随机过程第 5 周作业

周强 202128019427002 电子学院 119

1. **设$\{X_n;n\geq 0\}$是一齐次马氏链,状态空间为$S=\{0,1,2\}$,它的初始状态的概率分布为:$P\{X_0=0\}=1/4,P\{X_0=1\}=1/2,P\{X_0=2\}=1/4$, 它的一步转移转移概率矩阵为:**

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

   a) **计算概率: $P\{X_0=0,X_1=1,X_2=1\}$;**

解:$P\{X_0=0,X_1=1,X_2=1\}=P\{X_2=1|X_1=1,X_0=0\}P\{X_1=1,X_0=0\}$

$$=P\{X_2=1|X_1=1\}P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_0=0\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

   b) **计算 $p_{01}^{(2)},p_{12}^{(3)}$。**

解:$p_{01}^{(2)}=\sum_{k\in S}p_{0k}^{(1)}p_{k1}^{(1)}=p_{00}^{(1)}p_{01}^{(1)}+p_{01}^{(1)}p_{11}^{(1)}+p_{02}^{(1)}p_{21}^{(1)}=\frac{7}{16}$

同理可得$p_{10}^{(2)}=\frac{7}{36},p_{11}^{(2)}=\frac{4}{9},p_{12}^{(2)}=\frac{13}{36}$。

由$C-K$方程可知,

$$p_{12}^{(3)}=\sum_{k\in S}p_{1k}^{(2)}p_{k2}^{(1)}=p_{10}^{(2)}p_{02}^{(1)}+p_{11}^{(2)}p_{12}^{(1)}+p_{12}^{(2)}p_{22}^{(1)}=\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{13}{36}\times\frac{3}{4}=\frac{181}{432}$$

2. **某通信系统由n个中继站组成,从上一站向下一站传送数字信号 0 或 1 时,接收的正确率为p。如用X_0表示初始站发出的数字信号,用X_k表示第k个中继站接收到的数字信号,试证:$\{X_k;0\leq k\leq n\}$ 是一个马氏链,且有**

$$P\{X_0=1\mid X_n=1\}=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}$$

其中:$\alpha=P\{X_0=1\},q=1-p$。请说明上述条件概率的实际意义。

答:由题意知,此随机过程的状态空间为$S=\{0,1\}$。第k个中继站接收到的信号仅仅与第$k-1$个中继站接收到的信号有关,即

$$P(X_k=x_k|X_{k-1}=x_{k-1},\dots,X_0=x_0)=P(X_k=x_k|X_{k-1}=x_{k-1})$$

其中$k=0,1,\dots;x_k=0,1$。因此$\{X_k;0\leq k\leq n\}$是马氏链。

其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}p & q\\ q & p\end{pmatrix}$$

P 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=(p-q)$,对应的特征向量为$x_1=(1,1)^T,x_2=(1,-1)^T$

则有

$$P=C\Lambda C^{-1}$$

其中$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p-q\end{pmatrix}$。

则 n 步转移概率矩阵为

$$P^{(n)} = P^n = (C\Lambda C^{-1})^n = C\Lambda^n C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(p-q)^n & 1-(p-q)^n \\ 1-(p-q)^n & 1+(p-q)^n \end{pmatrix}$$

$$P(X_n = 1|X_0 = 1)P(X_0 = 1) = \frac{1}{2}\alpha(1+(p-q)^n)$$

$$P(X_n = 1) = P(X_n = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) + P(X_n = 1|X_0 = 1)P(X_0 = 1)$$

$$= \frac{1}{2}[(1-\alpha)(1-(p-q)^n) + \alpha(1+(p-q)^n)]$$

根据贝叶斯公式有

$$P\{X_0 = 1 \mid X_n = 1\} = \frac{P(X_n = 1|X_0 = 1)P(X_0 = 1)}{P(X_n = 1)} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}$$

3. 设有一个三个状态 $\boldsymbol{S = \{0, 1, 2\}}$ 的齐次马氏链, 它一步转移概率矩阵为:

$$\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}}$$

试求:

a) $\boldsymbol{f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}}$;

解：

$$f_{00}^{(1)} = p_1, f_{00}^{(2)} = 0, f_{00}^{(3)} = q_1q_2q_3$$

$$f_{01}^{(1)} = q_1, f_{01}^{(2)} = p_1q_1, f_{01}^{(3)} = p_1^2q_1$$

b) 确定状态分类,哪些属于常返的,哪些属于非常返的。

解：所有状态都是相同的，所有状态都是常返状态。