

第三章 Poisson 过程 (Poisson 信号流)

一、基本概念及 Poisson 过程的一维分布

(1) 独立增量过程

定义：设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，如果对于任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ，

$\forall n \in N, t_i \in T, 1 \leq i \leq n$ ，有随机过程 $X(t)$ 的增量：

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立，则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是独立增量过程。

注意：若独立增量过程的参数集 $T = [a, b]$, $a > -\infty$ ，一般假定 $X(a) = 0$ ，

则独立增量过程是一马氏过程。特别地，当 $X(0) = 0$ 时，独立增量过程

$\{X(t), t \geq 0\}$ 是一马氏过程。证明如下：

形式上我们有：

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} &= \\ &= \frac{P\{X(t_n) \leq x_n, X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}}{P\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}} \\ &= \frac{P\{X(t_n) \leq x_n, X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-2}) = x_{n-2} \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}}{P\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-2}) = x_{n-2} \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}} \end{aligned}$$

因此，我们只要能证明在已知 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 条件下， $X(t_n)$ 与 $X(t_j), j = 1, 2, \cdots, n-2$ 相互独立即可。

由独立增量过程的定义可知，当 $a < t_j < t_{n-1} < t_n, j = 1, 2, \cdots, n-2$ 时，增量 $X(t_j) - X(a)$ 与 $X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立，由于在条件 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 和 $X(a) = 0$ 下，即有 $X(t_j)$ 与 $X(t_n) - x_{n-1}$ 相互独立。由此可知，在 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 条件下， $X(t_n)$ 与 $X(t_j), j = 1, 2, \cdots, n-2$ 相互独立，结果成立。

(2) 计数过程

定义：在 $[0, t)$ 内出现随机事件 A 的总数组成的过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程。计数过程满足：

$$(a) \quad N(t) \geq 0;$$

$$(b) \quad N(t) \in N_0;$$

$$(c) \quad \forall s, t > 0, s < t, \text{ 则有: } N(s) \leq N(t);$$

(d) $\forall s, t > 0, s < t$, $N(t) - N(s)$ 表示在时间间隔 $[s, t)$ 内事件 A 出现的次数。

若计数过程在不相交的时间间隔内事件 A 出现的次数是相互独立的，则称此计数过程为独立增量计数过程。

若计数过程在时间间隔 $[t, t + s)$ 内出现事件 A 的次数只与时间差 s 有关，而与起始时间 t 无关，则称此计数过程为平稳增量计数过程。

(3) Poisson 过程

Poisson 过程是计数过程，而且是一类最重要、应用广泛的计数过程，它最早于 1837 年由法国数学家 **Poisson** 引入，至今仍为应用最为广泛的随机过程之一。

定义：计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为时齐（齐次）**Poisson** 过程，若满足：

$$(a) \quad N(0) = 0;$$

$$(b) \quad \text{独立增量过程，即任取 } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \in N,$$

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立；

$$(c) \quad \text{增量平稳性，即：}$$

$$\forall s, t > 0, n \geq 0, P\{N(s+t) - N(s) = n\} = P\{N(t) = n\}$$

(d) 对任意 $t > 0$, 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有:

$$\begin{cases} P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P\{N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t) \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ (称为强度常数)。

定理: (Poisson 过程的一维分布) 若 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为时齐 Poisson 过程, 则

$\forall s, t > 0$, 有:

$$P\{N(s+t) - N(s) = k\} = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k \in N$$

即 $N(s+t) - N(s)$ 是参数为 λt 的 Poisson 分布。

证明: 由增量平稳性, 记:

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\} = P\{N(s+t) - N(s) = n\}$$

(I) $n=0$ 情形: 因为

$$\{N(t+h) = 0\} = \{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\}, \quad h > 0,$$

我们有:

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} = \\ &= P\{N(t) = 0\} P\{N(t+h) - N(t) = 0\} = P_0(t) P_0(h) \end{aligned}$$

