随机过程第 4 周作业

周强 202128019427002 电子学院

1. 设$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布随机变量序列,且$P\{\xi_n=-1\}=1-p$;

$P\{\xi_n=1\}=p$。令:$X_0=0, X_n=(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)/\sqrt{n}, n=1,2,\cdots$。求随机序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$的均值函数、协方差函数和相关函数。

答：当$n\geq 1$时，均值函数为

$$E(X_n)=E\left(\frac{(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=\frac{\mathrm{n}}{\sqrt{n}}E(\xi_1)=\sqrt{n}(2p-1)$$

$$E(X_0)=0$$

$$E(\xi_1^2)=1$$

当$i\neq j$时，

$$E(\xi_i\xi_j)=(2p-1)^2$$

当 $1<m<n$时，相关函数为

$$\begin{aligned}R_x(m,n)&=E(X_mX_n)\\&=\frac{1}{\sqrt{mn}}E[(\xi_1+,\ldots,+\xi_m)(\xi_1+,\ldots,+\xi_n)]\\&=\frac{1}{\sqrt{mn}}\left(mE(\xi_1^2)+m(n-1)E(\xi_i\xi_j)\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{mn}}(m+m(n-1)(2p-1)^2)\end{aligned}$$

$$C_X(m,n)=E\{[X_m-E(X_m)][X_n-E(X_n)]\}=E(X_mX_n)-E(X_m)E(X_n)=4\sqrt{\frac{m}{n}}p(1-p)$$

2. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,Y满足参数为p的几何分布,即$P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$,其中:$0<p<1, k=1,2,\cdots$.X与Y独立。令$X(t)=X+e^{-t}Y$,试求:
(1)$X(t)$在$t>0$的一维概率密度函数;

答：设随机变量 X 的概率密度函数和分步函数分别为$f_X(x),\Phi_X(x)$，其中

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

随机过程$X(t)$的分布函数为

$$F_{X_t}(x)=P(X(t)<x)=P(X+e^{-t}Y\le x)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X+e^{-t}Y\le x|Y=k)P(Y=k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\le x-e^{-t}k)(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{\mathrm{X}}(x-e^{-t}k)(1-p)^{k-1}$$

则$X(t)$的概率密度函数为

$$f_{X_t}=\frac{dF_{X_t}(x)}{dx}$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{f_X}(x-e^{-t}k)(1-p)^{k-1}$$

$$=\frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\exp\left(-\frac{(x-e^{-t}k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(2)$E\{X(t)\},\mathrm{Cov}\,(X(s),X(t))(0\le s\le t)$;

答：由题意知

$$E\{X(t)\}=E\{X+e^{-t}Y\}=E\{X\}+e^{-t}E(Y)=\mu+\frac{e^{-t}}{p}$$

$$E\{X(s)X(t)\}=E\{X^2+XY(e^{-s}+e^{-t})+e^{-s-t}Y^2\}$$

$$=E\{X^2\}+(e^{-s}+e^{-t})E\{XY\}+e^{-s-t}E\{Y^2\}$$

$$=\sigma^2+\mu^2+\frac{\mu}{p}(e^{-s}+e^{-t})+e^{-s-t}\frac{2-p}{p^2}$$

$$Cov\big(X(s),X(t)\big)=E\{X(s)X(t)\}-E\{X(s)\}E\{X(t)\}=\sigma^2+e^{-s-t}\frac{1-p}{p^2}$$

3. 设$X(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t),t\in R$,其中$A$和$B$是独立同分布的均值为零方差为$\sigma^2$的正态随机变量,试求:

a) $X(t)$的均值函数和相关函数;

答：由题意

$$E(A^2)=Var(A)+E(A)=\sigma^2$$
$$E\{X(t)\}=\cos(\omega t)\,E\{A\}+\sin(\omega t)\,E\{B\}=0$$

$$R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}$$

$$=E\{[A\cos(\omega s)+B\sin(\omega s)][A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]\}$$

$$=E\{A^2\}[\cos(\omega s)\cos(\omega t)]+E\{B^2\}[\sin(\omega s)\sin(\omega t)]$$

$$+E\{AB\}[\cos(\omega t)\sin(\omega s)+\sin(\omega t)\cos(\omega s)]$$

$$=\sigma^2[\cos(\omega s)\cos(\omega t)+\sin(\omega s)\sin(\omega t)]$$

$$=\sigma^2\cos(\omega s-\omega t)$$

b) $X(t)$的一维概率密度函数;

答：由题意知，

$$D\{X(t)\} = D\{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\} = \cos^2(\omega t)D\{A\} + \sin^2(\omega t)D\{B\} = \sigma^2$$

又因为$X(t)$是服从正太分布的随机变量的函数，因此 X(t)也服从正太分布。

结合$E\{X(t)\} = 0$，因此$X(t) \sim N(0, \sigma^2)$。

c) $X(t)$的二维概率密度函数。

答：由题意知

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) \\ \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

设变换矩阵为$P = \begin{pmatrix} \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) \\ \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) \end{pmatrix}$

易知其均值向量为

$$\boldsymbol{\mu_X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其协方差矩阵为

$$\Sigma_{\mathrm{X}} = P\Sigma_{AB}P^T = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t_1 - \omega t_2) \\ \cos(\omega t_1 - \omega t_2) & 1 \end{pmatrix}$$

其中$\Sigma_{AB} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$是$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$的协方差矩阵。

