1 Hilbert Bases

$\{\omega_j \in H\}$是H中的一组归一化正交向量，对于$\forall u \in H$，定义$\overset{\wedge}{u_j} = (u, \omega_j), j \in I$

定义$u_n = \sum_{k=1}^{n} \overset{\wedge}{u_{j_k}} \omega_{j_k}$,$j_1 \dots j_n \in I$。u_n其实就是u在$\{\omega_{j_k}\}$所张成的子空间中的投影。$u - u_n$和$\{\omega_{j_k}\}$所张成的子空间正交。$\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u - u_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\overset{\wedge}{u_{j_k}}|^2 + \|u - u_n\|^2$ 所以对于$\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$，$\sum_{k=1}^{n} |\overset{\wedge}{u_{j_k}}|^2 \leq \|u\|^2$，我们就可以得到Bessel Inequality

$$\sum_{j \in I} |\overset{\wedge}{u_j}|^2 \leq \|u\|^2$$

如果$u \in H$，我们可以得到一个序列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，（u_n在H中是柯西的）。这是因为$\|u_n - u_m\|^2 = \sum_{n<k\leq m} |\overset{\wedge}{u_{j_k}}|^2 \to 0$。（Bessel Inequatility和$\|u_n\|^2$是递增的）。记$u' = \lim_{n\to\infty} u_n$。$u'$是在$\{\omega_j\}$张成的子空间的闭包上的。

$\{\omega_j\}$是H的一组基，如果H可以由$\{\omega_j\}$所张成，或者说$u = \lim_{n\to\infty} u_n$等价地$\|u\|^2 = \sum_{j\in I} |\overset{\wedge}{u_j}|^2$（Parseval Equation）。

定理 1.1. *H是可分的Hilbert空间，T是紧致的厄密算符（a compact Hermitian operator）。存在一列λ_n和ω_n使得*

1. $\lambda_n \in R$
2. $\{\omega_n\}$*是HilBert 空间H的一组基*
3. $T\omega_n = \lambda_n \omega_n$

例 1.1. $I = [0, \pi]$, $H = L^2(I)$，$T : L^2 \to L^2$ $Tf = u$，u是一个迪利克雷问题的解

$$-u'' = f$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

根据*Lax-Milgram*引理，我们有$\|Tf\|_1 \leq C\|f\|$。$\|\cdot\|_1$是*Sobolev*空间$H^1(I)$的范数。$H^1(I)$**在**$L^2(I)$**中是紧的，所以**T**是紧的。**

T的特征向量满足

$$-(\lambda_n\omega_n)'' = \omega_n$$
$$\omega_n(0) = \omega_n(\pi) = 0$$

容易得到$\omega_n(x) = \sqrt{2}sinnx \quad \lambda_n = \frac{1}{n^2}$，从上面的定理可以得到$\forall u \in L^2(0,\pi)$，可以写为

$$u(\theta) = \sum_{n\geq 1} \hat{u}_n \omega_n(\theta)$$

$\omega_n(x) = \sqrt{2}sinnx$，$\hat{u}_n = (u, \omega_n) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi u(\theta)\sin n\theta d\theta$

例 1.2. $T : L^2 \to L^2 \qquad Tf = u$，$u$是$Neuman$问题的解。

$$-u'' + u = f$$
$$u'(0) = u'(\pi) = 0$$

同上例一样我们可以得到T的紧密性。T的特征向量满足

$$-(\lambda_n\omega_n)'' + \lambda_n\omega_n = \omega_n$$
$$\omega'(0) = \omega_n'(\pi) = 0$$

可以解出$\lambda_n = \frac{1}{n^2+1}$，$\omega_0 = 1$，$\omega_n = \sqrt{2}cosnx$。我们根据上面的定理可以知道$u \in L^2$可以写为

$$u(\theta) = \sum_{n\geq 0} \hat{u}_n \omega_n(\theta)$$

$\hat{u}_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi u(\theta)\cos n\theta d\theta$