另一方面

$$P_0(h) = P\{N(t+h) - N(t) = 0\} = 1 - (\lambda h + o(h))$$

代入上式, 我们有:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\left(\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}\right)$$

令 $h \rightarrow 0$, 我们有:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1 \end{cases} \Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

(II) $n > 0$ 情形: 因为:

$$\begin{aligned} \{N(t+h)=n\} &= \{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\} \\ &\cup \{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\} \\ &\cup \left[\bigcup_{l=2}^n \{N(t)=n-l, N(t+h)-N(t)=l\} \right] \end{aligned}$$

故有：

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h - o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h)$$

化简并令 $h \rightarrow 0$ 得：

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以 $e^{\lambda t}$ ，移项后有：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \\ P_n(0) = P\{N(0)=n\} = 0 \end{cases}$$

当 $n=1$ 时，有：

$$\frac{d}{dt} [e^{\lambda t} P_1(t)] = \lambda, P_1(0) = 0 \Rightarrow P_1(t) = (\lambda t) e^{-\lambda t}$$

由归纳法可得：

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in N_0$$

注意： $E\{N(t)\} = \lambda t \Rightarrow \lambda = \frac{E\{N(t)\}}{t}$ ，因此 λ 代表单位时间内事件 A 出

现的平均次数。

注意：**Poisson** 过程的转移率矩阵（**Q** 矩阵）的表示，并用上一章讲过的方法求解 **Poisson** 过程的一维分布。

二、 **Poisson** 过程与指数分布的关系

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一计数过程，记：

$S_0 = 0$ ， S_n 表示第 n 个事件发生的时刻（ $n \geq 1$ ），

$X_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$) 表示第 $n-1$ 个事件与第 n 事件发生的时间间隔。

当 $\forall t \geq 0, n \geq 0$ 时, 有以下基本的关系式:

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$$

因此, 我们有关于随机变量 S_n 的分布函数:

当 $t < 0$ 时, $F_{S_n}(t) = 0$; 当 $t \geq 0$ 时, 有:

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = 1 - P\{N(t) < n\} = 1 - e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right)$$

其概率密度为:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

即 $S_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 其中 $\alpha = n, \beta = \lambda^{-1}$ 。特别地, 当 $n=1$ 时, 有:

$$P\{X_1 \leq t\} = P\{S_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

即 $X_1 \sim \text{Ex}(\lambda)$ 是参数为 λ 的指数分布。

问题: X_2, X_3, \dots, X_n 是否还是服从参数为 λ 的指数分布? 是否独立? 我们以下将给出一个重要的定理。

为了更好地理解下面的内容, 我们先复习一下求随机变量概率密度的“微元法”以及顺序统计量的分布。

(1) 求随机变量概率密度的“微元法”:

- 一维情形: 若随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在 x 点连续, 则有:

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x+h\}}{h} \Rightarrow P\{x < X \leq x+h\} = f(x)h + o(h)$$

- 多维情形: 若随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 处连续, 则有:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h_1, h_2, \dots, h_n \rightarrow 0} \frac{P\{x_1 < X_1 \leq x_1 + h_1, \dots, x_n < X_n \leq x_n + h_n\}}{h_1 h_2 \cdots h_n}$$

即:

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X_1 \leq x_1 + h_1, \dots, x_n < X_n \leq x_n + h_n\} &= \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) h_1 h_2 \cdots h_n + o(h_1 h_2 \cdots h_n) \end{aligned}$$

(2) 顺序统计量的分布

定义: 给定 (Ω, Σ, P) , (X_1, X_2, \dots, X_n) 为其上的随机向量, $\forall \omega \in \Omega$, 将试验结果 $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ 按从小到大顺序重新进行排列, 记为 $X_{(1)}(\omega) \leq X_{(2)}(\omega) \leq \dots \leq X_{(n)}(\omega)$, 称 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的顺序统计量。

