这次的书籍是一本系统介绍谱方法的书籍，作者是 Jie Shen(Purdue University)，Tao Tang(HongKong Baptist University)，Li-Lian Wang(Nanyang Technological University)。只看了前两章关于傅里叶分析的部分，收获很多，对 Galerkin Method 和 Collaction Method 有了更深的理解。有时间会读完全书。

1 Introduction: 对谱方法的入门介绍

谱方法是一种全局方法 (global)，与之相对应的是有限差分和有限元方法，这些是局部方法 (local)。但是谱方法和有限差分，有限元都属于加权残差法 (Weghted residual Method WRM)。WRM 是一种近似方法，主要思想是使误差最小。按照最小化的方法，我们可以分类为 Galerkin Method,Petrov-Galerkin Method,Collocation 和 tau 方法。

1.1 WRM

只考虑在距离空间上的 WRM 方法

$$\partial_t u(x,t) - \mathcal{L}u(x,t) = \mathcal{N}(u)(x,t) \quad t>0, x\in\Omega$$

使用合适的时间差分方法

$$\frac{u^{n+1}-u^{n-1}}{2\tau} - \frac{\sqcap^{\backslash+\infty}+\sqcap^{\backslash-\infty}}{\in} = \mathcal{N}(u^n), \quad n\le 1$$

整理化简

$$Lu(x) = \alpha u(x) - \mathcal{L}u(x) = f(x)$$

$u=\frac{u^{n+1}+u^{n-1}}{2}$，$\alpha=\tau^{-1}$，$f=\alpha u^{n-1}+\mathcal{N}(u^n)$

WRM 方法首先用 u_N 近似 u

$$u(x)\approx u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\psi_k(x)$$

$\{\psi_k\}$ 是基函数，a_k 是有待确定的。定义残差如下

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x) \neq 0, x \in \Omega$$

WRM 的方法是让残差为 0

$$(R_N, \Phi_j)_\omega = \int\limits_\Omega R_N(x)\Psi_j(x)\omega(x)dx = 0 \quad 0 \leq j \leq N$$

Φ_j 是测试函数 $testfunction$，ω 是正的权值。或者写为

$$< R_N, \Psi_j >_{N,\omega} = \sum_{k=0}^{N} R_N(x_k)\Psi_j(x_k)\omega_k = 0 \quad 0 \leq j \leq N$$

$\{x_k\}_{k=0}^N$ 是预先选择的配点。ω_k 是正的权值。

基函数的不同决定了不同的谱方法。有傅里叶谱方法，切比雪夫谱方法，勒让德谱方法，拉盖尔谱方法，厄密特谱方法。

测试函数的选取也可以分为不同的方法：

1. Galerkin 测试函数和基函数相同 $\Psi_j = \psi_j$
2. Petrov-Galerkin 测试函数和基函数不同
3. Collocation Ψ_k 是拉格朗日插值多项式。

1.2 Spectral-Collocation Method

考虑下面的方程

$$Lu(x) = -u" + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (-1,1)$$
$$B_\pm u(\pm 1) = g_\pm$$

取一列点 x_j，$x_0 = -1$ 和 $x_N = 1$。配点法就是要在 N 阶实多项式空间中找到 u_N，使得 $R_N(x) = Lu_N(x) - f(x) = 0$ 在我们选的点处。

$$R_N(x_k) = Lu_N(x_k) - f(x_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1$$

而且 u_N 满足边界条件

$$B_- u_N(x_0) = g_- \quad B_+ u_N(x_N) = g_+$$

u_N 常写为插值多项式的形式

$$u_N = \sum_{j=0}^{N} u_N(x_j) h_j(x)$$

$\{h_j\}$ 是插值多项式 $h_j(x_k) = \delta_{kj}$。将 u_N 代入方程

$$\sum_{j=0}^{N} [L h_j(x_k)] u_N(x_j) = f(x_k)$$

$$\sum_{j=0}^{N} [B_- h_j(x_0)] u_N(x_j) = g_- \quad \sum_{j=0}^{N} [B_+ h_j(x_N)] u_N(x_j) = g_+$$

我们得到了 $N+1$ 个方程和 $N+1$ 的未知数，然后进行求解。

1.3 Spectral Method of Galerkin Type

不失一般性，我们令 $g_\pm = 0$，定义一个有限维空间

$$X_N = \psi \in P_N : B_\pm \psi(\pm 1) = 0 \Rightarrow dim(X_N) = N - 1$$

。$\{\psi_k\}_{k=0}^{N-2}$ 是 X_N 的一组基。u 近似为

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \hat{u}_k \psi_k(x) \in X_N$$