2 傅里叶级数在$L^2(\pi,\pi)$

在复$Hilbert$空间中考虑$\omega_n(\theta) = e^{in\theta}$

定理 2.1. $\{\omega_n\}$是$Hilbert$基

定理解决了在L^2空间中傅里叶级数的以范数收敛问题，因为ω_n是L^2中的基，但是这不能得到逐点收敛。

傅里叶变换：如果u是2π周期函数，我们设

$$f(x)=\begin{cases}u(x) & ifx\in I\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$f(x)$的傅里叶变换是

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathcal{R}}e^{-i\omega x}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{I}e^{-i\omega x}u(x)dx$$

因此$\hat{f}(k)=\sqrt{2\pi}\hat{u}_k$

3 傅里叶级数的一致收敛性

首先考虑$\hat{u}_n\leq M(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(x)\right|dx$
如果$v=u'$，那么$\hat{u}_n=\frac{\hat{v}_n}{in}$。
如果u是α次可导的，那么$\hat{u}_n=\frac{\hat{v}_n}{(in)^\alpha}$，$\hat{v}_n$是$v=u^{(\alpha)}$的傅里叶系数。

$$|\hat{u}_n|\leq\frac{M(u^{(\alpha)})}{|n|^\alpha}$$

定理 3.1. 如果u是二阶可导，它的一阶导数连续而且是周期2π的，那么它的傅里叶级数一致收敛于u

证明. 这个证明是非常直观的$\sum\limits_{n\in Z}\left|\hat{u}_ne^{inx}\right|\leq\hat{u}_0+\sum_{n\neq 0}\frac{M_2}{n^2}$，绝对收敛可以推出一致收敛。 □

4 The Fourier Series of a Distribution

$I=[-\pi,\pi]$，$C_p^\infty(I)$是函数空间各阶导数存在，连续且2π周期。

在上一节中我们已经知道$\phi \in C_p^{\infty}(I)$，$\forall \alpha > 0$存在C_α满足

$$\left|\hat{\phi}_n\right| \leq \frac{C_\alpha}{|n|^\alpha}$$

等价$\phi \in C_p^{\infty}(I)$

$$\forall \beta > 0 \quad \lim_{|n| \to \infty} \left|\hat{\phi}_n\right| |n|^\beta \to 0$$

$C_p'(I)$是$C_p^{\infty}(I)$的对偶空间，2π周期函数。定义$< \cdot, \cdot >$，$< f, \phi >= (f, \phi)$。$f \in L^2(I) \quad \phi \in C_p^{\infty}(I)$。

$f \in D_p'(I)$，定义傅里叶系数$(\hat{f}_n)$，$\hat{f}_n =< f, \omega_n >, \quad \omega_n = e^{inx} \in C_p^{\infty}(I)$

现在定义周期分布意义下的导数：

$$< f^{(\alpha)}, \phi > \stackrel{def}{=} (-1)^\alpha < f, \phi^{(\alpha)} > \quad \phi \in C_p^{\infty}(I)$$

定义$g = f^{(\alpha)} \in D_p'(I)$，我们可以得到

$$\hat{g_n} = (in)^\alpha \hat{f}_n$$

证明是根据定义：

$$\begin{aligned} < f^{(\alpha)}, \phi > &= (-1)^\alpha \sum_{n \in \mathcal{Z}} \hat{f}_n \overline{\hat{v_n}} \\ &= (-1)^\alpha \sum_{n \in \mathcal{Z}} \hat{f}_n \overline{(-in)^\alpha \hat{\phi}_n} \\ &= (in)^\alpha \sum_{n \in \mathcal{Z}} \hat{f}_n \overline{\hat{\phi}_n} \end{aligned}$$

下面考虑$D_p'(I)$中的傅里叶级数的收敛性$\sum_{n \in \mathcal{Z}} \hat{f}_n \omega_n$。

首先考虑f是狄拉克分布（狄拉克分布是在除零点外，在其余点处都为0，在零点处为$+\infty$，在整个域上积分为1）

命题 4.1. *在$D_p'(I)$，δ狄拉克函数的傅里叶级数收敛*

证明略

定理 4.1. *$f \in D_p'(I)$的傅里叶级数收敛到$f \in D_p'(I)$*

证明. $f*\delta=f\quad lim_{N\to\infty}\delta_N=\delta$，所以$f=f*\delta=\lim_{N\to\infty}f*\delta_N$

$$f*\delta_N=f*\sum_{|n|\leq N}\omega_n=\sum_{|n|\leq N}f*\omega_n$$

$$f*\omega_n(\theta)=<f,\hat{\omega_{n,\theta}}>$$

$$\omega_{n,\theta}=\omega_n(\theta-\omega)=e^{in\theta}-e^{-in\omega}$$

$$f*\omega_n(\theta)=e^{in\theta}<f,\omega_n>=\hat{f}_n\omega_n(\theta)$$

可以得到

$$f=\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\leq N}\hat{f}_n\omega_n$$

