随机过程作业 12

周强 (119) 电子学院 202128019427002

2021 年 11 月 29 日

题目 1. 设 $Y(t)=X(-1)^{N(t)}, t\geq 0$, 其中 $\{N(t); t\geq 0\}$ 为强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程, 随机变量 X 与此 Poisson 过程独立, 且有如下分布:

$$P\{X=-a\}=P\{X=a\}=1/4, P\{X=0\}=1/2, \quad a>0$$

试求随机过程 $Y(t), t\geq 0$ 的均值函数和相关函数。

解答. 易知,$E\{X(t)\}=0$, 则由独立性可知,

$$E\{Y(t)\}=E\{X(t)\}E\left\{(-1)^{N(t)}\right\}=0$$

$$\begin{aligned}
&E\left\{Y(t_1)Y(t_2)\right\}=E\left\{X^2\right\}E\left\{(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}\right\}\\
&=\frac{a^2}{2}E\left\{(-1)^{N(t_1)-N(t_2)}\right\}\\
&=\frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}E\left\{(-1)^n\middle|N(t_1)-N(t_2)=n\right\}P\left\{N(t_1)-N(t_2)=n\right\}\\
&=\frac{a^2}{2}e^{-\lambda(t_1-t_2)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[\lambda(t_1-t_2)]^n}{n!}=\frac{a^2}{2}e^{-2\lambda(t_1-t_2)}
\end{aligned}$$

题目 2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程, $S_0 = 0, S_n$ 为第 n 个事件发生的时刻, 求:

(1) (S_2, S_5) 的联合概率密度函数;

(2) $E\{S_1 \mid N(t) \geq 1\}$;

(3) (S_1, S_2) 在 $N(t) = 1$ 条件下的条件概率密度函数。

解答.

(1) 设 $0 < t_2 < t_5$, 则

$$
\begin{aligned}
&P\{t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \leq t_2 + \frac{h}{2}, t_5 - \frac{h}{2} < S_5 \leq t_5 + \frac{h}{2}\} \\
&= P\{N(t_2 - \frac{h}{2}) = 1, N(t_2 + \frac{h}{2}) - N(t_2 - \frac{h}{2}) = 1, \\
&N(t_5 - \frac{h}{2}) - N(t_2 + \frac{h}{2}) = 2, N(t_5 + \frac{h}{2}) - N(t_5 - \frac{h}{2}) = 1\} \\
&= \lambda(t_2 - h)e^{-\lambda(t_2 - h)} \cdot \lambda h e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{2!}[\lambda(t_5 - t_2 - h)]^2 e^{-\lambda(t_5 - t_2 - h)} \cdot \lambda h e^{-\lambda h} \cdot + o(h^2)
\end{aligned}
$$

则 $(S_2\ S_5)$ 的联合概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
f_{S_2,S_5}(t_2, t_5) &= \lim_{h \to 0} \frac{P\{t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \leq t_2 + \frac{h}{2}, t_5 - \frac{h}{2} < S_5 \leq t_5 + \frac{h}{2}\}}{h^2} \\
&= \frac{1}{2}\lambda^5 t_2 (t_5 - t_2)^2 e^{-\lambda t_5}
\end{aligned}
$$

(2) 设 $x < t$, 对于足够小的 h，有

$$
\begin{aligned}
&P\{x - \frac{h}{2} < S_1 \leq x + \frac{h}{2} \big| N(t) \geq 1\} \\
&= \frac{P\{N(x - \frac{h}{2}) = 0, N(x + \frac{h}{2}) - N(x - \frac{h}{2}) = 1, N(t) - N(x) \geq 0\}}{N(t) \geq 1} \\
&= \frac{(\lambda h)e^{-\lambda h} \cdot e^{-\lambda(x - \frac{h}{2})}}{1 - e^{-\lambda t}} + o(h)
\end{aligned}
$$

则在 $N(t)\geq 1$ 的条件下，S_1 的条件概率密度为

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{P\{x-\frac{h}{2}<S_1\leq x+\frac{h}{2}\big|N(t)\geq 1\}}{h}=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}$$

因此有

$$E\left\{S_1\mid N(t)\geq 1\right\}=\int_0^t\frac{\lambda x e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}dx=\frac{1}{\lambda}-\frac{te^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$$

(3) 设 $t_1<t<t_2$，取足够小的 h，有

$$\begin{aligned}&A=\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\leq t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2}\}\\&=\{N(t_1-\frac{h}{2})=0,N(t_1+\frac{h}{2})-N(t_1-\frac{h}{2})=1,\\&N(t_2-\frac{h}{2})-N(t_1+\frac{h}{2})=0,N(t_2+\frac{h}{2})-N(t_2-\frac{h}{2})=1\}\end{aligned}$$

则有

$$P\{A\big|N(t)=1\}=\frac{e^{\lambda(t_1-\frac{h}{2})}\cdot[(\lambda h)e^{-\lambda h}]^2\cdot e^{\lambda(t_2-t_1-h)}}{(\lambda t)e^{-\lambda t}}+o(h^2)$$

则 (S_1,S_2) 在 $N(t)=1$ 的条件下的条件概率密度为

$$g(t_1,t_2\big|N(t)=1)=\lim_{h\to 0}\frac{P\{A\big|N(t)=1\}}{h^2}=\frac{1}{t}e^{-\lambda(t_2-t)}$$

题目 3. 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程, 设 T 为第一个事件出现的时间, $N(T/a)$ 为第一个事件后, 在 T/a 时间间隔内出现的事件数, 其中 a 为正常数。试计算:

(1) $E\{TN(T/a)\}$;

(2) $E\left\{[TN(T/a)]^2\right\}$.

解答.

(1) 利用重期望公式有

$$\begin{aligned}E\{TN(T/a)\} &= E\{E\{tN(t/a)\big|T=t\}\} = E\{tE\{N(t/a)\big|T=t\}\} \\ &= E\{\frac{t^2\lambda}{a}\big|T=t\} = \int_0^\infty \lambda^2\frac{t^2}{a}e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{a\lambda}\end{aligned}$$

(2) 利用重期望公式有

$$\begin{aligned}&E\left\{[TN(T/a)]^2\right\} = E\left\{E\left\{[tN(t/a)]^2\right\}\big|T=t\right\} \\ &= E\left\{t^2\left(\left(\lambda\frac{t}{a}\right)^2+\lambda\frac{t}{a}\right)\Bigg|T=t\right\} \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{a^2}t^4+\frac{\lambda}{a}t^3\cdot\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{6a+24}{a^2\lambda^2}\end{aligned}$$

题目 4. 某商场为调查客源情况, 考察男女顾客到达商场的人数。假设 $[0,t)$ 时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为 λ 和 μ 的泊松过程。问:

(1) $[0,t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么分布?

(2) 在已知 $[0,t)$ 时间内商场到达 n 位顾客的条件下, 其中有 k 位是女顾客的概率为何? 平均有多少位女顾客?

解答.

(1) $[0,t)$ 时间内到达商场的总人数服从参数为 $t(\lambda+\mu)$ 的 Poisson 分布

(2) 设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别表示 $[0,)$ 时间到到达商场的女顾客和男顾客的人数，则

$$\begin{aligned}&P\{N_1(t)=k\big|N_1(t)+N_2(t)=n\} = \frac{N_t(t)=k,N_2(t)=n-k}{N_1(t)+N_2(t)=n} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\mu^k\lambda^{n-k}}{(\mu+\lambda)^n}\sim B\left(n,\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) \\ &E\{N_1(t)\big|N_1(t)+N_2(t)=n\} = \frac{n\mu}{\mu+\lambda}\end{aligned}$$