狭义相对论的基本公设和重要定理

姓名：惠中懿
学号：17341065
班别：物天一班
邮箱：huizhy@mail2.sysu.edu.cn

摘　要

本文从狭义相对论的基本公设出发，经过数学推导，获得洛伦兹变换公式。再从洛伦兹变换公式得到速度变换公式。最后证明了动量守恒和能量守恒在洛伦兹变换下协变。本文重视基本公设，以严密的数学推导作为基本工具，多处与教材中的方法和思路不同。

关键词： 狭义相对论，洛伦兹变换，动量守恒，能量守恒

1　狭义相对论的基本公设

所有物理学家的追求都是找到最基本的几条原理，或称为基本公设。通过基本公设，加以数学推导，再得到所有定理，这个过程是美妙的。我希望成为一名理论物理学家，也希望在我的研究生涯中一直贯彻这种思想。

因此，我们将从狭义相对论的基本公设出发，经过严密的数学推导，获得洛伦兹变换公式。再从洛伦兹变换公式得到速度变换公式。

首先介绍狭义相对论的基本公设。

1.1　狭义相对性原理

狭义相对性原理是狭义相对论的第一个基本公设，它的表述如下

狭义相对性原理：在所有惯性系中，物理定律有相同的表达形式。

与经典力学相同，狭义相对论的基本公设也有相对性原理。经典力学中的相对性原理称为伽利略相对性原理，狭义相对论中的相对性原理称为狭义相对性原理。相对性原理是物理学中最基本的原理之一，它有种无法言说的美。所有惯性系都是平权的，这个想法是如此的简洁且自然。

1.2 光速不变原理

经典力学和狭义相对论的相同之处在于二者均以相对性原理为基本公设。经典力学和狭义相对论的不同之处在于光速不变原理，这也是狭义相对论的第二个基本公设，它的表述如下

> 光速不变原理：在所有惯性系中，真空中的光速都相同，且与光源运动无关。

不同的公设会导致不同的结论。对于经典力学和狭义相对论来说，不同的公设指的是光速不变原理，它导致的不同的结论就是伽利略变换和洛伦兹变换。

2 洛伦兹变换公式

有了基本公设就足以推导出所有结论，这便是这章节我们要做的事情：通过基本公设推导出洛伦兹变换公式。

2.1 洛伦兹变换公式

教材上采用了几个具体的模型来推导洛伦兹变换，这样的物理图像不清晰，也没有清楚地体现出基本公设的地位。不同于教材，我将用基本公设加上清晰的数学推导来得到洛伦兹变换公式。

设事件 E 在惯性参考系 K 中的坐标为 (x, y, z, t)，在惯性参考系 K' 中的坐标为 (x', y', z', t')。设两坐标原点 O, O' 在 $t = t' = 0$ 时重合，且 K' 以匀速 v 沿彼此重合的 x, x' 轴正方向运动，而 y, y' 轴、z, z' 轴保持平行，即 K' 中位于原点的事件，在 K' 系得坐标为 $E_0' = (0, 0, 0, t')$，在 K 中的坐标为 $E_0 = (vt, 0, 0, t)$。

根据空间均匀性和空间各向同性，可得洛伦兹变换是线性变换（具体步骤见参考文献 [1]）。即洛伦兹变换可用矩阵 L 表示。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{1}$$

首先我们只考虑 x, t 的变换，设

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{2}$$

设 c 为光速。由光速不变可得，对于一束光，在惯性参考系 K, K' 中都有

$$\Delta x = c\Delta t, \quad \Delta x' = c\Delta t' \tag{3}$$

$$\Delta x^2 - (c\Delta t)^2 = \Delta x'^2 - (c\Delta t')^2 = 0 \tag{4}$$

用矩阵可表示为

$$\begin{pmatrix}\Delta x & \Delta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta x' & \Delta t'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x'\\ \Delta t'\end{pmatrix}=0 \tag{5}$$

将洛伦兹变换矩阵(2)带入式(5)，可得

$$\begin{pmatrix}\Delta x & \Delta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta x & \Delta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta t\end{pmatrix} \tag{6}$$

化简可得

$$\begin{pmatrix}l_{11} & l_{21}\\ l_{12} & l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -c^2\end{pmatrix} \tag{7}$$

整理得

$$\begin{cases}l_{11}^2-c^2l_{21}^2=1\\ l_{11}l_{12}-c^2l_{21}l_{22}=0\\ l_{21}^2-l_{22}^2/c^2=-c^2\end{cases} \tag{8}$$

注意到双曲函数的性质，可以得到方程组(8)的一组解为

$$L=\begin{pmatrix}\cosh\mu & c\sinh\mu\\ \frac{\sinh\mu}{c} & \cosh\mu\end{pmatrix} \tag{9}$$

