2. Wiener Process

1. Stochastic Process

지난주 기초수학 시간에는 확률변수의 분포와 분포의 특징을 설명하는 적률생성함수에 대해서 다루었다. 오늘은 확률변수의 개념을 확장하여 확률 "과정" 이 무엇인지에 대해 이해하는 것으로 시작하고자 한다.

확률 변수 X는 어떠한 랜덤 시행의 결과 관측된 수치라고 할 수 있다. 만약 여기서 더 나아가 어떤 기간동안 확률 변수 값의 변화에 관심을 갖게 된다면 어떻게 표현할 수 있을까? 이제 우리의 관심사는 **시간의 변화에 따른 확률변수의 변화**인 것이다. 이렇게 시간의 진행에 따른 확률적 변화 구조를 나타내는 시간 t에 대한 확률 변수 $X(t)$의 집합을 **확률과정**이라고 한다.

$$\{X(t), t \in T\}$$

이때 가능한 모든 시간 집합인 T를 다루는 방식은 시간을 셀 수 있는 단위로 보는지 여부에 따라 크게 이산시간과 연속시간 두 가지로 나눌 수 있다.

1.1. 이산시간

$X(t)$를 t번째 날 코스피의 종가라고 하자. 이 경우 첫번째 날($t = 1$)의 코스피 종가는 $X(1)$, 두번째 날($t = 2$)의 종가는 $X(2)\dots$로 관찰이 이루어진다. 이렇게 시간 t가 어떤 특정 시점이라고 정의할 수 있는 정수값을 가지는 확률과정을 이산시간 확률 과정이라고 한다.

$$\{X(t), t \in 0, 1, 2, 3...\}$$

t는 어떤 특정 날의 종가가 아니라 오늘 9시, 10시,... 의 시간 단위가 될 수도 있고, 오늘 9시 1분, 2분,3분...의 분 단위가 될 수도 있다. 이 경우에도 t는 어떤 시점이라고 우리가 정의할 수 있다. 이산 시간 확률 과정의 개념은 시간을 월,일,분,초 등의 셀 수 있는 단위로 생각하고, 해당 단위로 사건을 측정하는 우리의 일반적인 상식과 일치한다.

1.2. 연속시간

$X(t)$를 어떤 시점 t에서의 전류의 크기라고 하자. 전류는 끊이지 않고 연속적으로 신호를 보내기 때문에 t는 0부터 무한까지의 값을 가질 수 있다. 이 경우 가능한 t의 집합인 T는 특정 값으로 표현될 수 없고, 연속적인 구간으로 정의된다. 이렇게 셀 수 없는 시간 단위에 대해서 구간으로 시간을 표현하는 확률 과정을 연속시간 확률과정이라고 한다.

$$\{X(t), t \in [0, \infty)\}$$

1.3. 주가의 가정

주가나 수익률 등의 데이터는 1틱, 1분, 3분, 월봉 등의 이산적인 단위로 측정이 이루어진다. 하지만, 우리는 연속시간 가정을 바탕, 미적분 개념을 이용한 수학적 모델로 시장을 설명하기 위해 앞으로 다룰 금융 시계열 자료를 **연속 시간 확률 과정**으로 가정하여 사용 할 것이다. 오늘 배울 Brownian Motion은 물리학에서 연속적인 분자 움직임을 설명하는 모델인데, 주가 측정 단위로 연속형 시간을 가정함으로써 해당 모델을 금융시장의 움직임을 설명하는데에도 적용할 수 있

게 된다. 오늘 스터디를 통해서 Brownian Motion의 개념과 성질을 잘 이해하고, 주가의 움직임을 어떻게 모델링 할 수 있는지 알아보자.

