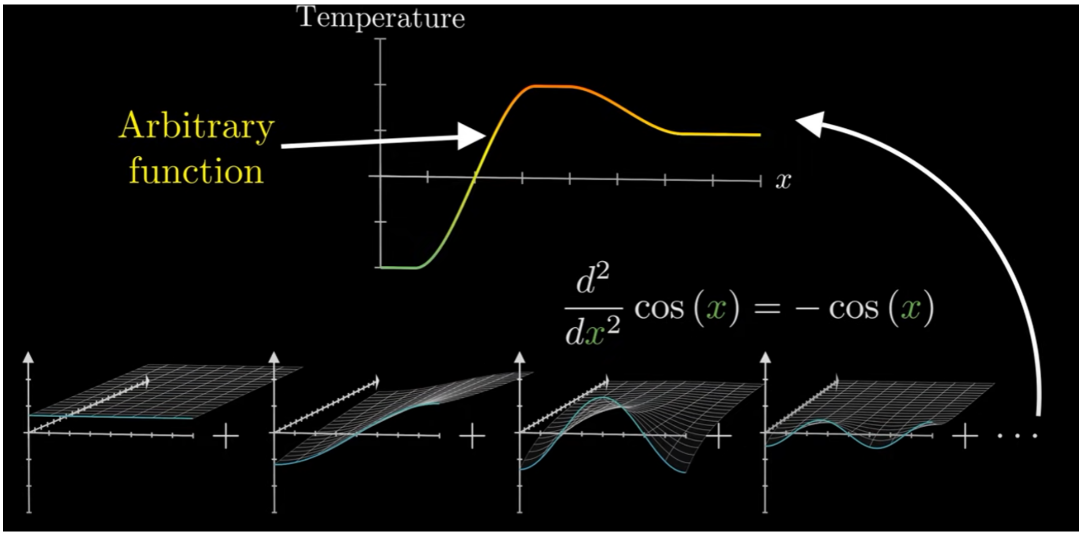
8. PDE(Partial Differential Equation)

어떠한 임의의 함수에 대해 저런 입체적인 그림을 그리는 것은 어렵다. 따라서 수학자들은 저번 시간에 배웠던 Fourier Transform을 이용해 이런 임의의 함수를 여러 개의 삼각함수로 분해한다.
그 다음, 각 삼각함수들이 입체적으로 평형상태에 도달하는 모양새를 전부 더해주면, 기존의 Function이 평형상태에 도달하는 모습을 그려낼 수 있게 된다.



0. PDE(편미분 방정식)

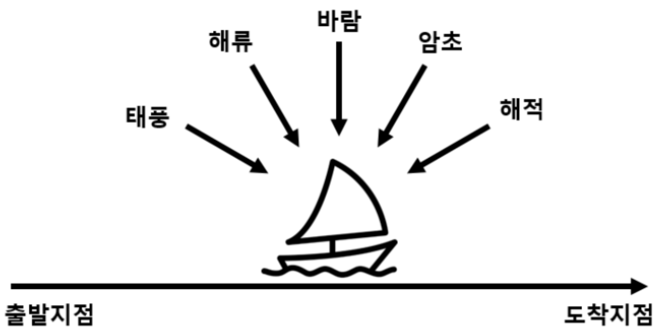
편미분은 변수가 2개이상인 방정식에서 미분을 할 때 미분을 하는 변수 이외의 다른 변수들은 상수로 두고 미분을 하는 것이다. ODE는 하나의 변수만으로 구성된 미분 방정식이고, PDE는 여러 개의 변수들로 구성된 미분방정식이다. ODE는 하나의 변수만으로 구성되기에 하나의 시간적 흐름이나 멈춰있는 2차원 공간에 대해서만 사용할 수 있다. 반면 PDE를 사용하면 물리적 현상을 시공간적으로 설명할 수 있다. 따라서 ODE를 넘어 PDE로 자연현상을 볼 때 더 완벽하게 해석할 수 있다.

1. 열 방정식

편미분 방정식의 한 종류로 열 따위의 성질이 시간에 따라 전도(공간에 대한 퍼짐)되는 과정을 나타내는 2차 편미분 방정식이다. 즉, 열방정식은 시간과 공간을 입력변수로 하여 열을 출력하는 함수라고 생각할 수 있다.

