2. PDE(Partial Differential Equation, 편미분방정식)

→ 변수가 두 개 이상

※ 열 방정식(heat equation): 열 따위의 성질이 시간에 따라 전도되는 과정을 나타내는 2차 편미분 방정식

→ f(공간, 시간) = 열(heat)

→ PDE의 한 종류

→ $U_t = \alpha^2 U_{xx}$ … ② 주변의 온도가 높거나 낮은 정도에 비례함 (x로 두 번 미분)

└ ① 온도의 시간에 따른 변화 속도는 (t로 한 번 미분)

∴ PDE 중 열 방정식을 배웠음. 이를 푸리에 변환을 통해 풀 거임.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

(조건: $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$)

← initial condition

($\because$ $u(x,t)$에서 $t=0$)

⇒ 우리는 $u(x,t)$를 알아낼 것

⇒ 그래서 위아래, 양변에 '푸리에 변환'을 씌워줄 것

sol) $\begin{cases} \mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}] \\ \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)] \end{cases}$

※ 푸리에 변환: 푸리에 급수(주기성)의 약점을 보완하기 위해 제안된 적분 변환.

$$\mathcal{F}[f] = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{ix\alpha}\, dx$$

③ $\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t \cdot e^{-ix\alpha}\, dx$ … u_t는 x에 대한 함수가 맞다! ($\because$ $u_t = u_t(x,t)$)

→ $u_t = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$

$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \cdot e^{-ix\alpha}\, dx} \right)$

$= \hat{u}(\alpha, t)$ … x 대신 α로 표시됨

$= \frac{d}{dt} \hat{u}(\alpha, t)$ … ∂ → d ?

$\mathcal{F}[u_x]$를 먼저 구하고, 이를 통해 $\mathcal{F}[u_{xx}]$를 구할 것.

① $\mathcal{F}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)\cdot e^{-i\alpha x}\,dx$

※ 부분적분? f(x), g(x)는 미분 가능하고 [a, b]에서 연속일 때,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \underbrace{\left[f(x)g(x)\right]_a^b}_{f(b)g(b)-f(a)g(a)} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

⇒ How? 곱미분; $(fg)' = f'g + fg'$

$$f'g = (fg)' - fg'$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Let $u_x = f'$, $e^{-i\alpha x} = g$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\underbrace{u(x,t)}_{\neq u_x(x,t)}\cdot e^{-i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{u(x,t)}_{\neq u_x(x,t)}\cdot(-i\alpha)\cdot e^{-i\alpha x}\,dx\right]$$

$$= u(\infty,t)\cdot\underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0} - u(-\infty,t)\cdot\underbrace{e^{\infty}}_{\to\infty}$$

. 그러나 by 슈바르츠, $u(-\infty,t)$가 훨씬 빠르게 감소

$$= i\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\cdot e^{-i\alpha x}\,dx$$

$$= i\alpha\cdot\hat{u}(\alpha,t)$$ … $\hat{u}(x,t)$ 아님!

② 앞에서 했듯이 따라하면 ②도 구할 수 있다고 함. (저는 안 해봤습니다)

하지만 구하는 skip할 것이고 간단하게 해결하고 넘어갈 것.

$$\mathcal{F}[u_x] = i\alpha\cdot\hat{u}(\alpha,t)$$

↓

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = (i\alpha)^2\cdot\hat{u}(\alpha,t) = -\alpha^2\mathcal{F}[u]$$

sol) $\begin{cases} \mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}] & \cdots Ⓐ \\ \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)] & \cdots Ⓑ \end{cases}$

③ ; $\mathcal{F}[u_t] = \frac{d}{dt}\hat{u}(\alpha,t)$

② ; $\mathcal{F}[u_{xx}] = -\alpha^2\mathcal{F}[u]$) Ⓐ

$\hat{u}(\alpha,0) = \hat{\varphi}(\alpha)$ $\cdots$ Ⓑ . 푸리에 변환; $x \to \alpha$

$\therefore \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\alpha,t) = -\alpha^2\mathcal{F}[u] = -\alpha^2\hat{u}(\alpha,t) \\ \hat{u}(\alpha,0) = \hat{\varphi}(\alpha) \end{cases}$