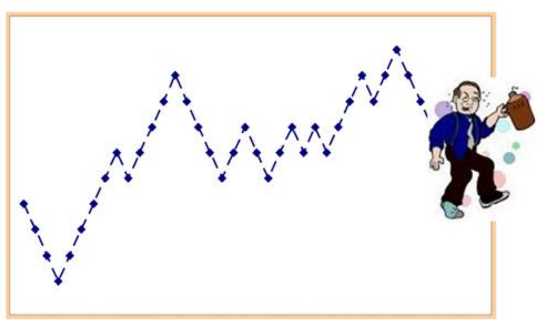
2. Symmetric Random Walk

반복적인 동전 던지기를 시행한다고 했을 때, Head와 Tail이 나올 확률은 각각 1/2이다. j번째 동전 던지기 시행의 결과를 x_j라고 하고, 시행 결과 Head가 나오면 1, Tail이 나오면 -1이라고 하자. 이때, j번째까지 모든 동전던지기 시행의 결과를 더한 것을 symmetric random walk라고 하고, M_k라 적는다.

$$\text{Let } x_j = \begin{cases} 1 & \text{if Head} \\ -1 & \text{if Tail} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} E(x_j) = \left\{\frac{1}{2} \times 1\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times (-1)\right\} = 0 \\ \operatorname{Var}(x_j) = \frac{1}{2} \times (1-0)^2 + \frac{1}{2}(-1-0)^2 = 1 \end{array} \right. \qquad \therefore E(x_j) = 0, \quad \operatorname{Var}(x_j) = 1$$

$$\begin{aligned} &\text{Define } M_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \\ &= \sum_{j=1}^{k} x_j, \quad k = 1, 2, \ldots \\ &\text{The process } M_k = \sum_{i=1}^{k} x_j \quad (k = 1, 2, 3 \ldots) \text{ is a symmetric random walk} \end{aligned}$$

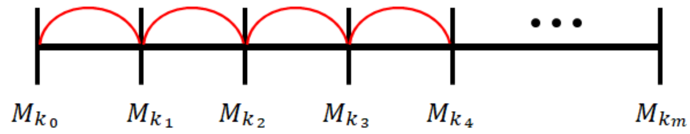


Random walk라는 이름을 갖는 것은 지금까지 동전던지기로 설명한 상황을 술 취한 사람이 걷는 상황으로도 생각할 수 있기 때문이다. 원점에 서있는 이 사람이 j번째 보행에서 오른쪽으로 갈지(-1) 왼쪽으로로 갈지(1) 여부는 랜덤한 확률변수 x_j이고, 현재 그 사람의 위치는 k번째 까지의 보행의 결과는 M_k이기 때문이다. 여기에 symmetric이 붙는 이유는 좌, 우로 갈 확률이 $\frac{1}{2}$로 동일하다고 가정했기 때문이다.

Properties of Symmetric Random Walk

2.1. $(M_{k_{i+1}} - M_{k_i})$는 랜덤 워크의 증분이라고 한다

음이 아닌 정수 k를 가정하자. 이때, 확률변수 $(M_{k_{i+1}} - M_{k_i})$는 증분이라고 한다.



$$
\begin{aligned}
&0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m \\
&(M_{k_1} - M_{k_0}), (M_{k_2} - M_{k_1}), (M_{k_3} - M_{k_2}), \ldots, (M_{k_m} - M_{k_{m-1}})
\end{aligned}
$$

모든 k값에 대하여, 다음을 랜덤 워크의 증분이라고 부른다.

2.2. 랜덤 워크의 증분은 독립성을 지닌다.

k는 규칙성을 갖고 일정하게 정의된 숫자일 필요 없고, 모든 음이 아닌 정수에 대해 k_{i+1}> k_i만 만족하면 된다. (이전의 숫자보다 크기만 하면 된다.) 이때, 랜덤 워크의 증분은 독립성을 지닌다.

예) k를 임의의 수로 가정

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1 \\
k_2 &= 5 \\
k_3 &= 8 \\
M_{k_1} &= M_1 = x_1 \\
M_{k_2} &= M_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
M_{k_3} &= M_8 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8
\end{aligned}
$$

