随机过程作业 15

周强 (119) 电子学院 202128019427002

2021 年 12 月 20 日

题目 1. 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程, 且 $X(t) \sim N(\mu, \sigma^2 t)$ 。令 $Y(t) = 2X(t) - 1, t \geq 0$ 。试求过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的相关函数 $R_Y(s,t)$ 。

解答. 由相关函数的定义可知

$$
\begin{aligned}
&R_Y(s,t) = E\{Y(s)Y(t)\} = E\{[2X(s)-1][2X(t)-1]\} \\
&= E\{4X(s)X(t) - 2X(s) - 2X(t) + 1\}
\end{aligned}
$$

由于 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是初值为 0 的正交增量随机过程，当 $0 \leq s < t$ 时有，

$$
\begin{aligned}
&E\{X(s)X(t)\} = E\{[X(s)-X(0)][X(t)-X(0)]\} \\
&= E\{[X(s)-X(0)][X(t)-X(s)+X(s)-X(0)]\} \\
&= E\{[X(s)-X(0)][X(s)-X(0)]\} \\
&= E\{[X(s)]^2\} = E\{X(s)\}^2 + D\{X(s)\} = \mu^2 + \sigma^2 s
\end{aligned}
$$

因此

$$
R_Y(s,t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 s - 4\mu + 1
$$

同理可证，当 $0 \le t < s$ 时有，

$$R_Y(s,t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 t - 4\mu + 1$$

综上所述，

$$R_Y(s,t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 \min\{s,t\} - 4\mu + 1$$

题目 2. 设有随机过程 $X(t) = 2Z\sin(t+\Theta), -\infty < t < +\infty$, 其中 Z、Θ 是相互独立的随机变量, $Z \sim N(0,1), P(\Theta = \pi/4) = P(\Theta = -\pi/4) = 1/2$ 。问过程 $X(t)$ 是否均方可积过程? 说明理由。

解答. $X(t)$ 的均值函数为

$$E\{X(t)\} = E\{2Z\sin(t+\Theta)\} = 2E\{Z\}E\{\sin(t+\Theta)\} = 0$$

$X(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned}
&R_X(t,s) = E\{X(t)X(s)\} = E\{(2Z\sin(t+\Theta))(2Z\sin(s+\Theta))\} \\
&= 4E\{Z^2\}E\{\sin(t+\Theta)\sin(s+\Theta)\} = 4E\{\frac{1}{2}[\cos(t-s) - \cos(s+t+2\Theta)]\} \\
&= 2\cos(t-s)
\end{aligned}$$

由此可知，随机过程 $X(t)$ 是平稳过程，且均方可积。

题目 3. 设随机过程 $\xi(t) = X\cos 2t + Y\sin 2t, -\infty < t < +\infty$, 其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。

(1) 如果 $X \sim U(0,1)$, 问过程 $\xi(t)$ 是否平稳过程? 说明理由;

(2) 如果 $X \sim N(0,1)$, 问过程 $\xi(t)$ 是否均方可微? 说明理由。

解答.

(1) $\xi(t)$ 的均值函数为

$$\begin{aligned} E\{\xi(t)\} &= E\{X\cos(2t) + Y\sin(2t)\} \\ &= E\{X\}\cos(2t) + E\{Y\}\sin(2t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right) \end{aligned}$$

均值函数不是常数，因此 $\xi(t)$ 不是平稳过程。

(2) 因为 X 和 Y 是独立同分布的随机变量，且 $X \sim N(0,1)$, 则

$$E\{X^2\} = E\{Y^2\} = 1, E\{XY\} = 0$$

$\xi(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned} R_\xi(s,t) &= E\{(X\cos(2t) + Y\sin(2t))(X\cos(2s) + Y\sin(2s))\} \\ &= E\{X^2\}(\cos(2t)\cos(2s)) \\ &+ E\{XY\}(\cos(2t)\sin(2s) + \cos(2s)\sin(2t)) \\ &+ E\{Y^2\}(\sin(2t)\sin(2s)) \\ &= \cos(2t)\cos(2s) + \sin(2t)\sin(2s) \\ &= \cos(2t - 2s) \end{aligned}$$

