Chapter 5
Determination of Forward and Futures Prices

선도 선물

Consumption vs Investment Assets

- Investment assets are assets held by significant numbers of people purely for investment purposes (Examples: gold, silver)

투자 자산 : 일부의 투자자들이 오직 투자 목적으로 보유하는 자산

- Consumption assets are assets held primarily for consumption (Examples: copper, oil)

소비 자산 : 우선적으로 소비 목적으로 보유되는 자산

Short Selling *(Page 116)* – 공매도

- Short selling involves selling securities you do not own

공매도 : 소유하지 않은 증권 매도

- Your broker borrows the securities from another client and sells them in the market in the usual way

자산가격↓ 이득. risk 관리. 헷징. , 하락시 ⇑ .

Example

A가 4월에 120달러, 7월에 100달러인 X기업 주식 500주를 공매한 경우

표 5.1 주식 매입 시 현금흐름과 공매 시 현금흐름의 비교.

주식 매입 시 현금흐름	
4월: 1주당 120달러를 지급하고 500주 매입	-60,000달러
5월: 배당 수령	+500달러
7월: 1주당 100달러를 받고 500주 매도	+50,000달러
	순이익=-9,500달러
공매 시 현금흐름	
4월: 500주를 빌려서 120달러를 받고 매도	+60,000달러
5월: 배당 지급	-500달러
7월: 1주당 100달러를 지급하고 500주를 매입해서 이를 가지고 공매포지션을 마감	-50,000달러
	순이익 = $9,500

Short Selling *(continued)*

- 공매기간 중,
  투자자는 주가 하락 시 이익, 주가 상승시 손실
- 공매 포지션 보유하는 투자자는
  매도 증권에 지급되는 배당금, 이자 브로커에게 지급,
  브로커는 이를 다시 주식을 borrow한 투자자에게 지급
- 투자자와 브로커는 증거금 계정의 유지 의무 존재
- 숏 스퀴즈의 위험 존재

  ↳ 다수의 숏 매도자들이 포지션 마감하면서 자산 가격 급 상승시 발생

Notation for Valuing Futures and Forward Contracts

가정

1. 거래비용이 없다
2. 모든 거래 순이익에 대해 동일한 세율이 적용된다
3. 차입이자율과 대출이자율이 무위험이자율로 동일하다
4. 차익거래기회를 이용한다

Notation for Valuing Futures and Forward Contracts

S_0: Spot price today

선도계약 또는 선물계약 기초자산의 현재가격

F_0: Futures or forward price today

선도계약 또는 선물계약의 현재가격

T: Time until delivery date

선도계약 또는 선물계약의 인도일 까지의 기간

r: Risk-free interest rate for maturity T

무이표채의 현재 연간 무위험이자율

(연속복리 기준 T년간 적용)

5.4 An Arbitrage Opportunity?

- Suppose that: " 중간 무소득 투자 자산 " ~ 무배당주식 · 무이표채
  - The spot price of a non-dividend-paying stock is $40
  - The 3-month forward price is $43
  - The 3-month US$ interest rate is 5% per annum
  - $40e^{0.05\times3/12} = 40.50$

이 때 투자자는 어떤 전략?

1. 3개월 간 연 5% 이자율로 $40 차입, 주식 1주 매입

2. 3개월 후 43달러에 1주 매도하는 선도계약 체결

3개월 후 -> 주식 1주를 43달러에 매도, 차입 원리금 40.5달러 지급

➔ 차익거래이익 2.5달러

Another Arbitrage Opportunity?

- Suppose that:
  - The 3-month forward price is US$39

투자 전략

1. 주식 1주 공매, 40달러 수령

2. 40달러 연 5%로 3개월 저축

3. 3개월 후 39달러에 주식 1주 매입하는 선도 계약 체결

3개월 후 -> 주식 1주 39달러 매입, 공매 포지션 마감,

투자로부터 원리금 40.5달러 수령

➔ 차익거래이익 1.5달러

그렇다면, 어떤 경우에 이러한 차익거래 기회가 사라지게 될까?

