6주차: 옵션 가격

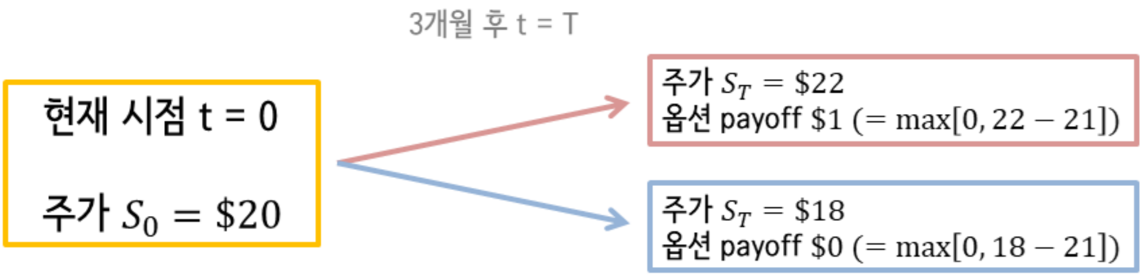
1. 이항모형

이항모형

1기간 이항 모형

[예시] 3개월 후에 주식을 $21에 매입할 수 있는 유러피언 콜옵션

- 무차익거래 가정



현재의 주가 $S_0 = 20$ 달러, 3개월 후의 주가 $S_T = 22$ 또는 18 달러일 때, 무위험포트폴리오의 구성이 가능하다!

- 콜옵션 1개를 매도하고 Δ개의 주식을 매입하여 무위험 포트폴리오 구성

  $22\Delta - 1 = 18\Delta \qquad \therefore \Delta = 0.25$

- 포트폴리오: 콜옵션 1계약 매도 + 주식 0.25주 매입
  1. 주가가 상승했을 때의 포트폴리오 가치: $4.5 $(= 22 \times 0.25 - 1)$
  2. 주가가 하락했을 때의 포트폴리오 가치: $4.5 $(= 18 \times 0.25 - 0)$

- 무차익거래에서 무위험포트폴리오의 수익률은 무위험이자율 r_f (연속복리기준 4% 가정)

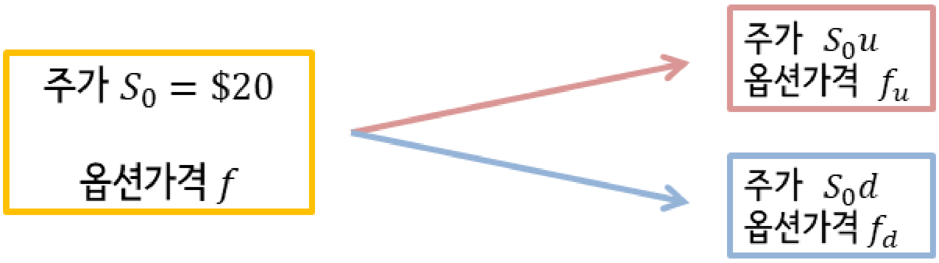
  포트폴리오의 현재가치 $4.4552 $(= 4.5e^{-0.04 \times 3/12})$

- 현재 시점에서의 포트폴리오 가치 포트폴리오를 구성하는 비용

  \$5-f $(= 20 \times 0.25 - f)$ f:옵션의 가치

  5-f = 4.4552 $\therefore f = 0.5448$

일반화



▼ **notation**

주가의 상승 $u(> 1)$ 증가율 $u - 1$

주가의 하락 $d(< 1)$ 감소율 $1 - d$

- 콜옵션 하나 당 Δ개의 주식을 매입한다고 할 때, 예시와 동일한 방법으로 포트폴리오가치 계산

  1. 주가 상승 시 포트폴리오: $S_0 u\Delta - f_u$
  2. 주가 상승 시 포트폴리오: $S_0 d\Delta - f_d$

- 무위험 포트폴리오를 구성하기 위한 델타 계산

  $S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d$ $\therefore \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_o u - S_0 d}$

- 무위험이자율로 할인하여 포트폴리오의 현재가치 계산

  $(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$ 또는 $(S_0 d\Delta - f_d)e^{-rT}$

- 포트폴리오 구성 비용 $S_0\Delta - f$

  $S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$ $\therefore f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$

- 델타 대입

$$f = S_0 \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

$$\therefore f = \frac{f_u(1 - de^{-rT}) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d}$$

