第六章　高斯（Gauss）过程

（一）　多元正态（Gauss）分布

1．n 元正态分布的定义

定义：设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 是 n 元随机向量，其均值为 $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$，其中 $\mu_i=E\{\xi_i\}, i=1,2,\cdots,n$，令：

$$b_{ik}=\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_k)=E\{(\xi_i-\mu_i)(\xi_k-\mu_k)\}, i,k=1,2,\cdots,n$$

则可得 $\vec{\xi}$ 的协方差矩阵为：$B=(b_{ik})_{n\times n}$，注意矩阵 B 为一非负定对称矩阵，我们有如下的定义：

（1）　如果 B 是一正定矩阵，则 n 元随机向量 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 服从正态分布时的概率分布密度为：

$$f_{\vec{\xi}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{\vec{\xi}}(\vec{x}^T)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|B\right|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\vec{\xi}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\Phi_{\vec{\xi}}(\vec{t}^T)=\exp\{j\vec{t}^T\cdot\vec{\mu}-\frac{1}{2}\vec{t}^T B\vec{t}\} \qquad \textbf{(A)}$$

n 元随机向量服从正态分布记为：$\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$。

（2）　如果 B 不是一正定矩阵，则由（A）可以定义一特征函数，由此特征函数对应的分布函数我们定义为 n 元正态分布，仍记为 $\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$。

2．n 元正态分布的边缘分布

定理：设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 为服从 n 元正态分布的随机向量，即 $\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$，则 $\vec{\xi}$ 的任意一个子向量 $(\xi_{k_1},\xi_{k_1},\cdots,\xi_{k_m}), m\le n$ 仍服从正态分布。

3． n 元正态分布的独立性

定理：n 元正态分布的随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立的充分必要条件是它们两两不相关。

定理：设 $\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为正态分布的随机向量，且 $\vec{\xi}^T=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)^T$

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中：B_{11},B_{22} 分别是 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 的协方差矩阵，B_{12} 是由 $\vec{\xi}_1$ 及 $\vec{\xi}_2$ 的相应分量的协方差构成的矩阵，$B_{12}=B_{21}^T$，则 $\vec{\xi}_1$ 与 $\vec{\xi}_2$ 相互独立的充分必要条件是 $B_{12}=0$。

4． 正态随机变量线性变换后的性质

（**1**）设 $\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，$\vec{\mu}^T=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k=\vec{a}^T\cdot\vec{\xi}$，$\vec{a}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则有 $E\{\zeta\}=\vec{a}^T\cdot\vec{\mu}$，$D\{\zeta\}=\vec{a}^TB\vec{a}$。

（**2**）令 $C=(c_{jk})_{m\times n}$，$\vec{\eta}=C\vec{\xi}$，则有：

$$E\{\vec{\eta}\}=C\vec{\mu},\ D\{\vec{\eta}\}=CBC^T$$

（**3**）$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$ 的充分必要条件是：

$$\forall\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k=\vec{a}^T\vec{\xi}\sim N(\sum_{k=1}^{n}a_k\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_ka_ib_{ki})=N(\vec{a}^T\vec{\mu},\ \vec{a}^TB\vec{a})$$

（**4**）若 $\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，$C=(c_{jk})_{m\times n}$ 为任意的矩阵，则有：$\vec{\eta}=C\vec{\xi}$ 为服从 m 元正态分布，即 $\vec{\eta}=C\vec{\xi}\sim N(C\vec{\mu},CBC^T)$。

（**5**）若 $\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，则存在一正交矩阵 U，使得 $\vec{\eta}=U^T\vec{\xi}$ 是一独立正态分布的随机向量，它的均值为 $U^T\vec{\mu}$，方差为矩阵 B 的特征值。

（**6**）n 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每一个分量都是正态变量；反

之，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态随机变量，且相互独立，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态随机变量。