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立同分布非负的随机变量, 其密度函数为 $f(x)$, 记 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 为相应的顺序统计量, 则对于 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 取充分小的 $h > 0$, 使得:

$$0 < x_1 < x_1 + h < x_2 < x_2 + h < x_3 < \dots < x_{n-1} + h < x_n < x_n + h$$

有

$$\begin{aligned} \{x_1 < X_{(1)} \leq x_1 + h, x_2 < X_{(2)} \leq x_2 + h, \dots, x_n < X_{(n)} \leq x_n + h\} &= \\ &= \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \{x_1 < X_{i_1} \leq x_1 + h, x_2 < X_{i_2} \leq x_2 + h, \dots, x_n < X_{i_n} \leq x_n + h\} \end{aligned}$$

等式右边的各事件互不相容, 因此有:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} P\{x_1 < X_{(1)} \leq x_1 + h, x_2 < X_{(2)} \leq x_2 + h, \dots, x_n < X_{(n)} \leq x_n + h\} / h^n &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n! P\{x_1 < X_{i_1} \leq x_1 + h, x_2 < X_{i_2} \leq x_2 + h, \dots, x_n < X_{i_n} \leq x_n + h\} / h^n \end{aligned}$$

由此可得顺序统计量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 的联合概率密度为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(x_i), & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

特别地, 若 X_1, X_2, \dots, X_n 在 $[0, t]$ 上独立同均匀分布, 则其顺序统计量

$X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 的联合概率密度为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

若 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 $X_k \sim \text{Ex}(\lambda)$, 则其顺序统计量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 的联合概率密度为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}, & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理: 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的时齐 **Poisson** 过程的充分必要条件是 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布。

注意: 此定理的结论非常重要, 它反映了 **Poisson** 过程的本质特性, 也为 **Poisson** 过程的计算机模拟提供了理论基础。思考: 如何进行模拟?

证明: (只证必要性)

(a) 先求 (S_1, S_2, \dots, S_n) 的联合概率密度:

令: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 取充分小的 $h > 0$, 使得:

$$t_1 - \frac{h}{2} < t_1 < t_1 + \frac{h}{2} < t_2 - \frac{h}{2} < t_2 < t_2 + \frac{h}{2} < \dots < t_{n-1} + \frac{h}{2} < t_n - \frac{h}{2} < t_n < t_n + \frac{h}{2}$$

由:

$$\begin{aligned} & \left\{ t_1 - \frac{h}{2} < S_1 \leq t_1 + \frac{h}{2}, t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \leq t_2 + \frac{h}{2}, \dots, t_n - \frac{h}{2} < S_n \leq t_n + \frac{h}{2} \right\} \\ &= \left\{ N\left(t_1 - \frac{h}{2}\right) = 0, N\left(t_1 + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_1 - \frac{h}{2}\right) = 1, \right. \\ & \quad \left. N\left(t_2 - \frac{h}{2}\right) - N\left(t_1 + \frac{h}{2}\right) = 0, \dots, N\left(t_n + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_n - \frac{h}{2}\right) = 1 \right\} \cup H_n \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} H_n = & \left\{ N\left(t_1 - \frac{h}{2}\right) = 0, N\left(t_1 + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_1 - \frac{h}{2}\right) = 1, \dots, \right. \\ & \left. N\left(t_n + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_n - \frac{h}{2}\right) \geq 2 \right\} \end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{aligned} P\left\{t_1 - \frac{h}{2} < S_1 \leq t_1 + \frac{h}{2}, t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \leq t_2 + \frac{h}{2}, \dots, t_n - \frac{h}{2} < S_n \leq t_n + \frac{h}{2}\right\} = \\ = (\lambda h)^n e^{-\lambda\left(t_n + \frac{h}{2}\right)} + o(h^n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} h^n + o(h^n) \end{aligned}$$

因此, (S_1, S_2, \dots, S_n) 的联合概率密度为:

