随机过程第 2 周作业

周强 202128019427002 电子学院

1. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求：

a) 边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$以及条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$

解：边缘密度函数如下：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)ydy=-12x^3+12x^2, if\ x\in(0,1)\\ 0\quad otherwise\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)ydx=12y^3-24y^2+12y, if\ y\in(0,1)\\ 0\quad otherwise\end{cases}$$

条件密度函数如下

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2(1-x)}{y^2-2y+1}\quad if\ x\in(y,1)\\ 0\quad otherwise\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{24(1-x)y}{-12x^3+12x^2}=\frac{2y}{x^2}\quad if\ y\in(0,x)\\ otherwise\end{cases}$$

b) 当$0<y<1$时，确定$E\{X|Y=y\}$以及 $E\{X|Y\}$的分布密度函数。

解：当 $0<y<1$ 时，

$$E\{X|Y=y\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx=\int_y^1\frac{2x(1-x)}{y^2-2y+1}dx=\frac{2y+1}{3}$$

$$Z=E\{X|Y\}=\frac{2Y+1}{3}$$

$$Y=\frac{3}{2}Z-\frac{1}{2},\frac{\partial Y}{\partial Z}=\frac{3}{2}$$

$$f_Z(z)=\left|\frac{\partial Y}{\partial Z}\right|f_Y\left(\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{81(3z-1)(z-1)^2}{4}\quad if\ z\in\left[\frac{1}{3},1\right]\\ 0\quad otherwise\end{cases}$$

2. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{7}(1+y+xy), & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求随机变量$Y(1+X)$的密度函数。

解：设$\begin{cases}U=Y(1+X)\\ V=Y\end{cases}$，其逆映射为$\begin{cases}X=\frac{U}{V}-1\\ Y=V\end{cases}$，则$J=\frac{\partial X}{\partial U}=\frac{1}{V}$。

$$f_{U,V}(u,v)=f(x,y)|J|=\frac{f\left(\frac{u}{v}-1,v\right)}{v}=\frac{4(1+u)}{7v}$$

因为$x=\frac{u}{v}-1\in(0,1)$，则$v<u<2v$，即$v\in\left(\frac{1}{2}u,u\right)$

当$u\in(0,1)$时，$f_U(u)=\int_{\frac{1}{2}u}^{u}\frac{4(1+u)}{7v}dv=\frac{4}{7}\ln 2\,(1+u)$

当$u\in[1,2)$时，，$f_U(u)=\int_{\frac{1}{2}u}^{1}\frac{4(1+u)}{7v}dv=\frac{4}{7}(1+u)\ln\frac{2}{u}$

综上，$f_U(u)=\begin{cases}\frac{4}{7}\ln 2\,(1+u) & if\ u\in(0,1)\\ \frac{4}{7}(1+u)\ln\frac{2}{u} & if\ u\in[1,2)\\ 0 & otherwise\end{cases}$

3. 设X_1,X_2,X_3为独立同分布的随机变量，且服从标准正态分布。令：

$$\boldsymbol{Y=\frac{X_1+X_2X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}}$$

a) 试求随机变量Y的分布密度函数。

解：$Z=\frac{X_1+X_2x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}=\frac{X_1}{\sqrt{1+x_3^2}}+\frac{X_2x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}$，其中$X_1,X_2$是独立随机变量，$x_3$是常数。

则Z服从正态分布，且均值为$\mu=0$，方差为$\sigma=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}}\right)^2+\left(\frac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}\right)^2=1$。

易知

$$Z=Y|X_3=x_3,f(y|x_3)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$
$$f(y,x_3)=f(y|x_3)f_{X_3}(x_3)$$

根据全概率公式有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y,x_3)dx_3=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_3}(x)f(y|x_3)dx_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-\frac{x_3^2}{2}}dx_3$$
$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x_3^2}{2}}dx_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

综上，随机变量Y服从标准正态分布，即$Y\sim N(0,1)$。

b) 试问有限个独立正态分布随机变量经过非线性变换是否服从正态分布？

解：可以，由(a)可知，Y是X_3的非线性函数，仍满足正态分布。

4. 设$\{\xi_n,n\geq 1\}$为独立同分布连续性随机变量序列，令：

$$\boldsymbol{\tau=min\{n:n\geq 2,\xi_n>\xi_1\},\sigma=min\left\{n:n>m,\xi_n>\max_{1\leq k\leq m}\{\xi_k\}\right\}}$$