1-1. 열방정식을 배우는 이유

우리가 열방정식을 사용하여 옵션의 가격 결정을 구할 수 있는 이유는 열방정식을 푸는 방법으로 옵션의 가격을 구하는 방정식의 해를 구할 수 있기 때문이다. 블랙숄즈는 기초자산과 시간의 변화율에 따라, 파생상품의 가치가 얼마나 변하는지를 나타내는 역학관계의 표현식이다. 하지만 이러한 상대 변화율의 값으로는, 어떤 절대적인 그림을 그릴 수 없다. 예를 들어, 우리가 해류, 바람, 암초, 수온과 돛단배의 움직임에 대한 메커니즘을 알고 있다고 하자. 이를 PDE라고 할 수 있을 것이다. 하지만, 이런 매커니즘을 활용할 때, 돛단배의 출발 위치(initial condition), 그리고 돛단배가 움직이는 공간(boundary condition)에 대한 정보가 있어야 돛단배의 정확한 위치를 찾을 수 있다. 이러한 세 가지 변수(PDE, Initial condition, Boundary condition)가 옵션 가격 결정의 영역에서는 각각 시간의 관계(+행사가격), 기초자산의 가격, 만기 때 옵션의 가격으로 바뀌게 된다.



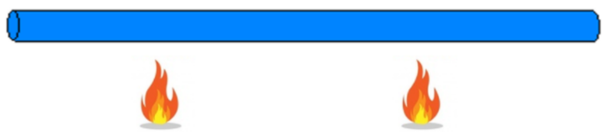
• 해(solution): PDE에 나타나는 모든 편도함수를 가지고 있는 함수로 모든 점에서 주어진 방정식을 만족하는 함수

해를 구하기 위해서 주어지는 세 가지 조건은 열방정식의 **1. PDE 2. 경계 조건 3. 초기 조건** 이 세가지의 조건 뿐이다.

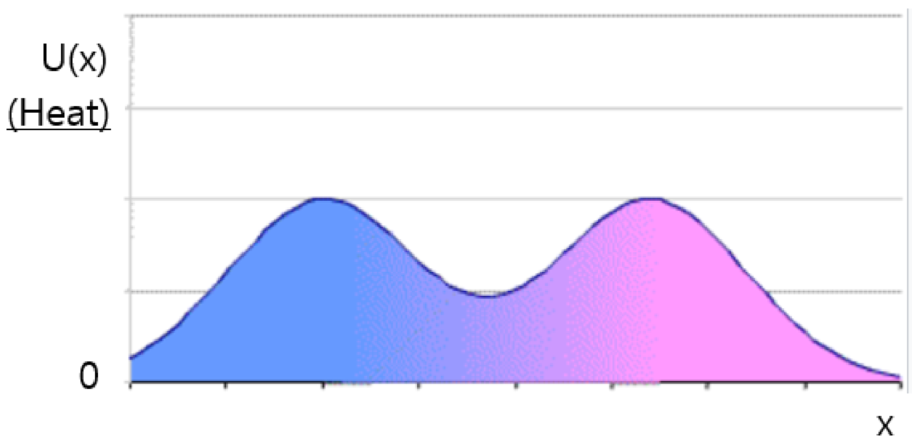
1. PDE는 시간과 공간에 대해 온도가 변화되는 전달 속도를 의미한다.
2. 경계조건은 시간이 전개되는 공간의 크기를 정해주게 된다. 보통, x축이 가열되는 '쇠 봉'이라고 비유하고, 해당 봉의 길이가 경계조건이 되게 된다.
3. 초기조건은 t=0에서, 공간과 온도상 함수의 결과값이 어떻게 나오는지, 어떤 모양새인지 정의해주는 조건이다.

1-2. 열방정식(평형상태에 도달)

다음과 같이 쇠막대기의 중간 두 지점을 불로 달구었다고 해보자.