-> 선도가격이 40.5 달러 일 때, 양측의 차익거래 기회 사라짐

The Forward Price

If the spot price of an investment asset is S_0 and the futures price for a contract deliverable in T years is F_0, then

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

where r is the T-year risk-free rate of interest.

In our examples, S_0 =40, T=0.25, and r=0.05 so that

$$F_0 = 40e^{0.05\times 0.25} = 40.50$$

- $F_0 > S_0e^{rT}$ 이면, 차익거래는 자산 매입과 동시에 자산에 대한 매도 선도계약 체결
- $F_0 < S_0e^{rT}$ 이면, 자산 매도(공매도)와 동시에 자산에 대한 매입 선도계약 체결

If Short Sales Are Not Possible..

Formula still works for an investment asset because investors who hold the asset will sell it and buy forward contracts when the forward price is too low

$F_0 < S_0e^{rT}$ 일 때

S_0 받고 금 매도

T기간동안 r의 이자율로 금매각대금 투자

자산 1단위에 대한 매입 선도 계약

➔ 투자자는 금을 계속 보유할 때에 비해서 $S_0e^{rT}-F_0$의 이익을 얻는다

5.5 예정소득 투자자산의 선도가격(page 121)

Ex) 예정 배당 지급 주식, 예정된 이자 지급하는 회사채(이표채)

$ 900 이표채 (4개월 후 이자 $40 . 4개월 이자율 3% 9개월 이자율 4%)

Case 1 : 선도가격 $910

선도 매도 .

차익거래자 → $900 차입. 채권 매도 선도 계약 체결 . 채권 매입

4개월후 : 이자 $40 수령. (현가 = $40 \cdot e^{-0.03 \times \frac{4}{12}} = 39.60$)

↳ $ 40은 3% 이자율로 미리 차입 하는 개념.

$900 ⟨ $ 39.6 : 3% 이자율. 4개월 차입

$ 860.4 : 4% 이자율 9개월 차입

$ 860.4 원금 : $860.40 e^{0.04 \times 0.75} = 886.60$

$ 23.40 이익.

∴ 910 − 886.60 = 23.40

5.5 예정소득 투자자산의 선도가격(page 121)

Ex) 예정 배당 지급 주식, 예정된 이자 지급하는 회사채(이표채)

Case 2 : 선도가격 $ 870

선도 매입

투자자 이표채 매도 + 채권 매입 선도 계약

매각대금 $900 중 $ 36.9 는 4개월 간 투자 (이자지급)

나머지 $860.40 연 4%, 9개월 투자 → $ 886.60

이후 $ 870 로 채권 매입

∴ 886.60 − 870 = 16.6 ∴ $ 16.6 이익

즉, 선도가격이 $886.6 이 되어야 차익거래의 기회가 발생하지 않는다 - 균형가격

5.5 예정소득 투자자산의 선도가격(page 121)

Ex) 예정 배당 지급 주식, 예정된 이자 지급하는 회사채(이표채)

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT}$$

where I is the present value of the income during life of forward contract

Ex) $F_0 = (S_0 - I)e^{rT} = (900 - 39.60)e^{0.04 * 0.75}$

$= 886.60$

5.5 예정소득 투자자산의 선도가격(page 121)

Ex) 예정 배당 지급 주식, 예정된 이자 지급하는 회사채(이표채)

- F_0 > $(S_0\text{-}I)e^{rT}$ 이면, 차익거래는 자산 매입과 동시에 자산에 대한 선도계약 매도 포지션

- F_0 < $(S_0\text{-}I)e^{rT}$ 이면, 자산 매도(공매도)와 동시에 자산에 대한 선도계약 매입 포지션

\+ 공매가 불가능 하다면 자산을 소유한 투자자는 자산 매도, 자산에 대한 선도 계약 매입포지션

When an Investment Asset Provides a Known Yield *(Page 123)*

예정 수익률

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

where q is the average yield during the life of the contract (expressed with continuous compounding)

수치적 계산은 예제 5.3과 식 4.3 참고(10판 기준)