因此，$\xi(t)$ 是平稳过程，且均方可微。

题目 4. 设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是一实正交增量过程, 并且 $E\{X(t)\} = 0$, 及满足:

$$E\left\{[X(t) - X(s)]^2\right\} = |t - s|, \quad -\infty < s, t < +\infty;$$

令: $Y(t) = X(t) - X(t-1), -\infty < t < +\infty$, 试证明 $Y(t)$ 是平稳过程。

解答. 由题意易知，$Y(t)$ 的均值函数为 $E\{Y(t)\} = 0$。$Y(t)$ 的相关函数为

$$R_Y(t,s) = E\{Y(t)Y(s)\} = E\{[X(t) - X(t-1)][X(s) - X(s-1)]\}$$

不失一般性地假设 $s>t$。当 $s>t+1$ 时，由 $X(t)$ 的增量正交性可知，

$$R_Y(t,s)=0$$

当 $t<s<t+1$ 时,

$$\begin{aligned}
R_Y(t,s)&=E\{[X(t)-X(t-1)][X(s)-X(t)+X(t)-X(s-1)]\}\\
&=E\{[X(t)-X(t-1)][X(t)-X(s-1)]\}\\
&=E\{[X(t)-X(s-1)+X(s-1)-X(t-1)][X(t)-X(s-1)]\}\\
&=E\{[X(t)-X(s-1)]^2\}=|t-s+1|
\end{aligned}$$

则 $Y(t)$ 的相关函数仅与时间差有关。同理可证 $t>s$ 的情况。综上，$Y(t)$ 是平稳过程。

题目 5. 设 $\xi(t)=X\sin(Yt);t\geq 0$, 而随机变量 X Y 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程, 是否连续、可导?

解答. 由题意知，$\xi(t)$ 的均值函数和相关函数为

$$E\{\xi(t)\}=E\{X\}E\{\sin(Yt)\}=\frac{1}{2}\int_0^1\sin(yt)dy=\frac{1-\cos t}{2t}$$

$$\begin{aligned}
R_\xi(t,s)&=E\{X^2\}E\{\sin(Yt)\sin(Ys)\}\\
&=\frac{1}{3}E\{\frac{1}{2}[\cos(Y(t-s))-\cos(Y(t+s))]\}\\
&=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin(t-s)}{t-s}-\frac{\sin(t+s)}{t+s}\right]
\end{aligned}$$

题目 6. 设 $\{X(t),t\in R\}$ 是连续平稳过程, 均值为 m, 协方差函数为 $C_X(\tau)=ae^{-b|\tau|}$, 其中 $\tau\in R,a,b>0$ 。对固定的 $T>0$, 令 $Y=T^{-1}\int_0^T X(s)ds$, 证明: $E\{Y\}=m$, $\mathrm{Var}(Y)=2a\left[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}\left(1-e^{-bT}\right)\right]$ 。

解答. Y 的均值函数为

$$E\{Y\}=E\{T^{-1}\int_0^T X(s)ds\}=T^{-1}\int_0^T E\{X(s)\}ds=m$$

Y 的二阶矩为

$$\begin{aligned}E\{Y^2\}&=E\left\{T^{-2}\left(\int_0^T X(s)ds\right)^2\right\}\\&=T^{-2}E\left\{\left(\int_0^T X(s)ds\right)\left(\int_0^T X(u)du\right)\right\}\\&=T^{-2}E\left\{\int_0^T\int_0^T X(u)X(s)duds\right\}\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T E\{X(u)X(s)\}duds\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T R_X(u-s)duds\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T C_X(u-s)+m^2duds\\&=2a\left[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}\left(1-e^{-bT}\right)\right]+m^2\end{aligned}$$

则 Y 的方差为

$$Var\{Y\}=E\{Y^2\}-(E\{Y\})^2=2a\left[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}\left(1-e^{-bT}\right)\right]$$

题目 7. 设 $(X,Y)\sim N\left(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$ ，令 $X(t)=X+tY$ ，以及 $Y(t)=\int_0^t X(u)du$ ，$Z(t)=\int_0^t X^2(u)du$, 对于任意 $0\le s\le t$,

(1) 求 $E\{X(t)\},E\{Y(t)\},E\{Z(t)\},\mathrm{Cov}(X(s),X(t)),\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t))$;

(2) 证明 $X(t)$ 在 $t>0$ 上均方连续、均方可导;

(3) 求 $Y(t)$ 及 $Z(t)$ 的均方导数。

解答.

