排列组合笔记

easonzhou0801@163.com

目录

Part I

计数原理

分类计数原理 完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的办法，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法，那么完成这件事共有 $\mathbf{N}m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的办法。

分步计数原理 完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的办法，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法，那么完成这件事共有 $\mathbf{N}m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的办法。

1 例题

例一：乔布斯有 4 个苹果和 3 个菠萝，库克要选择一种水果，问有多少种选择

解答：$4 + 3 = 7$

例二：乔布斯有 4 个苹果和 3 个菠萝以及 5 个柚子，库克要选择两种水果，问有多少种选择

解答：$4 \times 3 \times 5 = 60$

Part II

排列

2 排列问题

什么是排列问题？我们先列举一个例子来给大家说明一下。假设水果篮中有苹果、香蕉、橙子、葡萄和芒果五种不同的水果，若从中选取两种水果按特定顺序排列（例如「苹果 $\rightarrow$ 香蕉」和「香蕉 $\rightarrow$ 苹果」视为两种不同的排列），则不同的顺序会直接影响排列结果。例如，从 5 种水果中选 2 种排列时，排列数为 $\mathbf{A}_5^2 = 5 \times 4 = 20$ 种,，下面是它们的两个性质：

1. **有序性：** 如同水果在果盘中的位置（首位放苹果或首位放葡萄）直接影响最终形态；
2. **无序性：** 一种水果不能同时占据两个位置（例如苹果不能既在首位又在次位）。

而组合问题则类似「水果盲盒」：只需关注选中的水果种类（如苹果和葡萄），不关心被选中的顺序（苹果先放或葡萄先放均视为同一种组合）。大家可以在本子上画几个点

2.1 排列问题概括

我们把被选取的对象（上面水果中的任意一个）叫做元素。那么上面的问题就是从五个不同的元素中任选两个元素，然后按照一定的顺序排成一列，从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中任取 m 个元素的一个**排列**。

2.2 阶乘

阶乘，是数学中的一个基本概念，表示为 $n!$，它定义为所有小于及等于 n 的正整数的乘积。具体来说，对于一个非负整数 n，其阶乘 $n!$ 计算方式是从 1

开始，一直乘到 n，即：

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

或者

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

在大多数情况下十位数以上的的阶乘往往需要使用计算器来辅助计算，如：12!，你能快速地算出结果吗?，答案是 **479001600**，我相信没有人能算的这么快，一般建议大家熟记前十位阶乘的结果，这就够了。

注意：我们定义 $0! = 1$ **(零的阶乘等于一)**，当然这只是关于阶乘的冰山一角，掌握这些基本的就够了，更多关于它的东西我们会在后面为有兴趣的同志讲解。

3 排列数公式

这里的概念来自**教科书**[1]上，我们直接在下面引用。

一般地，从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的**排列数**，用符号 $\mathbf{A}_n^m$ 表示。

很简单，就是有 5 个水果然后要任选 2 种水果，并求出共可以组成多少个没有重复组合的两种水果。简而言之就是求在 **m** 中任取 **n** 个水果共可以有多少种无重复水果组合。

那怎么求 $\mathbf{A}_n^m$ 呢？我们知道每一个排列都是从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素，按照顺序排成一列的，所以我们可以把每个排列看成从 n 个不同元素中取 m 次，当然，拿都拿了就不会放回去了。就这样，计算它的排列数可以分 m 步完成。

根据分布计数原理，从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数即为

$$\mathbf{A}_n^m = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-m+1) \tag{1}$$

在这个公式中，右边是从正整数 n 开始的 n 个连续的正整数相乘，即从正整数 1 到 n 的连续积，这个连续积就是上面的**阶乘（详情：2.2)**。

[1] 即北师大出版的中职学校公共基础课程教材

所以，从 n 个不同元素的全排列数公式为

$$\mathbf{A}_n^n = n!\ = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$$

这不就是阶乘吗?没错,因为 $(n-m)!\ = (n-m)(n-m-1)\times(n-m-2)\times\cdots 2\times 1$,所以排列数公式还可以写成

$$\mathbf{A}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2}$$

4 例题

例一：请计算 $\mathbf{A}_5^2$、$\mathbf{A}_{11}^3$、$\mathbf{A}_n^m$ 的值。

解答：$\mathbf{A}_5^2 = 5\times 4 = 20$, $\mathbf{A}_{11}^3 = 11\times 11\times 10\times 9 = 990$, $\mathbf{A}_n^n = n!$

