

第三章 Poisson 过程 (Poisson 信号流)

九、更新过程

(1) 概念及基本性质

定义: 设 $\{X_k, k \geq 1\}$ 是独立同分布, 取值非负的随机变量, 分布函数为 $F(x)$,

且 $F(0) < 1$ 。令 $S_0 = 0, S_1 = X_1, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 对 $\forall t \geq 0$, 记:

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新过程。

更新过程是一计数过程, 并有:

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$$

记: $F_n(s)$ 为 S_n 的分布函数, 由 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 易知:

$$F_1(x) = F(x)$$

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-u) dF(u) \quad (n \geq 2)$$

证明: 由全概率公式有:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P\{S_n \leq x\} = P\{S_{n-1} + X_n \leq x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{S_{n-1} \leq x-u \mid X_n = u\} f_{X_n}(u) du \\ &= \int_0^{\infty} P\{S_{n-1} \leq x-u\} dF(u) \\ &= \int_0^x P\{S_{n-1} \leq x-u\} dF(u) \\ &= \int_0^x F_{n-1}(x-u) dF(u) = (F_{n-1} * f)(x) = (f * F_{n-1})(x) \end{aligned}$$

即 $F_n(x)$ 是 $F(x)$ 的 n 重卷积, 记作: $F_n = F_{n-1} * F$ 。

另外, 记:

$$m(t) = E\{N(t)\}$$

称 $m(t)$ 为更新函数。关于更新函数，有以下重要的定理。

定理：对于 $\forall t \geq 0$ ，有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

证明：根据以上的关系式，计算得：

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P\{N(t) = n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \geq k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq t\} \end{aligned}$$

即有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

推论：若对 $\forall t \geq 0$ ， $F(t) < 1$ ，则有：

$$m(t) \leq F(t)(1 - F(t))^{-1}$$

下面是重要的更新方程。

定理： $\forall t \geq 0$ ， $m(t)$ 满足下列更新方程：

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u) dF(u)$$

证明：由 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ ，得：

$$m(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t)$$

将 $F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-u) dF(u)$ ($n \geq 2$) 代入上式，即有所要的结果。

令：

$$\tilde{m}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t)$$

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$$

则有：

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}, \quad \tilde{F}(s) = \frac{\tilde{m}(s)}{1 + \tilde{m}(s)}$$

证明：记： $\lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt}$ （称为更新强度函数），由 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ ，可得：

$$\lambda(t) = \frac{dm(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dF_n(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

两边取 Laplace 变换，有：

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) e^{-st} dt = \tilde{m}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} dF_n(t)$$

由 $\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$ 及 $F_n = F_{n-1} * F$ ，根据卷积的 Laplace 变换的性质，有：

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dF_n(t) = [\tilde{F}(s)]^n$$

因此，我们有：

$$\tilde{m}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} dF_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{F}(s)]^n = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)}$$

（2）极限性质

令： $\mu = E\{X_n\}$ ，由 $F(0^+) < 1$ ，可知 $\mu > 0$ ，下面给出几个极限定理。

定理： $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right\} = 1$

推论： $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty\right\} = 1$

推论： $\forall t \geq 0$ ，有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$$

记: $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$, 则有:

定理: $P\{N(\infty) = \infty\} = 1$ 。

定理: $P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1$

证明: 由于:

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1} \Rightarrow \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

由以上的定理, 两边取极限, 我们可以得到:

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1$$

由此定理, 我们称 $\frac{1}{\mu}$ 为更新过程的速率。

定理: (基本更新定理) 若 $\mu = E\{X_n\} < \infty$, 则有: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ 。

(3) 例子

例 1: 设某更新过程 $N(t)$ 的时间间隔 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是独立同分布, 非负取值的随机变量, 且有:

$$P\{X_n = i\} = p(1-p)^{i-1} \quad i \geq 1$$

试求 $P\{N(t) = n\}$ 。

解: 由于

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$$

因此

$$P\{N(t) = n\} = P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\}$$

根据题意, 此更新过程的时间间隔 X_n 服从几何分布, 因此有

$$P\{S_n = k\} = \begin{cases} C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, & k \geq n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