- 단순화

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$$

▼ 예시와 비교

$u = 1.1 \quad (S_0 u = 20 \times 1.1 = 22)$

$d = 0.9 \quad (S_0 d = 20 \times 0.9 = 18)$

$$p = \frac{e^{0.04 \times 3/12} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.5503$$

$$f = e^{-0.04 \times 3/12}[0.5503 \times 1 + (1 - 0.5503) \times 0] = 0.545$$

위험중립 가치평가

파생상품의 가치평가에서 투자자들은 위험중립이라고 가정

1. 주식의 기대수익률은 무위험이자율이다.
2. 파생상품의 기대이득에 사용되는 할인율은 무위험이자율이다.

위험중립세계에서, 옵션의 현재가치 $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$에서 p는 주가가 상승할 확률로 해석

($0 < p < 1$이므로, $u > e^{rT}$)

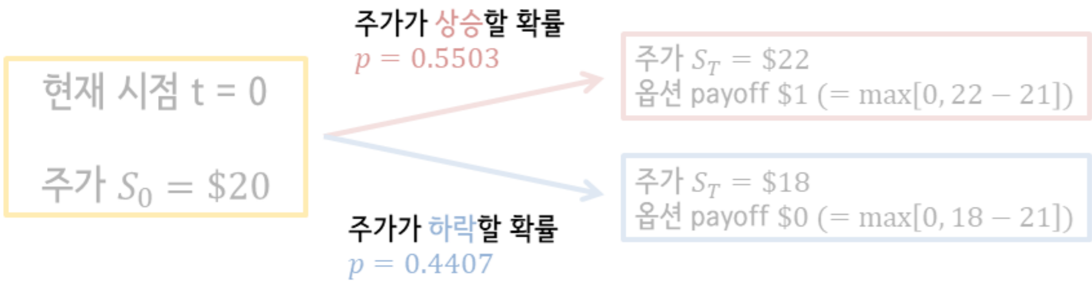
- 옵션의 기대이익***expected payoff*** $pf_u + (1-p)f_d$

해석 옵션의 현재가치 f는 무위험이자율 r을 이용하여 ***expected payoff***를 현재가치로 할인한 값 2번 가정 만족

- 기대 주가 $pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{rT}$

  해석 주식의 수익률은 무위험이자율 r 1번 가정 만족

▼ 예시 해석



주가가 $22로 상승하고, 옵션의 ***payoff***가 $1가 될 확률이 0.5503

주가가 $18로 하락하고, 옵션의 ***payoff***가 $0가 될 확률이 0.4497

콜옵션의 기대가치는 $0.5503 \times 1 + 0.4497 \times 0 = 0.5503$

현재가치로 할인 $0.5503e^{-0.004 \times 3/12} = 0.5448 = f$

무차익거래 가정에서 계산한 옵션의 가치와 위험중립 가정에서 계산한 옵션의 가치는 같다.