5．例子

- 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 为服从正态分布的随机向量，且 $E\{X_i\}=0, i=1,2,3,4$，试证明：

$$\begin{aligned}&E\{X_1X_2X_3X_4\}\\&\quad=E\{X_1X_2\}E\{X_3X_4\}+E\{X_1X_3\}E\{X_2X_4\}+E\{X_1X_4\}E\{X_2X_3\}\end{aligned}$$

证明：见教材 **P466**。

注意：此结论非常重要，经常会被应用。

- 设 X, Y 是服从均值为零的正态分布二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则

$$E\{XY\}=r\sigma_1\sigma_2,\quad E\{X^2Y^2\}=\sigma_1^2\sigma_2^2+2r^2\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$E\{|XY|\}=\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}[\varphi\sin\varphi+\cos\varphi]$$

其中：$\sin\varphi=r,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$。

证明：由联合分布可以求得边缘分布和条件分布为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y-\frac{r\sigma_2x}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

由此可得：

$$E\{Y|X\}=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X,\quad E\{Y^2|X\}=(1-r^2)\sigma_2^2+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2$$

因此，我们有：

$$E\{XY\}=E\{E\{XY|X\}\}=E\{XE\{Y|X\}\}$$
$$=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}E\{X^2\}=r\sigma_1\sigma_2$$

$$E\{X^2Y^2\}=E\{E\{X^2Y^2|X\}\}=E\{X^2E\{Y^2|X\}\}$$
$$=(1-r^2)\sigma_2^2E\{X^2\}+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}E\{X^4\}=(1-r^2)\sigma_2^2\sigma_1^2+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot 3\sigma_1^4$$
$$=\sigma_2^2\sigma_1^2+2r^2\sigma_2^2\sigma_1^2=E\{X^2\}E\{Y^2\}+2[E\{XY\}]^2$$

另外

$$E\{|XY|\}=\iint|xy|f(x,y)dxdy$$
$$=\iint_{xy>0}xyf(x,y)dxdy-\iint_{xy<0}xyf(x,y)dxdy$$
$$=E\{XY\}-2\iint_{xy<0}xyf(x,y)dxdy$$
$$=r\sigma_1\sigma_2-2\left[\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}xyf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}xyf(x,y)dxdy\right]$$

令：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{\sigma_1}\\ v=\dfrac{y}{\sigma_2}\end{cases}$$

则有：

$$E\{|XY|\}=r\sigma_1\sigma_2-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}uv\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dudv$$
$$=r\sigma_1\sigma_2-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

令：

$$\begin{cases}R\cos\theta=\dfrac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\\ R\sin\theta=v\end{cases}$$

则有：

$$\begin{cases} u=\sqrt{1-r^2}R\cos\theta+rR\sin\theta \\ v=R\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\theta)}=R\sqrt{1-r^2} \quad \Rightarrow \quad dudv=R\sqrt{1-r^2}dRd\theta$$

因此有：

$$E\{|XY|\}=r\sigma_1\sigma_2-$$

$$-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\arccos r}^{0}R\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}R\cos\theta+rR\sin\theta\right]\exp\{-\frac{R^2}{2}\}RdRd\theta$$

$$=r\sigma_1\sigma_2-\frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_{-\arccos r}^{0}\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}\cos\theta+r\sin\theta\right]d\theta$$

$$=r\sigma_1\sigma_2-\frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}r\theta-\frac{1}{4}r\sin 2\theta\right]_{-\arccos r}^{0}$$

$$=\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left[\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\right]$$

其中：$\sin\varphi=r,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$。

（二）　高斯（正态）过程

定义：如果随机过程$\{\xi(t);\, t\in T\}$的有限维分布均为正态分布，则称此随机过程为高斯过程或正态过程。正态过程是二阶矩过程。

设$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，则由正态过程的定义，有：

$$f_{\xi}(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|B\right|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_t-\vec{\mu}_t)^T B^{-1}(\vec{x}_t-\vec{\mu}_t)\}$$