그렇다면 증분은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
M_{k_2} - M_{k_1} &= M_5 - M_1 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
M_{k_3} - M_{k_2} &= M_8 - M_5 = x_6 + x_7 + x_8
\end{aligned}
$$

k 수열을 정의한 방식 때문에, 각각의 증분은 다른 증분과 동일한 첨자를 갖는 x를 포함하지 않는다. x_i는 독립시행이므로 동일한 첨자의 x가 없으면 각각은 독립적이라고 말할 수 있다. 따라서 이 예시를 통해 모든 랜덤워크의 증분은 독립성을 갖는다는 것을 확인할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&k_{i+1} > k_i \\
&M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = x_{k_i+1} + x_{k_i+2} + \cdots + x_{k_{i+1}-1} + x_{k_{i+1}} \\
&M_{k_{i+2}} - M_{k_{i+1}} = x_{k_{i+1}+1} + \ldots\ldots \quad + x_{k_{i+1}-1} + x_{k_{i+2}}
\end{aligned}
$$

$$
M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} x_j
$$

2.3. 증분의 기댓값은 0

앞서 나온 대로, 증분을 표현해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_{k_{i+1}} - M_{k_i} &= x_{k_i+1} + x_{k_i+2} + \cdots + x_{k_{i+1}-1} + x_{k_{i+1}} \\ &= \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} x_j \end{aligned}$$

이에 대해 기댓값을 취하면 다음과 같다.

$$\mathbb{E}\left[M_{k_{i+1}} - M_{k_i}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} x_j\right] = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \mathbb{E}\left[X_j\right] = 0$$

2.4. 증분의 분산은 $k_{i+1} - k_i$

확률변수 합의 분산은 아래와 같은 공식으로 개별 확률변수의 분산의 합과, 모든 확률변수들간의 공분산의 합으로 표현이 된다.

$$\operatorname{Var}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\left(x_i\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cov}\left(x_j, x_k\right)$$

위의 식을 이용해 증분의 분산을 표현하면

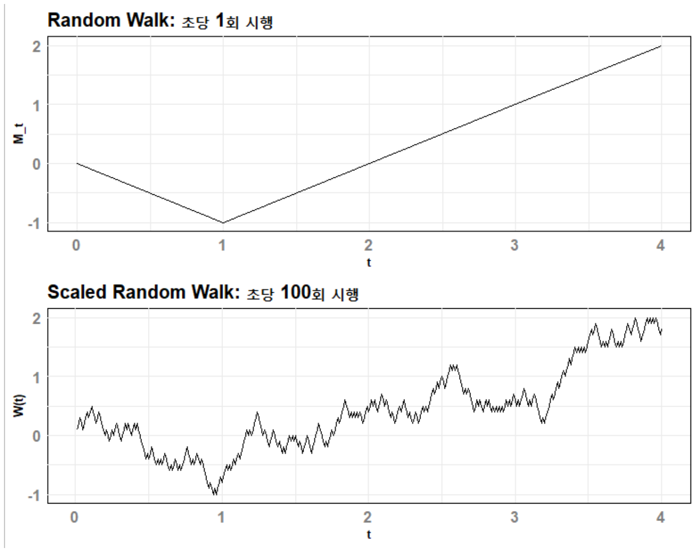
$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}\right) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} x_j\right) \\ &= \operatorname{Var}\left(x_{k_i+1} + x_{k_i+2} + \ldots + x_{k_{i+1}}\right) \\ &= \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \operatorname{Var}\left(x_j\right) + \sum_{h \neq m} \operatorname{cov}\left(x_h, x_m\right) \end{aligned}$$

각각의 x는 독립시행의 결과이므로 서로다른 $x_h,\ x_m$에 대해 공분산을 구하면 모든 $h,\ m$에 대해 0이다. 이에 따라 증분의 분산은 $\operatorname{Var}\left(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}\right) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \operatorname{Var}\left(x_j\right)$로 표현되는데,

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(x_j\right) &= 1 \text{이므로} \\ \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \operatorname{Var}\left(x_j\right) &= \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 \\ &= k_{i+1} - \left(k_i + 1\right) + 1 \\ &= k_{i+1} - k_i \end{aligned}$$

따라서 증분 $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$의 분산은 $k_{i+1} - k_i$이다.