2기간 이항 모형

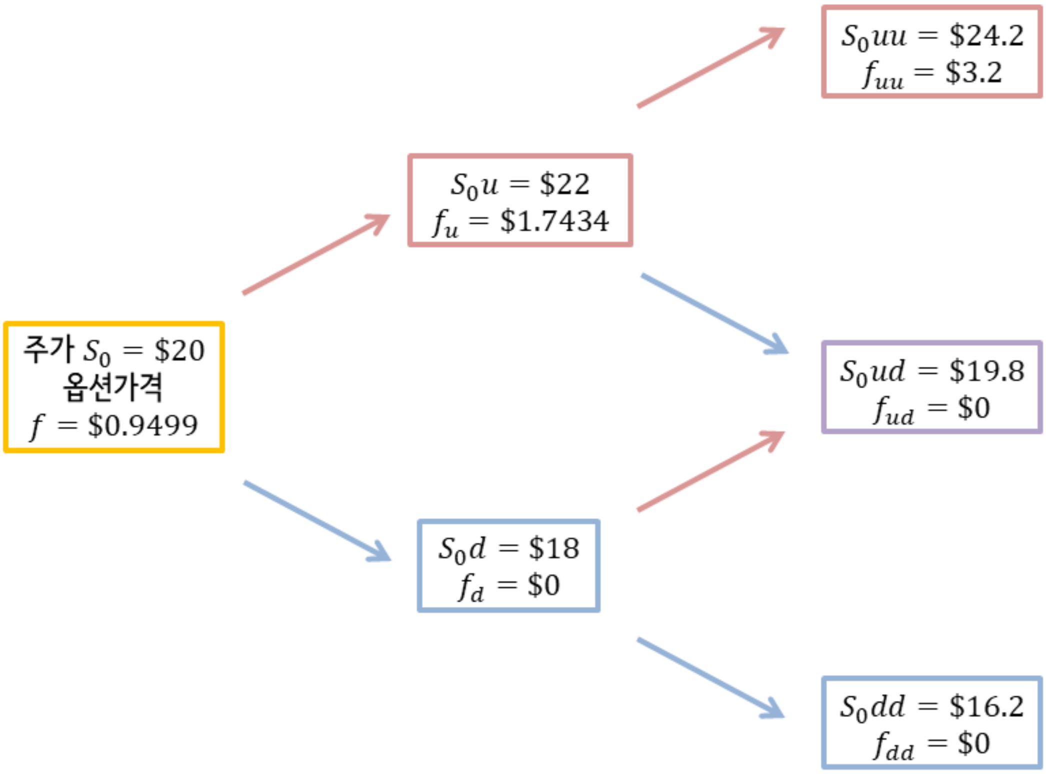
▼ 위의 예시를 2기간 모형으로 확장

$u = 1.1 \quad d = 0.9$

$T = 0.5$(6개월)

무위험이자율 r=4%

옵션의 행사가 $21



6개월 뒤 $t = 0.5 = T$

- $f_{uu} = 3.2 = max[0, (24.2 - 21)]$
- $f_{ud} = 0 = max[0, (19.8 - 21)]$
- $f_{dd} = 0 = max[0, (16.2 - 21)]$

3개월 뒤 $t = 0.25$

- $f_u = 1.7434 = e^{-0.04 \times 3/12}(0.5503 \times 3.2 + 0.4497 \times 0)$

  f_{uu}와 f_{ud}를 이용하여 구한 기댓값을 3개월 전 시점으로 할인
- $f_d = 0 = e^{-0.04 \times 3/12}(0.5503 \times 0 + 0.4497 \times 0)$

현재 $t = 0$

- $f = 0.9499 = e^{-0.04 \times 3/12}(0.5503 \times 1.7434 + 0.4497 \times 0)$

일반화

2기간 모형에서의 3개월은 만기 시점T이 아닌, 하나의 기간t

할인요소 e^{-rT}를 하나의 기간인 Δt로 다시 표현 $e^{-r\Delta t}$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

▼ 확장

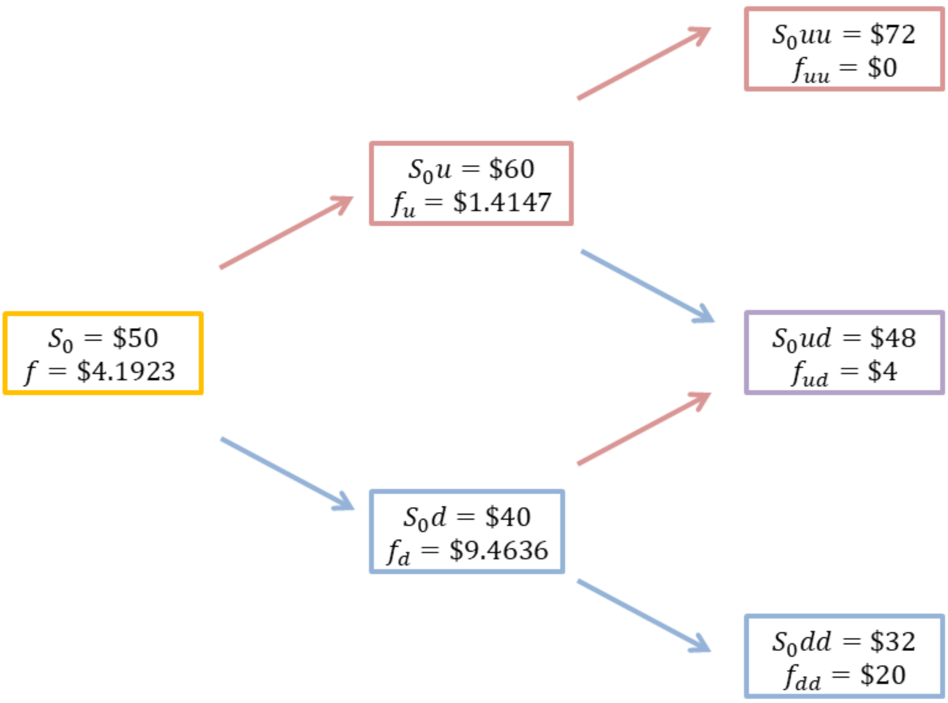
$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$

