第五章 平稳过程的谱分析 习题

1、 设有一线性系统，其输入为零均值白高斯噪声$n(t)$，其功率谱密度为$\dfrac{N_0}{2}$，系统的冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \ge 0 \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

此线性系统的输出为$\xi(t)$。令：$\eta(t)=\xi(t)-\xi(t-T)$，其中$T>0$为一常数，试求过程$\eta(t)$的一维概率密度函数。

2、 设$s(t)$为一确定性信号，在$(0,T)$内具有能量$E_s=\int_0^T s^2(t)dt$，$n(t)$为一零均值的白高斯过程，其相关函数为：$R_n(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$。令：$\eta_1=\int_0^T s(t)[s(t)+n(t)]dt$，$\eta_2=\int_0^T s(t)n(t)dt$。试求：

（1）给定一常数γ，求概率$P\{\eta_1>\gamma\}$；

（2）给定一常数γ，求概率$P\{\eta_2>\gamma\}$。

3、 设有一非线性系统，其输入为零均值平稳实高斯过程，其协方差函数为：

$$C_\xi(\tau)=Pe^{-\alpha|\tau|}$$

其中$P>0$为一常数。系统的输出为：

$$\zeta=\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt$$

试求：

（1）输出均值：$E\{\zeta\}$；

（2）输出方差：$D\{\zeta\}$；

（3）设$y=\dfrac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}$，$x=\alpha T$，画出$y$对$x$的关系简图。

4、 设有一线性系统，输入输出分别为$\xi(t)$和$\eta(t)$，其中输入过程$\xi(t)$为零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为：$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\ \ (\alpha>0)$。系统的单位冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}\ , & t\ge 0,\ \beta>0,\ \beta\ne\alpha \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

若$\xi(t)$在$t=-\infty$时接入系统，试求：

（1）在 $t=0$ 时输出 $\eta(0)$ 大于 y 的概率 $P\{\eta(0)>y\}$；

（2）求条件概率 $P\{\eta(0)>y \mid \xi(-T)=0\}$，其中 $T>0$；

（3）求条件概率 $P\{\eta(0)>y \mid \xi(T)=0\}$，其中 $T>0$。

5、设实平稳过程 $\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数和功率谱密度分别为 $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$，令随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$ 的相关函数和功率谱密度分别为 $R_Y(\tau)$ 和 $S_Y(\omega)$，其中 a 是常数。

（1）试证明：$R_Y(\tau)=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)$；

（2）试证明：$S_Y(\omega)=4S_X(\omega)\sin^2(a\omega)$。