1. 기초수학

1. 용어 정의

1.1. 자연상수 e

자연상수는 다음 극한으로 표현되는 값이며 '1회 연속 성장'과 관련된 개념이라고 할 수 있다.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

예를 들어, 1원이 100% 이자율로 1년 지날 경우 1원이 더해져 2원이 된다.

$$2 = (1 + \frac{100}{100})^1$$

만약 여기서 상황을 바꾸어 6개월마다 50%의 이자율로 복리를 적용한다고 하면, 1년 뒤에는 2.25원이 된다.

$$2.25 = 1(1 + \frac{50}{100})^2$$

이제 4개월마다 3번에 나누어서 33.33%의 이자율로 복리를 적용한다고 하면, 1년 뒤에는 약 2.37원이 된다.

$$2.3703 = 1(1 + \frac{33.33}{100})^3$$

이렇게 기간을 쪼개면 쪼갤수록 금액이 커지게 되는데, 그렇다면 주어진 기간동안 무한히 많은 횟수 성장한다면 어떤 값을 갖게 될까? 지금까지 한 과정을 일반화하여 원금 1원에 100% 이자율이 1년동안 n번나누어 복리로 적용된다고 할 경우 갖는 값은 다음과 같다.

$$1(1 + \frac{1}{n})^n$$

여기서 성장횟수 n을 무한히 늘릴 경우 다음과 같이 특정 값에 수렴하게 되는데, 이것이 자연상수 e로 정의되는 값으로, 약 2.7182의 값을 가지는 값이다. 따라서 자연 상수를 '1회 연속 성장'과 관련된 개념으로 생각할 수 있다.

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$
$$e = \lim_{n \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}}$$

자연상수는 이렇게 이자율 뿐만 아니라 변화하는 다양한 자연 현상을 설명할 수 있기에 자연상수라는 이름을 갖고 있다. 자연상수 e는 그것이 갖는 특별한 속성들 덕분에 계산의 편리성에 도움을 주는데, 이번 스터디에서 차차 알아보도록 하자.

1.2. 자연 로그

자연상수 e를 밑으로 하는 $\log_e x$를 자연로그라고 하고, $\ln x$ 라고 표기한다.

$$\ln e = 1$$
$$\ln a = log_e a = \frac{1}{log_a e}$$

2. 미분법

2.1. 지수함수의 미분

$$1.\ (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$
$$2.\ (e^x)' = e^x$$
$$3.\ (a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$$
$$4.\ (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

1. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ 증명

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ : 도함수의 정의}$$

$$f(x) = a^x$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$
$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$
$$(a^h - 1 = t \to a^h = t + 1, h = \log_a(t+1)$$
$$= a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)}$$
$$= a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \log_a(1+t)}$$
$$= a^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= a^x \cdot \frac{1}{log_a e}$$
$$= a^x \cdot \ln a$$

위의 1번의 증명 이해를 통해 4가지 지수함수의 미분 결과도 도출할 수 있다. 1번 증명에서 $a = e$로 바꾸어 생각하면 2번을 증명할 수 있고, $x = f(x)$로 놓고, 뒤에서 배울 chain rule이 적용되었다고 생각하면 3번을 증명할 수 있고, 3번에서 $a = e$라고 생각하면 4번을 증명할 수 있다.

2.2. 로그함수의 미분

$$1.\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$2. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$
$$3.\ (\log_a f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x)$$

2.$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ 증명

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \log_a \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a e \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log_e a} \\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}
\end{aligned}
$$

위의 2번 증명 이해를 통해 제시된 3가지의 로그함수 미분을 이해할 수 있다. 밑이 a 가 아닌 e라고 생각하면 1번을 증명할 수 있고, $x=f(x)$라고 생각하면 뒤에서 배울 chain rule을 이용하여 3번을 증명할 수 있다.

