这次的书籍是一本系统介绍谱方法的书籍，作者是 Jie Shen(Purdue University)，Tao Tang(HongKong Baptist University)，Li-Lian Wang(Nanyang Technological University)。只看了前两章关于傅里叶分析的部分，收获很多，对 Galerkin Method 和 Collaction Method 有了更深的理解。有时间会读完全书。

1 Introduction: 对谱方法的入门介绍

谱方法是一种全局方法 (global)，与之相对应的是有限差分和有限元方法，这些是局部方法 (local)。但是谱方法和有限差分，有限元都属于加权残差法 (Weghted residual Method WRM)。WRM 是一种近似方法，主要思想是使误差最小。按照最小化的方法，我们可以分类为 Galerkin Method,Petrov-Galerkin Method,Collocation 和 tau 方法。

1.1 WRM

只考虑在距离空间上的 WRM 方法

$$\partial_t u(x,t) - \mathcal{L}u(x,t) = \mathcal{N}(u)(x,t) \quad t>0, x\in\Omega$$

使用合适的时间差分方法

$$\frac{u^{n+1}-u^{n-1}}{2\tau} - \frac{\sqcap^{\backslash+\infty}+\sqcap^{\backslash-\infty}}{\in} = \mathcal{N}(u^n), \quad n\leq 1$$

整理化简

$$Lu(x) = \alpha u(x) - \mathcal{L}u(x) = f(x)$$

$u=\frac{u^{n+1}+u^{n-1}}{2}$，$\alpha=\tau^{-1}$，$f=\alpha u^{n-1}+\mathcal{N}(u^n)$

WRM 方法首先用 u_N 近似 u

$$u(x)\approx u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\psi_k(x)$$

$\{\psi_k\}$ 是基函数，a_k 是有待确定的。定义残差如下

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x) \neq 0, x \in \Omega$$

WRM 的方法是让残差为 0

$$(R_N, \Phi_j)_\omega = \int\limits_\Omega R_N(x)\Psi_j(x)\omega(x)dx = 0 \quad 0 \leq j \leq N$$

Φ_j 是测试函数 $testfunction$，ω 是正的权值。或者写为

$$< R_N, \Psi_j >_{N,\omega} = \sum_{k=0}^{N} R_N(x_k)\Psi_j(x_k)\omega_k = 0 \quad 0 \leq j \leq N$$

$\{x_k\}_{k=0}^N$ 是预先选择的配点。ω_k 是正的权值。

基函数的不同决定了不同的谱方法。有傅里叶谱方法，切比雪夫谱方法，勒让德谱方法，拉盖尔谱方法，厄密特谱方法。

测试函数的选取也可以分为不同的方法：

1. Galerkin 测试函数和基函数相同 $\Psi_j = \psi_j$
2. Petrov-Galerkin 测试函数和基函数不同
3. Collocation Ψ_k 是拉格朗日插值多项式。

1.2 Spectral-Collocation Method

考虑下面的方程

$$Lu(x) = -u" + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1)$$
$$B_\pm u(\pm 1) = g_\pm$$

取一列点 x_j，$x_0 = -1$ 和 $x_N = 1$。配点法就是要在 N 阶实多项式空间中找到 u_N，使得 $R_N(x) = Lu_N(x) - f(x) = 0$ 在我们选的点处。

$$R_N(x_k) = Lu_N(x_k) - f(x_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1$$

而且 u_N 满足边界条件

$$B_{-}u_N(x_0) = g_{-} \quad B_{+}u_N(x_N) = g_{+}$$

u_N 常写为插值多项式的形式

$$u_N = \sum_{j=0}^{N} u_N(x_j)h_j(x)$$

$\{h_j\}$ 是插值多项式 $h_j(x_k) = \delta_{kj}$。将 u_N 代入方程

$$\sum_{j=0}^{N}[Lh_j(x_k)]u_N(x_j) = f(x_k)$$

$$\sum_{j=0}^{N}[B_{-}h_j(x_0)]u_N(x_j) = g_{-} \quad \sum_{j=0}^{N}[B_{+}h_j(x_N)]u_N(x_j) = g_{+}$$

我们得到了 $N+1$ 个方程和 $N+1$ 的未知数，然后进行求解。

1.3 Spectral Method of Galerkin Type

不失一般性，我们令 $g_{\pm} = 0$，定义一个有限维空间

$$X_N = \psi \in P_N : B_{\pm}\psi(\pm 1) = 0 \Rightarrow dim(X_N) = N-1$$

。$\{\psi_k\}_{k=0}^{N-2}$ 是 X_N 的一组基。u 近似为

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \hat{u}_k \psi_k(x) \in X_N$$

WRM 方法要求残差为 $0(\Psi_j = \psi_j)$：

$$\int_{-1}^{1}(Lu_N(x) - f(x))\psi_j(x)\omega(x)dx = 0 \quad 0 \le j \le N-2$$

等价地说找到 $\hat{u}_k$，来满足 $(Lu_N, v_N)_\omega = (f, v_N)_\omega \quad \forall v_N \in X_N$。$(\cdot,\cdot)_\omega$ 是 L^2_ω 的内积。

此时方程就可以写为一个线性方程。为了使我们获得一个更加简洁的形式，选择一个合适的基就十分重要。通常我们选择使用正交多项式或者是正交函数来构造基函数。比如勒让德多项式

$$\psi_k(x) = L_k(x) + \alpha_k L_{k+1}(x) + \beta_k L_{k+2}(x) \quad k \leq 0$$

α_k, β_k 是通过边值条件来确定。

1.4 Perov-Galerkin Method

作为例子考虑下面问题

$$Lu(x) = u'''(x) + u(x) = f(x)$$
$$u(\pm 1) = u'(1) = 0$$

仍然是考虑

$$X_N = \{\psi \in P_N : \psi(\pm 1) = \psi'(1) = 0\} \Rightarrow dim(X_N) = N - 2$$

ψ_k 是一组基。我们在这组基上展开近似解

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N-3} \hat{u}_k \psi_k(x) \in X_N$$

$\hat{u}_k$ 通过残差方程确定

$$\int_{-1}^{1} (Lu_N(x) - f(x))\Psi_j(x)dx = 0 \quad 0 \leq j \leq N-3$$

测试函数函数是

$$X_N^* = \Psi \in P_N : \Psi(\pm 1) = \Psi'(-1) = 0 \Rightarrow dim(X_N^*) = N - 2$$

$\{\Psi_k\}$ 是它的基。

我们仍然需要借助正交多项式或正交函数来化简方程。比如我们可以选择勒让德多项式，可以得到

$$\psi_k = L_k - \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+1}L_{k+1} - L_{k+2} + \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+3} \in X_N$$
$$\psi_k = L_k + \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+1} - L_{k+2} - \frac{2k+3}{2k+5}L_{k+3} \in X_N^*$$

1.5 Galerkin Method with Numerical Integration (Collocation Method in weak format)

核心思想是把 Galerkin 方法中的连续的内积替换为离散形式。

问题就变为寻找 $u_N \in X_N$，使得 $a_N(u_N, v_N) =< Lu_N, v_N >_N =< F, V_N >$ $\forall v_N \in X_N$

$$\langle u, v\rangle_N = \sum_{j=0}^{N} u(x_j)v(x_j)\omega_j$$

x_j 是 **the set of Legendre-Gauss-Lobatto quadrature nodes**。在齐次的边界条件下，如果我们取 $v_N = h_j \quad 1 \le j \le N-1$ 那么我们有

$$\langle u, v\rangle_N = (u, v) \quad \forall u, v \in P_{2N-1}$$