其中：

$$\vec{x}_t^{\,T}=(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})$$

$$\vec{\mu}_t^T = (\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \cdots, \mu_{t_n}), \quad \mu_{t_k} = E\{\xi(t_k)\}$$

$$b_{ki} = E\{(\xi(t_k) - \mu_{t_k})(\xi(t_i) - \mu_{t_i})\} = R_\xi(t_k, t_i) - \mu_{t_k}\mu_{t_i}, \quad B = (b_{ki})_{n\times n}$$

如果 $\{\xi(t); t\in T\}$ 为实的宽平稳过程，则 $\mu_{t_k} = E\{\xi(t_k)\} = \mu$ 为常数，$R_\xi(t_k, t_i) = R_\xi(t_k - t_i)$, $b_{ki} = R_\xi(t_k - t_i) - \mu^2 = b(t_k - t_i)$，因此可得有限维分布的特征函数为：

$$\Phi_\xi(u_1, u_2, \cdots, u_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) =$$

$$= \exp\left\{ j\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)\mu - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n b(t_k - t_i)u_k u_i \right\}$$

由此，实平稳正态过程也是实严平稳过程。关于正态过程我们有以下的结论。

定理：设 $\{\vec{\xi}^{(n)}; n = 1,2,\cdots\}$ 为 k 维实正态随机向量序列，其中 $\vec{\xi}^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)})^T$，且 $\vec{\xi}^{(n)}$ 均方收敛于 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)^T$，即

$$\lim_{n\to\infty} E\{\left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right|^2\} = 0, \quad 1 \le i \le k$$

则 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)^T$ 也是正态分布的随机向量。

定理：若正态过程 $\{\xi(t); t\in T\}$ 在 T 上是均方可导的，则 $\{\xi'(t); t\in T\}$ 也是正态过程。

定理：若正态过程 $\{\xi(t); t\in T\}$ 在 T 上是均方可积的，则

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(u)du, \ a, t\in T \quad 及 \quad \eta(t) = \int_a^b \xi(u)h(t,u)du, \ a, b\in T$$

也是正态过程。

（三）　窄带平稳实高斯过程

1.　一维包络分布和一维相位分布

由前面关于窄带平稳信号的表示法，我们有：

$$\begin{cases} \xi(t) = x_c(t)\cos 2\pi f_0 t + x_s(t)\sin 2\pi f_0 t \\ \hat{\xi}(t) = x_c(t)\sin 2\pi f_0 t - x_s(t)\cos 2\pi f_0 t \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} x_c(t) = \xi(t)\cos 2\pi f_0 t + \hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_0 t \\ x_s(t) = \xi(t)\sin 2\pi f_0 t - \hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_0 t \end{cases}$$

其中：$E\{\xi(t)\} = 0$，$\hat{\xi}(t)$ 为 $\xi(t)$ 的 Hilbert 变换。

若 $\xi(t)$ 为一窄带平稳的实正态过程，则由以上两组表达式可知，$x_c(t), x_s(t)$ 均为正态过程，且是联合正态过程（为什么？）。

例：设有线性系统，它的冲激响应为 $h(t)$，输入为实平稳正态过程 $\xi(t)$。设其输出为 $\eta(t)$，试证明 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 为联合正态随机过程。

证明：由线性系统输入、输出的关系：

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau$$

可知 $\eta(t)$ 为实正态随机过程。

令：$\varsigma = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\xi(t)\,dt$，其中 $g(\cdot)$ 是一任意实函数。则 ς 为一正态分布随机变量。

定义实函数：

$$g(t) = g_1(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u)h(u-t)du$$

则有：

$$\begin{aligned} \varsigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\xi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\xi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u)\,h(u-t)du\,\xi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\xi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u-t)\xi(t)\,dt\,g_2(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\xi(u)\,du + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u)\eta(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g_1(u), g_2(u)) \cdot \begin{pmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} du \end{aligned}$$

由于 $g(t)$、$g_1(t)$、$g_2(t)$ 为任意的实函数，而 ς 为一正态分布随机变量，因此 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 为联合正态随机过程。