□

5 Periodic Sobolev Space

$I=]-\pi,\pi[$，对$u\in L^2(I)$我们定义一个范数$\|\cdot\|$

$$\|u\|_r=(\sum_{m\in\mathcal{Z}}(1+m^2)^r|\hat{u}_m|^2)^{1/2}$$

定义空间$H_p^r(I)$，

$$H_p^r(I)=\{u:u^{(\alpha)}\in L^2(I),\alpha=0,\ldots,r\}$$

在该空间上定义范数$\left|\|u\|\right|_r=(\sum_{\alpha=0}^r C_r^\alpha\|u^{(\alpha)}\|^2)^{1/2}$，$C_r^\alpha$是二项式系数。注意$r=0$时，$\|u\|_0=\|u\|_{L^2}$。$r=1$时，$\|u\|_1=(\|u\|^2+\|u^{(1)}\|^2)^{1/2}$

命题 5.1. $C_p^\infty(I)$在$H_p^r(I)$中稠密

证明. $u\in H_p^r(I)$，$u_N=P_Nu\to u$。

此外

$$(P_Nu)^{(\alpha)}=\sum_{|n|\leq N}(in)^\alpha\hat{u}_n\omega_n=P_Nu^{(\alpha)}$$

$P_N u$一致收敛到u，所以$(P_N u)^{(\alpha)}$收敛到u^{α}，所以$u_N^{(\alpha)}$收敛到$u^{(\alpha)} \in L^2(I)$ 注意

$$\|u - u_N\|_r \to 0 \quad N \to \infty$$

，证毕 $\square$

定义空间$\overset{*}{H}^r = \{u \in L^2(I) : \|u\|_r < +\infty\}$，定义范数$\big|\|u\|\big|_r = (\sum_{m \in \mathcal{Z}} (1 + m^2)^r \|\hat{u}_m\|^2)^{1/2}$

命题 5.2. 空间$\overset{*}{H}^r(I)$和H_p^r是相同的，范数$\big|\| \cdot \|\big|_r$和$\| \cdot \|_r$是相符的。

证明. $u \in \overset{*}{H}^r(I)$，那么$\sum_{m \in \mathcal{Z}} m^{2\alpha} |\hat{u}_m|^2 < +\infty, 0 \le \alpha \le r$。所以$u^{(\alpha)} \in L^2(I), 0 \le \alpha \le r$。相反方向也是一样的。最后

$$\big|\|u\|\big|_r^2 = \sum_{\alpha=0}^{r} C_r^{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{Z}} m^{2\alpha} |\hat{u}_m|^2 = \sum_{m \in \mathcal{Z}} (1 + m^2)^r |\hat{u}_m|^2 = \|u_r\|^2$$

$\square$

$\overset{*}{H}_p^r$中r可以定义为非整数，基于上面的命题我们也可以把$H_p^r(I)$的定义推广到r为实数。

在周期的Sobolev spaces中，我们给出误差估计。

定理 5.1. $r, s \in \mathcal{R} \quad 0 \le s \le r$，然后有$u \in H_p^r(I)$，

$$\|u - P_N u\|_s \le (1 + N^2)^{\frac{s-r}{2}} \|u\|_r$$

证明.

$$\begin{aligned}
\|u - P_N\|_s^2 = \sum_{|m| > N} (1 + m^2)^s \|\hat{u}_m\|^2 &\le (1 + N^2)^{s-r} \sum_{|m| > N} (1 + m^2)^r \|\hat{u}_m\|^2 \\
&\le (1 + N^2)^{s-r} \sum_{|m| \in \mathcal{Z}} (1 + m^2)^r \|\hat{u}_m\|^2
\end{aligned}$$