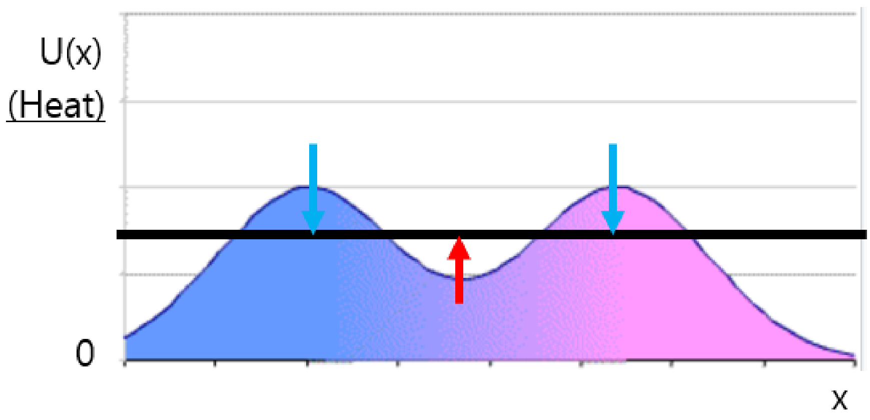


다음과 같이 쇠막대기의 중간 두 지점을 불로 달구었다고 해보자. 그 결과 막대의 길이에 따른 온도분포는 대략 다음과 같이 그려질 것이다.



즉, 불로 달군 곳 근처의 온도는 올라가고 불과 먼 지점의 온도는 크게 올라가지 않는다. 두 지점 사이의 가운데 부분은 직접적으로 달구지는 않았지만, 두 불과 인접해 있었기에 어느정도 온도가 올라간다.

여기서 불을 제거하고 쇠막대기를 내버려 둘 경우 온도는 어떻게 변화할까? 아마도 온도가 높은 곳은 온도가 내려갈 것이고, 온도가 낮은 곳은 열이 전달되면서 온도가 올라가고, 이 과정이 오랜 시간 진행되면서 막대의 온도는 평형상태를 이룰 것이다.



여기서 중요한 점은 특정 지점의 온도가 올라가느냐, 내려가느냐를 결정하는 것은 단순히 막대기의 어느 지점의 절대적 온도가 높나 낮냐가 아니라 **주변의 온도와의 관계**인 것이다.

주변의 온도와의 관계는 그래프의 **볼록성(Convexity)**을 통해 확인할 수 있다. 어떤 지점에서 볼록한 정도가 크다는 것은 주변 온도와의 차이가 더 크다는 것을 의미한다. 시간이 흐름에 따라 **주변온도와 차이가 큰 부분(볼록성이 큰 부분)이 더 빠르게 온도가 변화하게 될 것**이다. 또, 위로 볼록한 부분은 온도가 떨어지게 되고 아래로 볼록(오목)한 부분은 온도가 올라가게 된다.

여기서 빨리 변화한다는 것은 시간의 흐름에 따른 **변화의 속도**와 관련된 것이고, 볼록하다는 것(온도 차이가 크다)은 수학적으로는 **2차미분계수**로 표현할 수 있다.

열방정식은 변화의 속도와 볼록성의 관계를 통해 해를 구하게 된다.

온도의 분포 u는 시간(t)와 공간(x)의 함수로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u = f(x, t)$$

온도 분포의 시간에 따른 변화속도는 $\frac{\partial U}{\partial t} = U_t$라고 쓸 수 있다.

볼록성은 2차 미분계수 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx}$라고 쓸 수 있다.

주변온도와 차이가 큰 부분(볼록성이 큰 부분)이 더 빠르게 온도가 변화하므로 온도 변화 속도는 볼록성에 비례하고 익$U_t \propto U_{xx}$라고 표현할 수 있다.

비례한다는 것을 다르게 표현하면 $U_t = kU_{xx}$라고 말할 수 있고, 이것은 1차원 공간에서의 열방정식이다.

정리하자면,

$$f(\text{공간}, \text{시간}) = \text{열}(heat)$$
$$U_t = kU_{xx}$$
$$U_t \text{ :시간에 따른 온도의 변화 속도}$$
$$U_{xx}\text{:볼록성}$$

$$U_t = U_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geq 0)$$
$$U(x,0) = \varphi(x)$$

$U(x,0)$은 initial condition(초기 조건)으로 $U(x,t)$에서 $t=0$인 것이다. 우리는 이 initial condition과 $U_t = kU_{xx}$라는 식에 푸리에 변환을 하여 열방정식의 해를 구해볼 것이다. ($k=1$로 가정)

$$\text{sol)} \quad \mathcal{F}[U_t] = \mathcal{F}[U_{xx}]$$
$$\mathcal{F}[U(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)]$$

2. 열방정식의 푸리에 변환

저번주 : 푸리에 변환은 주기를 [-L, L]에서 [-∞,∞]로 바꿔주어 주기가 없는 일반적인 함수(non periodic function)를 삼각함수로 표현하는 방법이다.

$$\mathcal{F}[f] = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

2-1. $\mathcal{F}[U_t]$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[U_t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_t \cdot e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t) \cdot e^{-ikx} dx) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}(k,t) \\ * \, U_t &= \frac{\partial U_t}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

x에 대한 식이 k에 대한 식으로 바뀌는 이유는 ? : 푸리에 변환을 할 때, 식이 다음과 같이 전환되었다. 따라서 위의 식처럼 푸리에 변환을 할 때도, 변수가 x에서 k로 바뀐다.