综上，$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu_X}, \Sigma_{\mathrm{X}})$

4. 设$\{\xi_n, n \geq 1\}$为相互独立同分布的随机变量序列,其分布为:

$$\boldsymbol{P\{\xi_n = 1\} = p > 0, P\{\xi_n = 0\} = q = 1 - p > 0}$$

定义随机序列$\{X_n, n \geq 2\}$和$\{Y_n, n \geq 2\}$如下：

$$\boldsymbol{X_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0 \\ 1, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 1 \\ 2, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 0; \\ 3, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 1 \end{cases} \quad Y_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}}$$

试问随机序列 $\{X_n, n \geq 2\}$和$\{Y_n, n \geq 2\}$ 是否为马氏链?如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

答：易知，随机序列$\{X_n, n \geq 2\}$的状态空间为$S = \{0,1,2,3\}$。当给定$X_n = x_n$时，可以确定ξ_n与ξ_{n-1}的取值，则容易确定X_{n+1}的概率分布，即

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots, X_2 = x_2) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

则$\{X_n, n \geq 2\}$是马尔科夫过程。

$$P\{X_n = 0 | X_{n-1} = 0\} = P\{\xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0 | \xi_{n-1} = 0, \xi_{n-2} = 0\} = q$$

同理可逐行逐列求得状态转移矩阵如下

$$\begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}$$

$\{Y_n, n = 2\}$不是马尔科夫过程，理由如下：

$$P\{Y_4 = 0 | Y_3 = 1, Y_2 = 0\} = \frac{P(Y_4 = 0, Y_3 = 1, Y_2 = 0)}{P(Y_3 = 1, Y_2 = 0)}$$

$$\{Y_4 = 0\} = \{\xi_4 = 0, \xi_3 = 0\}$$

$$\{Y_4 = 0, Y_3 = 1\} = \{\xi_4 = 0, \xi_3 = 0, \xi_2 = 1\}$$

$$\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0\}=\emptyset$$

因此$P\{Y_4=0|Y_3=1,Y_2=0\}=0$。

$$P\{Y_4=0|Y_3=1,Y_2=1\}=\frac{P(Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1)}{P(Y_3=1,Y_2=1)}$$

$$P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1\}=P\{\xi_4=0,\xi_3=0,\xi_2=1\}=pq^2$$

因此$P\{Y_4=0|Y_3=1,Y_2=1\}\neq 0$。

因此$P\{Y_4=0|Y_3=1,Y_2=0\}\neq P\{Y_4=0|Y_3=1,Y_2=1\}$，即$\{Y_n,n\geq 2\}$不是马尔科夫过程。

5. 天气预报模型如下：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨;前两天有雨,第三天是晴天;⋯),试将此问题归纳为马尔可夫链,并确定其状态空间。如果过去一连三天有雨,今天有雨的概率是$\mathbf{0.8}$;过去三天连续为晴天,而今天有雨的概率为 0.2;在其它天气情况时,今日的天气和昨日相同的概率为$\mathbf{0.6}$。试求此马氏链的转移概率矩阵。

答：设随机序列$\{\xi_n,n\geq 1\}$表示第n天是否有雨，其含义如下

$$\xi_n\begin{cases}1 & if\text{第 n 天下雨}\\0 & if\text{第 n 天晴天}\end{cases}$$

则定义随机变量序列$\{X_n,n\geq 3\}$如下

$$X_n=\begin{cases}0 & if\ \xi_n=0,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=0\\1 & if\ \xi_n=0,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=1\\2 & if\ \xi_n=0,\xi_{n-1}=1,\xi_{n-2}=0\\3 & if\ \xi_n=0,\xi_{n-1}=1,\xi_{n-2}=1\\4 & if\ \xi_n=1,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=0\\5 & if\ \xi_n=1,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=1\\6 & if\ \xi_n=1,\xi_{n-1}=1,\xi_{n-2}=0\\7 & if\ \xi_n=1,\xi_{n-1}=1,\xi_{n-2}=1\end{cases}$$

根据如上定义，易知$\{X_n,n\geq 3\}$的状态空间为$S=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$。当给定$X_n=x_n$的值后，$\xi_n,\xi_{n-1},\xi_{n-2}$的值可以完全确定，则$X_{n+1}$的状态可以完全确定。

$$P\{X_{n+1}=0|X_n=0\}=P\{\xi_{n+1}=0,\xi_n=0,\xi_{n-1}=0|\xi_n=0,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=0\}$$
$$=P\{\xi_{n+1}=0|\xi_n=0,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=0\}=0.8$$
$$P\{X_{n+1}=1|X_n=0\}P\{\xi_{n+1}=0,\xi_n=0,\xi_{n-1}=1|\xi_n=0,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=0\}=0$$
$$P\{X_{n+1}=4|X_n=0\}P\{\xi_{n+1}=1,\xi_n=0,\xi_{n-1}=0|\xi_n=0,\xi_{n-1}=0,\xi_{n-2}=0\}=0.2$$

其状态转移矩阵如下：

X_n \ X_{n+1}	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.8	0	0	0	0.2	0	0	0
1	0.6	0	0	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0	0	0.4	0	0
3	0	0.6	0	0	0	0.4	0	0
4	0	0	0.4	0	0	0	0.6	0
5	0	0	0.4	0	0	0	0.6	0
6	0	0	0	0.4	0	0	0	0.6
7	0	0	0	0.2	0	0	0	0.8