$\square$

这个说明$P_N u$对u的近似是$O(N^{-r})$的，误差是随着r减小的，所以u越正则，收敛越好。

命题 5.3. *(Sobolev Inequation)存在常数C，使得*

$$\|u\|_{L^\infty}^2 \le C\|u\|_0\|u\|_1, \qquad \forall u \in H_p^1(I)$$

特别$H_p^1(I) \to L^\infty(I)$

通过上面的定义，我们可以得到用L^∞范数的误差估计。

$$\|u - P_N u\|_{L^\infty(I)}^2 \le C(1+N^2)^{-r/2}(1+N^2)^{\frac{1-r}{2}} = C(1+N^2)^{1/2-r}$$

因此

$$\|u - P_N u\|_{L^\infty(I)} = O(N^{1/2-r}) \qquad r \ge 1$$

P_N一致收敛到u, $\quad u \in H_p^1(I)$。这个一致收敛的条件比上一节更强。

6 The Galerkin Method

L为一阶算子，$Lu = a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(au)}{\partial x}$，$a \in C_p^\infty(I)$是正则的，实周期函数。

L是斜对称算子（使用分部积分公式可以得到）

$$(Lu, v) = -(u, Lv) \qquad u, v \in D(L) \overset{def}{=} H_p^1(I)$$

L是有界算子从$H_p^k(I)$到H_p^{k-1}**这个是为什么**

在L^2空间中考虑问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 \quad t \ge 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

定理 6.1. *$s \le 1$, $\quad u_0 \in H_p^s(I)$，那么上面问题有唯一解$u \in C^0(0,T; H_p^s(I))$。存在常数C与u和t无关，满足$\|u(\cdot,t)\|_s \le C\|u_0\|_s \quad t \in [0,T]$*

证明. **解的存在性没有证明。**在假设解已存在的条件下，证明解的极大原理。

引入算子$\wedge^s : H_p^s(I) \to L^2(I)$

$$u = \sum_{n\mathcal{Z}} \hat{u}_n e^{inx} \to \wedge^s u = \sum_{n\in\mathcal{Z}} (1+n^2)^{s/2} \hat{u}_n e^{inx}$$

具有关系$\|u\|_s = \| \wedge^s u\|_0$，这是简单的直接写出关系式就可以看出。$s = 2$时，$\wedge^s u = (1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u$。

u是方程的解，$K = [\wedge^s, L] = \wedge^s L - L\wedge^s$。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|_s^2 =& \frac{\partial}{\partial t}\| \wedge^s u(t)\|_0^2 = (\wedge^s \frac{\partial u}{\partial t}, \wedge^s u) + (\wedge^s u, \wedge^s \frac{\partial u}{\partial t}) \\
=& -(\wedge^s L u, \wedge^s u) - (\wedge^s u, \wedge^s L u) \\
=& -(L \wedge^s u, \wedge^s u) - (Ku, \wedge^s u) - (\wedge^s u, L\wedge^s u) - (\wedge^s u, Ku) \\
=& -(Ku, \wedge^s u) - (\wedge^s u, Ku)
\end{aligned}$$

为什么?K是s阶算子。$\|Ku\|_0 \leq \|u\|_s$ 然后我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|_s^2 \leq 2\|Ku\|_0 \| \wedge^s u\|_0 \leq 2C\|u\|_s^2$$

$$\|u(t)\|_s^2 \leq e^{2Ct}\|u_0\|_s^2$$

□

仍然对上一问题的方程组我们使用一种空间半离散化方法。我们要在$e^{inx}_{|n|\leq N}$张成的空间S_N上寻找方程的近似解$u_N(t) = u_N(\cdot, t)$。 u_N要满足以下条件

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial u_N}{\partial t} + Lu_N, v_N) =& 0, \qquad \forall v_n \in S_N \\
(u_N(0) - u_0, v_N) =& 0, \qquad \forall v_N \in S_N
\end{aligned}$$

定义$L_N = P_N L$，P是投影算子$L^2 \to S_N$, 因为$(\frac{\partial u_N}{\partial t} + Lu_N, v_N) = 0, \qquad \forall v_n \in S_N$，所以$\frac{\partial u_N}{\partial t} + Lu_N$在$S_N$上的投影为0。那我们可以将上面两个内积形式的方程写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_N}{\partial t}+L_N u_N =&0\\ u_N(0)=&P_N u_0\end{aligned} \tag{1}$$

