随机过程作业 14

周强 (119) 电子学院 202128019427002

2021 年 12 月 6 日

题目 1. 设 $X_n = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)$, 其中 σ_k 和 α_k 为正常数, $U_k \sim U(0, 2\pi)$, 且相互独立, $k = 1, 2, \cdots, N$, 试计算 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 的均值函数和相关函数, 并说明其是否是平稳过程。

解答. X_n 的均值函数为

$$
\begin{aligned}
E\{X_n\} &= E\left\{\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} E\left\{\cos(\alpha_k n - U_k)\right\} = 0
\end{aligned}
$$

X_n 的相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_X(n,m) &= E\left\{X_n \cdot X_m\right\} \\
&= E\left\{\left[\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos\left(\alpha_k n - U_k\right)\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sqrt{2} \cos\left(\alpha_j m - U_j\right)\right]\right\} \\
&= E\left\{2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_k \sigma_j \cos\left(\alpha_k n - U_k\right) \cos\left(\alpha_j m - U_j\right)\right\} \\
&= E\left\{2 \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 \cos\left(\alpha_j n - U_j\right) \cos\left(\alpha_j m - U_j\right)\right\} \\
&= 2 \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 E\left\{\cos\left(\alpha_j n - U_j\right) \cos\left(\alpha_j m - U_j\right)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 E\left\{\cos\left(\alpha_j (n+m) - 2U_j\right) + \cos\left(\alpha_j (n-m)\right)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^2 \cos\left(\alpha_j (n-m)\right)
\end{aligned}
$$

由上述计算可知，X_n 的均值函数与时间无关，相关函数仅与时间差有关。因此 X_n 是平稳过程。

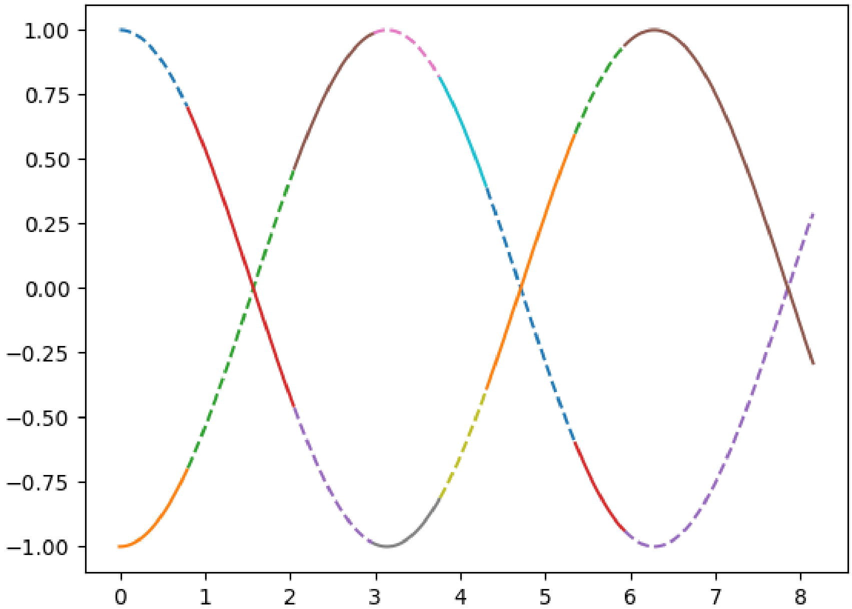
题目 2. 设有随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t + \pi\eta(t))$, 其中 $\omega > 0$ 为常数, $\{\eta(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程, A 是与 $\eta(t)$ 独立的随机变量, 且 $P\{A = -1\} = P\{A = 1\} = 1/2$ 。

(1) 试画出此过程的样本函数, 并问样本函数是否连续?

(2) 试求此过程的相关函数, 并问该过程是否均方连续?

解答. 某个典型的样本函数如下图所示，其中实线部分代表样本函数，虚线部分是样本函数关于 X 轴对称的图像，仅仅是为了观察方便。由下图可

知，样本函数不连续。



$X(t)$ 的相关函数如下

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) &= E\{A\cos(\omega t_1+\pi\eta(t_1))\cdot A\cos(\omega t_2+\pi\eta(t_2))\}(\text{独立性}) \\
&= E\{A^2\}E\{\cos(\omega t_1+\pi\eta(t_1))\cdot\cos(\omega t_2+\pi\eta(t_2))\}(\text{积化和差},E\{A^2\}=1) \\
&= \frac{1}{2}E\{\cos(\omega(t_1+t_2)+\pi[\eta(t_1)+\eta(t_2)])+\cos(\omega(t_1-t_2)+\pi[\eta(t_1)-\eta(t_2)])\} \\
&= \frac{1}{2}E\{\cos(\omega(t_1+t_2)+\pi[\eta(t_1)-\eta(t_2)])+\cos(\omega(t_1-t_2)+\pi[\eta(t_1)-\eta(t_2)])\}\text{期望定义} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\cos(\omega(t_1+t_2))+\cos(\omega(t_1-t_2))]\frac{(\lambda(t_1-t_2))^k}{k!}e^{-\lambda(t_1-t_2)}\text{泰勒展开} \\
&= \frac{1}{2}[\cos(\omega(t_1+t_2))+\cos(\omega(t_1-t_2))]e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \\
&= \cos\omega t_1\cos\omega t_2\cdot e^{-2\lambda(t_2-t_1)}
\end{aligned}
$$

该过程是均方连续的随机过程