5. Stochastic Calculus-2

1. $\int_0^T W_t dW_t$

Ito Integral의 예시로, 적분되는 함수가 위너 자기 자신일 때를 살펴보자.

$$\Delta U(t) = \frac{\partial U}{\partial t}\Delta t + \frac{dU}{\partial X}\Delta X(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial X}\Delta t \Delta X(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(\Delta X(t))^2$$
$$+\cdots$$

저번주의 $U(t)$의 테일러 전개식을 바탕으로,

$$\begin{aligned} &U = X(t)^2, \quad X(t) = W(t)\text{라고 하면,} \\ &dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}dX(t)dX(t) \\ &\ = 2X(t)dX(t) + dX(t)dX(t) \end{aligned}$$

이제 $X(t)$를 $W(t)$라고 하면

$$\begin{aligned} &dU = 2W(t)dW(t) + dW(t)dW(t) = 2W(t)dW(t) + dt \\ &\text{적분하면} \\ &\int_0^t d(W(s))^2 ds = \int_0^t 2W(s)dW(s) + \int_0^t 1ds \\ &W(t)^2 - W(0)^2 = 2\int_0^t W(s)dW(s) + t \\ &\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

일반적인 적분의 결과와 비교해보자.

$$\int_0^t XdX = \frac{1}{2}t^2$$

미분식에서 dt가 튀어나오듯이, 적분식에서는 t가 추가되는 것을 알 수 있다. 이에 따라 위 에서 구한 식과 Ito Isometry를 조합해 우리는 W_t로 미분을 할 때, 일반적인 변수와 W_t로 구성되는 확률과정을 적분해줄 수 있게 된다.

2. 주가 확률과정 모델링(Log-normal distribution)

블랙숄즈 모형에서 가정하는 주가에 대한 식을 모델링할 것이다.

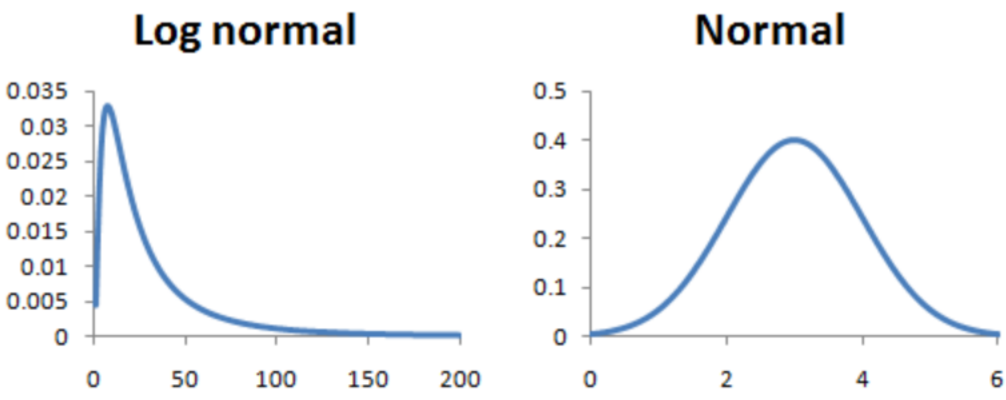
앞시간에 $X(t)$를 기초자산으로 놓고 이를 변수로 갖는 함수에 대해 공부하였다.

$$\Delta X(t) = a \cdot \Delta t + b \cdot \Delta W(t)$$

이번에는 $X(t)$만 $S(t)$로 바꾸어서 식을 정의해 보겠다.

$$\Delta S(t) = a \cdot \Delta t + b \cdot \Delta W(t)$$

그런데 위의 식은 음수가 될 수도 있어서 이 식 자체를 주가로 모델링하기에는 무리가 있다.



새로운 모델링을 위해서는 새로운 가정이 필요하다.

그것은 주가 $S(t)$가 log-normal distribution을 따른다는 것이다. log-normal distribution이란 자연로그를 취했을 때, 정규분포를 따른다는 것이다.

즉 주가 $S(t)$에 자연로그 ln을 씌어준 $lnS(t)$ 정규분포를 따른다는 것이다.