由于L的反对称性，L_N在S_N上也是反对称的。这是因为P算子在S_N上不起作用，L的反对成称性决定了L_N的反对称性。$(L_N u_N, v_N) = -(u_N, L_N v_N) \quad u_N, v_N \in S_N$

重要：下面的定理阐述了u_N是如何收敛到u的

定理 6.2. $u_0 \in H_p^{s+1}$，记u为方程组的解，那么存在常数C独立于u_0和t使得

$$\|u(t)-u_N(t)\|_0 \leq C_1(1+N^2)^{-s/2}\|u_0\|_{s+1} \quad t\in[0,T]$$

证明. $\tilde{u}_N(t) = P_N u(t)$，所以$P_N\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}P_N u = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}_N$。方程组写为

$$\frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial t}+L_N u = 0$$

这其实是将P_N同时作用在方程两边得到的。再同时加上$L_N\tilde{u}_N$得到

$$\frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial t}+L_N\tilde{u}_N = L_N(\tilde{u}_N - u)$$

记$W = u_N - \tilde{u}_N$，W_N就是在S_N上的近似解和N阶傅里叶级数之间的差。将方程和(1.1)做差可以得到

$$\frac{\partial W_N}{\partial t}+L_N W_N = L_N(u-\tilde{u}_N)$$

做内积

$$(\frac{\partial W_N}{\partial t}, W_N) + (L_N W_N, W_N) = (L_N(u-\tilde{u}_N), W_N)$$

取实部

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|W_N(t)\|_0^2 = Re(L_N(u-\tilde(u)_N), W_N) \leq \|L_N(u-\tilde{u}_N)\|_0\|W_N\|_0$$

这个这种先内积再取实部的技巧很巧妙。

我们获得

$$\frac{\partial}{\partial t}\|W_N(t)\|_0 \leq \|L_N(u-\tilde{u}_N)\|_0 \leq C_2\|u-\tilde{u}_N\|_1$$

我们在上一节中已经建立了对$\|u-\tilde{u}_N\|_1$的估计，利用定理1.5.1可以得到$\|u-\tilde{u}_N\|_1 \leq C(1+N^2)^{-s/2}\|u\|_{s+1} \leq C(1+N^2)^{-s/2}\|u_0\|_{s+1}$。这里其实使用了$u \in H_p^{s+1}$，我觉得$s$可以在实际情况中选择。现在我们就有

$$\|W_N(t)\|_0 \leq CC_2(1+N^2)^{-s/2}t\|u_0\|_{s+1}$$

再根据$\|(u-u_N)(t)\|_0 \leq \|(u-\tilde(u)_N)(t)\|_0 + \|W_N(t)\|$，$\|(u-\tilde(u)_N)(t)\|_0$可以跟据1.5.1定理确定收敛结果，后半部分我们已经估计出了。证明结束。 □

$u_0 \in H^{s+1}(I)$，我们根据定理可以得到在范数$\|\cdot\|_0$下有$O(N^{-s})$误差估计，和随时间线性增大的常数。

这种方法在这种意义下可以被认为是无限阶的，其准确性只受到u_0的正则性和系数(和时间有关)。如果u是C_p^∞的那么，误差会以N^{-s}的速度减少到0，而且s是任意的。这种性质叫做谱精度。

命题 6.1. *Sobolev spaces中的负指数范数估计*

不知道这段在说什么。

ϕ是给定的一个足够正则函数，下面说明$(\phi, u_N(t)-u(t))$会很快地收敛到零，即使$u(t)$不够正则。

$$(\phi, u_N(t)-u_(t)) \leq CN^{-s}\|\phi\|_{s+1}\|u_0\|_0$$

这个不等式的证明略。

ρ正值正则函数且具有紧支集$\int \rho(x)dx = 1$。令

$$\rho_\epsilon(x) = \rho(\frac{x}{\epsilon})$$

$$u_\epsilon(t) = \rho_\epsilon * u(t)$$

$$u_{\epsilon N}=\rho_\epsilon * u_N$$

$u_\epsilon \to u(t)$当$\epsilon \to 0$，我们又有

$$\big|(u_\epsilon - u_{\epsilon N})(x)\big| = \big|(\rho_{\epsilon x}, u_N - u)\big| \le CN^{-(s-1)}\|\rho_{\epsilon x}\|_s \|u_0\|_0$$