下面研究窄带平稳实高斯过程的一维包络分布和一维相位分布：

设$\xi(t)$的相关函数为$R_\xi(\tau)$，方差为$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0)$，则$x_c(t), x_s(t)$的均值为零，方差为：

$$\sigma_{x_c}^2 = R_{x_c}(0) = \sigma_{x_s}^2 = R_{x_s}(0) = R_\xi(0) = \sigma_\xi^2$$

由于$R_{x_c x_s}(0) = E\{x_c(t)x_s(t)\} = 0$，因此$x_c(t), x_s(t)$相互独立。它们的联合分布密度为：

$$f(x_c, x_s) = f(x_c)f(x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

由$\xi(t)$的表达式，我们有：

$$\xi(t) = V(t)\cos[2\pi f_0 t + \theta(t)]$$

其中：

$$\begin{cases} V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \theta(t) = tg^{-1}\left(-\dfrac{x_s(t)}{x_c(t)}\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(t)\cos\theta(t) = x_c(t) \\ -V(t)\sin\theta(t) = x_s(t) \end{cases}$$

此变换的雅克比行列式为：

$$J = \frac{\partial(x_{c_t}, x_{s_t})}{\partial(V_t, \theta_t)} = \begin{vmatrix} \cos\theta_t & -\sin\theta_t \\ -V_t\sin\theta_t & -V_t\cos\theta_t \end{vmatrix} = -V_t \quad \Rightarrow \quad |J| = V_t$$

当$V_t > 0, 0 \le \theta_t \le 2\pi$时，有：

$$f(V_t, \theta_t) = \frac{V_t}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

故：

$$f(V_t) = \begin{cases} \dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\dfrac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\}, & V_t \ge 0 \\ 0, & V_t < 0 \end{cases}$$

即$V(t)$服从瑞利分布。

$$f(\theta_t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le \theta_t \le 2\pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

且有：

$$f(V_t,\theta_t)=f(V_t)f(\theta_t)$$

因此，在同一时刻t，包络$V(t)$与相位$\theta(t)$是独立的随机变量，但它们不是独立的随机过程。

另外有：

$$E\{V(t)\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_\xi^2,\ E\{V^2(t)\}=2\sigma_\xi^2,\ D\{V(t)\}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_\xi^2$$

2.　研究包络$V(t)$与相位$\theta(t)$在任意两个不同时刻t_1,t_2的联合分布

此时可以推出：

$$f(V_{t_1},V_{t_2},\theta_{t_1},\theta_{t_2})\neq f(V_{t_1},V_{t_2})f(\theta_{t_1},\theta_{t_2})$$

由此可知包络过程$V(t)$与相位过程$\theta(t)$不独立。详细推导课后阅读。

（四）　正弦波和窄带平稳实高斯过程之和

令：

$$\eta(t)=P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)$$

其中：$P,\omega_0=2\pi f_0$为常数，$\xi(t)$为窄带平稳实高斯过程，ω_0为窄带平稳实高斯过程的功率谱密度的中心角频率，$\theta\sim U(0,2\pi)$。θ与$\xi(t)$相互独立，并且满足：

$$E\{\xi(t)\}=0,\ D\{\xi(t)\}=\sigma_\xi^2$$

若θ是一固定的值，则由上式定义的随机过程$\eta(t)$仍然是一高斯过程，且

$$E\{\eta(t)\}=P\sin(\omega_0 t+\theta)$$

它是一关于时间参数t的函数，因此$\eta(t)$不是一平稳过程。

若$\theta\sim U(0,2\pi)$，则由上式定义的随机过程$\eta(t)$的均值函数为：

$$E\{\eta(t)\}=E\{P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)\}=E\{P\sin(\omega_0 t+\theta\}+E\{\xi(t)\}=0$$

$$R_\eta(t_1,t_2)=\frac{P^2}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)+R_\xi(t_1-t_2)$$

$$=\frac{P^2}{2}\cos\omega_0\tau+R_\xi(\tau)=R_\eta(\tau)\quad \tau=t_1-t_2$$

由此可知，此时$\eta(t)$是一平稳过程。但是此时$\eta(t)$不是一高斯过程。

随机相位正弦波的特征函数为：

$$\Phi_s(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{juP\sin(\omega_0 t+\theta)\}d\theta=J_0(Pu)$$

