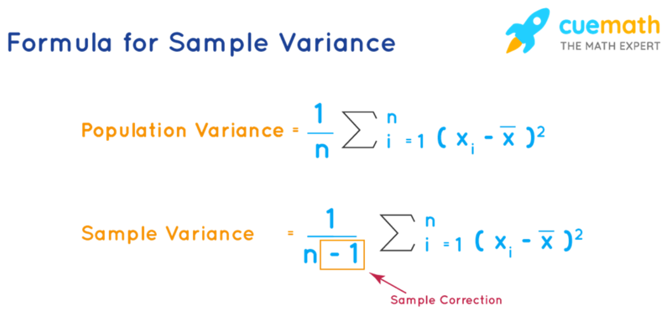
▼ σ_n^2는 m개의 관찰을 이용하여 추정한 일별 분산의 추정치

σ_n은 $n-1$일 말에 추정한 시장변수의 n일에서의 변동성

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\Sigma_{i=1}^m(u_{n-i}-\bar{u})^2$$

$\Rightarrow \quad \bar{u} = \frac{1}{m}\Sigma_{i=1}^m u_{n-i}$

$\Rightarrow \quad$ 연속복리 수익률 u_i의 표본 분산



변형

▼ 가정

1. 로그 수익률 u_i는 시장 변수의 변화율로 대체
   $u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$
2. $\bar{u} = 0$으로 가정
   특정 변수의 1일간 기대 변화는 표준편차와 비교할 때 매우 작기 때문

3. $m-1$은 m으로 대체

변형된 추정치 계산식에 의한 결과는 초기 추정치에서 크게 벗어나지 않는다.

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\Sigma_{i=1}^{m} u_{n-i}^2$$

가중치 부여

정밀한 추정을 위해 각 u_{n-i}들에 다른 가중치를 부여하는 것이 합리적

$$\sigma_n^2 = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2$$

가중치 α_i는 양수($\alpha_i > 0$)이며, α_i들의 합은 1 ($\Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$)

ARCH(m) 모형

자기회귀 조건부 이분산성 (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity)

▼ 시장 변수의 장기 평균 분산 V_L이 존재하고, V_L에도 일정한 가중치 부여

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2$$

<특징>

1. 분산 σ_n^2은 장기 평균 분산과 m개의 관찰치에 기초하여 추정
2. 가중치의 합은 항상 1
   $\gamma + \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$
3. 오래된 관찰치일수록 더 작은 가중치 부여
   $\alpha_i < \alpha_j \quad where \;\; i > j$

$$\sigma_n^2 = \omega + \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2$$

$\Rightarrow \quad \gamma V_L = \omega$로 정의

EWMA 모형

지수가중 이동평균 모형 (Exponentially Weighted Moving Average)

▼ i가 커질수록 가중치 α_i가 지수적으로 감소

$\alpha_{1+i} = \lambda\alpha_i$

$0 < \lambda < 1$

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

$\Rightarrow \quad \lambda\sigma_{n-1}^2$: $n-2$일 말에 추정된 $n-1$일의 변동성 추정치

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)u_{n-1}^2$: $n-1$일의 변수의 변화율

일반화

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\Sigma_{i=1}^m \lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2$$

▼ 변형 (σ_{n-1}^2 대체)

$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$

$$= \lambda\left[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)u_{n-2}^2\right] + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

$$= (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$$

▼ 변형 2 (σ_{n-2}^2 대체)

${\sigma_n}^2 = (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2\sigma_{n-2}^2$

$$= (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2[\lambda\sigma_{n-3}^2 + (1-\lambda)u_{n-3}^2]$$

$$= (1-\lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2u_{n-3}^2) + \lambda^3\sigma_{n-3}^2$$

▼ $\sigma_n^2 = \Sigma_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$의 형태

1. m이 커짐에 따라 $\lambda^m\sigma_{n-m}^2$의 영향력은 작아진다.
2. $\alpha_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$이다.

