第三章 Poisson 过程（Poisson 信号流）习题

1、 设$\{N(t), t \ge 0\}$是一强度为λ的齐次泊松过程，而$X(t) = N(t)/2 - 1$，$t \ge 0$。对$s > 0$，试求：

（1）计算$E\{N(t)N(t+s)\}$及$E\{N(s+t) \mid N(s)\}$的分布律；

（2）证明过程$X(t)$，$t \ge 0$是马氏过程并写出转移概率$p(s,i;t,j)$，其中$s \le t$。

2、 设$\{X(t); t \ge 0\}$与$\{Y(t); t \ge 0\}$是相互独立，参数分别为λ_1与λ_2的 Poisson 过程。定义随机过程$Z(t) = X(t) - Y(t), t \ge 0$，且令：$p_n(t) = P\{Z(t) = n\}$。

（1）试求随机过程$\{Z(t); t \ge 0\}$的均值函数$E\{Z(t)\}$和二阶矩$E\{Z^2(t)\}$；

（2）试证明：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)u^n = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\} \cdot \exp\{\lambda_1 ut + \lambda_2 u^{-1} t\}$。

3、 设$\{N_1(t); t \ge 0\}$和$\{N_2(t); t \ge 0\}$是相互独立的**Poisson**过程,其参数分别为λ_1和λ_2.若$N_0(t) = N_1(t) - N_2(t)$，问:

（1） $\{N_0(t); t \ge 0\}$是否为 Poisson 过程，请说明理由；

（2） $\{N_0(t); t \ge 0\}$是否为平稳过程，请说明理由。

4、 设$Y(t) = X(-1)^{N(t)}, t \ge 0$，其中$\{N(t); t \ge 0\}$为强度为$\lambda > 0$的 **Poisson** 过程，随机变量$X$与此 **Poisson** 过程独立，且有如下分布：

$$P\{X = -a\} = P\{X = a\} = 1/4, \quad P\{X = 0\} = 1/2, \quad a > 0$$

试求随机过程$Y(t), t \ge 0$的均值函数和相关函数。

5、 设$\{N(t), t \ge 0\}$是一强度为λ的泊松过程，$S_0 = 0$，S_n为第n个事件发生的时刻，求：

（1） (S_2, S_5)的联合概率密度函数；

（2） $E\{S_1 \mid N(t) \ge 1\}$；

（3） (S_1, S_2)在$N(t) = 1$条件下的条件概率密度函数。

6、 设$\{N(t), t \ge 0\}$是一强度为λ的泊松过程，设T为第一个事件出现的时间，$N(T/a)$为第一个事件后，在T/a时间间隔内出现的事件数，其中a为正常数。试计算：

（1） $E\{TN(T/a)\}$；

（2） $E\{[TN(T/a)]^2\}$。

7、 某商场为调查客源情况，考察男女顾客到达商场的人数。假设$[0,t)$时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为λ和μ的泊松过程。问：

（1）$[0,t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么分布？

（2）在已知 $[0,t)$ 时间内商场到达 n 位顾客的条件下，其中有 k 位是女顾客的概率为何？平均有多少位女顾客？

8、设在时间区间 $(0,t]$ 到达某商店的顾客数 $N(t),t\geq 0$ 是强度为 $\lambda>0$ 的齐次泊松过程，$N(0)=0$，且每个顾客购买商品的概率 $p>0$，没有买商品的概率为 $q=1-p$，分别以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示 $(0,t]$ 所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数，$t\geq 0$。证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 λp 和 λq 的泊松过程，并且是相互独立的。进一步求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s,t)$。

9、在某公共汽车起点站，有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 λ_1、λ_2 的齐次 Poisson 过程，且它们是相互独立的。假设 $t=0$ 时，两路公交车同时开始接受乘客上车。

（1）如果甲车在时刻 t 发车，计算在 $[0,t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值；

（2）如果当甲路车上有 n 个乘客时，甲路车发车；当乙路车上有 m 个乘客时，乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。（写出表达式即可）

10、　设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 独立同分布，X_n 的概率密度函数为 $f(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x},x\geq 0$，试求相应的更新函数 $m(t)$。

11、　设更新过程 $N(t),t\geq 0$ 的时间间隔 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从参数为 μ 的泊松分布，试求：

（1）$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的分布；

（2）计算 $P\{N(t)=n\}$。