其中：J_0为零级贝塞尔函数。

注：贝塞尔函数的定义：

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)d\theta$$

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-jx\cos\theta}d\theta$$

$$I_0(x)=J_0(jx)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}d\theta$$

称$J_0(x)$为零级贝塞尔函数，$I_0(x)$为修正的零级贝塞尔函数。

随机相位正弦波的概率密度为：

$$f_s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{P^2-x^2}}, & |x|<P\\ 0, & |x|\ge P\end{cases}$$

另外，窄带平稳实高斯过程的一维分布密度为：

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_\xi(u)=\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2u^2\}$$

由此可得$\eta(t)$的一维概率密度为：

$$f_\eta(x)=f_s(x)*f_\xi(x)$$

其特征函数为：

$$\Phi_\eta(u)=\Phi_s(u)\cdot\Phi_\xi(u)=J_0(Pu)\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_\xi^2u^2\}$$

对上式作 Fourier 逆变换，可得 $\eta(t)$ **的一维概率密度为：**

$$f_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[-x^2/(2\sigma_\xi^2)]^k}{k!}\cdot{}_1F_1\left(k+\frac{1}{2};1;-\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

其中：

$${}_1F_1(a;b;z)=1+\frac{a}{b}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

为合流型超几何级数。

注意，在$\eta(t)$的一维概率密度的表达式中，$P^2/(2\sigma_\xi^2)$代表随机正弦信号功率与窄带噪声$\xi(t)$的功率之比。$\eta(t)$的一维分布密度显然不是一正态分布，但是当信噪比很弱时，$\eta(t)$的一维分布密度应该很接近于正态分布。

下面研究$\eta(t)$的包络，也就是研究信号$\eta(t)$的检波器输出问题。

利用$\xi(t)$是窄带平稳实正态信号，我们有：

$$\begin{aligned}\eta(t)&=P\sin(\omega_0t+\theta)+\xi(t)\\&=P\sin(\omega_0t+\theta)+x_c(t)\cos2\pi f_0t+x_s(t)\sin2\pi f_0t\\&=(P\sin\theta+x_c(t))\cos2\pi f_0t+(P\cos\theta+x_s(t))\sin2\pi f_0t\\&=z_c(t)\cos2\pi f_0t+z_s(t)\sin2\pi f_0t\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases}z_c(t)=P\sin\theta+x_c(t)\\z_s(t)=P\cos\theta+x_s(t)\end{cases}$$

由于$x_c(t),x_s(t)$是独立的正态分布随机变量，均值为零，方差为σ_ξ^2，并且由条件$x_c(t),x_s(t)$和θ是独立的，故当$0\le\theta\le2\pi$时，有：

$$f(x_c,x_s,\theta)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{x_c^2+x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

由变换：

$$\begin{cases} z_c=P\sin\theta+x_c \\ z_s=P\cos\theta+x_s \\ \theta=\theta \end{cases}$$

可得$(z_c(t),z_s(t),\theta)$的联合分布密度：

$$f(z_c,z_s,\theta)=\frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[(z_c-P\sin\theta)^2+(z_s-P\cos\theta)^2]\}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{z_c^2+z_s^2+P^2-2P(z_c\sin\theta+z_s\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\}\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

另外，

$$\eta(t)=z_c(t)\cos 2\pi f_0t+z_s(t)\sin 2\pi f_0t$$

$$=V(t)\cos(2\pi f_0t+\varphi(t))$$

其中：

$$\begin{cases} V(t)\cos\varphi(t)=z_c(t)=P\sin\theta+x_c(t) \\ -V(t)\sin\varphi(t)=z_s(t)=P\cos\theta+x_s(t) \\ \theta=\theta \end{cases}$$

