

随机过程作业 15

周强 (119) 电子学院 202128019427002

2021 年 12 月 18 日

题目 1. 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程, 且 $X(t) \sim N(\mu, \sigma^2 t)$ 。令 $Y(t) = 2X(t) - 1, t \geq 0$ 。试求过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的相关函数 $R_Y(s, t)$ 。

解答. 由相关函数的定义可知

$$\begin{aligned} R_Y(s, t) &= E\{Y(s)Y(t)\} = E\{[2X(s) - 1][2X(t) - 1]\} \\ &= E\{4X(s)X(t) - 2X(s) - 2X(t) + 1\} \end{aligned}$$

由于 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是初值为 0 的正交增量随机过程, 当 $0 \leq s < t$ 时有,

$$\begin{aligned} E\{X(s)X(t)\} &= E\{[X(s) - X(0)][X(t) - X(0)]\} \\ &= E\{[X(s) - X(0)][X(t) - X(s) + X(s) - X(0)]\} \\ &= E\{[X(s) - X(0)][X(s) - X(0)]\} \\ &= E\{[X(s)]^2\} = E\{X(s)\}^2 + D\{X(s)\} = \mu^2 + \sigma^2 s \end{aligned}$$

因此

$$R_Y(s, t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 s - 4\mu + 1$$

同理可证, 当 $0 \leq t < s$ 时有,

$$R_Y(s, t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 t - 4\mu + 1$$

综上所述,

$$R_Y(s, t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 \min\{s, t\} - 4\mu + 1$$

题目 2. 设有随机过程 $X(t) = 2Z \sin(t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 Z 、 Θ 是相互独立的随机变量, $Z \sim N(0, 1)$, $P(\Theta = \pi/4) = P(\Theta = -\pi/4) = 1/2$ 。问过程 $X(t)$ 是否均方可积过程? 说明理由。

解答.

题目 3. 设随机过程 $\xi(t) = X \cos 2t + Y \sin 2t$, $-\infty < t < +\infty$, 其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。

- (1) 如果 $X \sim U(0, 1)$, 问过程 $\xi(t)$ 是否平稳过程? 说明理由;
- (2) 如果 $X \sim N(0, 1)$, 问过程 $\xi(t)$ 是否均方可微? 说明理由。

解答.

- (1) $\xi(t)$ 的均值函数为

$$\begin{aligned} E\{\xi(t)\} &= E\{X \cos(2t) + Y \sin(2t)\} \\ &= E\{X\} \cos(2t) + E\{Y\} \sin(2t) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2t) + \sin(2t)) \end{aligned}$$

均值函数不是常数, 因此 $\xi(t)$ 不是平稳过程。

(2) 因为 X 和 Y 是独立同分布的随机变量, 且 $X \sim N(0, 1)$, 则

$$E\{X^2\} = E\{Y^2\} = 1, E\{XY\} = 0$$

$\xi(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned} R_{\xi}(s, t) &= E\{(X \cos(2t) + Y \sin(2t))(X \cos(2s) + Y \sin(2s))\} \\ &= E\{X^2\}(\cos(2t) \cos(2s)) \\ &\quad + E\{XY\}(\cos(2t) \sin(2s) + \cos(2s) \sin(2t)) \\ &\quad + E\{Y^2\}(\sin(2t) \sin(2s)) \\ &= \cos(2t) \cos(2s) + \sin(2t) \sin(2s) \\ &= \cos(2t - 2s) \end{aligned}$$

因此, $\xi(t)$ 是平稳过程, 且均方可微。

题目 4. 设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是一实正交增量过程, 并且 $E\{X(t)\} = 0$, 及满足:

$$E\{[X(t) - X(s)]^2\} = |t - s|, \quad -\infty < s, t < +\infty;$$

令: $Y(t) = X(t) - X(t-1), -\infty < t < +\infty$, 试证明 $Y(t)$ 是平稳过程。

解答.

题目 5. 设 $\xi(t) = X \sin(Yt); t \geq 0$, 而随机变量 X, Y 是相互独立且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程, 是否连续、可导?

解答.

题目 6. 设 $\{X(t), t \in R\}$ 是连续平稳过程, 均值为 m , 协方差函数为 $C_X(\tau) = ae^{-b|\tau|}$, 其中 $\tau \in R, a, b > 0$ 。对固定的 $T > 0$, 令 $Y = T^{-1} \int_0^T X(s)ds$, 证明: $E\{Y\} = m$, $\text{Var}(Y) = 2a [(bT)^{-1} - (bT)^{-2} (1 - e^{-bT})]$ 。

解答.