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\left\{t_1 - \frac{h}{2} < S_1 \leq t_1 + \frac{h}{2}, t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \leq t_2 + \frac{h}{2}, \dots, t_n - \frac{h}{2} < S_n \leq t_n + \frac{h}{2}\right\}}{h^n} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n} h^n + o(h^n)}{h^n} = \lambda^n e^{-\lambda t_n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \end{aligned}$$

即:

$$g(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n}, & 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(b) 求 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合概率密度:

由: $X_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$) 我们有:

$$\begin{cases} X_1 = S_1 \\ X_2 = S_2 - S_1 \\ \vdots \\ X_n = S_n - S_{n-1} \end{cases} \quad \text{令:} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 \geq 0 \\ x_2 = t_2 - t_1 \geq 0 \\ \vdots \\ x_n = t_n - t_{n-1} \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = x_1 \\ t_2 = x_1 + x_2 \\ \vdots \\ t_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{cases}$$

则变换的雅可比行列式为:

$$J = \frac{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

于是 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合概率密度为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}, & x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由此可得 X_k 的概率密度为 $f_k(x_k) = \lambda e^{-\lambda x_k}$, $x_k \geq 0, 1 \leq k \leq n$, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k)$$

由此证明了 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布。

三、 剩余寿命与年龄

设 $N(t)$ 为在 $[0, t]$ 内事件 A 发生的个数, S_n 表示第 n 个事件发生的时刻, $S_{N(t)}$ 表示在 t 时刻前最后一个事件发生的时刻, $S_{N(t)+1}$ 表示在 t 时刻后首次事件发生的时刻, 令:

$$\begin{cases} W(t) = S_{N(t)+1} - t \\ V(t) = t - S_{N(t)} \end{cases}$$

称 $W(t)$ 为事件 A 的剩余寿命或剩余时间, $V(t)$ 为事件 A 的年龄。

由定义可知: $\forall t \geq 0, W(t) \geq 0, 0 \leq V(t) \leq t$, 我们有以下重要定理。

定理: 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的时齐 Poisson 过程, 则有:

(a) $W(t)$ 与 $\{X_n, n \geq 1\}$ 同分布, 即

$$P\{W(t) \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

(b) $V(t)$ 的分布为“截尾”的指数分布, 即

$$P\{V(t) \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < t \\ 1, & t \leq x \end{cases}$$

证明: 注意到:

$$\{W(t) > x\} = \{N(t+x) - N(t) = 0\}$$

以及

$$\{V(t) > x\} = \begin{cases} \{N(t) - N(t-x) = 0\}, & t > x \\ \emptyset, & t \leq x \end{cases}$$

即可得所要的结果。

定理：若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布，又对 $\forall t \geq 0, W(t)$ 与 $X_n (n \geq 1)$ 同分布，分布函数为 $F(x)$ ，且 $F(0) = 0$ ，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 **Poisson** 过程。

注意： $X_n = S_n - S_{n-1}$ 表示的是第 $n-1$ 个事件的寿命。

四、 到达时间的条件分布

下面讨论在条件 $N(t) = n$ 下， S_1, S_2, \dots, S_n 的条件分布问题。

定理：设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为时齐 **Poisson** 过程，则对 $\forall 0 < s < t$ ，有：

$$P\{X_1 \leq s \mid N(t) = 1\} = \frac{s}{t}$$

证明：

$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq s \mid N(t) = 1\} &= \frac{P\{X_1 \leq s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} = \\ &= \frac{P\{N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &= \frac{(\lambda s)e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{(\lambda t)e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t} \end{aligned}$$

定理：设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为齐次 **Poisson** 过程，则在已知条件 $N(t) = n$ 下，事件相继发生的时间 S_1, S_2, \dots, S_n 的条件概率密度为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明：对 $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$ ，取 $h_0 = h_{n+1} = 0$ 及充分小的 h_i ，