그러면 왜 이런 가정을 하는 것일까? 앞에서 이야기 했듯이 그 이유는 주가는 음수가 될 수 없기 때문이다.

산술 브라운운동으로 주식 가격을 모델링 할 경우 주식 가격은 이론적으로 음의 값을 가질 수 있는 문제가 발생한다. 이 문제를 보완하기위해 산술 브라운 운동에 exponential (e) 를 씌운 브라운 운동을 기하브라운운동이라고 한다. (2주차 교안 GBM에서 발췌)

$$\ln S_T \sim \mathrm{N}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \sigma^2/2\right)T, \sigma^2 T\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$E\left(S_T\right) = S_0 e^{\mu T}$$
$$\operatorname{Var}\left(S_T\right) = S_0^2 e^{2\mu T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$$

따라서 이 시간에는 기초자산 $S(t)$에 자연로그를 취해 log-normal distribution을 따르는 주가 $S(t)$를 모델링해볼 것이다.

$$1. \quad dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

주가 $S(t)$의 수익률식은 새로운 S(t)를 모델링하는 데 활용할 것이다. 따라서 이를 미리 정의해 준다.

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \alpha\Delta t + \sigma\Delta W(t)$$
$$\Delta t \to 0, \; \Delta W(t) \to 0$$
$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t)$$
$$* \quad \alpha : \text{무위험수익률}, \quad \sigma : \text{변동성}$$

- 수익률은 음수(-)가 될 수 있기에 저 식을 그대로 사용할 수 있다.

$$*Y(t) = \ln S(t) = U\left(S(t)\right)$$
$$\text{자연로그를 } \ln\text{을 씌어줌}$$

지금부터 지난 시간에 배운 이토 formula의 기본항을 가지고 로그 수익률 $lnS(t)$의 식을 전개하겠다.

$$2. \quad dY(t) = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial S}dS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}dS(t)dS(t)$$
$$* \quad (lnS(t))' = \frac{1}{S(t)}$$
$$*dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{S(t)}dS(t) - \frac{1}{2S(t)^2}dS(t)dS(t) \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t) \\
&* \quad \frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t) \\
&* \quad \frac{1}{2}(\frac{dS(t)}{S(t)})^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 dt
\end{aligned}
$$

$$\int_0^t d(Y(u))du = \int_0^t d(\ln S(u))du = \int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)du + \int_0^t \sigma dW(u)$$

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$$

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \ln e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

$$\ln S(t) = \ln(S(0) \cdot e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)})$$

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S(0)\exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)\} \\
&= S(0)e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}
\end{aligned}
$$

$S(0)$는 기초자산의 시점 0일 때의 가격이고, $e^{(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)}$은 연속복리를 가정하여 지수로 수익률을 취하고 있는 식이다. → 자연상수 e의 지수 : $\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$

따라서 $S(0)e^{(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)}$은 0보다 크거나 같게 된다.

3. Itô Formula

Itô formula는 1개 이상의 모수에 의해 결정되는 함수의 단기 변화는 각각의 예상가능한 움직임과 예상불가능한 움직임으로 나눠서 표현한 공식이다.

우리는 이를 나중의 파생상품의 가격 결정 공식 증명을 위한 계산에 사용한다.

저번시간에 이토 확률 과정을 따르는 파생상품 $Y(t) = U(t, X(t))$를 테일러 전개로 나타내어

$$\left(\frac{dU}{dt} + \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{dx^2}\right)dt + \sigma \cdot \frac{dU}{dx}dW(t) = L^0Udt + L^1UdW(t)$$

위와 같은 식을 도출했다. 우리는 이를 Itô formula 이라고 불렀으나, Itô lemma 혹은 Itô-Doeblin 보조정리 라고도 부를 수 있다.

이번 장에서는 Itô-formula를 f 함수의 형태로 테일러 전개 식으로 간단하게 정리하려고 한다.