3. Scaled Symmetric Random Walk



Scaled Symmetric random walk는 Random walk를 scaling한 식이라는 의미이다. 여기서 Scaling의 의미는 시점 t 사이에 n번의 사이 시행을 더해 매 step 사이의 시간 간격은 좁히고, 각 step의 크기는 $\frac{1}{\sqrt{n}}$으로 줄여 준다는 것이다.

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

→ t는 set수, n은 각 set 안의 시행횟수(step)라고 생각하면 된다.
  주식의 경우 t를 초, n은 매 초마다 발생하는 거래횟수로 생각할 수 있다.

예를 들어 M_4는 4초 동안, 초당 1회의 시행하는 경우라고 생각할 수 있다. 이때, 시행 횟수를 늘려 초당 100회를 시행한다고 하자(=$M_{4\times100}$). 이로써 우리는 시행의 시간 간격을 좁히게 되고, 시행을 가속한 효과를 내게 된다.

이때, 시행 횟수를 100배 늘렸으니, 분산이 커지게 된다. 분산이 커진다면 기존 분포를 잃고, 더 크게 발산하는 다른 분포를 얻게 된다. 따라서 이를 막고, 기존 분포의 분산을 유지하기 위해 $\frac{1}{\sqrt{n}}$을 곱하는 것이다. 아래의 식을 통해 매 t 사이에 사이시행 n을 더한 것에 $\frac{1}{\sqrt{n}}$을 곱하면 사이시행이 없는 경우와 분산이 동일함을 확인할 수 있다. 이를 통해 기존 분포의 특성을 유지한 채, 시행을 가속한 효과를 낼 수 있다.

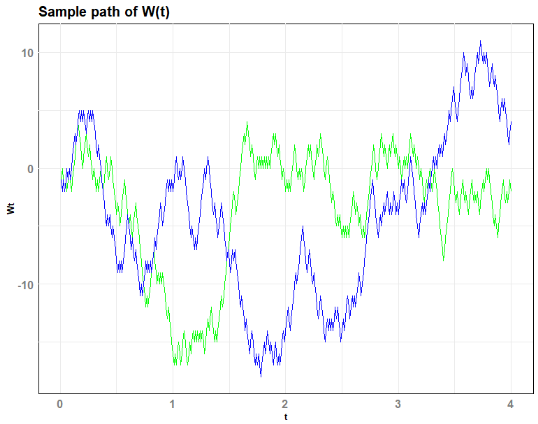
$$\text{Random Walk: } \mathrm{Var}(x_1 + x_2 + ... + x_t)) = t$$

$$\text{Scaled Random Walk: } \mathrm{Var}[(x_1 + x_2 + ... + x_{nt})/\sqrt{n}] = \frac{nt}{n} = t$$

$$* \ \mathrm{Var}(\sqrt{a}x) = a\,\mathrm{Var}(x)$$

이렇게 **scaling**을 하는 이유는 random walk를 연속 시간 확률과정을 갖게 하면서 정규분포로 근사하기 위함인데, 이렇게 정규분포로 근사하고자 하는 이유는 정규분포 가 다양한 현상을 설명하는 기본 가정으로 가장 설명력 있기 때문이다.

아래 그림은 동일한 평균과 분산을 갖는 scaled symmetric random walk를 두번 시뮬레이션한 결과이다. 동일한 평균과 분산 하에서 다양한 형태의 움직임이 관측될 수 있음을 보여주는 그림이다.



Properties of Scaled Symmetric Random Walk

3.1. Scaled Symmetric Random Walk의 증분은 독립이다

$$\left[W^{(n)}\left(t_1\right)-W^{(n)}\left(t_0\right)\right],\left[W^{(n)}\left(t_2\right)-W^{(n)}\left(t_1\right)\right],\cdots\left[W^{(n)}\left(t_m\right)-W^{(n)}\left(t_{m-1}\right)\right]$$