$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$

풋옵션 이용

대부분의 과정은 동일하지만, 옵션의 가치를 $max[0, (S-K)]$가 아닌 $max[0, (K-S)]$로 계산

▼ [예시] $u = 1.2$, $d = 0.8$, $T = 2$, $\Delta t = 1$, $r = 0.05$, $K = 52$, $S_0 = 50$



$p = \frac{e^{0.05\times1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$

2년 뒤 $t = 2 = T$

- $f_{uu} = 0 = max[0, (52 - 72)]$
- $f_{ud} = 4 = max[0, (52 - 48)]$
- $f_{dd} = 20 = max[0, (52 - 32)]$

1년 뒤 $t = 1$

- $f_u = 1.4147 = e^{-0.05 \times 1}(0.6282 \times 0 + 0.3718 \times 4)$
- $f_d = 9.4636 = e^{-0.05 \times 1}(0.6282 \times 4 + 0.3718 \times 20)$

현재 $t = 0$

- $f = 4.1923 = e^{-0.05 \times 1}(0.6282 \times 1.4147 + 0.3718 \times 9.4636)$

u와 d의 선택

주식 수익률의 분산은 $\sigma^2 \Delta t$가 되도록 정의

수익률의 분산 $E(\text{수익률}^2) - [E(\text{수익률})]^2$

$[p(u-1)^2 + (1-p)(1-d)^2] - [p(u-1) + (1-p)(1-d)]^2 = \sigma^2 \Delta t$

$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$

2. 블랙-숄즈-머튼 모형

위너과정과 이토정리

📈 주가는 불확실성을 지닌 확률과정***Stochastic Process***을 따른다!

마코브과정

미래가치는 과거가 아닌 현재의 가치에 의해서만 영향을 받는다.

주가는 마코브과정을 따르고 있다고 가정

- ▼ 약형 효율적 시장가설

  현재 주가가 과거의 모든 정보를 반영하고 있다는 가설

  - ▼ Efficient Market Hypothesis

    1. 약형 효율적 시장 ***Weak Form:*** 과거의 정보가 가격에 반영 기술적분석x
    2. 준강형 효율적 시장 ***Semi-Strong Form:*** 과거의 정보+현재의 공개된 정보 펀더멘털분석x
    3. 강형 효율적 시장 ***Strong Form:*** 과거의 정보+현재의 공개/미공개 정보 내부정보x

마코브과정에서 연속적인 변화의 분산은 ***additive***.

- ▼ 시간에 따른 변화는 두 개의 정규분포의 합으로 나타낼 수 있다.

  1년 동안의 주가의 가치변화는 정규분포의 확률분포 $\phi(0,1)$를 따른다고 가정

  각각의 확률분포들은 독립

  - 2년간의 주가 변화 = 1년간 가치변화의 정규분포의 합 $\phi(0,2)$

    분산이 2이기 때문에 표준편차는 $\phi = \sqrt{2}$
  - 반년간의 주가 변화 = 0.5년 또는 6개월간 가치변화의 정규분포의 합 $\phi(0,0.5)$

    분산이 0.5이기 때문에 표준편차는 $\sigma = \sqrt{0.5}$
  - 3개월간의 주가 변화 = 0.25년 또는 3개월간 가치변화의 정규분포의 합 $\phi(0,0.25)$

    분산이 0.5이기 때문에 표준편차는 $\sigma = \sqrt{0.25}$

  아주 짧은 기간인 Δt간의 확률분포는 $\phi(0,\Delta t)$

- ▼ 표준편차는 단순 합산되지 않는다.