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt$$

2-2.$\mathcal{F}[U_{xx}]$

$\mathcal{F}[U_{xx}]$을 구하기 위해서 $\mathcal{F}[U_x]$을 먼저 구해준다.

$$\mathcal{F}[U_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_x(x,t) \cdot e^{-ikx} dx = ik \cdot \widehat{U}(k,t)$$

*부분 적분 : $f(x)g(x)$는 미분 가능하고, $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

*곱미분

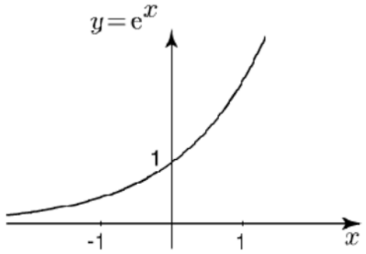
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$f'g = (fg)' - fg'$$
$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\begin{aligned}Let\ \ f' = U_x, \quad g = e^{-ikx} \\ f = U(x,t),\ g' = (-ik)e^{-ikx}\end{aligned}$$

따라서 위의 식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[U(x,t)\cdot e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)\cdot(-ik)e^{-ikx}dx$$

$$* \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[U(x,t)\cdot e^{-ix}]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(U(\infty,t)\cdot e^{-\infty} - U(-\infty,t)\cdot e^{\infty}) = 0$$



$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)\cdot(-ik)e^{-ikx}dx \\ &= (ik)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)\cdot e^{-ikx}dx \\ &= ik\cdot\widehat{U}(k,t)\end{aligned}$$

$\mathcal{F}[U_x]$을 알았으므로 우리는 $\mathcal{F}[U_{xx}]$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[U_{xx}] = (ik)^2\cdot\widehat{U}(k,t) = -k^2\mathcal{F}[U] \\ &\mathcal{F}[U_x] = ik\cdot\widehat{U}(k,t)\end{aligned}$$

2-3. $\mathcal{F}[U(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)]$

$$\widehat{U}(k,0) = \widehat{\varphi}(k)$$

2-4. 정리

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[U_t] = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}(k,t) \\ &\mathcal{F}[U_{xx}] = -k^2\widehat{U}(k,t) = -k^2\mathcal{F}[U] \\ &\widehat{U}(k,0) = \widehat{\varphi}(k)\end{aligned}$$

3. 열 방정식 구하기

지금까지 구한 내용을 바탕으로 아래의 식을 풀어 최종적으로 우리가 구하고자하는 $U(x,t)$를 구해보자.

$$\begin{aligned}&1)\quad \mathcal{F}[U_t] = \mathcal{F}[U_{xx}] \\ &2)\quad \mathcal{F}[U(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)]\end{aligned}$$

1)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left[U_t\right] = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}(k,t) \\
&\mathcal{F}\left[U_{xx}\right] = -k^2\mathcal{F}[U] \\
&\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}(k,t) = -k^2\mathcal{F}[U] = -k^2\widehat{U}(k,t)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}[U(x,0)] = \widehat{U}(k,0) \\
&\mathcal{F}[\varphi(x)] = \hat{\varphi}(k) \\
&\text{let } \hat{U}(k,t) = y = f(t) \\
&\frac{d}{dt}\widehat{U}(k,t) = -k^2\widehat{U}(k,t) \\
&\leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -k^2 y \\
&\leftrightarrow \frac{dy}{y} = -k^2 dt \\
&\leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int -k^2 dt \\
&\leftrightarrow \ln\frac{y}{y_0} = -k^2 t \\
&\leftrightarrow \frac{y}{y_0} = e^{-k^2 t} \\
&\leftrightarrow y = y_0 e^{-k^2 t} \\
&\therefore \widehat{U}(k,t) = \widehat{\varphi}(k)\cdot e^{-k^2 t} \\
&(\because y = \widehat{U}(k,t)\,,\ y_0 = \widehat{U}(k,0) = \widehat{\varphi}(k))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&* \int -k^2 dt = -k^2(t-0) = -k^2 t \\
&* \int \frac{1}{y}dy = \ln y - \ln y_0 = \ln\frac{y}{y_0}
\end{aligned}
$$