定义 μ 为快度，从这里我们可以看出快度的意义。惯性参考系的相对速度决定了洛伦兹变换，因此快度与相对速度有关。下面我们来求快度和相对速度 v 的关系。

考虑 K 系位于坐标原点的事件 $E_1=(0,t)$，根据相对速度的定义，在 K' 系中坐标应为 $E_1'=(-vt',t')$，带入洛伦兹变换矩阵(9)中，可得

$$\begin{pmatrix}-vt'\\ t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\mu & c\sinh\mu\\ \frac{\sinh\mu}{c} & \cosh\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix} \tag{10}$$

得到 $\tanh\mu=-\frac{v}{c}$，解得 $\sinh\mu=\frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\cosh\mu=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$，带入(9)中，可得

$$L=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \dfrac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\\ \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\end{pmatrix} \tag{11}$$

将洛伦兹矩阵(11)带入(2)，得到洛伦兹变换公式为

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\quad t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{12}$$

下面我们来考虑 y,z 方向上的变换，从本质上来说，y,z 方向没有区别，因此我们仅计算 y 方向上的变换。由于我们已经计算出了 t 的变换，只需要计算 y 的变换。只考虑一个分量的变换，不需要使用矩阵。设

$$y' = l_1(v)y + l_2(v)t \tag{13}$$

由于 K' 相对于 K 速度为 v，K' 中位于原点的事件，在 K' 系得坐标为 $E'_0 = (0,0,0,t')$，在 K 中的坐标为 $E_0 = (vt,0,0,t)$。将 $(y,t) = (0,t),(y',t') = (0,t')$ 带入(13)可得

$$l_2(v) = 0, \quad y' = l_1(v)y \tag{14}$$

K' 相对于 K 速度为 v，那么 K 相对于 K' 速度为 $-v$。根据上式可得 $y = l_1(-v)y' = l_1(-v)l_1(v)y$，故 $l_1(v)l_1(-v) = 1$，根据空间的各向同性 $l_1(v) = l_1(-v)$，故 $l_1(v) = l_1(-v) = 1$，故

$$y' = y, \quad z' = z \tag{15}$$

综上所述，我们通过假设空间均匀性和空间各向同性、光速不变原理，推导出了洛伦兹变换公式。事实上，空间均匀性和空间各向同性可以通过相对性原理推出（具体步骤参考文献 [2]）。

因此，我们通过狭义相对论的两个基本公设：狭义相对性原理和光速不变原理推导出了洛伦兹变换，联立(12)和(15)，得到

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases}$$

2.2 速度变换公式

由速度的定义加上洛伦兹变换公式可以直接得到速度变换公式，设一个粒子在 K 系中的速度为 u，在 K' 系中的速度为 u'，则

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}{\frac{\mathrm{d}t - v/c^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2\mathrm{d}t}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \tag{16}$$

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\frac{\mathrm{d}t - v/c^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{1 - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2\mathrm{d}t}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}u_y \tag{17}$$

$$u_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\frac{\mathrm{d}t - v/c^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{1-\frac{v\mathrm{d}x}{c^2\mathrm{d}t}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}u_z \tag{18}$$

3 狭义相对论中的守恒量

本章节，我们将首先给出动量和能量在狭义相对论中的表达式，然后验证动量守恒和能量守恒在洛伦兹变换下具有协变性。

3.1 动量

在教材中，为了得到动量 $p = mv$ 在洛伦兹变换下的协变性，引入了动质量这个概念。我不喜欢这种方式，因为我们没有理由坚持使用公式 $p = mv$。动量的本质是空间平移对称性的守恒量，在经典力学中，这个守恒量的形式是 $p = mv$，可是在狭义相对论中，由于基本假设的不同，没有理由认为它的形式还是 $p = mv$。

另外，动质量的概念也不是一个很好的概念。爱因斯坦本人就曾指出过“给物体引入质量 $M = m/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 的概念并无益处，我们无法对它下一个清晰的定义。除了‘静质量’ m 外最好不引入其他质量概念。”。因此，本篇文章中的质量均指“静质量”。

找出空间平移对称性的守恒量需要用到最小作用量原理，这远超出了课程要求，因此我将直接给出它的形式。

狭义相对论中的动量为：

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \gamma_u m\boldsymbol{u} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是物体在参考系中的速度，m 是物体的质量（本篇文章不使用动质量的概念，因此所有质量均指静质量），c 是光速。

3.2 能量

能量是时间平移对称性下的守恒量。同样地，我们直接给出狭义相对论中能量的表达式。

狭义相对论中的能量为：

$$\boxed{E = \gamma_u mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{(1-u/c)^2}}}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是物体在参考系中的速度，m 是物体的质量，c 是光速。

