Ex)

$$\begin{cases} X(t) = W(t) \\ Y(t) = X(t)^2 = V(t, X(t)) \end{cases}$$

$\Rightarrow dX(t) = dW(t)$

$\Rightarrow dY(t) = d(X(t)^2)$

$V(x) = x^2$

※ $\displaystyle\int_0^t x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\times 0$

$\displaystyle = \frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow$ 그러나 위너로 적분하는 Itô integral (이토 적분)은

위 형태와 다를 것!

sol) $dY(t) = d(X(t)^2)$

$*\ dY(t) = dV$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dX(t)dX(t)$$

- 3단원 2페이지 우측 참고 -

$$= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dX(t)dX(t)$$

cf) $V(x) = x^2$ 이라고 했으므로 $\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2$

$$dY(t) = 2X(t)dX(t) + dX(t)dX(t)$$

→ 지난 시간에도 X(t)를 x로 표현한다고 했었음!

$Y(t) \to W(t)^2$ $X(t) \to W(t)$

$$d(W(t)^2) = 2W(t)dW(t) + dW(t)dW(t)$$

$dWdW = dt$

$$\therefore d(W(t)^2) = 2W(t)dW(t) + dt$$

0부터 t까지 적분함 & t가 겹치므로 s로 바꿔서 표현함

$$\therefore \int_0^t d(W(s)^2)\, ds = \int_0^t 2W(s)dW(s) + \int_0^t 1\, ds$$

미분.적분 구간 및 구체적인 전개와 그 기호들은 그냥 그렇구나~ 받아들이자.

$$W(t)^2 - W(0)^2 = 2\int_0^t W(s)dW(s) + t - 0$$

$W(0) = 0$

$$\therefore \int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow \int_0^t x\,dx = \frac{1}{2}t^2 + \boxed{}$$

그러나 위너로 적분하면 무언가 값이 조정되어야 한다.

$\Rightarrow$ 처음 조건을 설정할 때 $X(t) = W(t)$ 라고 한 것은

'x' 를 적분하면 단순히 $\frac{1}{2}x^2$으로 나오지 않는다는 것을 보여주기 위함

$\Rightarrow$ 왜 하필 단순한 1차원의 'x' 형태를 가정했나?

우리 모두가 잘 알고 친숙한 형태이기 때문.

Ex)

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

cf) 1단원 1페이지 - $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{S(t)}dS(t) = \alpha\,dt + \sigma\,dW(t)$$

$$\text{Let } Y(t) = \ln S(t) = U(t, S(t))$$

① … $U(t, x) = \ln x$ 에서도 알 수 있듯이 U는 t로 미분 불가함!

② … $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad \left(\because (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2S(t)^2} dS(t)dS(t)$$

$dS(t)$ 에 $\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ 대입!

$dS(t)dS(t) = ?$

Let $dS(t) = a\,dt + b\,dW(t)$

$$dS(t)dS(t) = a^2 dt\,dt + 2ab\,dt\,dW(t) + b^2 dW(t)dW(t)$$

$$= b^2 dt$$

$$= \alpha dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2S(t)^2} \times b^2 dt$$

$$= \alpha dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2S(t)^2} \times \sigma^2 S(t)^2 dt$$

$$= \alpha dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dY(t) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t)$$

$Y(t) \rightarrow \ln S(t)$, t가 겹치므로 u로 표현

왜 이런 식으로 적분을 하고 표기 하는지는 그냥 받아들이자!

$$\therefore \int_0^t d(\ln S(u))\, du = \int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) du + \int_0^t \sigma\, dW(u)$$

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)$$

$$\ln S(t) = \ln S(0) + (\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)$$

$$= \ln S(0) + \ln e^{(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

cf) $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$

$$= \ln S(0) \cdot e^{(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

$$\therefore \; S(t) = S(0) \cdot e^{(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

※ 위 식에 $\mathbb{E}[\ \ ]$를 취하면 ODE가 된다고 함!

Ex) $\int_0^T W(t)\,dW(t) = \ ?$

※ 3단원 p.2 우측 상단 참고!

$W(t)$로만 이루어져 있음, $\Delta \to d$, $dtdt$ & $dtdW = 0$

$$\Delta f(W(t)) = f(W(t) + \Delta W(t)) - f(W(t))$$

Let $W(t) = W$, $\Delta W(t) = \Delta W$

$$= \frac{\partial f}{\partial W}\Delta W + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}(\Delta W)^2 + \frac{1}{3}\frac{\partial^3 f}{\partial W^3}(\Delta W)^3 + \cdots$$ (= 테일러 전개)

$\Delta W \to dW$, $dWdW = dt$ & $dWdWdW = 0$

$$= f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt$$

THM. Itô-Doeblin formula for an Itô process

$$f(T, X(T)) = f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))dt$$
$$+ \int_0^T f_x(t, X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X(t))\,dX(t)dX(t)$$

앞 페이지 Itô-Doeblin formula for Brownian Motion

⟨Itô formula의 일부분에 Itô process를 대입⟩

※ Itô process : $dX(t) = \Delta t\, dW(t) + \theta(t)\,dt$

$$f(T, X(T)) = f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))\,dt$$
$$+ \int_0^T f_x(t, X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X(t))\,dX(t)\,dX(t)$$

$dX(t)$에 대입 후 정리

$$dX(t)dX(t) = \sim dWdW + \sim dWdt + \sim dWdt + \sim dtdt$$
$$= (\Delta t)^2\,dt$$

$$= f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))\,dt + \int_0^T f_x(t, X(t))\,\Delta t\,dW(t)$$
$$+ \int_0^T f_x(t, X(t))\,\theta(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X(t))\,\Delta^2(t)\,dt$$

$\Downarrow$

미분

$$\therefore\ df = \left(f_t + \theta(t) f_x + \frac{1}{2}\Delta^2(t) f_{xx}\right)dt + \Delta t\, f_x\, dW(t)$$

p.2 우측 하단 식과 같다.