试回答以下问题：

a) 求随机变量τ的分布函数，并确定随机变量τ的数学期望是否存在。

解：设ξ_i的概率密度函数$f_\xi(x)$，分布函数为$F_\xi(x)$，根据全概率公式，当$m\geq 2$时有

$$P(\tau=m)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\tau=m|\xi_1=u)f_\xi(u)du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}P(\xi_2\le u,\dots,\xi_{m-1}\le u,\xi_m>u|\xi_1=u)f_\xi(u)du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}P(\xi_2\le u),\dots,P(\xi_{m-1}\le u)P(\xi_m>u)f_\xi(u)du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[F_\xi(u)\right]^{m-2}\left[1-F_\xi(u)\right]f_\xi(u)du$$
$$=\int_{0}^{1}\left[F_\xi(u)\right]^{m-2}\left[1-F_\xi(u)\right]dF_\xi(u)=\frac{1}{m(m-1)}$$
$$E(\tau)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m}{m(m-1)}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$$

由于上述级数发散，因此该随机变量的期望不存在。

b) 求概率$P\{\sigma>n\}(n\ge m+1)_0$

解：设$Z=\max_{1\le k\le m}\{\xi_k\}$，$F_Z(z)=P(Z\le z)=\Pi_{k=1}^{k=m}P(\xi_k\le z)=\left[F_\xi(z)\right]^m, f_z(z)=$

$m\left[F_\xi(z)\right]^{m-1}f_\xi(z)$。根据全概率公式有

$$P(\sigma>n)=\int_{-\infty}^{\infty}P(\sigma>n|Z=u)f_Z(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}P(\xi_{m+1}<u),\dots,P(\xi_n<u)f_Z(u)du$$
$$=\int_{0}^{1}\left(F_\xi(u)^{n-m}\right)m\left[F_\xi(u)\right]^{m-1}dF_\xi(u)=\frac{m}{n}$$

5. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$与η为随机变量，$\eta\sim U[0,1]$，而$\xi_i(i=1,2,\cdots n)$均以下述条件概率取1和0两个，即$P\{\xi_i=1|\eta=p\}=p, P\{\xi_i=0|\eta=p\}=1-p$，并且条件独立，即对于$i=1,2,\dots n$，均有$x_i=0,1$时，有

$$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n|\eta\}=P\{\xi_1=x_1|\eta\}\cdots P\{\xi_n=x_n|\eta\}$$

试回答以下问题：

a) 试求$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$。

解：

$$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$$
$$=\int_0^1P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n|\eta=p\}f_\eta(p)dp$$
$$=\int_0^1P\{\xi_1=x_1|\eta\}\cdots P\{\xi_n=x_n|\eta\}f_\eta(p)dp=\int_0^1p^x(1-p)^{n-x}dp$$
$$=\frac{1}{(n+1)C_n^k}$$

其中$x=\Sigma_{i=1}^n x_i$。

b) 试求随机变量$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$的分布。

解：当$k=0,1,2,3\dots,n$时，

$$P(S_n=k|\eta=p)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$$
$$P(S_n=k)=\int_0^1P(S_n=k|\eta=p)f_\eta(p)dp=C_n^k\int_0^1p^x(1-p)^{n-x}dp=\frac{1}{n+1}$$

当$k \notin [0,n]$时，$P(S_n=k)=0$。

c) **试求条件分布$P\{\eta \le p|S_n=x\}$，并求出密度函数，其中$x=x_1+\cdots x_n$**

解：据贝叶斯公式有，当$p \in (0,1)$时，

$$f_{\eta|S_n}(p|x)=\lim_{h\to 0}\frac{P(p\le\eta\le p+h|S_n=x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P(p\le\eta\le p+h,S_n=x)}{hP(S_n=x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(S_n=x|p\le\eta\le p+h)P(p\le\eta\le p+h)}{hP(S_n=x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(n+1)hf_\eta(p)P(S_n=x|\eta=p)}{h}=(n+1)P(S_n=x|\eta=p)$$

$$=(n+1)C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

d) **试问分布$P\{\eta \le p|S_n=x_1+\cdots x_n\}$ 与 $P\{\eta\le p|\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$是否相同，其中$p\in(0,1)$。**

解：

$$f_{\eta|\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(p,x_1,x_2,\dots,x_n)=\lim_{h\to 0}\frac{P(p\le\eta\le p+h|\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(p\le\eta\le p+h,\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n)}{hP(\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n|p\le\eta\le p+h)f_\eta(p)h}{hP(\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n)}$$

$$=\frac{P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n|\eta=p)}{P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_n=x_n)}=(n+1)C_n^k p^x(1-p)^{n-x},\text{其中}x$$

$$=\Sigma_{i=0}^n x_i$$

$$f_{\eta|S_n}(p|x)=(n+1)C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

故$P\{\eta\le p|S_n=x_1+\cdots x_n\}=\ P\{\eta\le p|\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$