我们可以得到如果ρ是非常正则的，那么$\forall \epsilon > 0$，存在$C(s,\epsilon)$，使得

$$\big|(u_\epsilon - u_{\epsilon N})(x)\big| \le C(s,\epsilon) N^{-s}.$$

这是正则化后的u_N一致收敛到正则化的u

7 S_N中的拉格朗日插值方法——离散傅里叶变换

精确计算u的傅里叶系数$\hat{u}$来得到$P_N u$是不可能的，但是我们可以得到$v \in S_N$中满足，在$N+1$个点$(x_j)_{|j|\le N}$处的值是和u相同的。$x_j = jh \quad h = \frac{2\pi}{2N+1}$。

$$v(x) = \sum_{|k|\le N} a_k e^{ikx}$$

a_k满足$2N+1$个线性方程$\sum_{|k|\le N} W^{jk} a_k = u(x_j), \quad W = e^{ih} = e^{\frac{2i\pi}{2N+1}} \quad |j| \le N$。写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} W^{-N(-N)} & W^{(-N+1)(-N)} & \dots & W^{N(-N)} \\ W^{-N(-N+1)} & W^{(-N+1)(-N+1)} & \dots & W^{N(-N+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ W^{-NN} & W^{(-N+1)N} & \dots & W^{(-N+1)N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-N} \\ a_{-N+1} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_{-N}) \\ u(x_{-N+1}) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}$$

又有

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} W^{jk} W^{-jl} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么我们可以写出逆矩阵，进而得到$a_k = \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} W^{-jk} u(x_j)$

$u(x_j) \to a_k$被称为离散余弦变换，本质上是和一个对称矩阵相乘。离散余弦

变换的巨大优势在FFT快速傅里叶变化。

记P_C为u到v的一个映射，内积$(\cdot,\cdot)$定义为

$$(u,v)_N = \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} u(x_j)\overline{v(x_j)}$$

那么有

$$(u_N, v_N)_N = (u_N, v_N) \qquad u_N, v_N \in S_N$$

因此也称为离散内积。所以在S_N中$(\cdot,\cdot)_N$和$(\cdot,\cdot)$是等效的。这是因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} f(x_j)$$

或者根据

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} e^{ikx_j} = \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} W^{jk} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

引理 7.1. $u \in C_p^0$，$(\bar{u}_k)$是它的傅里叶系数，(a_n)是它的傅里叶插值$P_C u$系数，那么我们有

$$a_n = \sum_{l\in\mathcal{Z}} \bar{u}_{n+lM} \qquad M \overset{def}{=} 2N+1$$

证明. 证明只要两点，首先证明

$$\begin{aligned}
(W_k, W_n)_N =& \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} W_k(x_j)\overline{W_n(x_j)} \\
=& \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} e^{i(k-n)x_j} \\
=& \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\le N} W^{j(k-n)} = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

然后

$$
\begin{aligned}
a_n =&(P_C u, W_n)_N = (u, W_n)_N \\
=&(\sum_{k\in\mathcal{Z}} \bar{u}_k W_k, W_n)_N = \sum_{l\in\mathcal{Z}} \bar{u}_{n+lM}
\end{aligned}
$$

□

基于上面的证明我们有

$$
\hat{u}_k = (u, W_k) = \int_I u\overline{W_k}dx
$$

$$
a_k = (u, W_k)_N = \frac{1}{2N+1}\sum_{|j|\leq N} u(x_j)\overline{W_k(x_j)}
$$