계속 Itô formula 에 대한 얘기 중...

THM. 2-dimensional Itô-Doeblin formula

= XY

Let $f(t, x, y)$: f는 t, x, y로 이루어진 함수이다.

그냥 'f'로 써도 됨.

Let $X(t)$ & $Y(t)$ be Itô process

Let $f(t, X(t), Y(t)) = f$

테일러

Then, $df = f_t\,dt + f_x\,dX(t) + f_y\,dY(t)$

$+ \frac{1}{2}\big[f_{tt}\,dt\,dt + f_{xx}\,dX(t)\,dX(t) + f_{yy}\,dY(t)\,dY(t)$

$+ 2f_{tx}\,dt\,dX(t) + 2f_{ty}\,dt\,dY(t) + 2f_{xy}\,dX(t)\,dY(t)\big]$

$dt\,dX(t) = dt\,(\Delta(t)\,dW(t) + \theta(t)\,dt)$

$= (0 + 0) = 0$

$dt\,dY(t) = dt(\sim dW(t) + \sim dt)$

$$df = f_t\,dt + f_x\,dX(t) + f_y\,dY(t)$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[\cancel{f_{tt}\,dt\,dt} + f_{xx}\,dX(t)\,dX(t) + f_{yy}\,dY(t)\,dY(t)$$
$$+ 2\cancel{f_{tx}\,dt\,dX(t)} + 2\cancel{f_{ty}\,dt\,dY(t)} + 2 f_{xy}\,dX(t)\,dY(t)\Big]$$

=> 3번 이상 미분은 다 $dt\,dt$ & $dt\,dW = 0$ 에 의해 소거됨.
(직접 해보면 알 수 있음)

=> f_t i 앞에서 했었던 것과 달리 t로 미분 가능할 수도 있으니깐!

cf) $d(XY) = Y\,dX + X\,dY + dX\,dY$ 증명

Let $f(t, x, y) = XY$ ⋯ f는 t로도 이루어질 수 있지만,
지금은 t가 정의되어 있지 않음

=> 비교적 쉬워보이는 $X \times Y$ 의 2-dimensional 형태로
Itô-Doeblin formula를 표현해보면 어떨까?

$$XY = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{\partial f}{\partial y}dY$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dXdX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dYdY + \frac{1}{2}\times 2\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dXdY$$

$$= YdX + XdY + dXdY$$

=> 과제3 1번 문제.

Ex) $d(t\,W(t)) = t\,dW(t) + W(t)\,dt + dt\,dW(t)$

$d(XY) = X\,dY + Y\,dX + dXdY$

근데 여기서는 $dXdY \to 0$ $(\because dt\,dW = 0)$

$= t\,dW(t) + W(t)\,dt$

$\Downarrow$

적분

$$tW(t) = \int_0^t s\,dW(s) + \int_0^t W(s)\,ds$$

$$\therefore \int_0^t t \, dW(s) = \int_0^t s \, dW(s) + \int_0^t W(s) \, ds$$

↳ ∵ 상수 (w에 대해 적분하기 때문)

$$\therefore \int_0^t (t-s) \underbrace{dW(s)}_{\text{random}} = \int_0^t W(s) \underbrace{ds}_{\text{non-random}}$$

Ex) $d(XY)$; product rule

1. Product Rule

↳ $d(XY) = YdX + XdY + dXdY$ 증명.

Hint. 2-dimensional Itô-Doeblin formula.

2. $d(tW(t))$ 를 이용하여

$\int_0^t (t-s)\,dW(s) = \int_0^t W(s)\,ds$ 임을 보이고

$\int_0^t W(s)\,ds$ 의 평균과 분산을 구하시오.

Hint. Martingale & Itô Isometry

$$\therefore \int_0^t (t-s)\,dW(s) = \int_0^t W(s)\,ds$$

Let $I(t) = \int_0^t (t-s)\,dW(s)$

$$\therefore \mathbb{E}[I(t)] = \mathbb{E}[I(0)] = 0$$

$$\begin{aligned}
Var[I(t)] &= \mathbb{E}[I^2(t)] - \mathbb{E}[I(t)]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (t-s)\,dW(s)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t (t-s)^2\,ds\right] \\
&= \int_0^t \mathbb{E}[(t-s)^2]\,ds \\
&= \int_0^t (t-s)^2\,ds \\
&= \left[-\frac{1}{3}(t-s)^3\right]_0^t
\end{aligned}$$

dw -> du

cf) $(t-s)^2 = s^2 - 2ts + t^2$

적분하면 $\frac{1}{3}s^3 - ts^2 + t^2 s + C$ (상수)

$\frac{1}{3}(t^3-0) - t(t^2-0) + t^2(t-0) + C - C = \frac{1}{3}t^3$

$$= \frac{1}{3}t^3$$