$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + C_4(x-a)^4 + \cdots$
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots$

$$df(W(t)) = \frac{1}{1!}f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2!}f''(W(t))dW(t)dW(t) + \frac{1}{3!}f'''(W(t))dW(t)dW(t)dW(t) + \cdots$$

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt$$

$$f(W(t)) - f\left(W\left(t_0\right)\right) = \int_{t_0}^t f'(W(u))dW(u) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t f''(W(u))du$$

4. Itô Formula for Brownian motion

이번 절은 앞에서 배운 Itô Formula의 확장형이다. 앞에서는 1개의 변수만을 가지고 식을 전개했다면

이번 장에서는 2개의 변수를 가지고 있는 함수 f를 적분하는 식을 보여줄 것이다.

$W(t), \quad t \geq 0$인 브라운 운동이 있다.

함수 $f(t, W(t))$ 가 있을 때, 여기서 편미분을 하면

*편미분은 다변수 함수의 특정 변수를 제외한 나머지 변수를 상수로 간주하여 미분하는 것이다.

*변수가 2개이기에 편미분을 해줘야 한다.

$f_t(t, W(t)), f_W(t, W(t)), f_{WW}(t, W(t)), \ldots$이렇게 식이 전개 될 것이다. 이 때에 $T \geq 0$이고, 적분을 취해주면

$$f(T, W(T)) = f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))dt + \int_0^T f_W(t, W(t))dW(t) \\ + \frac{1}{2}\int_0^T f_{WW}(t, W(t))dt$$

이를 테일러 전개 식으로 증명하면

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(t_{j+1}, W\left(t_{j+1}\right)\right) - f\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f_t\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} f_W\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{WW}\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)^2$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} f_{tW}\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)^2 + \ldots$$

이 때에 n을 무한대로 보내 적분을 취해주면

$\sum_{j=0}^{n-1} f_t\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) \quad \rightarrow \quad \int_0^T f_t(t, W(t))dt$

$\sum_{j=0}^{n-1} f_W\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right) \quad \rightarrow \quad \int_0^T f_W(t, W(t))dW(t)$

$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{WW}\left(t_j, W\left(t_j\right)\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^T f_{WW}(t, W(t))dt$

이렇게 각각 수렴한다.

그리고 다른 식들은 $dtdt = 0, dwdt = 0, dwdw = dt$공식에 의해 0으로 수렴한다.

$$f(T, W(T)) = f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))dt + \int_0^T f_W(t, W(t))dW(t) \\ + \frac{1}{2}\int_0^T f_{WW}(t, W(t))dt$$

이때, 나머지 적분들은 t에 대해서 적분하기 때문에 문제가 없지만, dW(t)의 변수로 적분하는 $\int_0^T f_W(t, W(t))dW(t)$의 형태는 Ito Integral의 체계를 이용해 처리해야 한다.

5. Itô formula for an Itô Process

이제 위의 Ito Process를 Ito formula에 적용할 것이다. 적용해 볼 것이다.

5.1 Itô Process

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma^2(s)ds\right] < \infty,\ \int_0^t |\alpha(s)|ds < \infty$$

$$\text{Let W(t)}, t \geq 0 \text{ 인 Brownian motion이다.}$$
$$\mathcal{F} \text{ be an associated filtration.}$$
$$\text{An Ito Process is a stochastic process of the form}$$
$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$$
$$\text{where X(0) is a non- random and } \sigma(u) \text{ and}$$
$$\alpha(u) \text{ are adapted stochastic process.}$$

$$*dX(t) = \alpha(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

5.1. 적용

$$f(T, W(T)) = f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))dt + \int_0^T f_X(t, W(t))dW(t)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^T f_{XX}(t, W(t))dt$$

정확한 적용은 Ito formula의 W(T)가 들어가는 자리에 X(T)를 넣은 것과 같다.

$$f(T, X(T)) = f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))dt + \int_0^T f_X(t, X(t))dX(t)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^T f_{XX}(t, X(t))dt$$

$dX(t)$자리에 $\sigma(t)dW_t + \alpha(t)dt$를 넣으면 다음과 같이 전개된다.

$$= f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t))dt + \int_0^T f_X(t, X(t))\sigma(t)dW_t + \int_0^T f_X(t, X(t))\alpha(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{XX}(t, X(t))\sigma^2(t)dt$$

이를 미분하면

$$df = (f_t + \alpha(t)f_X + \frac{1}{2}\sigma^2(t)f_{XX})dt + \sigma(t)f_X dW_t$$

이를 저번주 교안의 5절과 비교해보자.

$$dU(t) = (\frac{dU}{dt} + \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{dx^2})dt + \sigma\frac{dU}{dx}dW(t)$$

지난주와 결과가 같지만, 다음의 증명 방식의 차이가 존재한다.