※ Let $\hat{u}(\alpha,t) = y = f(t)$ 3단원 p.1 참고

$\frac{d}{dt}y = -\alpha^2 y$, by 변수분리 + ODE 간편계산 $\frac{dy}{y} = -\alpha^2 dt$,

부정적분 $\int \frac{1}{y}dy = \int -\alpha^2 dt$, $\ln y - \ln y_0 = -\alpha^2(t-0)$, $\ln\frac{y}{y_0} = \ln e^{-\alpha^2(t-0)}$,

$\frac{y}{y_0} = e^{-\alpha^2 t}$, $y = y_0 \times e^{-\alpha^2 t}$

$y = \hat{u}(\alpha,t)$ & $y_0 = f(0) = \hat{u}(\alpha,0) = \hat{\varphi}(\alpha)$ 이므로

$\therefore \hat{u}(\alpha,t) = \hat{\varphi}(\alpha)\cdot e^{-\alpha^2 t}$

※ convolution (합성곱)

$f \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \hat{f}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}[uv] = \hat{u}\hat{v}$

$\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}\hat{v}] \neq uv$

$= \underline{u * v} = uv$

(이 값을 계산하면 됨)

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)\,ds$$

→ f와 g의 순서는 상관없음.

$u(x,t)$를 푸리에 변환한 $\hat{u}(\alpha,t) = \hat{\varphi}(\alpha)\cdot e^{-\alpha^2 t}$ 를

푸리에 역변환하면 $u(x,t)$를 알 수 있는 것이다.

$\therefore\ u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\alpha)\cdot e^{-\alpha^2 t}]$

→ $u * v$ 활용 풀

$= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\alpha)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2 t}](x)$

$= \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2 t}](x)$

^ 표시가 없으므로 오류.

$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha x}\,d\alpha$ --- 역변환 풀

→ Let $\alpha\sqrt{t} = u$, $\frac{du}{d\alpha} = \sqrt{t}$, by ODE $d\alpha = \frac{du}{\sqrt{t}}$

$\alpha^2 t = u^2$

$\alpha = \frac{u}{\sqrt{t}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cdot e^{i\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)x}\cdot\frac{du}{\sqrt{t}}$

→ $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 앞으로 이동 & $u-x$ 자리 바꿈

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cdot e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)u}\,du$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u-\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2/4}\,du$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\cdot e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2/4}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u-\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2}\,du}_{ⓐ}$

※ 정규분포의 pdf(확률밀도함수). $X \sim N(u, \sigma^2)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$

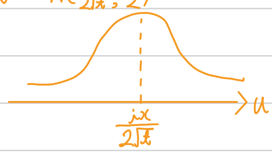
$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1$

⇒ $2\sigma^2 = 1$ 이라 가정 ($\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u-\frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2}du$ 와 꼴을 맞춰주기 위해)

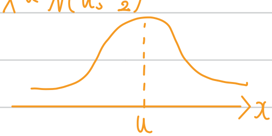
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\, e^{-\frac{(x-u)^2}{1}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(x-u)^2}\,dx$

$\therefore \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-u)^2}\,dx}_{ⓑ} = \sqrt{\pi}$

$U \sim N\left(\frac{ix}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2}\right)$



$X \sim N\left(u, \frac{1}{2}\right)$



$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2/4} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$\therefore u(x,t) = p(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2 t}]$$

$$= p(x) * \frac{1}{\sqrt{2t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\, g(s)\; ds$$

→ f와 g의 순서는 상관없음.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}} \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \; ds$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \; ds$$

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \cdot e^{-(x-s)^2/4t} \; ds$$