WRM 方法要求残差为 $0(\Psi_j = \psi_j)$：

$$\int_{-1}^{1} (L u_N(x) - f(x)) \psi_j(x) \omega(x) dx = 0 \quad 0 \le j \le N - 2$$

等价地说找到 $\hat{u}_k$，来满足 $(Lu_N, v_N)_\omega = (f, v_N)_\omega \quad \forall v_N \in X_N$。$(\cdot,\cdot)_\omega$ 是 L^2_ω 的内积。

此时方程就可以写为一个线性方程。为了使我们获得一个更加简洁的形式，选择一个合适的基就十分重要。通常我们选择使用正交多项式或者是正交函数来构造基函数。比如勒让德多项式

$$\psi_k(x) = L_k(x) + \alpha_k L_{k+1}(x) + \beta_k L_{k+2}(x) \quad k \le 0$$

α_k, β_k 是通过边值条件来确定。

1.4 Perov-Galerkin Method

作为例子考虑下面问题

$$Lu(x) = u'''(x) + u(x) = f(x)$$
$$u(\pm 1) = u'(1) = 0$$

仍然是考虑

$$X_N = \{\psi \in P_N : \psi(\pm 1) = \psi'(1) = 0\} \Rightarrow dim(X_N) = N - 2$$

ψ_k 是一组基。我们在这组基上展开近似解

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N-3} \hat{u}_k \psi_k(x) \in X_N$$

$\hat{u}_k$ 通过残差方程确定

$$\int_{-1}^{1} (Lu_N(x) - f(x))\Psi_j(x)dx = 0 \quad 0 \le j \le N-3$$

测试函数函数是

$$X_N^* = \Psi \in P_N : \Psi(\pm 1) = \Psi'(-1) = 0 \Rightarrow dim(X_N^*) = N - 2$$

$\{\Psi_k\}$ 是它的基。

我们仍然需要借助正交多项式或正交函数来化简方程。比如我们可以选择勒让德多项式，可以得到

$$\psi_k = L_k - \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+1}L_{k+1} - L_{k+2} + \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+3} \in X_N$$
$$\psi_k = L_k + \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+1} - L_{k+2} - \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+3} \in X_N^*$$

1.5 Galerkin Method with Numerical Integration (Collocation Method in weak format)

核心思想是把 Galerkin 方法中的连续的内积替换为离散形式。

问题就变为寻找 $u_N \in X_N$，使得 $a_N(u_N, v_N) =< Lu_N, v_N >_N =< F, V_N >$ $\forall v_N \in X_N$

$$\langle u, v\rangle_N = \sum_{j=0}^{N} u(x_j)v(x_j)\omega_j$$

x_j 是 **the set of Legendre-Gauss-Lobatto quadrature nodes**。在齐次的边界条件下，如果我们取 $v_N = h_j \quad 1 \le j \le N-1$ 那么我们有

$$\langle u, v\rangle_N = (u, v) \quad \forall u, v \in P_{2N-1}$$

2 Fourier Spectral Method for Periodic problem

奥斯扎戈 (Orszag) 最先使用傅里叶级数模拟不可压缩流体。傅里叶谱方法就是将谱方法中的基函数选取为 e^{inx}。

2.1 Continuous and Discrete Fourier Transform

e^{ikx} 是 $L^2(0, 2\pi)$ 空间中的一组正交基。

$$(E_k, E_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x}dx = \delta_{km}$$

$\forall u \in L^2(0,\pi)$ 其傅里叶级数定义为

$$u(x) \sim \mathcal{F}(u)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{ikx}$$

$\hat{u}_k$ 被定义为

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{-ikx}dx$$

对任何的 $u \in L^2$ 中，u_N 是以 L^2 范数收敛的. 满足 Paeseval 等式。如果 u 是周期连续的，而且是有界变差函数，那么 u_N 一致收敛到 u。还有更多关于傅里叶级数的收敛理论。但我们更关注于 L^2 空间。

下面是离散傅里叶变换，这些已经在另一本书中讲过一遍了，但还是简单写一遍。

首先是均匀地选取一列点 $x_j = jh = j\frac{2\pi}{N} \quad 0 \leq j \leq N-1$。定义离散内积

$$\langle u, v\rangle_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)\hat{v}(x_j)$$

在 $L^2(0,2\pi)$ 中样的离散内积和连续内积是一样的。

通常我们无法直接计算 u 的傅里叶系数 $\hat{u}_k$，所以我们利用一种近似的方法

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} v(x_j)$$

所以我们用同样的方法近似 $\hat{u}_k$

$$\hat{u}_k \approx \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)e^{-ikx_j}$$