4. Stochastic Calculus-1 의 증명

1. U 함수의 변화량을 바탕으로 테일러 전개
2. 미분방정식으로 나온 결과에 X(t) 대입
3. 대입 후 계수 정리
4. $dWdW, dWdt, dtdt$ 소거
5. 소거 후 ΔW와 Δt에 대해 정리

5. Stochastic Calculus-2 의 증명

1. f 함수로 테일러 전개
2. 결과를 적분형으로 표현
3. 적분형에 X(t) 대입
4. 미분

4주차에서는 테일러 전개의 기본에 충실하기 위해, 5주차에서는 적용이 훨씬 쉽고 일반적인 형태의 Ito formula를 다루기 위해 두 가지 증명 방식을 모두 다뤘다.

6. 2-dimensional Itô Formula

6.1. 증명

적분형으로 정의된 Ito Formula의 편리함은 그 확장성에 있다. 3 개의 변수를 받는 함수를 적분하려고 할 때, 다음과 같은 공식을 이용할 수 있다.

$$f(t, X(t), Y(t)) \rightarrow f\text{로 표기}$$
$$let\ X(t), Y(t)\ be\ It\hat{o}\ process$$

이를 다변수 테일러 전개하면 다음과 같이 나온다.

$$df = f_t dt + f_x dX(t) + f_y dY(t)$$
$$+\tfrac{1}{2} f_{tt} dtdt + \tfrac{1}{2} f_{xx} dX(t)dX(t) + \tfrac{1}{2} f_{yy} dY(t)Y(t)$$
$$+f_{tx} dtdX(t) + f_{ty} dtdY(t) + f_{xy} dX(t)dY(t) + \cdots$$

$$dtdX(t) = dt(\sigma(t)\ dW(t) + \alpha(t)dt) = 0$$
$$dtdY(t) = dt(\sigma_1(t)dW(t) + \alpha_1(t)dt) = 0$$

0인 것들, 그리고 3차항 이상은 전부 소거되기 때문에 다음의 항들만 남는다. 따라서 다변수 함수의 Ito formula는 다음과 같다.

$$df = f_t dt + f_x dX(t) + f_y dY(t) + \frac{1}{2} f_{xx} dX(t)dX(t) + f_{xy} dX(t)dY(t) + \frac{1}{2} f_{yy} dY(t)dY(t)$$

이때, f함수 내부에 포함되는 W_t 때문에 f는 t에 대해서 미분 불가능하다고 생각이 들 것이다. 따라서 f_t의 표현형에 대한 의문이 들 것이다. 하지만 편미분의 경우에서는 t를 제외한 변수인 W(t)를 상수 취급해주기 때문에, W(t)는 그냥 0이 돼서 f_t와 같은 표현이 가능하다.

6.2. 응용

2-dimensional Ito formula를 이용해, 기존 미분의 곱셈 법칙과 비슷한 **Ito Calculus**의 곱셈 법칙을 얻을 수 있다.

$$ODE\text{의 곱셈법칙} : d(XY) = Y \cdot dX + X \cdot dY$$
$$Ito\text{의 곱셈법칙} : d(XY) = Y \cdot dX + X \cdot dY + dX \cdot dY$$

이러한 곱셈법칙은 다음의 과정을 통해 증명된다.

$$f = XY$$
$$\text{테일러 전개식에서 X,Y를 각각 x,y로 표시}$$

$$df = f_t dt + f_x dX(t) + f_y dY(t) + \frac{1}{2} f_{xx} dX(t)dX(t) + f_{xy} dX(t)dY(t) + \frac{1}{2} f_{yy} dY(t)dY(t)$$

$$*f_t = 0,\ f_x = Y,\ f_y = X,\ f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0, f_{xy} = 1$$

$$df = d(XY) = f_x dX(t) + f_y dY(t) +$$
$$f_{xy} dX(t)dY(t) +$$
$$= YdX + XdY + dXdY$$