使得 $t_i + h_i < t_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$ ，则有：

$$\begin{aligned}
P\{t_i < S_i \leq t_i + h_i, 1 \leq i \leq n \mid N(t) = n\} &= \\
&= \frac{P\{N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, 1 \leq i \leq n, N(t_{j+1}) - N(t_j + h_j) = 0, 0 \leq j \leq n\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{(\lambda h_1) e^{-\lambda h_1} \cdots (\lambda h_n) e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t - h_1 - h_2 - \cdots - h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n
\end{aligned}$$

因此可得定理的结果。

本定理说明：在 $N(t) = n$ 的条件下，事件相继发生的时间 S_1, S_2, \dots, S_n 的条件分布与 n 个在 $[0, t]$ 上相互独立同均匀分布的顺序统计量的分布函数一样。

定理：设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程， X_n 为第 n 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔， $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布且 $F(x) = P\{X_n \leq x\}$ ，若 $F(0) = 0$ 且对 $\forall 0 < s < t$ ，有

$$P\{X_1 \leq s \mid N(t) = 1\} = \frac{s}{t}, \quad t > 0$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 **Poisson** 过程。

定理：设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程， X_n 为第 n 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔， $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布且 $F(x) = P\{X_n \leq x\}$ ，若 $E\{X_n\} < \infty, F(0) = 0$ ，且对 $\forall 0 < s < t$ ，有

$$P\{S_n \leq s \mid N(t) = n\} = \left(\frac{s}{t}\right)^n, \quad t > 0$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 **Poisson** 过程。

例：设到达火车站的顾客流遵循参数为 λ 的 **Poisson** 流 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，火车 t 时刻离开车站，求在 $[0, t]$ 到达车站的顾客等待时间总和的期望值。

解：设第 i 个顾客到达火车站的时刻为 S_i ，则 $[0, t]$ 内到达车站的顾客等待时间总和为：

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)$$

因为:

$$\begin{aligned} E\{S(t) \mid N(t) = n\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t) = n\right\} = \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n (t - S_i) \mid N(t) = n\right\} = nt - E\left\{\sum_{i=1}^n S_i \mid N(t) = n\right\} \\ &= nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2} \end{aligned}$$

故:

$$\begin{aligned} E\{S(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(P\{N(t) = n\} E\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t) = n\right\} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\} \cdot \frac{nt}{2} = \frac{t}{2} E\{N(t)\} = \frac{\lambda}{2} t^2 \end{aligned}$$

例: 设一系统在 $[0, t]$ 内受冲击的次数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的齐次 Poisson 过程, 第 k 次受冲击的损失为 D_k , 其中 $\{D_k, k \geq 1\}$ 是独立同分布并与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 且损失随时间按负指数衰减。 $t=0$ 的衰减为 D , 经 t 时刻损失为 $De^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$ 为常数), 设损失可加, t 时刻的总损失为 $\xi(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)}$, 其中 S_k 为第 k 次冲击到达的时刻, 试求 $E\xi(t)$ 。

解: 由于:

$$\begin{aligned} E\{\xi(t) \mid N(t) = n\} &= E\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)} \mid N(t) = n\right\} \\ &= E\left\{\sum_{k=1}^n D_k e^{-\alpha(t-S_k)} \mid N(t) = n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^n E\{D_k \mid N(t) = n\} E\{e^{-\alpha(t-S_k)} \mid N(t) = n\} \\ &= ED \cdot e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n E\{e^{\alpha S_k} \mid N(t) = n\} \end{aligned}$$

记 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 为 $[0, t]$ 上独立同均匀分布的随机变量, 则有:

$$\sum_{k=1}^n E\{e^{\alpha S_k} \mid N(t) = n\} = E\left\{\sum_{k=1}^n e^{\alpha Y_k}\right\} = E\left\{\sum_{k=1}^n e^{\alpha Y_k}\right\} = n \int_0^t e^{\alpha x} \frac{dx}{t} = \frac{n}{\alpha t} [e^{\alpha t} - 1]$$

所以有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t) = n\} = \frac{n}{\alpha t} [1 - e^{-\alpha t}] \cdot ED$$