由此变换及$(z_c(t),z_s(t),\theta)$的联合分布密度，可得$(V(t),\varphi(t),\theta)$的联合分布密度：

当$V_t\ge 0, 0\le\varphi_t\le 2\pi, 0\le\theta\le 2\pi$时，有：

$$f(\mathrm{V}_t,\varphi_t,\theta)=$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2-2P(V_t\cos\varphi_t\sin\theta-V_t\sin\varphi_t\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\}$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2-2PV_t\cos(\theta-\varphi_t)}{2\sigma_\xi^2}\}$$

当其它情况时，有：

$$f(V_t,\varphi_t,\theta)=0$$

由此可以求得关于包络$V(t)$的边缘分布为：

$$f(V_t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(V_t,\varphi_t,\theta)d\varphi_t d\theta$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\theta-\varphi_t)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\theta-\varphi_t-\pi/2)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\pi/2+\varphi_t-\theta)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

令：

$$\pi/2+\varphi_t-\theta=\alpha$$

有：

$$f(V_t)=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\exp\{\frac{PV_t\cos\alpha}{\sigma_\xi^2}\}d\alpha d\theta$$

$$=\begin{cases}\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot I_0(\frac{PV_t}{\sigma_\xi^2}) & V_t\ge 0\\ 0, & V_t<0\end{cases}$$

其中：

$$I_0(x)=J_0(jx)\text{（零级修正贝塞尔函数）}$$

注意，当$P=0$时，此结果和前面关于$\xi(t)$的包络一维分布是一致的。

令：

$$\begin{cases}v=\frac{V_t}{\sigma_\xi}\\ a=\frac{P}{\sigma_\xi}\end{cases}$$

则有：

$$f(v)=v\exp\{-\frac{v^2+a^2}{2}\}I_0(av)\quad v\geq 0$$

其中：$\frac{a^2}{2}=\frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}$ 为输入（功率）信噪比；$v=\frac{V_t}{\sigma_\xi}$ 为包络与噪声均方根值之比。

注意以下的结果。当 $PV_t>>\sigma_\xi^2$ 时，包络的一维分布密度可以近似地表示为：

$$f(V_t)=\frac{1}{\sigma_\xi}\left(\frac{V_t}{2\pi P}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{(V_t-P)^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

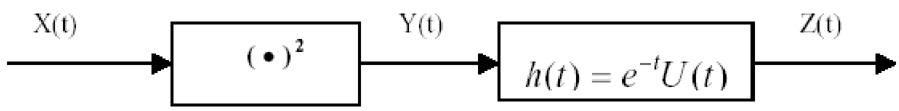
由此可知，当 V_t 接近于 P，且 $P>>\sigma_\xi$ 时，包络的一维分布密度近似于正态分布密度。

（五）例子

例 1． 设随机过程 $\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程，令随机过程 $Y(t)=X^2(t)$，试证明 $Y(t)$ 是平稳过程且其自相关函数为 $R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)$。若下图所示系统的输入 $X(t)$ 是一实平稳正态随机信号，其输出信号 $Z(t)$ 的功率谱密度函数为：

$$S_Z(\omega)=\frac{\pi\delta(\omega)}{1+\omega^2}+\frac{2\beta}{(\beta^2+\omega^2)(1+\omega^2)}\qquad(\beta>0)$$

试求随机信号 $X(t)$、$Y(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$。



解：由于 $X(t)$ 是均值为零的实正态平稳过程，因此有：

$$E\{Y(t)\}=E\{X^2(t)\}=R_X(0)=\text{常数}$$

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}\\&=E\{X^2(t)\}E\{X^2(t-\tau)\}+2E\{X(t)X(t-\tau)\}\\&=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)\end{aligned}$$

因此$Y(t)=X^2(t)$是平稳过程。

由题意可知：

$$H(\omega)=\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{1+j\omega}\quad\Rightarrow\quad\left|H(\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\omega^2}$$

由：

$$S_Z(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_Y(\omega)$$

可得：

$$S_Y(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{2\beta}{(\beta^2+\omega^2)}$$

