1. (Lemma)

↳ $X \sim N(0,t)$ 일 때, $\mathbb{E}[X^4] = 3t^2$ 임을 보여라.

Hint) Taylor's Expansion.

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{E}[e^{uX}] = e^{\frac{1}{2}u^2 t} \rightarrow \\ \mathbb{E}[e^{uX}] = \mathbb{E}\left[1 + uX + \frac{(uX)^2}{2!} + \cdots\right] \end{array} \right\}$$ u에 대한 식 비교.

2.

↳ $\mathbb{E}[W(t)W(s)] = ?$ (assume $t \geq s$)

Hint) 제 2장 Brownian Motion 이 martingale 인 부분 참고.

3. Exponential Martingale

↳ $Z(t) = e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ is martingale 증명!

Hint) $\mathbb{E}[Z(t) \mid \mathcal{F}(s)] = Z(s)$ 인 것만 보이기.

2번 테크닉 그대로 따라가기. / $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ 이므로 mgf 정의 참고.

4. Lognormal process

↳ $dS(t) = \alpha S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$

$\Leftrightarrow S(t) = e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$ (α, σ : constant)

$\ln S(t) \sim N(\mathbb{E}[\ln S(t)], Var[\ln S(t)])$

즉, $\ln S(t)$ 가 $W(t)$에 대한 식이기 때문에 $\ln S(t)$도 정규분포를 따른다.

$\mathbb{E}[\ln S(t)] = ?$, $Var[\ln S(t)] = ?$