即有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)\} = \frac{N(t)}{\alpha t} [1 - e^{-\alpha t}] \cdot ED$$

故：

$$E\{\xi(t)\} = E[E\{\xi(t) \mid N(t)\}] = \frac{\lambda \cdot ED}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]$$

五、 非齐次（时齐）Poisson 过程

定义：一计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，称它为具有强度函数 $\{\lambda(t) > 0, t \geq 0\}$ 的非齐次 Poisson 过程，若满足：

(a) $N(0) = 0$

(b) 独立增量过程，即任取 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ，

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立；

(c) 对任意 $t > 0$ ，和充分小的 $\Delta t > 0$ ，有：

$$\begin{cases} P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t) \end{cases}$$

其中 $\lambda(t) > 0$ （称为强度常数）。

记： $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ ，则有：

定理：若 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为非时齐具有强度函数 $\{\lambda(t) > 0, t \geq 0\}$ 的 Poisson

过程, 则 $\forall s, t > 0$, 有:

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = \frac{[m(s+t) - m(s)]^n}{n!} e^{-[m(s+t) - m(s)]} \quad (n \geq 0)$$

定理: (变换定理)

(a) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具有强度函数 $\{\lambda(t) > 0, t \geq 0\}$ 的非时齐 Poisson 过程, 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$, $m^{-1}(t)$ 是 $m(t)$ 的反函数 (由于 $m(t)$ 单调增, 反函数一定存在), 记 $M(u) = N(m^{-1}(u))$, 则 $\{M(u), u \geq 0\}$ 是时齐 Poisson 过程。

(b) 设 $\{M(u), u \geq 0\}$ 是时齐 Poisson 过程, 参数 $\lambda = 1$ 。若强度函数 $\{\lambda(s) > 0, s \geq 0\}$, 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$, $N(t) = M(m(t))$, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是非时齐的具有强度函数 $\{\lambda(s) > 0, s \geq 0\}$ 的 Poisson 过程。

六、复合 Poisson 过程

定义: 设 $\{Y_i, i \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列, $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 Poisson 过程, 且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 与 $\{Y_i, i \geq 1\}$ 独立, 记:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为复合 Poisson 过程。

物理意义: 如 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示粒子流, $N(t)$ 表示 $[0, t]$ 内到达的粒子数, Y_i 表示第 i 个粒子的能量, 则 $X(t)$ 表示 $[0, t]$ 内到达的粒子的总能量。若 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示顾客流, Y_i 表示第 i 个顾客的行李重量, 则 $X(t)$ 表示 $[0, t]$ 内到达的顾客的行李总重量。若某保险公司买了人寿保险的人在时刻 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 死亡, 在时刻 S_n 死亡的人的保险金额是 Y_n , 在 $[0, t]$ 内死亡的人数为 $N(t)$, 则 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 表示该公司在 $[0, t]$ 内需要支付的赔偿金总额。

我们关心的是复合Poisson过程的一些数字特征。

定义：随机变量 X 的矩母函数定义为：

$$\phi(t) \triangleq E\{e^{tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x)$$

若上面的积分存在。

如果 X 的 k 阶中心矩存在，则有：

$$E\{X^k\} = \phi^{(k)}(0)$$

下面求复合Poisson过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的数学期望和方差。

先求 $X(t)$ 的矩母函数：

$$\begin{aligned}\phi_{X(t)}(u) &= E\{e^{uX(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\} E\{e^{uX(t)} \mid N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)} \mid N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} (E\{e^{uY_1}\})^n\end{aligned}$$

令 $Y \sim Y_i$ 的矩母函数为 $\phi_Y(u) = E\{e^{uY}\}$ ，则有：

$$\phi_{X(t)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} (E\{e^{uY_1}\})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda t \phi_Y(u)]^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\{\lambda t[\phi_Y(u) - 1]\}$$