Valuing a Forward Contract

- A forward contract is worth zero (except for bid-offer spread effects) when it is first negotiatedLater it may have a positive or negative value
- Suppose that K is the delivery price and F_0 is the forward price for a contract that would be negotiated today

Valuing a Forward Contract (pages 124)

K : 계약 시 정해진 선도 계약의 인도가격

T : 인도일

r : T년 동안의 연간 무위험 이자율

F_0 : 오늘 계약을 체결한다면 적용되는 선도가격(현재가)

f : 오늘 기준 선도계약의 가치

- the value of a long forward contract is

  $$(F_0 - K)e^{-rT}$$: 매입선도 계약의 평가

- The value of a short forward contract is

  $$(K - F_0)e^{-rT}$$: 매도선도 계약의 평가

Forward vs Futures Prices

- When the maturity and asset price are the same, forward and futures prices are usually assumed to be equal. (Eurodollar futures are an exception)
- In theory, when interest rates are uncertain, they are slightly different:
  - A strong positive correlation between interest rates and the asset price implies the futures price is slightly higher than the forward price
  - A strong negative correlation implies the reverse

Stock Index *(Page 127)*

주가지수 선물

- Can be viewed as an investment asset paying a dividend yield
- The futures price and spot price relationship is therefore

$$F_0 = S_0\, e^{(r-q)T}$$

where q is the average dividend yield on the portfolio represented by the index during life of contract

Stock Index (continued)

- For the formula to be true it is important that the index represent an investment asset
- In other words, changes in the index must correspond to changes in the value of a tradable portfolio
- The Nikkei index viewed as a dollar number does not represent an investment asset (See Business Snapshot 5.3, page ~~119~~)
  127

Index Arbitrage

$$F_0 < S_0 e^{(r-q)T}$$

일 경우, 주식을 매도하고 선물계약을 매입하는 전략을 이용하고,

$$F_0 > S_0 e^{(r-q)T}$$

일 경우, 주식들을 매입하고 선물계약을 매도하는 전략을 통해서

차익거래이익을 얻을 수 있다.

Index Arbitrage
(continued)

- Index arbitrage involves simultaneous trades in futures and many different stocks
- Very often a computer is used to generate the trades
- Occasionally simultaneous trades are not possible and the theoretical no-arbitrage relationship between F_0 and S_0 does not hold (see Business Snapshot 5.4 on page ~~120~~)

128

Futures and Forwards on Currencies *(Page 129)*

- A foreign currency is analogous to a security providing a yield
- The yield is the foreign risk-free interest rate
- It follows that if r_f is the foreign risk-free interest rate