在这里就不给太多例题了，这一章的重点还在后面。下一节就是**组合**，如果上面的东西你学会了那么下一节就不会有任何问题。

Part III

组合

5 组合问题

首先要我们要搞懂怎样判断哪些是组合问题、哪些是排列问题。还是以上面的水果篮子 为例。

- 从五种水果中任选三种，分别送给三个不同的人，请问共有多少种方案?
- 从五种水果中任选两种，然后送给一个人，共可组成多少种方案?
- 从 2，3，5，7，11 这 5 个数中任取两个数，共可组成多少个不同的分数? ~~（不用水果了）~~
- 从 2，3，5，7，11 这 5 个数中任取两个数，共可组成多少个不同的真分数?

解答

- 这是**排列问题**；n 个水果分给 m 个人（$n \neq m$），因为每人所得的水果不一样。
- 这是**组合问题**；水果都给一个人了，不管选取顺序如何结果都相同。
- 这是**排列问题**；若选取到 5 和 7，它们既可以组合成 $\frac{7}{5}$ 也可以组合成 $\frac{5}{7}$，很明显有两种组合方法（分母与分子的位置可以互换。没有唯一性）
- 这是**组合问题**；还是跟上面一样选取到 5 和 7，但要求是组合成**真分数**[2]，所以就只有一种组合。

[2]什么是真分数?! 简单来说就是分母大于分子的分数

5.1 组合问题概括

从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素，组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**。

如果两个组合中的元素完全一致，无论元素选取的顺序如何，那么它们就是相同的组合。只有当两个组合中的元素不完全相同时，它们才是不同的组合。这里是不是很像我们在高一学习的**集合**，还记得集合中的概念吗?

它们两个的共同点:

1. **无序性的本质：**组合问题中的元素选择（例如从 5 种水果中选 2 种）与集合中的元素存储，均不依赖顺序。例如集合中的 $\{a,\ b\}$ 与 $\{b,\ a\}$ 它们的本质是相同的。

2. **唯一性的映射：**集合要求元素互异，而组合问题中选取的元素也同样如此。

研究从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，这类计数问题叫做**组合问题**。

6 组合数公式

排列数是在 m 个数中任选 n 个数，然后排列出它们的具体数量，而组合数则是求所有排列数的个数，也就是将每个单独的排列数中包含的个数相加。下面就是它的抽象概括。

从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素任取 m 个元素的**组合数**，用符号 $\mathbf{C}_n^m$ 表示。

一般地，求出 n 个不同元素中任取 m 个元素的排列组合数 $\mathbf{A}_n^m$，可以分两步完成。

1. 求出从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的组合数，有 $\mathbf{C}_n^m$ 个;

2. 对每一个组合中的 m 个元素进行全排列，其排列数均为 $\mathbf{A}_m^m$。

根据分步计数原理，可得

$$\mathbf{A}_m^n = \mathbf{C}_n^m \times \mathbf{A}_m^m \tag{3}$$

因此，组合数的计算公式为

$$\mathbf{C}_n^m = \frac{\mathbf{A}_n^m}{\mathbf{A}_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{4}$$

其中 $m \in \mathbf{N}$，$n \in \mathbf{N}_+$，且 $m \leq n$。这个公式就是**组合数公式**。

下面再给出它们的一些性质

$$\mathbf{C}_n^m + \mathbf{C}_n^{m+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{m+1} \tag{5}$$

6.1 组合数的不同写法

在研究离散数学[3]时我们常常会碰到一些不同的写法，如：$\binom{n}{m}$、$\mathbf{P}(n,\ k)$ 以及上面我们所用的 $\mathbf{C}_n^m$ 等，在我们继续深入理解组合数学时往往会因为这些符号的写法而感到迷惑，这里就列出它们之间的关系：

$$\mathbf{C}_n^r = \binom{n}{r} = \mathbf{P}(n,\ r)$$

上面的等式则为组合数的三种写法，在众多高等数学教科书中更常用的是圆括号表达组合数 $\binom{n}{m}$，而我们的笔记中所使用的则是苏式表达 $\mathbf{C}_n^m$。我们发现该等式的后面还有一个大写 $\mathbf{P}$ 的表达方式，实际上这是老旧的表达方式从本质上讲，$\mathbf{P}(n,\ r)$ 与 $\mathbf{C}_n^m$ 是一样的，r 即为 m，所以用 P 表达法[4]我们可以得到另一个等式：

