

1. 考察下面一维中的两个粒子的运动方程

$$\ddot{x} + 25x = 0.2y + 2t$$

$$\ddot{y} + y = -0.2x$$

其中， x, y 分别为两个粒子的坐标。

请用 Verlet 算法求解此动力学方程组，条件如下：在 $t=0$ 时， $(x, y) = (0, 0)$ ， $t=h$ 时， $(x, y) = (0.1, 0.05)$ ；需求解二者坐标至 $20h$ ，并画图；在求解时，分别考虑两种不同的 h 的取法(1) $h=0.2$ ；(2) $h=1$ 。

由本题运动方程可得：

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ， $K = \begin{pmatrix} -25 & 0.2 \\ -0.2 & -1 \end{pmatrix}$ ，则 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}$ 。结合 Verlet 算法表达式：

$$\mathbf{r}(t+h) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t-h) + h^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$$

得到

$$\begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t-h) \\ y(t-h) \end{pmatrix} + h^2 \left[K \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

通过代码即可求解 x, y 。

Python 代码：

```
import numpy as np
import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt

# 设置中文字体
matplotlib.rcParams['font.sans-serif'] = ['Microsoft YaHei'] # 设置字体为黑体 (SimHei)
matplotlib.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # 解决负号显示问题

h = 0.2 # 1
x = [0, 0.1]
y = [0, 0.05]

t = [0, h]

for i in range(1, 20):
    ti = t[i]
    xi = x[i]
    xi_0 = x[i-1]
    yi = y[i]
    yi_0 = y[i-1]
    xi_1 = 2 * xi - xi_0 + h ** 2 * (-25 * xi - 0.2 * yi + 2 * ti)
```

```
yi_1 = 2 * yi - yi_0 + h ** 2 * (-0.2 * xi - yi)
t.append(ti + h)
x.append(xi_1)
y.append(yi_1)
```

```
# 创建子图，设置共享横坐标
```

```
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(8, 6), sharex=True)
```

```
# 第一幅图
```

```
ax1.plot(t, x, color='blue')
```

```
ax1.set_title('x-t')
```

```
ax1.set_ylabel('x')
```

```
ax1.grid(True)
```

```
# 第二幅图
```

```
ax2.plot(t, y, color='green')
```

```
ax2.set_title('y-t')
```

```
ax2.set_xlabel('t') # 共用的横坐标标签
```

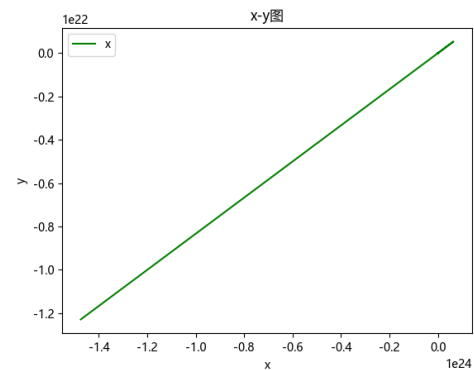
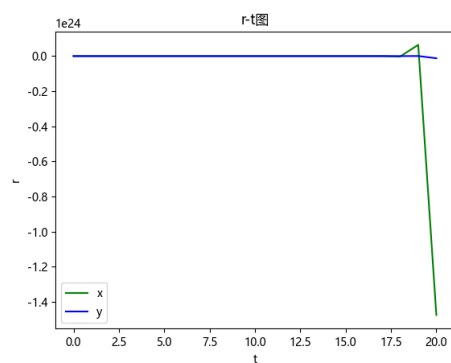
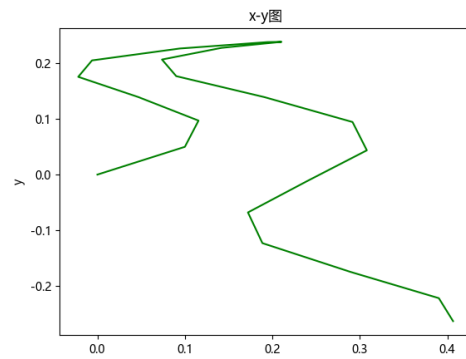
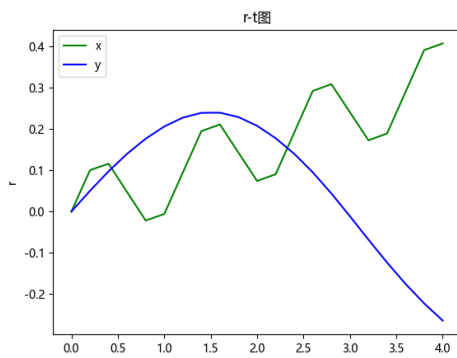
```
ax2.set_ylabel('y')
```

```
ax2.grid(True)
```

```
# 调整布局
```

```
plt.tight_layout()
```

```
plt.show()
```



Matlab 代码:

```
% Verlet 算法求解运动方程
%  $x'' + 25x = 0.2y + 2t$ 
%  $y'' + y = -0.2x$ 
clear;
% 初始化位置
r1 = zeros(2, 21);
r2 = zeros(2, 21);

% 参数
h1 = 0.2; h2 = 1; %两种步长
% 时间序列
t1 = 0 : h1 : 20 * h1;
t2 = 0 : h2 : 20 * h2;

% 初值条件
r1(:, 1) = [0; 0]; r2(:, 1) = [0; 0];
r1(:, 2) = [0.1, 0.05]; r2(:, 2) = [0.1, 0.05];

%  $f(r, t) = K * r(t) + [2 * t; 0]$ 
K = [-25, 0.2; -0.2, -1];

for i = 3 : 21
    r1(:, i) = 2 * r1(:, i - 1) - r1(:, i - 2) + h1^2 * (K * r1(:, i - 1) + [2 * t1(i - 1); 0]);
    r2(:, i) = 2 * r2(:, i - 1) - r2(:, i - 2) + h2^2 * (K * r2(:, i - 1) + [2 * t2(i - 1); 0]);
end

% 绘图
figure;
subplot(2, 2, 1);
plot(t1, r1(1, :), LineWidth=1.5, Color='#CD191C')
hold on;
plot(t1, r1(2, :), LineWidth=1.5, Color='#1A429B')
xlabel('Time t'); ylabel('Position');
legend('x1(t)', 'y1(t)');

subplot(2, 2, 2);
plot(r1(1, :), r1(2, :), LineWidth=1.5, Color='#387E44');
xlabel('x1(t)'); ylabel('y1(t)');
title('Trajectory');

subplot(2, 2, 3);
```

```

plot(t2, r2(1, :), LineWidth=1.5, Color='#CD191C')
hold on;
plot(t2, r2(2, :), LineWidth=1.5, Color='#1A429B')
xlabel('Time t'); ylabel('Position');
legend('x2(t)', 'y2(t)');

```

```

subplot(2, 2, 4);
plot(r2(1, :), r2(2, :), LineWidth=1.5, Color='#387E44');
xlabel('x2(t)'); ylabel('y2(t)');
title('Trajectory');

```