(1) 因为 $(X, Y) \sim N\left(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\right)$, 则

$$
\begin{aligned}
E\{X(t)\} &= E\{X\} + tE\{Y\} = 0 \\
E\{Y(t)\} &= E\left\{\int_0^t X(u)du\right\} = \int_0^t E\{X(u)\}du = 0 \\
E\{X^2(u)\} &= E\{(X+uY)(X+uY)\} \\
&= E\{X^2 + u^2Y^2 + 2uXY\} = \sigma_1^2 + u^2\sigma_2^2 + 2u\rho\sigma_1\sigma_2 \\
E\{Z(t)\} &= E\left\{\int_0^t X^2(u)du\right\} = \int_0^t E\{X^2(u)\}du \\
&= \int_0^t (\sigma_1^2 + u^2\sigma_2^2 + 2u\rho\sigma_1\sigma_2)du \\
&= \frac{1}{3}u^2\sigma_2^2 + u^2\rho\sigma_1\sigma_2 + u\sigma_1^2 \\
Cov(X(s), X(t)) &= R_X(s,t) = E\{X(s)X(t)\} \\
&= E\{(X+sY)(X+tY)\} \\
&= E\{X^2 + stY^2 + (s+t)XY\} \\
&= \sigma_1^2 + st\sigma_2^2 + (t+s)\rho\sigma_1\sigma_2 \\
Cov(Y(s), Y(t)) &= R_Y(s,t) = E\{Y(s)Y(t)\} \\
&= E\left\{\int_0^s X(u)du \int_0^t X(v)dv\right\} \\
&= E\left\{\int_0^s \int_0^t X(u)X(v)dudv\right\} \\
&= \int_0^s \int_0^t E\{X(u)X(v)\}\ dudv \\
&= \frac{1}{4}t^2s^2\sigma_2^2 + ts\sigma_1^2 + \frac{1}{2}ts(t+s)\rho\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}
$$

(2) 由第 (1) 问可知,

$$
R_x(s,t) = \sigma_1^2 + st\sigma_2^2 + (t+s)\rho\sigma_1\sigma_2
$$

则 $X(t)$ 在 $t > 0$ 上均方连续、均方可导。

(3) 首先需要证明 $Y(t),Z(t)$ 均方可导，计算二者的相关函数如下。

$$R_Y(s,t)=\frac{1}{4}t^2s^2\sigma_2^2+ts\sigma_1^2+\frac{1}{2}ts(t+s)\rho\sigma_1\sigma_2$$

则 $Y(t)$ 均方可导，其导数为 $X(t)$。

$$\begin{aligned}R_Z(s,t)&=E\left\{\int_0^s X^2(u)du\int_0^t X^2(v)dv\right\}\\&=E\left\{\int_0^s\int_0^t X^2(u)X^2(v)dudv\right\}\\&=\int_0^s\int_0^t E\{X^2(u)X^2(v)\}dudv\end{aligned}$$

由于 $E\{X^2(u)X^2(v)\}$ 是 u,v 的多项式函数，则 $R_z(s,t)$ 的二阶偏导数一定存在，即 $Z(t)$ 可导，其导数随机过程为 $X^2(t)$

题目 8. 设随机过程 $\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程。设 $X(t)$ 通过线性全波检波器后, 其输出为 $Y(t)=|X(t)|$, 试求:

(1) 随机过程 $Y(t)$ 的相关函数 $R_Y(\tau)$, 并说明其是否为平稳过程;

(2) 随机过程 $Y(t)$ 的均值和方差;

(3) 随机过程 $Y(t)$ 的一维概率分布密度函数 $f_Y(y)$ 。

解答.

(1) 由题意知，$X(t)$ 的二阶矩为 $R_X(0)$,$X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 的相关系数为

$$r=\frac{E\{(X(t)\}E\{X(t+\tau)\}}{\sqrt{E\{X^2(t)\}E\{X^2(t+\tau)\}}}=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

因此，$Y(t)$ 的相关函数为

$$R_Y(\tau)=E\{|X(t)||X(t+\tau)|\}=\frac{2R_X(0)(\phi\sin\phi+\cos\phi)}{\pi}$$

其中，$\sin\phi = r$ $Y(t)$ 的均值函数为

$$E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx = 2\int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \sqrt{\frac{2R_X(0)}{\pi}}$$

(2) $Y(t)$ 的均值函数和方差如下

$$\begin{aligned} E\{Y(t)\} &= \sqrt{\frac{2R_X(0)}{\pi}} \\ E\{Y^2(t)\} &= E\{X^2(t)\} = R_X(0) \\ Var(Y(t)) = E\{Y^2(t)\} - E^2\{Y(t)\} &= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) R_X(0) \end{aligned}$$

(3) 易知 $X(t)$ 的一维分布为正态分布，即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} exp\left\{-\frac{x^2}{2R_x(0)}\right\}, x \in R$$

则 $Y(t)$ 的一维分布为

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} exp\left\{-\frac{y^2}{2R_x(0)}\right\}, y \in R_+$$