对上式在 $u = 0$ 处求导数，有：

$$E\{X(t)\} = \phi'_{X(t)}(0) = \lambda t \cdot E\{Y\}$$

以及

$$D(X(t)) = \lambda t E\{Y^2\}$$

特殊情形：若 $\{\rho_i, i \geq 1\}$ 为独立同分布，取值为正整数的随机变量序列，且

与 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立，记

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \rho_i$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为平稳无后效流。

七、条件 Poisson 过程

定义：设 Λ 是一正的随机变量，分布函数为 $G(x)$, $x \geq 0$ ，设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一计数过程，且在给定条件 $\Lambda = \lambda$ 下， $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一参数为 λ 的 Poisson 过程，即 $\forall s, t \geq 0, n \in N_0, \lambda \geq 0$ ，有：

$$P\{N(s+t) - N(s) = n \mid \Lambda = \lambda\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是条件 Poisson 过程。

注意，条件 Poisson 过程不是独立增量过程。由全概率公式我们有：

$$\begin{aligned} P\{N(s+t) - N(s) = n\} &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{N(s+t) - N(s) = n \mid \Lambda = \lambda\} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda) \end{aligned}$$

由此可知，条件 Poisson 过程是平稳增量过程。但是

$$\begin{aligned} P\{N(s) = m, N(s+t) - N(s) = n\} &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda s)^m}{m!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dG(\lambda) \\ P\{N(s) = m\} P\{N(s+t) - N(s) = n\} &= \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda s)^m}{m!} e^{-\lambda s} dG(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dG(\lambda) \end{aligned}$$

显然

$$P\{N(s) = m, N(s+t) - N(s) = n\} \neq P\{N(s) = m\} P\{N(s+t) - N(s) = n\}$$

因此，条件 Poisson 过程不是独立增量过程。

八、 例子

例：设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为强度为 λ_1 和 λ_2 ，并且相互独立的 **Poisson** 过程，证明在 $N_1(t)$ 的任一到达时间间隔内， $N_2(t)$ 恰有 k 个事件发生的概率为：

$$p_k = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

证明：根据二中的定理，可以令 X 为 $N_1(t)$ 的任一到达时间间隔并且 $X \sim Ex(\lambda_1)$ ，即 X 的分布密度为：

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$\begin{aligned} p_k &= P\{N_2(t) = k, t \in [0, X)\} = \int_0^{+\infty} P\{N_2(t) = k \mid X = t\} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

例：设 $N(t)$ 是强度为 λ 的 **Poisson** 过程，求在 $[0, t)$ 内发生了 n 个事件的条件下，第 r ($r < n$) 个事件发生时刻的概率密度。

解：取充分小的 $h > 0$ ，则有：

$$\begin{aligned} P\{x < S_r \leq x + h \mid N(t) = n\} &= \frac{P\{x < S_r \leq x + h, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{P\{x < S_r \leq x + h, N(t) - N(x + h) = n - r\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{P\{x < S_r \leq x + h\} P\{N(t) - N(x + h) = n - r\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{f_{S_r}(x) h \cdot \frac{[\lambda(t - x - h)]^{n-r}}{(n-r)!} \cdot e^{-\lambda(t-x-h)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}} \end{aligned}$$

两边除以 h ，并令 $h \rightarrow 0$ ，我们有：

$$\begin{aligned} f_{S_r}(x|N(t)=n) &= \frac{f_{S_r}(x) \cdot \frac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!} \cdot e^{\lambda x}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{\frac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!} \cdot e^{\lambda x}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \end{aligned}$$

最后我们可以得到结果：

$$f_{S_r}(x|N(t)=n) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \left(\frac{x}{t}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-r} \cdot \frac{1}{t}, \quad 0 < x < t$$

例：设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 **Poisson** 过程， $f(t) = ke^{-kt}$ 是一确定性实函数，并且设

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

记 S_i 是 $N(t)$ 的第 i 个事件到达的时刻， $A_i, i=1,2,\dots$ 是一独立同分布的离散型随机变量序列，其分布率为：

$$P\{A_i = 1\} = P\{A_i = -1\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