2.3. 삼각함수 미분

$$
\begin{gathered}
1.(\sin x)' = \cos x \\
2.(\cos x)' = -\sin x
\end{gathered}
$$

2.4. Chain Rule

1. 합성함수 미분

$$
\begin{aligned}
&y = f(g(x)) \\
&y' = f'(g(x))\cdot g'(x) \\
&g(x)=t \rightarrow g'(x)=\frac{dt}{dx},\ f'(g(x))=f'(t)=\frac{dy}{dt} \\
&\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}
\end{aligned}
$$

$$
y \rightarrow t \rightarrow x
$$

2. 다변수함수 미분

다변수 함수는 말 그대로 둘 이상의 변수를 갖는 함수이다. 다변수 함수의 미분에서는 지금까지 사용하던 d라는 미분 기호와 동시에 ∂라는 기호가 등장한다. d는 전미분(Total Differential)의 기호이고, ∂는 편미분(Partial Differential)의 기호로, 말 그대로 d는 전체적으로 미분하는 것, ∂는 특정 변수에 대해서만 부분적으로 미분하는 것을 의미한다. 예를 들어 $f(x,y)=z$라는 식에서 $\frac{\partial z}{\partial x}$는 y에 대한 식을 모두 상수취급하고, x에 대해서만 미분을 한다는 의미이다.

$$
(1)\ z=f(x,y),\ x=g(t),\ y=h(t)
$$

$$
\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "d"] & \\
z \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & & t \\
& y \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$(2)\ z = f(x, y),\ x = g(s, t),\ y = h(s, t)$$

$$
\begin{tikzcd}
& & s \\
& x \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "\partial"'] & t \\
z \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & & \\
& y \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & s \\
& & t
\end{tikzcd}
$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

ex 1) $z = x^2 + xy + y^2,\ x = t + s,\ y = t - s$

$\dfrac{\partial z}{\partial s} = ?,\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = ?$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \\
&= (2x + y) \cdot 1 + (2y + x) \cdot (-1) \\
&= x - y \\
&= (t + s) - (t - s) \\
&= 2s \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\
&= (2x + y) \cdot 1 + (2y + x) \cdot 1 \\
&= 3x + 3y \\
&= 3(t + s) + 3(t - s) \\
&= 6t
\end{aligned}
$$

ex 2) $z = f(x, y), x = r^2 + s^2, y = 3rs$ 일때

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = A \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + C \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + D \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + E \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot(2r)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(3s)\\
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\text{이므로,}\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(2r)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(3s)\right\}\\
&* \text{곱미분 }\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2r+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2+\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 3s+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot 0\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot 2r+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot 3s\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot 2r+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot 3s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{최종적으로정리하면,}\\
&= \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot 2r+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot 3s\right\}\cdot 2r+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2+\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot 2r+\frac{\partial z}{\partial y_1^2}\cdot 3s\right\}\cdot 3s\\
&= 2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+4r^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\text{rs}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x dy}+9s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore A=2 \quad B=0 \quad C=4r^2 \quad D=12rs \quad E=9s^2$$

3. Taylor Expansion

3.1. Maclaurin Series

무한번 미분가능한 함수 $f(x)$를 다음과 같은 다항식으로 근사할 수 있다고 가정하고, 각 항의 계수 C를 구해보자.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\cdots \quad \rightarrow f(0)=C_0\\
&f'(x) = C_1+2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4+\cdot\cdot \rightarrow \quad f'(0)=C_1\\
&f''(x) = 2C_2+3\cdot 2\cdot C_3x+4\cdot 3\cdot C_4x^2+5\cdot 4\cdot C_5x^3+\cdots \rightarrow f''(0)=2\cdot 1\cdot C_2 \quad \rightarrow C_2=\frac{f''(0)}{2!}\\
&f'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3+4\cdot 3\cdot 2\cdot C_4x+5\cdot 4\cdot 3\cdot\ C_5x^2+\cdots \rightarrow f'''(0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3 \rightarrow C_3 =\rightarrow \frac{f'''(0)}{3!}\\
&f''''(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\ C_4+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot C_5x+\rightarrow\cdots f''''(0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_4 \rightarrow C_4=\frac{f''''(0)}{4!}
\end{aligned}
$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

3.2. Taylor Series

테일러 급수는 잘 모르는 임의의 미분가능한 함수를 우리가 알고 있는 다항함수 꼴로 바꾸기 위해 나온 개념이다.