下面我们估计$P_C u$和u之间的误差

第一个定理估计的是$\|u - P_C u\|_0$的大小

定理 7.1. $r > \frac{1}{2}$是固定的，那么存在常数C使得

$$
\|u - P_C u\|_0 \leq CN^{-r}\|u\|_r \quad \forall u \in H_p^r(I)
$$

第二个估计的是$\|u - P_C u\|_s$的大小

定理 7.2. $s < r$，存在常数C，使得如果$u \in H_p^r(I)$，我们有

$$
\|u - P_C u\|_s \leq C(1 + N^2)^{(s-r)/2}\|u\|_r
$$

8 First-Order Equation - The Colocation Method

这是一种比Galerkin Method更加一般的方法。现在考虑算子L中的a不是一个常数。**Galerkin Method 好像对a也没有要求啊???**

$$
Lu = a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(au)
$$

近似方法是找到$u_C(t) \in S_N$满足:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_C + L_C u_C = 0$$

$$u_C(0) = P_C u_0$$

L_C被定义为

$$L_C u = P_C(a\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(P_C(a(x)u)$$

L_C是反对称算子，满足$(L_C u, v) = -(u, L_C v)$。S_N是有限维的，因此我们可以找到一个唯一的近似解u_C。

a是常数时，Galerkin Method 和collocation Method 方法的等价性

定理 8.1. *$\tau > 1, T \geq 0$，存在常数C使得如果$u_0 \in H_p^\tau(I)$，u是方程的解，那么满足*

$$\|u(t) - u_C(t)\|_0 \leq C(1 + N^2)^{\frac{1-\tau}{2}}\|u_0\|_\tau \quad 0 \leq t \leq T$$

证明. 证明和Galerkin Method 类似，很长的证明，需要可以联系我 □

上面定理说明，如果$u \in H_p^\tau(I), \tau > 1$误差的阶数是$O(N^{1-\tau})$，$\tau > 1$。这和Galerkin Method 是一致的。

9 Time Discretization Schemes

A是$M \times M$矩阵，$u(t) \in C^M$是下面方程的解

$$\frac{\partial}{\partial t}U + AU = 0 \qquad U(0) = U_0$$

可以用显式的方法解决，也可以用隐式的方法解决。

$$U^{n+1} = (I + \Delta t A)^{-1}U^n$$

这是隐式的方法。每次迭代时需要求解一个矩阵的逆$(I + \Delta tA)$。因为$U((n+1)\Delta t) = e^{-\Delta tA}U(n\Delta t)$，而$(I + \Delta A)^{-1}$是$e^{-\Delta tA}$的近似当$\Delta t$很小的时候。所以算法

是收敛的。

$$U^{n+1} = P_J(\Delta t A)U^n \qquad P_J(\tau) = \sum_{j=0}^{J} \frac{(-\tau)^j}{j!}$$

这是显式方法因为每一步不需要解任何线性方程。算法是收敛的，因为$P(J)$是e^{-J}的近似在J很小的时候。但是稳定性的话要求A的**谱半径小于1**

定理 9.1. 上一节的微分方程$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$是$\frac{\partial U}{\partial t} + AU = 0$的形式，而且$A$是反对称矩阵$M \times M \quad M = 2N+1$。

证明. 在证明中我们可以得到一些有用的等式。

$$\phi_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{|n| \le N} W^{-nk} e^{inx}$$

W等同原来的定义。ψ有一些很好的性质比如

$$\psi_k(x_j) = \delta_{jk} \quad j,k \le |N|$$

正交性质

$$(\psi_k, \psi_j) = (\psi_k, \psi_j)_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \le N} \psi_k(x_j)\overline{\psi_l(x_j)} = \frac{1}{2N+1}\delta_{lk}$$

我们将u写为$u(x) = \sum\limits_{|k| \le N} \psi_k(x)u(x_k)$，如果我们记$U_k(t) = u(x_k)$，$u(x) = \sum\limits_{|k| \le N} \psi_k(x)U_k(t)$。

将微分方程写为等价形式

$$(\frac{\partial}{\partial t} u_C, \psi_l) + (L_C u_C, \psi_l) = 0$$

$$\sum_{|k| \le N} [(\psi_k, \psi_l)\frac{\partial U_k}{\partial t} + (L_C\psi_k, \psi_l)U_k] = 0$$

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} + (2N+1) \sum_{|k| \le N} (L_C\psi_k, \psi_l)U_k = 0 \quad |l| \le N$$

写为矩阵形式的话$A=(a_{lk})\qquad a_{lk}=(2N+1)(L_C\psi_k,\psi_l)$。因为$L_C$是反对称的，所以$A$也是反对称的。注意在把微分方程写为矩阵的时候，我们使用的是微分方程的等价形式，这是等价的，因为$\psi_l,|l|\le N$是S_N的一组基。 □