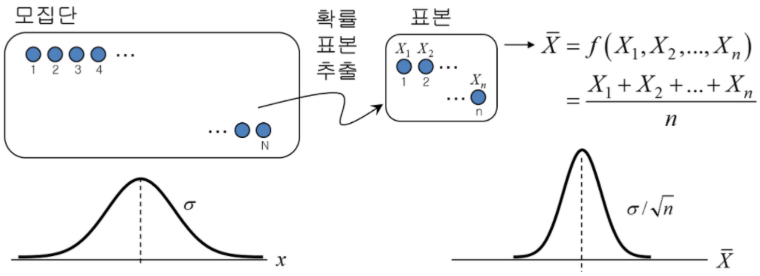
3.2. 증분의 기대값은 0

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[W^{(n)}(t)-W^{(n)}(s)\right] \\
&=\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}-\frac{1}{\sqrt{n}} M_{ns}\right] \\
&=\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}\left[M_{nt}-M_{ns}\right] \\
&* \mathbb{E}\left[M_{k_{i+1}}-M_{k_i}\right]=0 \\
&=0
\end{aligned}$$

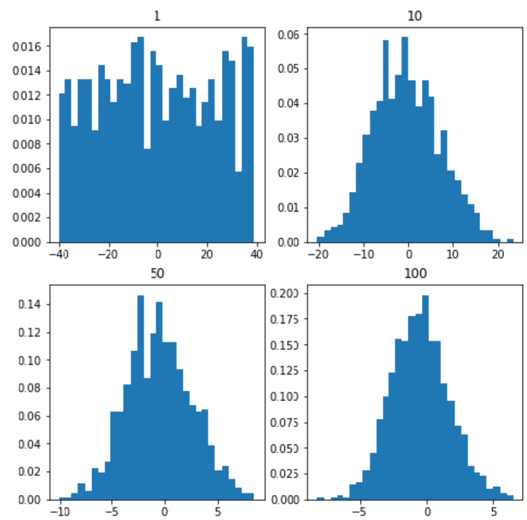
3.3. 증분의 분산은 t - s

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left(W^{(n)}(t)-W^{(n)}(s)\right) \\
&=\operatorname{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}-\frac{1}{\sqrt{n}} M_{ns}\right) \\
&=\frac{1}{n} \operatorname{Var}\left(M_{nt}-M_{ns}\right) \\
* &\operatorname{Var}\left(M_{k_{i+1}}-M_{k_i}\right)=k_{i+1}-k_i \\
&=\frac{1}{n}(nt-ns) \\
&=t-s
\end{aligned}$$

4. 중심극한정리(Central Limit Theorem)



모집단에서 표본의 크기가 n인 표본을 여러번 반복 추출하였을 때, 각 표본 평균들이 이루는 분포를 표본평균분포라고 한다. 중심 극한 정리는 모집단의 분포가 무엇이던간에 표본의 크기가 커지면 표본평균 분포는 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$의 정규분포를 이룬다는 것을 의미한다. 모집단의 분포에 상관 없이 표본평균의 분포가 정규분포로 수렴한다는 점은 모수추정의 기초가 된다.



이때, CLT의 연장선상에서, 표본평균의 분포가 정규분포를 따르면 표본합의 분포 또한 정규분포를 따름을 보일 수 있다.

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ by CLT}$$
$$\rightarrow X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

랜덤 워크의 각 시행 x_j를 표본으로, 사이시행 횟수인 n을 표본의 개수로 생각하면 확률과정에도 동일한 논리로 CLT를 적용할 수 있다. Symmetric random walk는 $M_k = \sum_{i=1}^{k} x_j$로 정의되고, scaling을 해준 Scaled symmetric random walk $W^{(n)}(t)$는 $M_{nt} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{nt} x_j$로 정의된다. 즉, 총 nt개의 표본합과 같은데, 위에서 보인 바와 같이 표본의 수를 무한히 늘린다면 표본 합은 정규분포를 따른다.

결론적으로, n이 커질때 표본분포가 정규분포를 따르듯, 고정된 $t \geq 0$ 에 대하여 n을 무한으로 늘리면 Scaled symmetric random walk $W^{(n)}(t)$는 정규 분포로 수렴한다. 이렇게 10, 100, 1000....∞로 시행 횟수 n을 늘리면 시행 사이의 시간 간격은 아주 작아지고, 이로써 랜덤 워크는 연속 확률 과정 속에 놓이게 된다.

$$W^{(n)}(t) \sim N(0, t) \text{ as n} \to \infty$$

지난주 기초수학에서 배운 대로, 같은 적률생성함수를 가지면 같은 분포를 가진다. 이를 이용해 Scaled symmetric random walk에서 n이 무한으로 갔을때 특정 시점 t에서의 분포가 정규분포임을 증명해보자. 먼저, $W^{(n)}(t)$의 적률생성함수를 구해보겠다.

