随机过程第 11 周作业

周强 202128019427002 电子学院

1. 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一强度为λ的齐次泊松过程,而$X(t) = N(t)/2 - 1, t \geq 0$。对$s > 0$,试求:

a) 计算$E\{N(t)N(t+s)\}$及$E\{N(s+t)|N(s)\}$的分布律;

答：自相关函数为

$$\begin{aligned}E\{N(t)N(t+s)\} &= E\{N(t)[N(t+s) - N(t) + N(t)]\}(\text{展开}) \\ &= E\{N(t)[N(t+s) - N(t)]\} + E\{N^2(t)\}(\text{展开}) \\ &= E\{N(t)\}E\{N(t+s) - N(t)\} + E\{N^2(t)\}(\text{增量独立}) \\ &= \lambda t * \lambda s + \lambda t + \lambda^2 t^2 \\ &= \lambda^2\, t(t+s) + \lambda t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\{N(s+t)|N(s) = n\} &= \sum_{k=n}^{\infty} kP\{N(s+t) = k|N(s) = n\} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} k\frac{P(\mathrm{N(s+t) = k, N(s) = n})}{N(s) = n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} k\frac{P(\mathrm{N(s+t) - N(s) = k - n, N(s) = n})}{N(s) = n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} kP(N(s+t) - N(s) = k - n) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} kP(N(t) = k - n) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} kP\frac{(\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\lambda t} = n + \lambda t\end{aligned}$$

$$E\{N(s+t)|N(s)\} = N(s) + \lambda t$$

$$P\{E\{N(s+t)|N(s)\} = n + \lambda t\} = P\{N(s) = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

b) 证明过程$X(t), t \geq 0$ 是马氏过程并写出转移概率$p(s, i; t, j)$,其中$s \leq t$。

答：由$X(t)$的定义可知，$X(t)$是独立增量过程。结合$X(0) = \frac{1}{2}N(0) - 1 =- 1$ 可知，$X(t)$是马氏过程。其转移概率为

$$p(s, i; t, j) = P\{X(t) = j|X(s) = i\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P\{X(t)=j, X(s)=i\}}{P\{X(s)=i\}} \\
&= P\{X(t)-X(s)=j-i\} \\
&= P\left\{\frac{1}{2}N(t)-\frac{1}{2}N(s)=j-i\right\} \\
&= P\{N(t-s)=2(j-i)\} \\
&= \frac{[\lambda(t-s)]^{2(j-i)}}{[2(j-i)]!}e^{-\lambda(t-s)}; (j \geq i, t \geq s)
\end{aligned}
$$

2. 设$\{X(t); t \geq 0\}$与$\{Y(t); t \geq 0\}$是相互独立，参数分别为λ_1与λ_2的 Poisson 过程。定义随机过程$Z(t) = X(t) - Y(t), t \geq 0$,且令:$p_n(t) = P\{Z(t) = n\}$。

   a) 试求随机过程 $\{Z(t); t \geq 0\}$的均值函数 $E\{Z(t)\}$和二阶矩 $E\{Z^2(t)\}$;

   答$\{Z(t); t \geq 0\}$的均值函数为

$$E\{Z(t)\} = E\{X(t) - Y(t)\} = E\{X(t)\} - E\{Y(t)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)t$$

$$
\begin{aligned}
E\{Z^2(t)\} &= E\{X^2(t)\} + E\{Y^2(t)\} - 2E\{X(t)\}\{Y(t)\} \\
&= \lambda_1 t + (\lambda_1 t)^2 + \lambda_2 t + (\lambda_2 t)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 t^2 \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)t + t^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2
\end{aligned}
$$

   b) 试证明: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)u^n = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\} \cdot \exp\{\lambda_1 ut + \lambda_2 u^{-1}t\}$。

   答：由母函数的定义及 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 独立性，我们有

$$
\begin{aligned}
\Phi_{Z(t)}(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)u^n &= \Phi_{X(t)-Y(t)}(u) = \Phi_{X(t)+(-Y(t))}(u) = \Phi_{X(t)}(u)\Phi_{-Y(t)}(u) \\
&= \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\}\exp\{\lambda_1 ut + \lambda_2 u^{-1}t\}
\end{aligned}
$$

3. 设$\{N_1(t); t \geq 0\}$和$\{N_2(t); t \geq 0\}$是相互独立的 Poisson 过程，其参数分别为λ_1和λ_2若$N_0(t) = N_1(t) - N_2(t)$,问:

   a) $\{N_0(t); t \geq 0\}$是否为 Poisson 过程,请说明理由;

   答：$N_0(t)$的状态空间为$S_0 = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$，因此$N_0(t)$不是计数过程，也不是泊松过程。

   b) $\{N_0(t); t \geq 0\}$是否为平稳过程,请说明理由。

   答：其均值函数为

$$E\{N_0(t)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)t$$

   $E\{N_0(t)\}$不是常数，因此$\{N_0(t)\}$不是平稳过程。