因此有：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}+e^{-\beta|\tau|}$$

根据式子：

$$R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)$$

我们有：

$$\frac{3}{2}=R_Y(0)=3R_X^2(0)\quad\Rightarrow\quad R_X^2(0)=\frac{1}{2}$$

因此有：

$$R_X(\tau)=\sqrt{\frac{R_Y(\tau)-R_X^2(0)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\beta|\tau|}{2}}$$

例 2．设有随机过程$\xi(t)=Xt^2+2Yt-1, 0<t<\infty$，$X$与$Y$是相互独立的正态随机变量，期望均为 0，方差分别是σ_X^2和σ_Y^2。问过程$\{\xi(t)\}$是否正态过程？是否平稳过程？均需说明理由。

解：任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，则有：

$$\begin{pmatrix}\xi(t_1)\\ \xi(t_2)\\ \vdots\\ \xi(t_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Xt_1^2+2Yt_1-1\\ Xt_2^2+2Yt_2-1\\ \vdots\\ Xt_n^2+2Yt_n-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1^2 & 2t_1\\ t_2^2 & 2t_2\\ \vdots & \vdots\\ t_n^2 & 2t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

由于 X 与 Y 独立，且都服从正态分布，因此可得 $(X,Y)^\tau$ 服从正态分布，根据随机向量线性变换的性质，由上式可知随机向量 $(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n))^\tau$ 服从正态（高斯）分布，所以随机过程 $\xi(t)=X\,t^2+Yt+1,\,0<t<\infty$ 是正态（高斯）过程。

由于

$$
\begin{aligned}
& m_\xi(t)=E\{Xt^2+2Yt-1\}=-1 \\
& R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=E\{[Xs^2+2Ys-1][Xt^2+2Yt-1]\}= \\
& =E\{X^2s^2t^2+2XYs^2t-Xs^2+2XYt^2s+4Y^2st-2Ys-Xt^2-2Yt+1\} \\
& =\sigma_X^2s^2t^2+4\sigma_Y^2st+1
\end{aligned}
$$

由此可知，此随机过程不是平稳的。

例 3．设有随机过程 $\xi(t)=X\,t^2+Yt+1,\,0<t<\infty$，其中 X 与 Y 是相互独立的正态随机变量，期望均为 **0**，方差分别为 σ_X^2 和 σ_Y^2。证明过程 $\{\xi(t)\}$ 为均方可积的正态过程，并求过程 $\{\,\eta(t)=\int_0^t\xi(s)ds,\ t>0\,\}$ 的相关函数。

解：正态过程的证明如上例。

由计算可得：

$$
E\{\xi(t)\}=E\{Xt^2+Yt+1\}=t^2E\{X\}+tE\{Y\}+1=1
$$

$$
\begin{aligned}
R_\xi(t_1,t_2)&=E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}=E\{[t_1^2X+t_1Y+1][t_2^2X+t_2Y+1]\} \\
&=t_1^2t_2^2E\{X^2\}+(t_1^2t_2+t_1t_2^2)E\{XY\}+t_1t_2E\{Y^2\}+ \\
&\qquad +(t_1^2+t_2^2)E\{X\}+(t_1+t_2)E\{Y\}+1 \\
&=t_1^2t_2^2E\{X^2\}+t_1t_2E\{Y^2\}+1=t_1^2t_2^2\sigma_X^2+t_1t_2\sigma_Y^2+1
\end{aligned}
$$

由于 $R_\xi(t_1,t_2)$ 连续，因此过程 $\{\xi(t)\}$ 为均方可积。

过程 $\{\,\eta(t)=\int_0^t\xi(s)ds,\ t>0\,\}$ 的相关函数为：

$$
\begin{aligned}
R_\eta(t_1,t_2)&=E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}=E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\} \\
&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}E\{\xi(u)\xi(v)\}dudv=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}R_\xi(u,v)dudv \\
&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}(u^2v^2\sigma_X^2+uv\sigma_Y^2+1)dudv
\end{aligned}
$$