테일러 급수는 맥클로린 급수를 일반화 하여 어떤 점(a)에서 무한번 미분가능한 함수를 그 점에서의 미분 계수를 계수로 하는 다항식의 극한으로 표현하는 것이다. 쉽게 말해서 테일러 급수는 특정 지점 a 근처에서 미분 계수 값을 이용하여 함수를 근사하는 방법이고, 맥클로린 급수는 $a=0$인 테일러 급수의 한 경우의 수인 것이다.

$$f(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+C_4(x-a)^4+\cdots$$
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3+\cdots$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \text{증명하기}$$
$$\text{sol)}\quad f(x)=e^x$$
$$f^n(x)=e^x \text{ for } \forall n,\quad f^n(0)=e^0=1$$
$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \text{증명하기}$$
$$\text{sol)}\quad f(x)=\sin(x), f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos(x), f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin(x), f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos(x), f'''(0)=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\sin(x)=f(x)$$

$$\text{cf.}$$
$$cos^2(x)+\sin^2(x)$$
$$(\sin x)'=\cos x$$
$$(\cos x)'=-\sin x$$
$$\cos 0=1, \sin 0=$$

$$f(x)=\sin(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

같은 방법으로 $\cos x$의 테일러 급수 꼴도 나타낼 수 있다.

3.3. 다변수함수의 테일러 전개

$$\begin{aligned}
&T_f\left(x_1,\ldots,x_d\right)\\
&=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{\left(x_1-a_1\right)^{n_1}\cdots\left(x_d-a_d\right)^{n_d}}{n_1!\cdots n_d!}\left(\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d}f}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_d^{n_d}}\right)\left(a_1,\ldots,a_d\right)\\
&=f\left(a_1,\ldots,a_d\right)+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial f\left(a_1,\ldots,a_d\right)}{\partial x_j}\left(x_j-a_j\right)\\
&\quad+\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 f\left(a_1,\ldots,a_d\right)}{\partial x_j\partial x_k}\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right)\\
&\quad+\frac{1}{3!}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\frac{\partial^3 f\left(a_1,\ldots,a_d\right)}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right)\left(x_l-a_l\right)+\cdots
\end{aligned}$$

예를 들어 $f(x,y)$로 이변수 함수일 경우 $x=a,\ y=b$에서의 테일러 전개는 다음과 같이 이루어진다.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{(x-a)^{k-i}(y-b)^i}{(k-i)!i!}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\Bigg|_{(a,b)}$$
$$= f(a,b)+(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b)+$$
$$\frac{1}{2}\left((x-a)^2 f_{xx}(a,b)+2(x-a)(y-b)f_{xy}(a,b)+(y-b)^2 f_{yy}(a,b)\right)+\cdots$$

4. 확률 분포

4.1. 적률 생성 함수 (Moment Generating Function)

확률변수 X의 거듭제곱 X^r의 기댓값 $E(X^r)$을 X의 r차 적률이라고 한다. 흔히 알고있는 평균 $E(X)$는 1차 적률이고, 분산 $E[(X-\mu)^2]$는 2차 적률이다. 여기에 더불어 3차적률은 확률 분포의 비대칭성을 나타내는 왜도, 4차 적률은 확률 분포의 뾰족한 정도를 나타내는 첨도가 된다. 이렇게 적률은 분포의 특징을 설명해주는 지표로 기능한다.

X와 Y가 모든 t에 대해 확률변수일 때, $M_X(t)=M_Y(t)$라면 $F_X(t)=F_Y(t)$이다. 즉, X와 Y가 같은 확률분포를 가진다.

적률 생성 함수는 적률 $E(X^r)$을 생성하는 함수로, 다음과 같은 함수로 정의된다.

$$M_X(t)=E(e^{tX})$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\rightarrow\ e^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}$$
$$E(e^{tX})=E(1+tX+\frac{(tX)^2}{2!}+\frac{(tX)^3}{3!}+\cdots)$$
$$=1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\frac{t^3}{3!}E(X^3)+\cdots=M_X(t)$$

앞서 테일러 전개에서 배운 e^x의 테일러 전개식을 이용하여 e^{tx}의 테일러 전개식을 구하고, 이것에 expectation을 취한 것을 mgf라고 하고, 이것이 적률생성함수로 작동하는 이유를 알아보자.