注意Galerkin Method 等价求解

$$(\frac{\partial u_N}{\partial t},v_N)+(a\frac{\partial u_N}{\partial x},v_N)-(au_N,\frac{\partial v_N}{\partial x})=0$$

‘ Collocation Method 相当于求解

$$(\frac{\partial u_C}{\partial t},v_N)+(a\frac{\partial u_C}{\partial x},v_N)_N-(au_C,\frac{\partial v_N}{\partial x})_N=0$$

下面是一些技巧性的内容，如何计算AU。首先

$$a_{lk}=(2N+1)(L_C\psi_k,\psi_l)_N=\sum_{|j|\le N}((L_C\psi_k)(x_j))\overline{\psi_l(x_j)}=(L_C\psi_k)(x_l)$$

所以

$$AU=\sum_k a_{lk}U_k=\sum_k(L_C\psi_k)(x_l)u(x_k)=L_C(\sum_k\psi_k(x_l)u(x_k))=(L_Cu)(x_l)$$

要求AU，我们只需要求$(L_Cu)=a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial au}{\partial x}$

1. $u(x_j)$进行离散傅里叶变换，借助FFT我们可以得到傅里叶系数a_n。
2. $v=\frac{\partial u}{\partial x}$的傅里叶系数等于$\hat{v}_n=ina_n$。
3. 用逆傅里叶变换得到$v(x_l)=\frac{\partial u(x_l)}{\partial x}$，进而$a\frac{\partial u(x_l)}{\partial x}$。
4. 计算$\frac{\partial u}{\partial x}$
5. 计算$\frac{\partial}{\partial x}P_C(au)(x_l)$的方法和上面相同，首先计算$W(x_j)=a(x_j)u(x_j)=P_C(au)(x_j)$。再使用傅里叶变化计算傅里叶系数$\hat{W}_n$。我们就得到了$\frac{\partial W}{\partial x}$的傅里叶系数，使用傅里叶逆变换就得到了$L_Cu(x_l)$

当我们方程整理为$\frac{\partial U}{\partial t}+AU=0$的形式后，接下来我们考虑对这个时间方程使用不同的差分方法(我们一开始就已经提到了)。

但是第二种方法不是一定稳定的，稳定的条件可以写为$\exists\delta > 0$使得$|\tau| \leq \delta, \tau \in R, \left|P_J(i\tau)\right| \leq 1$。

A是反对称矩阵，所以存在Q能够让A对角化$D = Q^*AQ$。记$\lambda_j = d_{jj} \qquad V^n = Q^*U^n$

$$QV^{N+1} = P_J(\Delta tA)QV^n$$

$$V^{n+1} = Q^*P_J(\Delta tA)QV^n = P_J(\Delta tD)V^n$$

$$V_j^{n+1} = P_J(\Delta t\lambda_j)V_j^n$$

如果Δt足够小的话，$\left|\Delta t\lambda_j\right| \leq \delta$，$V_j^n = (P_J(\Delta t\lambda_j))^n V_j^0$，$\left|V_j^n\right| \leq \left|V_j^0\right|$。稳定性就满足了。

$J = 3, 4, 7, 8$**时，条件是满足的???**

而对于A的特征值，我们有以下估计

命题 9.1. $\lambda \in Sp(A)$，A是由$(2N+1)(L_C\psi_k, \psi_l)$所定义。$|\lambda| \leq CN$

推论 9.1.1. 如果$\Delta t \leq \frac{\delta}{CN}$，$\delta$和$C$是前面提到的常数，那么第二种离散化方法是稳定的，

$$\|U^{n+1}\|_0 \leq \|U^n\|_0 \qquad \|U\|_0 = \left(\frac{1}{2N+1}\sum_{|k|\leq N}|U_k|^2\right)^{1/2}$$

最后是误差估计

定理 9.2. 如果$u_0 \in H_p^{\tau+J}(I)$，我们有误差估计

$$\|u(t_n) - U^n\|_0 \leq C(N^{1-\tau} + \Delta t^J)$$

$U^n = U^n(P_C u_0)$是在时间$t_n = n\Delta t$的解。