最后得到

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{k=n}^{[t]}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{[t]}C_{k-1}^np^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

例 2: 某更新过程的更新强度为:

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda, & t\geq 0, \lambda>0 \\ 0, & t<0\end{cases}$$

求该更新过程 $\{N(t), t\geq 0\}$ 的时间间隔 X_n 的概率密度。

十、过滤的 Poisson 过程

定义: 设有一 Poisson 分布的冲激脉冲串经过一线性时不变滤波器, 则滤波器输出是一随机过程 $\{\xi(t), t\geq 0\}$, 即

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}h(t-S_i) \quad (*)$$

其中 $h(t)$ 是滤波器的冲激响应, S_i 是第 i 个冲激脉冲出现的时刻, $N(T)$ 是 $[0, T]$ 内进入滤波器输入端冲激脉冲的个数, 它服从 Poisson 分布, 即:

$$P\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}, \quad k=0,1,2,\dots$$

λ 是单位时间内的平均脉冲数。我们称由 (*) 代表的随机过程为过滤的 Poisson 过程。

设 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 是独立同分布的随机变量, 并且 $Y_1 \sim U(0, T)$, 由上节课的内容我们知道, 在 $N(T)=k$ 的条件下, S_1, S_2, \dots, S_k 的分布与 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 的顺序统计量 $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(k)}$ 的分布是一样的。

给定关于过滤的 Poisson 过程的一些基本假设: (a) T 比 $h(t)$ 的脉冲持续时间 τ_a 大得多, 即 $T \gg \tau_a$; (b) $h(t)$ 是具有因果性的滤波器响应, 即 $t < S_i$ 时, $h(t-S_i)=0$; (c) 被研究的时刻 t 大于 $h(t)$ 的脉冲持续时间 τ_a , 即 $t > \tau_a$ 。

下面研究过滤的 Poisson 过程的一些统计特性。

(1) $\xi(t)$ 的均值

$$\begin{aligned}
 E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T) = k\} E\{\xi(t) | N(T) = k\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T) = k\} E\left\{\sum_{i=1}^k h(t - S_i)\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T) = k\} \left\{\sum_{i=1}^k E[h(t - S_i)]\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T) = k\} \left\{\sum_{i=1}^k E[h(t - Y_i)]\right\}
 \end{aligned}$$

下面求 $E[h(t - Y_i)]$ ：利用过滤的 Poisson 过程的基本假设，有：

$$E[h(t - Y_i)] = \frac{1}{T} \int_0^T h(t - x) dx = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t h(y) dy = \frac{1}{T} \int_0^T h(y) dy$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}
 E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T) = k\} \left\{\sum_{i=1}^k E[h(t - Y_i)]\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T) = k\} \frac{k}{T} \int_0^T h(y) dy \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T h(y) dy \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T h(y) dy \cdot \lambda T \\
 &= \lambda \int_0^T h(y) dy
 \end{aligned}$$

(2) $\xi(t)$ 的相关函数 $R_{\xi\xi}(t, t + \tau)$

$$\begin{aligned}
 R_{\xi\xi}(t, t + \tau) &= E\{\xi(t)\xi(t + \tau)\} \\
 &= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} h(t - S_i) \sum_{j=1}^{N(T)} h(t + \tau - S_j)\right\} \\
 &= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} \sum_{j=1}^{N(T)} h(t - S_i) h(t + \tau - S_j)\right\}
 \end{aligned}$$

其中 $t < T, t + \tau < T$ 。

利用条件数学期望，我们有：

$$\begin{aligned} R_{\xi\xi}(t, t+\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ P\{N(T)=k\} \cdot E_{S_i, S_j} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h(t-S_i)h(t+\tau-S_j) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ P\{N(T)=k\} \cdot \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k E_{S_i, S_j} [h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)] \right\} \end{aligned}$$