EWMA 모형의 사용

1. 사용되는 정보의 양이 적다.
   현재의 분산 추정치 + 시장변수의 관찰 자료
2. EWMA는 변동성의 변화를 감안하도록 설계된 모형이다.
   a. 낮은 λ: u_{n-1}^2에 큰 가중치
      $\rightarrow$ 새로운 정보 (시장변수의 일별 변화율)에 민감하게 반응
   b. 높은 λ: 새로운 정보에 느리게 반응
3. 관례적으로 λ는 0.94를 사용

<예제> λ가 0.94이고, $n-1$일 시장변수의 추정 변동성은 일일기준 1%이며, $n-1$일 동안 시장변수는 2% 증가하였다. 변동성 추정치 ${\sigma_n}^2$는 다음과 같다.

$$ {\sigma_n}^2 = 0.94 \times (0.01)^2 + (1-0.94) \times (0.02)^2 $$

$$ \sigma_n = \sqrt{0.000118} \approx 1.086\% $$

- $n-1$일 기준
  1. 추정된 값 $\sigma_{n-1}^2 = 0.0001$
  2. 실현된 값 $u_{n-1}^2 = 0.0002$
- n일 기준
  1. 추정된 값 $\sigma_n^2 = 0.001086$

$\Rightarrow$ 실현된 값 u_{n-1}^2이 기대치 σ_{n-1}^2보다 커서 변동성 추정치가 커진 것!

GARCH(1,1) 모형

일반화된 자기회귀 조건부 이분산성 (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity)

▼ ARCH(m) 모형과 유사하게 장기 평균 분산 V_L 존재

$$ \sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 $$

<특징>

1. 가중치의 합은 항상 1 $\gamma + \alpha + \beta = 1$
2. EWMA 모형은 GARCH(1,1)의 특수한 형태로, $\gamma = 0,\ \alpha = 1 - \lambda,\ \beta = \lambda$

3. $n-1$일의 자료 u_{n-1}^2와 σ_{n-1}^2를 사용했기 때문에 (1,1) 표현

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

▼ ω

- $\gamma V_L = \omega$로 정의
- $V_L = \omega/\gamma = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$
- $1 > \alpha + \beta$

GARCH(p,q) 모형으로 확장

$$\sigma_n^2 = \omega + \Sigma_{i=1}^p \alpha_i u_{n-i}^2 + \Sigma_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2$$

<예제> GARCH(1,1)의 추정이 $\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13u_{n-1}^2 + 0.86\sigma_{n-1}^2$이라고 하자. 이때의 장기 평균 분산 V_L은 0.0002이고, 일별 장기 변동성은 $\sqrt{0.0002} \approx 1.414\%$이다.

<예제2> 위의 예제에서 $n-1$에 일별 변동성 추정치가 1.6%, 시장변수 감소는 1%라고 할 때, ${\sigma_n}^2$는 다음과 같다.

$${\sigma_n}^2 = 0.000002 + 0.13(-0.01)^2 + 0.86(0.016)^2 = 0.00023516$$

$$\sigma_n = \sqrt{0.00023516} \approx 1.533\%$$

일반화

$${\sigma_n}^2 = \omega\Sigma_{i=1}^m \beta^{i-1} + \alpha\Sigma_{i=1}^m \beta^{i-1} u_{n-i}^2 + \beta^m \sigma_{n-m}^2$$

▼ 변형 (σ_{n-1}^2 대체)

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

$$= \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta\sigma_{n-2}^2)$$

$$= \omega + \beta\omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha\beta u_{n-2}^2 + \beta^2\sigma_{n-2}^2$$

▼ 변형 2 (σ^2_{n-2} 대체)

$$\sigma^2_n = \omega + \beta\omega + \alpha u^2_{n-1} + \alpha\beta u^2_{n-2} + \beta^2\sigma^2_{n-2}$$

$$= \omega + \beta\omega + \alpha u^2_{n-1} + \alpha\beta u^2_{n-2} + \beta^2(\omega + \alpha u^2_{n-3} + \beta\sigma^2_{n-3})$$

$$= \omega + \beta\omega + \beta^2\omega + \alpha u^2_{n-1} + \alpha\beta u^2_{n-2} + \alpha\beta^2 u^2_{n-3} + \beta^3\sigma^2_{n-3}$$