$$\frac{\mathbf{P}(n,\ r)}{r!} = \mathbf{A}_n^r$$

让我们把 r 换成 m 这样更好理解。我们来验证这个等式。

$$\mathbf{A}_n^m = \mathbf{C}_m^n \cdot \mathbf{A}_m^m$$
$$\mathbf{A}_n^m = \mathbf{P}(n,\ m) \cdot m!$$
$$\frac{\mathbf{A}_n^m}{m!} = \mathbf{P}(n,\ m)$$

证毕！就是这样，在后面的” 二项式定理2.2” 中我们还会看到它。

[3]即组合数学

[4]暂时找不到标准称呼

7　组合数的两个性质

组合数有如下的两种性质。

性质一

$$\mathbf{C}_n^m = \mathbf{C}_n^{n-m} \tag{6}$$

证明

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^m &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
\mathbf{C}_n^{n-m} &= \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{C}_n^m = \mathbf{C}_n^{m-n}$。

我们页可以这样理解，从 n 个不同的元素中取出 m 个元素组成一组后，剩下的 $(n-m)$ 个元素自然也组成一组，即每取出 m 个元素都有唯一的 $(n-m)$ 个元素之对应。所以，从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数一定与从 n 个不同的元素中取出 $(n-m)$ 个元素的组合数相等。

组合数的第二个性质

性质二

$$\mathbf{C}_n^m + \mathbf{C}_n^{m-1} = \mathbf{C}_{n+1}^m \tag{7}$$

证明

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n^m + \mathbf{C}_n^{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)![n-(m-1)]!} \\
&= \frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m+1)!} + \frac{n!m}{m!(n-m+1)!} \\
&= \frac{n![(n-m+1)+m]}{m!(n-m+1)!} \\
&= \frac{(n+m)!}{m!(n-m+1)!} \qquad = \mathbf{C}_{n+1}^m
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{C}_n^m + \mathbf{C}_n^{m-1} = \mathbf{C}_{n+1}^m$。

我们也可以直观地理解以上的性质，从 n 个苹果和 1 个菠萝中任取 m 个水果，可以用组合数 $\mathbf{C}_{n+1}^m$ 表示，也可以将其分为两类：一类分到的 m 个水

果都是苹果，则有 $\mathbf{C}_n^m$ 种分法；另一类抽到的 m 个水果中有一个是菠萝，则有 $\mathbf{C}_n^{m-1}$，故共有 $\mathbf{C}_n^m+\mathbf{C}_n^{m-1}$ 种取法，所以 $\mathbf{C}_n^m+\mathbf{C}_n^{m-1}=\mathbf{C}_{n+1}^m$。

8 例题

例一：请计算 $\mathbf{C}_5^2$ 与 $\mathbf{C}_9^3$ 的值。

解答：$\mathbf{C}_5^2=\frac{5\times 4}{2!}=10$，$\mathbf{C}_6^3=\frac{\mathbf{A}_6^3}{\mathbf{A}_n^m}=\frac{6\times 5\times 4}{3!}=15$

例二：请计算 $\mathbf{C}_{100}^{98}$ 与 $\mathbf{C}_9^3+\mathbf{C}_9^4$ 的值。

解答：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{100}^{98}&=\mathbf{C}_{100}^{2}\\&=\frac{\mathbf{A}_{100}^2}{2!}\\&=4950\end{aligned}$$

例三：请计算 $\mathbf{C}_7^2+\mathbf{C}_7^3+\mathbf{C}_8^4+\mathbf{C}_9^5+\mathbf{C}_{10}^6$ 的值。

解答：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_7^2+\mathbf{C}_7^3+\mathbf{C}_8^4+\mathbf{C}_9^5+\mathbf{C}_{10}^6&=\frac{\mathbf{A}_7^2}{2!}+\frac{\mathbf{A}_7^3}{3!}+\frac{\mathbf{A}_8^4}{4!}+\frac{\mathbf{A}_9^5}{5!}+\frac{\mathbf{A}_{10}^6}{6!}\\&=\frac{42}{2}+\frac{215}{6}+\frac{1680}{24}+\frac{15120}{120}+\frac{151200}{720}\\&=462\end{aligned}$$