上面的等式中，当 $i=j$ 时，一共有 k 项，有：

$$\begin{aligned} E_{S_i, S_i} [h(t-S_i)h(t+\tau-S_i)] &= \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T h(t-x)h(t+\tau-x)dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t h(y)h(y+\tau)dy = \frac{1}{T} \int_0^T h(y)h(y+\tau)dy \end{aligned}$$

当 $i \neq j$ 时，一共有 $k^2 - k$ 项，利用独立性和假设条件，每项为：

$$\begin{aligned} E_{S_i, S_j} [h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)] &= \frac{1}{T} \int_0^T h(t-x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T h(t+\tau-x)dx \\ &= \frac{1}{T^2} \left[\int_0^T h(y)dy \right]^2 \end{aligned}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned} R_{\xi\xi}(t, t+\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \frac{k}{T} \int_0^T h(y)h(y+\tau)dy + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \frac{k^2 - k}{T^2} \left[\int_0^T h(y)dy \right]^2 \\ &= \frac{E\{N(T)\}}{T} \int_0^T h(y)h(y+\tau)dy + \frac{E\{[N(T)]^2 - N(T)\}}{T^2} \left[\int_0^T h(y)dy \right]^2 \\ &= \lambda \int_0^T h(y)h(y+\tau)dy + \lambda^2 \left[\int_0^T h(y)dy \right]^2 \end{aligned}$$

其中我们利用了：

$$E\{N(T)\} = \lambda T, \quad E\{[N(T)]^2 - N(T)\} = \lambda T + (\lambda T)^2 - \lambda T = (\lambda T)^2$$

同时我们得到：

$$C_{\xi\xi}(t, t+\tau) = \lambda \int_0^T h(y)h(y+\tau)dy = C_{\xi\xi}(\tau)$$

(3) $\xi(t)$ 的特征函数

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\xi(t)}(v) &= E\{e^{jv\xi(t)}\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\{e^{jv\xi(t)} | N(T)=k\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\left\{\exp\left[jv \sum_{i=1}^k h(t-S_i)\right]\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\left\{\exp\left[jv \sum_{i=1}^k h(t-Y_{(i)})\right]\right\}
 \end{aligned}$$

而：

$$\begin{aligned}
 E\left\{\exp\left[jv \sum_{i=1}^k h(t-Y_{(i)})\right]\right\} &= E\left\{\exp\left[jv \sum_{i=1}^k h(t-Y_i)\right]\right\} \\
 &= \prod_{i=1}^k E\{\exp[jvh(t-Y_i)]\} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \exp[jvh(t-x)] dx\right]^k \\
 &= \left[\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \exp[jvh(y)] dy\right]^k
 \end{aligned}$$

代入计算，有：

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\xi(t)}(v) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \cdot \left\{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \exp[jvh(y)] dy\right\}^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \cdot \left\{\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \exp[jvh(y)] dy\right\}^k \\
 &= e^{-\lambda T} \exp\left\{\lambda \int_{t-T}^t \exp[jvh(y)] dy\right\} = \exp\left\{\lambda \int_{t-T}^t [\exp(jvh(y)) - 1] dy\right\}
 \end{aligned}$$

由于 $h(t)$ 具有因果性，其持续时间 $\tau_a \ll T$ ，同时认为 $t > \tau_a$ ，因此，在 $(t-T, 0)$ 和 (t, T) 内，有 $h(t) = 0$ 。因此我们得到：

$$\Phi_{\xi(t)}(v) = \exp\left\{\lambda \int_0^T [\exp(jvh(y)) - 1] dy\right\} \quad (**)$$