S_0 : 외국통화 1단위에 대한 달러화 현물 가격,

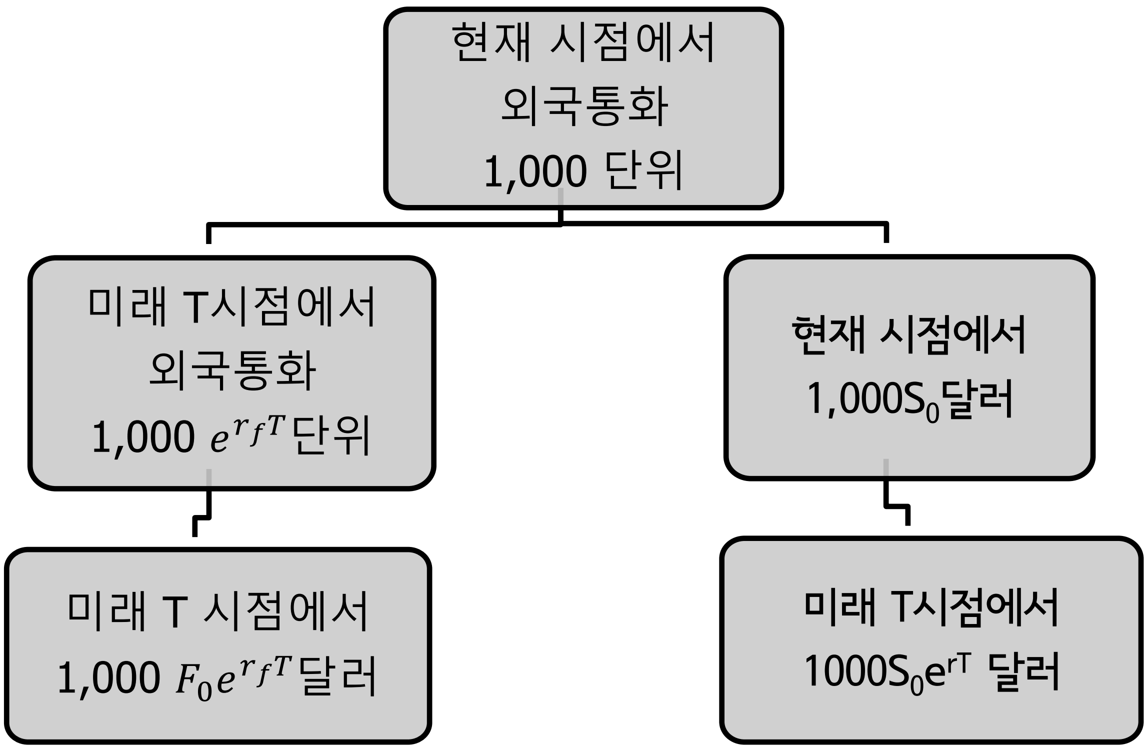
F_0 : 외국통화 1단위에 대한 달러화 선도가격 또는 선물가격

$$F_0 = S_0 e^{(r - r_f)T}$$

이자율 패리티

현재 보유하고 있는 1000단위의 외국 통화를 미래 T시점에서 미국 달러화로 전환 시키는 두가지 방법

S_0=현물환율, F_0=선도환율, r=미국 달러 무위험 이자율, r_f=외국통화 무위험 이자율



$$1{,}000e^{r_f T}F_0 = 1{,}000S_0e^{rT}$$

$$F_0 = S_0e^{(r-r_f)T}$$

P. 130

5.11 상품선물계약_page 133

예정소득 투자자산의 선도가격 : $F_0 = (S_0 - I\,)e^{rT}$

예정수익률 투자자산의 선도가격 : $F_0 = S_0\, e^{(r-q\,)T}$

$$F_0 \le (S_0 + U\,)e^{rT}$$

where U is the present value of the storage costs.

$$F_0 \le S_0\, e^{(r+u\,)T}$$

where u is the storage cost per unit time as a percent of the asset value.

+ convenience yield (p.135)

보유 편익률

The Cost of Carry *(Page 136)*

- The cost of carry, c, is the storage cost plus the interest costs less the income earned
- For an investment asset $F_0 = S_0 e^{cT}$
- For a consumption asset $F_0 \leq S_0 e^{cT}$
- The convenience yield on the consumption asset, y, is defined so that $F_0 = S_0 \, e^{(c-y)T}$

무배당 주식 보유 비용 : r

주가지수 보유비용 : r − q

통화 보유비용 : r− r_f

상품 보유비용 : r− q + u

Futures Prices & Expected Future Spot Prices

(Page 137)

- Suppose k is the expected return required by investors in an asset
- We can invest F_0e^{-rT} at the risk-free rate and enter into a long futures contract to create a cash inflow of S_T at maturity
- 투자안의 현재가치 = $-F_0e^{-rT}+E(S_T)e^{-rT} = 0$

$$F_0e^{-rT}e^{kT} = E(S_T)$$

or

$$F_0 = E(S_T)e^{(r-k)T}$$

Futures Prices & Expected Future Spot Prices
(Page 137)

$$F_0 = E(S_T)e^{(r-k)T}$$

비 체계적 위험은 분산이 가능하기 때문에
투자자에게 중요한 것은 체계적 위험

No Systematic Risk	$k = r$	$F_0 = E(S_T)$
Positive Systematic Risk	$k > r$	$F_0 < E(S_T)$
Negative Systematic Risk	$k < r$	$F_0 > E(S_T)$