※ Convolution

푸리에 변환한 식의 곱을 역변환 할 경우, 일반적인 곱셈 형태가 아닌 합성곱 연산으로 계산이 된다.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[UV] &= \widehat{U}\widehat{V} \\
\mathcal{F}^{-1}[\widehat{U}\widehat{V}] &\neq UV \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{U}] * \mathcal{F}^{-1}[\widehat{V}] \\
&= U * V \\
(U*V)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(x-s)V(s)ds
\end{aligned}
$$

위에서 구한 $\widehat{U}(k,t)$를 합성곱을 이용해 역변환해주면 우리가 원하는 $U(x,t)$를 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{U}(k,t)] \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\varphi}(k)e^{-k^2t}\right] \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(k)] * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-k^2t}\right] \\
&= \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-k^2t}\right]
\end{aligned}
$$

$\hat{\varphi}(\alpha)$은 $\varphi(x)$로 바로 역변환해줄 수 있지만, 뒷 부분의 $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2t}]$는 푸리에 변환된 식이라는 의미인 hat 기호가 씌워져 있지 않으므로 직접 푸리에 역변환 공식을 이용해 계산해주어야 한다.

※ 푸리에 역변환 공식

$$
\mathcal{F}^{-1}(F) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk
$$

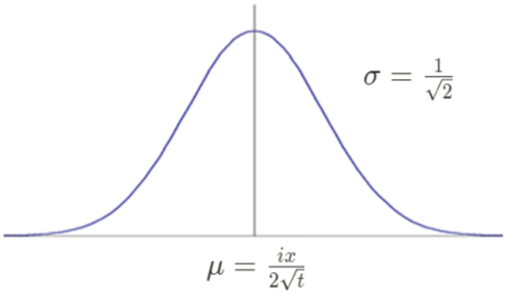
$$
\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}\cdot e^{ikx}dk
$$

$$
\begin{aligned}
\text{let} \quad & u = k\sqrt{t} \\
& \frac{du}{dk} = \sqrt{t} \to dk = \frac{1}{\sqrt{t}}du \\
& k^2t = u^2, \quad k = \frac{u}{\sqrt{t}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}\cdot e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}e^{i\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)x}\frac{1}{\sqrt{t}}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)u}\frac{1}{\sqrt{t}}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u^2-\frac{ixu}{\sqrt{t}}+\left(\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2\right)+\left(\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u-\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2}\cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2}du \\
&\text{※ pdf of N}(\mu,\sigma^2): \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})
\end{aligned}
$$

여기서 확률밀도함수를 우리가 구하려는 식과 형태를 맞춰주기 위해서

$\mu = \frac{ix}{2\sqrt{t}}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$라고 하면 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}}e^{(-(x-\frac{ix}{2\sqrt{t}})^2)}dx = 1$ 으로 정리할 수있다.



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{2}}} e^{-\left(u - \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2} du \\
&(\because \text{pdf of Normal } \mu = \frac{ix}{2\sqrt{t}},\ \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}^{-1}[e^{-k^2 t}]$를 구했으니 이를 이용하여 원래 구하려던 $U(x,t) = \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-k^2 t}\right]$를 구해보자.

$$
(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds
$$

이 식에서 $f = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},\ g = \varphi(x)$라 할 때

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \varphi(x) * \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds
\end{aligned}
$$

4. Black Scholes PDE

옵션의 페이오프에 작용하는 힘을 묘사한 것이 Black Scholes PDE이다. 이것의 도출 과정은 파생 스터디 6주차 옵션 가격에서 다루었으므로 최종 형태만 언급하고 가겠다. 다음 시간에 이 편미분 방정식에 경계조건을 사용하여 블랙숄즈식을 구해보겠다.

$$
\begin{aligned}
C(S,t) &= KV(x,\tau) = K[\frac{S}{K} \cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)] \\
&= S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \quad \Rightarrow 0 < t < T \text{ 시점에서 콜옵션의 가치}
\end{aligned}
$$

$$
rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2
$$

$$
f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - X \text{ (if } S_T \geq X) \\ 0 \quad (\text{ if } S_T \leq X) \end{cases}
$$

$*$블랙숄즈 모델의 경계조건