注意：在给定的假设条件下，随机过程 $\xi(t)$ 的特征函数与 t 无关，也就是说 $\xi(t)$ 的一维概率密度与时间 t 无关，这样的随机过程称为一级严平稳过程，同理可以证明，任取 $n \in N, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ， $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ 的联合概率密度仅与时间差 $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_n - t_{n-1}$ 有关，具有这样性质的随机过程称为严平稳过程，过滤的 Poisson 过程就是严平稳过程。

另外，利用 (**) 式，我们有：

$$\frac{d\Phi_{\xi(t)}}{dv}\bigg|_{v=0} = j\lambda \int_0^T h(y) dy$$

由特征函数与随机变量数字特征的关系，我们有：

$$E\{\xi(t)\} = \lambda \int_0^T h(y) dy$$

$$D\{\xi(t)\} = \text{Var}\{\xi(t)\} = \lambda \int_0^T [h(y)]^2 dy$$

这些结果与 (1)、(2) 中所获得的结果是一致的。

(4) 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，特征函数的极限形式

我们记：

$$\alpha = \int_0^T h(y) dy, \quad \beta^2 = \int_0^T [h(y)]^2 dy$$

则有：

$$E\{\xi(t)\} = \lambda \alpha, \quad \text{Var}\{\xi(t)\} = \lambda \beta^2$$

作随机变量标准化变换，令：

$$\eta(t) = \frac{\xi(t) - \lambda \alpha}{\sqrt{\lambda} \beta}$$

则有：

$$E\{\eta(t)\} = 0, \quad \text{Var}\{\eta(t)\} = 1$$

下面求随机过程 $\{\eta(t), t \geq 0\}$ 的特征函数。

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta(t)}(v) &= E\left\{e^{jv\eta(t)}\right\} \\ &= E\left\{\exp\left[jv \cdot \frac{\xi(t) - \lambda \alpha}{\sqrt{\lambda} \beta}\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-jv \cdot \frac{\sqrt{\lambda} \alpha}{\beta}\right\} \cdot E\left\{\exp\left[j \cdot \frac{v}{\sqrt{\lambda} \beta} \cdot \xi(t)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-jv \cdot \frac{\sqrt{\lambda} \alpha}{\beta}\right\} \cdot \exp\left\{\lambda \int_0^T \left[\exp\left(j \frac{v}{\sqrt{\lambda} \beta} h(y)\right) - 1\right] dy\right\} \end{aligned}$$

以上用到了特征函数的性质。两边求对数，我们有：

$$\begin{aligned}
\ln \Phi_{\eta(t)}(v) &= -jv \cdot \frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta} + \lambda \int_0^T \left[\exp\left(j \frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta} h(y)\right) - 1 \right] dy \\
&= -jv \cdot \frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta} + \lambda \int_0^T \left[\frac{jv}{\sqrt{\lambda}\beta} h(y) - \frac{v^2}{2\lambda\beta^2} h^2(y) - \frac{jv^3}{6\lambda^{3/2}\beta^3} h^3(y) + \dots \right] dy \\
&= -\frac{jv\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta} + \frac{jv\sqrt{\lambda}}{\beta} \int_0^T h(y) dy - \frac{v^2}{2\beta^2} \int_0^T [h(y)]^2 dy - \\
&\quad - \frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3} \int_0^T [h(y)]^3 dy + \dots \\
&= -\frac{v^2}{2} - \frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3} \int_0^T [h(y)]^3 dy + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)
\end{aligned}$$

上式中令 $\lambda \rightarrow \infty$ ，我们得到：

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \Phi_{\eta(t)}(v) = -\frac{v^2}{2} \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_{\eta(t)}(v) = \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}$$

由特征函数与分布函数唯一确定性，我们知道当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时， $\eta(t)$ 是服从标准正态分布的随机变量。因此可知 $\xi(t)$ 也是服从正态分布的随机变量。即单位时间内出现的平均脉冲数无限增大时， $\xi(t)$ 的极限分布是正态分布，这符合中心极限定理。