▼ 소멸율 β, ***decay rate***

$0 < \beta < 1$이기 때문에, 각 가중치들은 β만큼 지수적으로 감소

$\beta = 0.9$라면, u^2_{n-2}는 u^2_{n-1}의 90%만큼, u^2_{n-3}은 u^2_{n-1}의 81%만큼 중요하다고 해석

GARCH(1,1)의 모수 $\omega,\ \alpha,\ \beta$의 추정

GARCH vs. EWMA

1. $\omega > 0$: GARCH(1,1) 모형이 더 현실적
   EWMA 모형이 설명하지 못하는 분산의 평균회귀성을 반영
2. $\omega = 0$: $\sigma^2_n = +\alpha u^2_{n-1} + \beta\sigma^2_{n-1}$이므로, 그 자체로
   $\alpha = \lambda,\ \ \beta = (1-\lambda)$인 EWMA 모형
3. $\omega < 0$: GARCH(1,1) 모형은 불안정한 상태, EWMA 모형을 통해 추정

최우추정법 Maximum Likelihood Method

❓ 이미 발생한 샘플의 발생 확률을 최대화하는 모수를 선택

<예제> 무작위로 10개의 주식을 추출하여 이들 중 하나만 당일에 가격이 하락한다고 가정하자. 특정일에 무작위로 선택한 주식이 하락할 확률에 대한 최선의 추정치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$D = p(1-p)^9$: 1개의 주식의 가격만이 하락할 확률

$max\ D:\quad dD/dp = 0$

$p = 10\%$

<예제2> 변수가 0의 평균과 v의 분산을 갖는 정규분포를 이루고, 변수의 관측치가 u_i라고 하자. u_i의 가능한 값은 u_i의 확률밀도함수로 구할 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \cdot exp\left(\frac{-{u_i}^2}{2v}\right)$$

m개의 관측치 $u_1, \cdots, u_m$의 가능한 값은 다음과 같다.

$$\Pi_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \cdot exp\left(\frac{-{u_i}^2}{2v}\right)\right]$$

▼ 위의 식을 최대화하는 분산 v는 $\frac{1}{m}\Sigma_{i=1}^{m}{u_i}^2$이다.

1. 계산을 위해 위의 식에 로그를 취한다.
   $\Sigma_{i=1}^{m}\left[-ln(v) - {u_i}^2/v\right] \ = \ -m \cdot ln(v) - \Sigma_{i=1}^{m}{u_i}^2/v \quad \cdots \quad P$
   ~~상수부분은 무시~~
2. $dP/dv = 0$

최우추정법을 이용한 GARCH(1,1) 모형의 모수 추정

예제2와 동일하게 $\Pi_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}} \cdot exp\left(\frac{-{u_i}^2}{2v_i}\right)\right]$을 최대화하는 모수를 찾아야 한다.

$\Rightarrow \quad u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$

$\Rightarrow \quad v_i = \sigma_i$

GARCH(1,1) 모형을 이용한 미래 변동성 예측

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

▼ $\omega = \gamma V_L$로 변환

$${\sigma_n}^2 = \gamma V_L + \alpha {u_{n-1}}^2 + \beta{\sigma_{n-1}}^2$$

▼ $\gamma = 1 - \alpha - \beta$로 변환

$$\sigma_n^2 = (1-\alpha-\beta)V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$$

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha(u_{n-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

▼ 현재 시점 n을 미래시점 $n+t$로 확장

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha(u_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

$n+t$ 시점의 기댓값

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = \mathbb{E}[\alpha(u_{n+t-1}^2 - V_L)] + \mathbb{E}[\beta(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)]$$

▼ u_i^2의 기대분산은 σ_i^2

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = \mathbb{E}[\alpha(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)] + \mathbb{E}[\beta(\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)]$$