  2년간 변화의 확률분포 $\phi(0,2) \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{2} \approx 1.4142$

  1년간 변화의 확률분포 $\phi(0,1) \Rightarrow \sigma_1 = 1$

  0.5년간 변화의 확률분포 $\phi(0,0.5) \Rightarrow \sigma_{0.5} = \sqrt{0.5} \approx 0.7071$

  0.25년간 변화의 확률분포 $\phi(0,0.25) \Rightarrow \sigma_{0.25} = 0.5$

$$\sigma_2 \neq 2 \times \sigma_1, \quad \sigma_1 \neq 2 \times \sigma_{0.5}, \quad \sigma_{0.5} \neq 2 \times \sigma_{0.25}$$

위너과정

변수의 연간 변화가 정규분포 $\phi(0,1)$인 확률과정을 위너과정이라 한다.

- 변수 z가 위너과정을 따르기 위한 조건
  1. 짧은 Δt기간 동안의 z의 변화 Δz는 다음과 같다.
     $(\varepsilon 는 \phi(0,1) 에서추출된난수)$

     $$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

     ε의 분포는 $\phi(0,1)$, Δt의 분포는 $\phi(0,\Delta t)$이므로, Δz의 분포는 $\phi(0,\Delta t)$를 따르게 된다.
  2. 서로 다른 Δt기간 동안의 Δz는 독립적이다.

     즉, 변수 z는 마코브과정을 따른다.

- 긴 T기간 동안의 z의 변화 $(T = \Delta t \times N)$

  $$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} z(t_i) - z(t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

  1. $[z(T) - z(0)]$의 평균: 0
  2. $[z(T) - z(0)]$의 분산: $T(= N\Delta t)$
  3. $[z(T) - z(0)]$의 표준편차: $\sqrt{T}$

- dt

  $\Delta t \to 0$이 되는 극한

  ▼ Δt가 작아질 수록 z의 표준편차 $\sqrt{\Delta t}$는Δt보다 커진다.

  $\sqrt{1} = 1,\ \sqrt{0.5} \approx 0.7071,\ \sqrt{0.25} = 0.5$

Figure 14.1 How a Wiener process is obtained when $\Delta t \to 0$ in equation (14.1).

- 일반화

▼ $\phi(0,1)$에서 기준시간당 평균(μ) 0을 평균율 또는 ***drift rate***, 분산(v) 1을 분산 또는 ***variance rate***

dz가 0의 ***drift rate***를 가지고 있기 때문에 미래시점의 기댓값이 현재와 동일 할 것

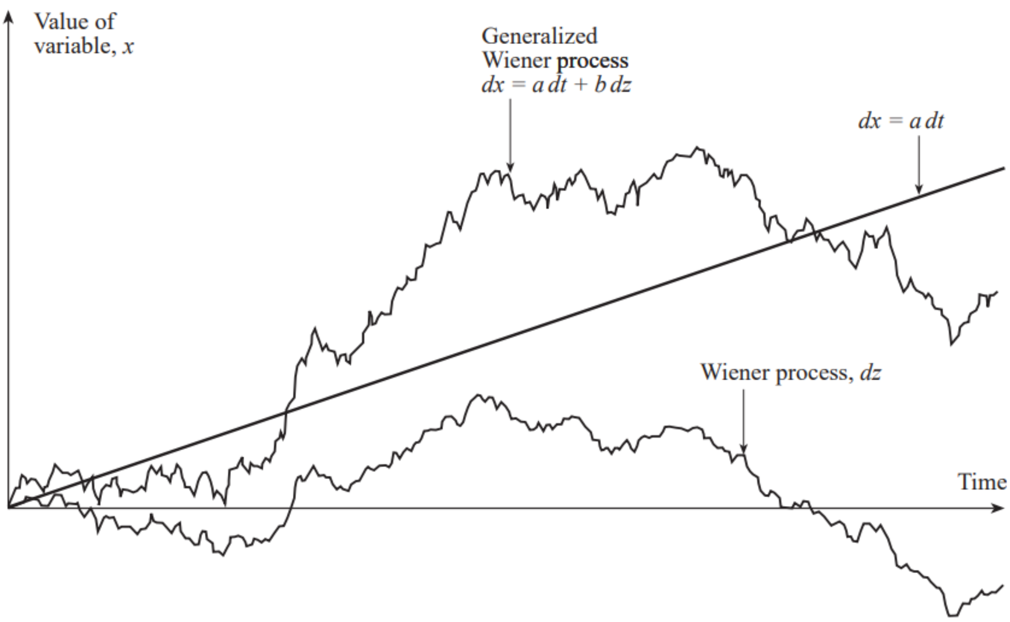
variance rate가 1이기 때문에 T 기간 동안 변화의 분산이 T와 동일

변수 x에 대한 일반화된 위너과정

$$dx = a\,dt + b\,dz$$

1. x변화의 평균: aT
2. x변화의 표준편차: $b\sqrt{T}$
3. x변화의 분산: b^2T

Figure 14.2 Generalized Wiener process with $a = 0.3$ and $b = 1.5$.