那么我们就可以定义一种新的级数

$$(I_N u)(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k e^{ikx}$$

引理 2.0.1. $\forall u \in C[0,2\pi]$,

$$(I_N u)(x) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(x)$$

$$h_j(x) = \frac{1}{N} sim(N\frac{x-x_j}{2})cot(\frac{x-x_j}{2}) \in \mathcal{F}_N$$

证明. 证明比较容易，只是把求和符号互换了一下。 □

这个引理告诉我们

$$(I_N u)(x_j) = u(x_j), x_j = \frac{2\pi j}{N}, 0 \le j \le N-1$$

或者是 $I_N u$ 是 u 的插值多项式，事实上在另一本书中，离散傅里叶便交换就是这么引入的。I_N 所定义的变换就叫做离散傅里叶变换。一般的离散傅里叶变换需要 $O(N^2)$ 次运算，而使用 FFT 算法，运算复杂度可以减少到 $O(Nlog_2 N)$

2.2 Differentiantion in physical space and frequency space

首先在物理空间中 $u(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)h_j(x)$ 所以

$$u^m(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)h_j^m(x)$$

写成矩阵形式

$$u^m = D^{(m)}u$$

$D^{(m)} = (d_{kj}^{(m)} = h_j^{(m)}(x_k))$ 这个过程需要 $O(N^2)$ 次运算.

而在频率空间求导，我们可以利用 FFT 算法整个过程只需要 $O(Nlog_2 N)$

$$u = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k e^{ikx}$$

$$u'(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} ik\hat{u}_k e^{ikx_j}$$

利用 $\{u(x_j)\}$ 求 $\{u'(x_j)\}$ 只需要下面几步

1. $\tilde{v} = \text{fft}(v)$,$v_j = u(x_j - 1)$，然后就可以得到

$$\tilde{v} = (\tilde{v_1}, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_N)$$

2. 计算 $\tilde{v}^{(1)} = ik. * \tilde{v}$

3. 再用一次逆 FFT，$w = \text{ifft}\widetilde{v^{(1)}}$

2.3 Fourier Approximation

再叙述定理之前，我们先补充一点书中的符号说明。$A \lesssim B$ 代表存在常数 c 与 A, B 无关，使得 $A \leq cB$。

引理 2.0.2 (Nikolski's inequation). $\forall u \in X_N$ 和 $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{L^q} \leq (\frac{Np_0 + 1}{2\pi})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^p}$$

p_0 是比 p 大的最小的偶数

引理 2.0.3. $\forall u \in X_N$ 和 $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|\partial_x^m u\|_{L^p} \lesssim N^m \|u\|_{L^p} \quad m \geq 1$$

特别的 $p = 2$,

$$\|\partial_x^m u\| \lesssim N^m \|u\|$$

这两个不等式也叫做 Inverse Equation。

下面对傅里叶级数的收敛进行估计 $(P_N u)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{u}_k e^{ikx}$。考虑 Sobolev 空间 H_p^m，在其上有范数和半范数

$$\|u\|_m = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^m |\hat{u}_k|^2)^{1/2} \quad |u|_m = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2m} |\hat{u}_k|^2)^{1/2}$$

定理 2.1. $\forall u \in H_p^m$ 和 $0 \le \mu \le m$

$$\|P_N u - u\|_\mu \lesssim N^{\mu-m}|u|_m$$

证明.

$$\begin{aligned}
\|P_N u - u\|_\mu^2 = &\sum_{|k|>N}(1+k^2)^\mu|\hat{u}_k|^2 \\
\lesssim &N^{2\mu-2m}\sum_{|k|>N}(1+k^2)^m|\hat{u}_k|^2 \\
\lesssim &N^{2\mu-2m}|u|_m^2
\end{aligned}$$

□

定理 2.2. $\forall u \in H_p^m(I)$，$m > 1/2$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}\big|(P_N u - u)(x)\big| \le \sqrt{\frac{1}{2m-1}}N^{1/2-m}|u|_m$$

证明.

$$\begin{aligned}
\big|(P_N u - u)(x)\big| &\le \sum_{|k|>N}|\hat{u}_k| \le (\sum_{|k|>N}|k|^{-2m})^{1/2}(\sum_{|k|>N}|k|^{2m}|\hat{u}_k|^2)^{1/2} \\
&\le \sqrt{\frac{1}{2m-1}}N^{1/2-m}|u|_m
\end{aligned}$$

□

下面我们看傅里叶插值级数的收敛性质

定理 2.3. $\forall u \in H_p^m(I)$ 和 $m > 1/2$

$$\|\partial_x^l(I_N u - u)\| \lesssim N^{l-m}|u|_m$$

对于傅里叶级数更加深入的近似性质，可以在傅里叶分析中学习。