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(n)}(u) \\
&= \mathbb{E}[e^{uW^{(n)}(t)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{u\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}}] \\
&= \mathbb{E}[e^{u\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{nt}X_j}] \\
&= \mathbb{E}[\prod_{j=1}^{nt} e^{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j}] \\
&= \prod_{j=1}^{nt} \mathbb{E}[e^{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j}] \\
&= \prod_{j=1}^{nt} (e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} \times \frac{1}{2} + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}} \times \frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}})^{nt}
\end{aligned}$$

계산의 편의를 위해 앞서 구한 $\varphi^{(n)}(u)$에 자연로그를 취해 준다.

$$\ln \varphi^{(n)}(u) = nt \ln(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}})$$

※ 로피탈 정리

$$\text{미분가능한함수} f(x),\ g(x)\text{에서} \frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})\text{형이라면,}$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

로피탈 정리를 이용하며 $\ln \varphi^{(n)}(u)$에서 n을 무한으로 보낼 경우 수렴하는 함수를 확인해보자.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \ln \varphi^{(n)}(u) \\
&= \lim_{n\to\infty} nt \ln(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}) \\
&x = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ as n } \to \infty, x = 0 \\
&= \lim_{x\to 0} t \cdot \frac{\ln(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux})}{x^2} \\
&※(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
&\quad (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \\
\\
&= \lim_{x\to 0} t \cdot \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux})} \ (\because \frac{0}{0}\text{형}) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{t}{\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}} \cdot \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{t}{\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}} \cdot \frac{\frac{u^2}{2}e^{ux} + \frac{u^2}{2}e^{-ux}}{2} (\because \frac{0}{0}\text{형}) \\
&= \frac{u^2 t}{2} \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(u) = e^{\frac{u^2 t}{2}}
\end{aligned}
$$

지난주 기초수학 시간에 우리는 적률생성함수를 배우면서 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$를 따르는 확률 변수의 적률생성함수는 $e^{\mu u + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$ 임을 배웠다. 따라서, 만약 확률변수가 $N(0, t)$를 따른다면 적률생성함수는 $e^{\frac{1}{2}tu^2}$ 이다. 이것은 우리가 앞에서 구한 $\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(u)$와 동일하다. 즉, **$W^{(n)}(t)$에서 n을 무한으로 보냈을 때의 적률생성함수와 정규분포의 적률생성함수는 동일**한 것이다. 적률생성함수가 동일하면 동일한 분포를 갖는다는 의미이므로, scaled random walk에서 n을 무한으로 보낸 것은 정규분포를 따른다고 할 수 있다. 이렇게 random walk를 n으로 나누고, $\frac{1}{\sqrt{n}}$으로 scale을 조정한 scaled random walk에서 n이 무한히 커질 때를 **위너과정**이라고 부른다.

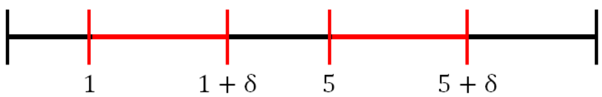
5. Brownian Motion

식물학자 브라운은 물 위에 떠 있는 꽃가루가 외부의 힘이 작용하지 않는데도 물 위에서 움직이는 것을 발견한다. 이 움직임이 이후 물 분자의 랜덤한 움직임에서 비롯된다는 가설이 나오게 되었고, 이러한 랜덤한 운동을 확률적으로 모델링한 것이 브라운 운동이다. 금융수학에서는 브라운 운동의 개념은 위에서 언급한 위너 과정과 같다.