▼ 이산과정

$$\Delta x = a\,\Delta t + b\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

1. Δx의 평균: $a\ \Delta t$
2. Δx의 표준편차: $b\ \sqrt{\Delta t}$
3. Δx의 분산: $b^2\ \Delta t$

이토과정

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz$$

t와 Δt 사이의 짧은 기간 동안 x는 Δx만큼 변한다고 하면 위의 식을 다시 정리할 수 있다.

$$\Delta x = a(x,t)\,\Delta t + b(x,t)\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

주가에 적용

- 일반화된 위너과정은 주가 분석에 적합하지 않을 수 있다.

  투자자가 요구하는 주식의 기대수익률은 주가와 독립

  연간 14%의 수익률을 요구하는 투자자는 주가가 얼마든 14%의 수익률을 기대할 것이다.
- 기대평균율이 일정하다는 가정 대신에 기대수익률$[= \text{기대평균율}/\text{주가}]$이 일정하다고 가정

  변화율dS이 아닌 수익률$\frac{dS}{S}$의 관점에 주목

1. 연속 모형(기하브라운 운동 ***Geometric Brownian Motion***)

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$
$$dS = \mu S\ dt + \sigma S\ dz$$

위험중립세계에서 주식의 기대수익률 μ는 무위험이자율 r과 동일하다.

2. 이산 모형

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta S = \mu S \; \Delta t + \sigma S \; \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$\frac{\Delta S}{S}$는 짧은 기간 Δt 동안의 주식수익률에 대한 이산적 근사치

$\mu \Delta t$는 기대수익률, $\sigma^2 \Delta t$는 분산

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

이토정리

$$dx = a(x,t) \; dt + b(x,t) \; dz$$

1. dz는 위너과정
2. a와 b는 x와 t에 대한 함수이며, x는 a의 평균율과 b^2의 분산을 갖는다.

$Itô’s Lemma$

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x} \; a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \; \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \; b^2) \; dt + \frac{\partial G}{\partial x} b \; dz$$

1. dz는 위너과정, G는 이토과정
2. dG는 $\frac{\partial G}{\partial x} \; a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \; \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \; b^2$의 평균율과 $\frac{\partial G}{\partial x}^2 \; b^2$의 분산을 갖는다.

주가에 적용

$$dS = \mu S \; dt + \sigma S \; dz$$
$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S} \; \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \; \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \; \sigma^2 S^2) \; dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \; dz$$

대수정규분포 *Lognormal Distribution*

어떤 변수의 자연대수(***natural logarithm***)가 정규분포를 이루면, 그 변수는 대수정규분포를 따른다고 한다.

$$From \quad G = ln\, S,$$
$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad and \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

주가에 적용한 이토정리 dG 를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$dG = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, dt + \sigma\, dz$$
$$dG\ (= lnS_t - lnS_{t-1})$$

dG는 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$의 평균율과 σ^2의 분산을 갖는다.

긴 기간 T 동안의 G의 변화

1. $ln\, S_T - ln\, S_0$의 평균: $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, T$

   $ln\, S_T$의 평균: $ln\, S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, T$
2. $ln\, S_T - ln\, S_0$의 분산: $\sigma^2\, T$

   $ln\, S_T$의 분산: $\sigma^2\, T$

$$ln\, S_T \sim \phi[ln\, S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, T, \quad \sigma^2\, T]$$

T시점의 주가 S_T의 자연대수 $ln\, S_T$가 정규분포를 따르므로, T시점의 주가는 대수정규분포를 따른다.

BSM 도출

주가의 속성

1. Δt기간 동안의 기대수익률은 $\mu \Delta t$이고, 분산은 $\sigma^2 \Delta t$이다.