令 $A_0 = 0$ ， $\{A_i, i=1,2,\dots\}$ 与 $N(t)$ 相互独立。现在构造一随机过程：

$$X(t) = A_{N(t)} f(t - S_{N(t)}) u(t - S_{N(t)})$$

试画出此随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的一样本函数并求其均值函数和相关函数。

解：（1）求均值函数：

由条件数学期望的性质，我们有：

$$E\{X(t)\} = E\{E\{X(t)|N(t)\}\}$$

又有：

$$\begin{aligned}
E\{X(t) | N(t) = n\} &= E\{A_n k e^{-k(t-S_n)} u(t-S_n)\} \\
&= E\{A_n\} E\{k e^{-k(t-S_n)} u(t-S_n)\} = 0
\end{aligned}$$

故有：

$$E\{X(t)\} = E\{E\{X(t) | N(t)\}\} = 0$$

(2) 求相关函数：

由相关函数的定义，有：

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E\{X(t)X(t+\tau)\} \\
&= E\{A_{N(t)} k e^{-k(t-S_{N(t)})} u(t-S_{N(t)}) \times \\
&\quad \times A_{N(t+\tau)} k e^{-k(t+\tau-S_{N(t+\tau)})} u(t+\tau-S_{N(t+\tau)})\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P\{N(t)=i, N(t+\tau)=j\} \cdot E\{A_i k e^{-k(t-S_i)} u(t-S_i) \times \\
&\quad \times A_j k e^{-k(t+\tau-S_j)} u(t+\tau-S_j)\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t)=i, N(t+\tau)-N(t)=0\} \times \\
&\quad \times E\{A_i^2 k^2 e^{-2k(t-S_i)-k\tau} u(t-S_i) u(t+\tau-S_i)\}
\end{aligned}$$

由 $\{A_i, i=1,2,\dots\}$ 与 $N(t)$ 相互独立性，及 $E\{A_i^2\}=1$ ，我们可得：

$$R_X(t, t+\tau) = e^{-\lambda\tau - k\tau} \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t)=i\} k^2 E\{e^{-2k(t-S_i)} u(t-S_i) u(t+\tau-S_i)\}$$

由上面的例子可知，在条件 $N(t)=i$ 下， S_i 的条件分布密度为：

$$f_{S_i}(x) = \frac{i x^{i-1}}{t^i}, \quad 0 < x < t$$

因此我们有：

$$E\{e^{-2k(t-S_i)} u(t-S_i) u(t+\tau-S_i)\} = \int_0^t e^{-2k(t-x)} f_{S_i}(x) dx$$

即：

$$\begin{aligned}
R_X(t, t + \tau) &= e^{-\lambda\tau - k\tau} \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t) = i\} k^2 \int_0^t e^{-2k(t-x)} f_{S_i}(x) dx \\
&= e^{-\lambda\tau - k\tau} \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t) = i\} k^2 \int_0^t e^{-2k(t-x)} \frac{ix^{i-1}}{t^i} dx \\
&= e^{-\lambda\tau - k\tau} \int_0^t k^2 e^{-2k(t-x)} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} P\{N(t) = i\} \frac{ix^{i-1}}{t^i} \right\} dx \\
&= e^{-\lambda\tau - k\tau} \int_0^t k^2 e^{-2k(t-x)} \left\{ \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t} \right\} dx \\
&= e^{-\lambda\tau - k\tau} \int_0^t k^2 e^{-2k(t-x)} \{ \lambda e^{\lambda x} e^{-\lambda t} \} dx = e^{-\lambda\tau - k\tau} \frac{k^2 \lambda}{2k + \lambda} [1 - e^{-\lambda t - 2kt}]
\end{aligned}$$

注： Γ 分布的定义：

称随机变量 X 服从参数为 $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ 的 Γ 分布，如果其分布密度函数为：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

记为： $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ；其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$ 。

当 α 取整数时， $\Gamma(n) = (n-1)!$