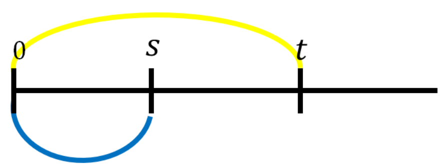
5.1. 브라운 운동

다음 3가지를 만족하는 확률과정을 브라운 운동이라고 한다.

$1. W(0) = 0$
2.독립 증분
$- W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), W(t_4) - W(t_3) \cdots W(t_n) - W(t_{n-1})$은
모든 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots < t_n$ 에 대해 독립
$- \forall \delta > 0,\ W(t+\delta) - W(t)$의 분포는 t와 독립적, 구간의 크기 δ에 의존적
$3. \forall\, t > 0,\ W(t) \sim N(0, t)$



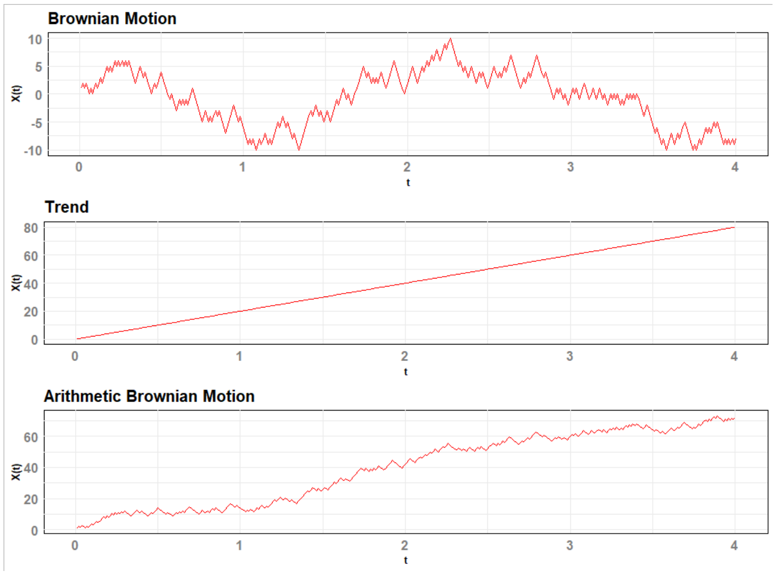
$$cf)\ COV(W(t), W(s)) = min(s, t)$$



한가지 주의해야 할 것은 겹치지 않는 구간을 가진 증분 $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), W(t_4) - W(t_3) \cdots W(t_n) - W(t_{n-1})$ 에 대해서는 서로가 독립적이지만, $W(t)$와 $W(s)$는 $t > s$라고 하면 s만큼 겹치는 구간이 존재하기에 독립적이지 않고, 공분산 값으로 0보다 큰 값을 갖게 된다.

5.2. 브라운 운동의 변이

5.2.1. Arithmetic Brownian motion



브라운 운동은 위 그림과 같이 0을 중심으로 진동하는 형태를 갖는다. 하지만 일반적인 시계열 자료는 추세(Trend)를 갖고 있다. 브라운 운동으로 추세가 있는 자료를 모델링 한다면 추세를 반영하지 못하기 때문에 추세를 반영한 브라운 운동을 산술 브라운 운동이라고 한다.

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

여기서 μ는 평균 변화율, σ는 표준편차, $W(t)$는 위너과정이다. 산술 브라운 운동은 일반화된 위너과정이라고도 한다.

5.2.2. Geometric Brownian Motion(GBM)

하지만 산술 브라운운동으로 주식 가격을 모델링 할 경우 주식 가격은 이론적으로 음의 값을 가질 수 있는 문제가 발생한다. 이 문제를 보완하기위해 산술 브라운 운동에 exponential (e) 를 씌운 브라운 운동을 기하브라운운동이라고 한다. 기하브라운운동은 주가가 무작위적으로 상승/하락 하는것이 아니라 무작위적 비율로 상승/하락한다고 설명하는 것이다. 옵션 가격 결정에서 가정하는 주가의 움직임은 기하 브라운 운동이다. 이때, 특정 시점에서의 주가는 로그정규분포를 따른다고 가정한다.

$$X(t) = \exp\{\mu t + \sigma W(t)\}$$