적률 생성함수를 한번 미분하고, t=0을 대입하면 1차 적률인 $E(X)$를 얻을 수 있다.

$$M'_X(t)=E(X)+tE(X^2)+\frac{t^2}{2!}E(X^3)+\cdots$$
$$\text{t=0}\rightarrow M'_X(0)=E(X)$$

마찬가지로 적률생성함수를 한번 더 미분하고, t=0을 대입하면 2차적률인 $E(X^2)$을 얻을 수 있다.

$$M''_X(t)=E(X^2)+tE(X^3)+\cdots$$
$$\text{t=0}\rightarrow M''_X(0)=E(X^2)$$

이렇게 적률생성함수를 n번 미분하고, t=0을 대입하면 n차 적률을 얻을 수 있기에 $E(e^{tX})$는 적률생성함수이다. 적률생성함수는 존재하기만 하면 유일하게 대응되는 성질을 갖기에 확률 변수가 어떤 분포를 갖는지 여부에 대한 것도 적률생성함수를 통해 확인할 수 있다.

4.2. 이항분포 (Binomial Distribution)

1. 베르누이 분포

가능한 결과가 두가지인 무작위 시행을 베르누이 시행이라고 한다. 어떤 확률변수 X가 베르누이 시행에 의해 발생한다면, 이 X는 베르누이 분포를 따른다고 말할 수 있다. 베르누이 분포의 확률질량함수는 다음과 같다. (*확률질량함수는 이산형 확률 변수가 특정 값을 가질 확률 나타내는 함수)

$$p(x) = \begin{cases} p, & \text{if } x = 1 \\ 1-p, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

하나의 수식으로는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \text{for } x = 1, 0$$

$$\begin{aligned} &E(X) = p \\ &Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

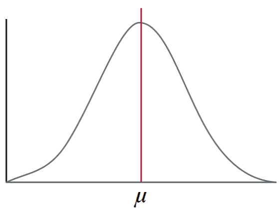
2. 이항분포

성공확률이 p인 베르누이 시행을 n번 반복한다고 할때, n번중 성공한 횟수를 확률변수 X라고 한다면 X는 0과 n사이의 값을 가지고, 이항분포를 따르는 확률변수라고 한다. 이항분포의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \text{for } x = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\begin{aligned} &E(X) = np \\ &Var(X) = np(1-p) \\ &\text{pf. } M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} p(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\ &= (1-p+pe^t)^n (\because \text{이항정리} (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{n-k} y^k) \\ &E(X) = M_X'(0) = np \\ &Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = M_X''(0) - (np)^2 = np(1-p) \end{aligned}$$

4.3. 정규분포



정규분포는 다음과 같은 확률 밀도 함수를 가지며, 평균 μ와 표준편차 σ 두 개의 파라미터로 모양이 결정되는 종 모양의 분포이다. (*확률밀도함수는 연속형 확률 변수가 특정 값을 가질 확률 나타내는 함수)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

확률 변수가 가질 수 있는 값의 범위가 $(-\infty, \infty)$이므로 $(-\infty, \infty)$의 범위로 적분하면 모든 경우의 수에 대한 확률은 1이므로 1이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) = 1$$

다른 분포로 부터 도출된 확률변수라고 할 지라도 시행이 무한번 반복되면 정규분포로 수렴하는 특징을 갖고 있어 다양한 현상을 설명하고 추정하는데 기본가정으로 사용되는 분포이다.

이러한 정규분포를 평균이 0, 분산이 1인 분포로 표준화 해줄 수 있는데, 이 분포를 표준정규분포라고 하고 다음과 같은 확률밀도함수를 가진다.

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2})$$

- 표준정규분포 Z 적률생성함수

$$\begin{aligned} M(t) &= E\left[e^{tz}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} dz \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

- 정규분포 X 적률생성함수

$$\begin{aligned} z = \frac{x-\mu}{\sigma} &\Rightarrow x = z\sigma + \mu \\ M(t) = E\left[e^{tx}\right] &= E\left[e^{t(z\sigma+\mu)}\right] \\ &= e^{\mu t \cdot} \cdot E\left[e^{t\sigma z}\right] \\ &= e^{\mu t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$