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$$

▼ $\mathbb{E}[\sigma_{n+t-i}^2 - V_L]$ 자리에 $\mathbb{E}[\sigma_{n+t-i}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-i-1}^2 - V_L]$ 대입

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$$

$$(\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-2}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\mathbb{E}[\sigma_{n+t-3}^2 - V_L] = \cdots$$

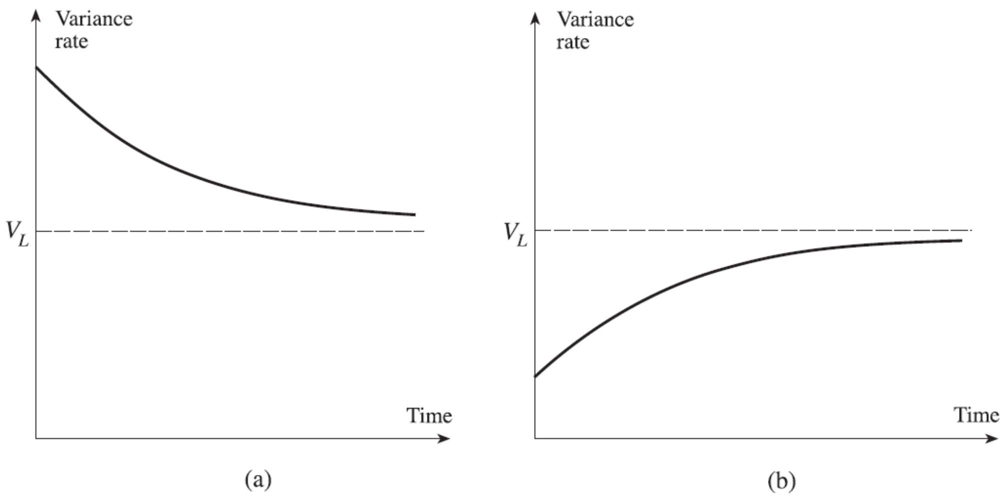
$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha+\beta)^t\mathbb{E}[\sigma_n^2 - V_L] = (\alpha+\beta)^t(\sigma_n^2 - V_L)$$

$$\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha+\beta)^t(\sigma_n^2 - V_L)$$

EWMA 모형에서는 가중치 $\alpha+\beta=1$이므로, 미래 분산의 기대가 현재의 분산과 동일
$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2] = \sigma_n^2$

GARCH(1,1) 모형에서는 $\alpha+\beta<1$이므로, 시간 t가 커질수록 미래 분산의 기대치 $\mathbb{E}[\sigma_{n+t}^2]$가 장기 분산 V_L에 가까워지는 평균회귀현상을 보여준다.

Figure 23.3 Expected path for the variance rate when (a) current variance rate is above long-term variance rate and (b) current variance rate is below long-term variance rate.



$\Rightarrow \quad \alpha+\beta>1$이면 t가 커질수록 미래 분산의 기대치 $\mathbb{E}[\sigma^2_{n+t}]$가 장기 분산 V_L에서 멀어지므로, GARCH(1,1)는 평균이탈현상을 띄게 된다.

변동성의 기간구조

t일 후 미래 분산의 기대치 $\mathbb{E}[\sigma^2_{n+t}]$를 변동성 $V(t)$로 정의

$$V(t) = V_L + e^{-at}[V(0) - V_L]$$

$\Rightarrow \quad a = ln[1/(\alpha+\beta)] = ln(\alpha+\beta)^{-1}$

$\Rightarrow \quad V(t)$는 순간분산의 추정치

▼ $V(t)$를 이용하여 현재와 T시점 사이의 일별 평균 분산 계산

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = V_L + \frac{1-e^{-aT}}{aT}[V(0) - V_L]$$

일별 평균 분산을 연간 변동성 변환

$$\sigma(T)^2 = 252 \cdot \left(V_L + \frac{1-e^{-aT}}{aT}[V(0) - V_L]\right)$$