3.3 动量守恒和能量守恒的协变性

下面我们将仅通过动量和能量的表达式和速度变换公式来证明动量守恒和能量守恒在洛伦兹变换下的协变性。

假设有 n 个粒子，它们只在 x 方向上有速度，第 i 个粒子的质量为 m_i，速度为 u_i。假设在 K 系中，它们的动量守恒，能量也守恒，即 p, E 不随时间变化。

$$p = \sum_i p_i = \sum_i \frac{m_i u_i}{\sqrt{1-(u_i/c)^2}} \tag{19}$$

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(u_i/c)^2}} \tag{20}$$

首先证明动量守恒的洛伦兹协变性：在相对于 K 系速度为 v 的参考系 K' 中，动量 p' 仍然不随时间变化。

$$p' = \sum_i p'_i = \sum \frac{m_i u'_i}{\sqrt{1-(u'_i/c)^2}} \tag{21}$$

根据速度合成公式(16)可得

$$u'_i = \frac{u_i - v}{1-\frac{u_i v}{c^2}} \tag{22}$$

将(22)代入(21)中，得

$$\begin{aligned}
p' &= \sum_i p'_i \\
&= \sum_i m_i \frac{\frac{u_i-v}{1-\frac{u_i v}{c^2}}}{\sqrt{1-(\frac{u_i-v}{c-\frac{u_i v}{c}})^2}} \\
&= \sum_i c m_i \frac{u_i - v}{\sqrt{c^2(1-\frac{u_i v}{c^2})^2-(u_i-v)^2}} \\
&= \sum_i c m_i \frac{u_i - v}{\sqrt{(c^2-v^2)(1-(u_i/c)^2)}} \\
&= \sum_i \frac{m_i u_i - m_i v}{\sqrt{(1-(v/c)^2)(1-(u_i/c)^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\sum_i \frac{m_i u_i}{\sqrt{1-(u_i/c)^2}} - \frac{v}{c^2}\sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(u_i/c)^2}}\right) \\
&= \frac{p-(vE)/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}
\end{aligned} \tag{23}$$

p, E, c, v 均不随时间变化，故 p' 也不随时间变化。故动量在 K' 系下也守恒，即动量守恒在洛伦兹变换下协变。

下面证明能量守恒在洛伦兹变换下协变

$$
\begin{aligned}
E' &= \sum_i E_i' \\
&= \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(u_i'/c)^2}} \\
&= \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(\frac{u_i-v}{c-\frac{u_i v}{c}})^2}} \\
&= \sum_i \frac{m_i c^2(1-\frac{u_i v}{c^2})}{\sqrt{(1-(v/c)^2)(1-(u_i/c)^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-(u_i/c)^2}} - v\sum_i \frac{m_i u_i}{\sqrt{1-(u_i/c)^2}}\right) \\
&= \frac{E-vp}{\sqrt{1-(v/c)^2}}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

p, E, c, v 均不随时间变化，故 E' 也不随时间变化。故能量在 K' 系下也守恒，即能量守恒在洛伦兹变换下协变。

因此我们证明了动量守恒和能量守恒在洛伦兹变换下协变。

4 总结

首先我们介绍了狭义相对论的基本公设：狭义相对性原理和光速不变原理。

然后我们通过狭义相对性原理和光速不变原理得到了狭义相对论中的惯性参考系变换公式：洛伦兹变换。再通过洛伦兹变换得到了速度变换公式。

最后我们通过动量和能量在狭义相对论中的公式和速度变换公式，得到了动量守恒和能量守恒在洛伦兹变换下协变。

下面是我自己的一些感想。

对于我来说，相对论绝不仅仅是一门专业课，更是我选择物理系的原因之一。少年时听说过的“双生子详谬”、“时空弯曲”、“不可超光速”等等概念都深深地吸引着我。从我初中开始看《时间简史》的那刻起，也许就注定了我会来到物理系。因为从那时起，宇宙的奥秘就埋藏在了我的内心深处，这个最纯真的念头指引着我，走到了现在，走进了物理系。现在，当我真正地触摸到了相对论的皮毛的时候，我才发现，原来物理的美远超我的想象。我想成为一名理论物理学家，希望这份纯真的爱，能引领我走得更远。

参考文献

[1] 武奘. 洛伦兹变换为什么是线性的. https://www.zhihu.com/question/26784931/answer/1017422840

[2] 阿诺尔德. 经典力学的数学方法. 北京：高等教育出版社

[3] 赵凯华. 新概念物理教程力学. 北京：高等教育出版社

[4] 梁灿彬. 从零学相对论. 北京：高等教育出版社