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

2. 주가 S_T는 대수정규분포를 따른다.

$$(ln\,S_T - ln\,S_0 =)\;ln\,\frac{S_T}{S_0} \sim \phi[ln\,(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\,T,\;\; \sigma^2\,T]$$
$$or, \quad ln\,S_T \sim \phi[ln\,S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\,T,\;\; \sigma^2\,T]$$

2. 주가 S_T는 아래와 같은 속성을 지닌다.

   기댓값 $E(S_T)$: $S_0e^{\mu T}$

   분산 $var(S_T)$: ${S_0}^2e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T}\,-1)$

2. x를 현재와 T 사이에서 실현하는 연속복리 수익률이라하면, 다음과 같다.

$$x \sim \phi(\mu - \frac{\sigma^2}{2},\; \frac{\sigma^2}{T}), \qquad where\;x = \frac{1}{T}ln\frac{S_T}{S_0}$$

블랙-숄즈-머튼 미분방정식의 개념

BSM 미분방정식의 속성은 이항모형과 유사

1. 무차익거래
2. 파생상품+주식으로 포트폴리오 구성
3. 2.로 이루어진 무위험 포트폴리오의 수익률은 무위험이자율 r

주요 가정

1. 주가는 위와 같은 기댓값과 분산을 지닌다.
2. 증권의 공매도***short selling***가 허용되며 공매대금은 전액 사용될 수 있다.
3. 거래비용과 세금이 없고, 모든 증권은 완벽하게 분할될 수 있다.
4. 파생상품의 만기까지 배당은 받지 않는다.
5. 무차익거래
6. 증권의 거래는 연속적으로 이루어진다.
7. 무위험이자율 r은 모든 만기에 대하여 일정하다.

블랙-숄즈-머튼 미분방정식의 유도

t시점 기준의 파생상품 가격 고려 & 만기일까지 남은 시간은 $T-t$

f가 S에 기초하는 파생상품의 가격이라고 할 때, S와 t의 함수로 표현된 f는 아래와 같다.

$$dS = \mu S\ dt + \sigma S\ dz$$
$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\ \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\ \sigma^2 S^2)\ dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\ dz$$

이산과정 ***discrete***

$$\Delta S = \mu S\ \Delta t + \sigma S\ \Delta z$$
$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial S}\ \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\ \sigma^2 S^2)\ \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\ \Delta z$$

▼ f와 S는 동일한 위너과정을 따르므로, 포트폴리오를 구성하는 과정에서 위너과정은 제거될 수 있다.

파생상품: -1

주식: $+\frac{\partial f}{\partial S}$

포트폴리오 $\Pi = -f\ +\ \frac{\partial f}{\partial S}\ S$가 있다고 할 때,

$$\Delta \Pi = -\Delta f\ +\ \frac{\partial f}{\partial S}\ \Delta S\ =\ (-\frac{\partial f}{\partial t}\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t$$

포트폴리오 Π는 Δt 동안 무위험상태이다. 따라서 포트폴리오의 수익률은 r이다.

$$\Delta \Pi\ =\ r\Pi\ \Delta t$$
$$(-\frac{\partial f}{\partial t}\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t = r(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S)\Delta t$$
$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

방정식 풀이에 있어 여러 파생상품들의 경계조건이 사용될 수 있다.

- 유러피언 콜옵션의 경계조건: $f = max(S-K,\ 0) \quad when\ \ t = T$
- 유러피언 풋옵션의 경계조건: $f = max(K-S,\ 0) \quad when\ \ t = T$

위험중립 세계에서의 가치평가 절차

1. 기초자산의 기대수익률이 r이라고 가정한다. (이 경우, $\mu = r$)
2. 파생상품의 기대이득을 계산한다.
3. 2.를 무위험이자율 r로 할인하여 현재가치를 구한다.

Black-Scholes-Merton Formula

콜옵션 기준

$$c = S_0\ N(d_1) - Ke^{-rT}\ N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- $N(d_2)$: 옵션이 행사될 확률
- $S_0 e^{rT}\ \frac{N(d_1)}{N(d_2)}$: 옵션이 행사되었을 때 무위험세계에서의 기대주가

  BSM 공식에서 $c = e^{-rT}\ N(d_2)[S_0 e^{rT}\ \frac{N(d_1)}{N(d_2)} - K]$