第一章 随机过程及其分类 习题解答

1、设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，随机变量 $Y \sim N(0,1)$，且 X 与 Y 独立，试求随机变量 $Z=\sqrt{2X}\left|Y\right|$ 的分布密度函数。

解：令：$U=\sqrt{2X}$，$V=\left|Y\right|$，则随机变量U 与V 独立，且密度函数分别为

$$f_U(u)=ue^{-\frac{u^2}{2}}\text{，}\quad u>0$$

$$f_V(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\text{，}\quad v>0$$

因此，随机变量 $Z=\sqrt{2X}\left|Y\right|=UV$ 的分布密度函数为：当 $z>0$ 时

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}f_U(u)f_V\left(\frac{z}{u}\right)du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{u^2}\right)}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+\frac{z^2}{u^2}\right)}du$$

令：$u=\sqrt{z}t$，则有

$$f_Z(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(u^2+\frac{z^2}{u^2}\right)}du=\sqrt{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}dt=e^{-z}\sqrt{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}dt$$

由于

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^2+1}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}d\left(t-\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}d\left(t-\frac{1}{t}\right)-\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}d\left(t-\frac{1}{t}\right)\quad\left(m=t-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\cdot m^2}dm-\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}dt\quad\left(n=\frac{1}{t}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\cdot m^2}dm-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)^2}dn$$

因此，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\cdot m^2}dm=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{2\pi}$$

即有

$$f_Z(z)=e^{-z}\sqrt{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}dt=e^{-z}\sqrt{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{2\pi}=e^{-z}$$

即随机变量 $Z=\sqrt{2X}\left|Y\right|$ 的分布密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

2、设随机变量 X_1, X_2 独立同分布，服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，试证明随机变量 $\dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \sim U[0,1]$。

解： X_1, X_2 的联合分布密度函数为

$$f(x_1, x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1 + x_2)},\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

令：$Y_1 = X_1 + X_2$，$Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$，则由

$$y_1 = x_1 + x_2,\quad y_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = y_1 y_2,\quad x_2 = y_1 - y_1 y_2$$

得

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 \quad \Rightarrow \quad |J| = y_1$$

因此，随机变量 Y_1, Y_2 的联合分布密度为

$$f(y_1, y_2) = \lambda^2 e^{-\lambda y_1} y_1,\ y_1 \ge 0,\ 0 \le y_2 \le 1$$

求边缘分布可得：$Y_2 \sim U[0,1]$。

3、设随机向量 (X, Y) 的两个分量相互独立，且均服从标准正态分布 $N(0,1)$。

（a）分别写出随机变量 $X + Y$ 和 $X - Y$ 的分布密度

（b）试问：$X + Y$ 与 $X - Y$ 是否独立？说明理由。

解：（a）$X + Y \sim N(0,2),\quad X - Y \sim N(0,2)$

（b）由于：

$$\begin{pmatrix} X + Y \\ X - Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \det B = -2 \ne 0$$

因此$\begin{pmatrix} X + Y \\ X - Y \end{pmatrix}$是服从正态分布的二维随机向量，其协方差矩阵为：

$$D = BE_2B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

因此 $X + Y$ 与 $X - Y$ 独立。

4、设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求：

（a）　边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，以及条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；

（b）　当$0<y<1$时，确定$E\{X\mid Y=y\}$，以及$E\{X\mid Y\}$的分布密度函数。

解：（a）当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^x 24(1-x)ydy=12x^2(1-x)$，因此

$$f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_y^1 24(1-x)ydx=12y(1-y)^2$，因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<y<1$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2}, & y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<x<1$时，

$$f_{Y|x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（b）当$0<y<1$时，由

$$E\{X\mid Y=y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx=\int_y^1 x\cdot\frac{2(1-x)}{(1-y)^2}dx=\frac{2y+1}{3}$$

因此，$E\{X\mid Y\}=\dfrac{2Y+1}{3}$。令：$Z=E\{X\mid Y\}$，由$Y$的边缘分布密度函数，有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2Y+1}{3}\le z\right\}=P\left\{Y\le\frac{3z-1}{2}\right\}$$

因此，当$0<\dfrac{3z-1}{2}<1$，即$\dfrac{1}{3}<z<1$时，有

$$F_Z(z)=P\left\{Y\le\frac{3z-1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{3z-1}{2}}f_Y(y)dy$$

所以，当$\frac{1}{3}<z<1$时，

$$f_Z(z)=\frac{3}{2}f_Y\left(\frac{3z-1}{2}\right)=\frac{27(3z-1)(1-z)}{2}$$

因此，$E\{X\,|\,Y\}$的分布密度函数为：

$$f_{E\{X|Y\}}(z)=\begin{cases}\frac{27(3z-1)(1-z)}{2}, & \frac{1}{3}<z<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

5、设 X_1、X_2、X_3为独立同分布的随机变量，且服从标准正态分布。令：

$$Y=\frac{X_1+X_2X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}$$

（a）试求随机变量Y的分布密度函数；

（b）试问有限个独立正态分布随机变量经过非线性变换是否可以服从正态分布？

解：（a）利用分布函数的计算公式及连续型全概率公式，有：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\frac{X_1+X_2X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}\le y\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left\{\frac{X_1+X_2X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}\le y\,\Big|\,X_3=x_3\right\}f_{X_3}(x_3)dx_3$$

由于随机变量X_1、X_2独立，在$X_3=x_3$的条件下，随机变量

$$\frac{X_1+x_3X_2}{\sqrt{1+x_3^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x_3^2}}X_1+\frac{x_3}{\sqrt{1+x_3^2}}X_2$$

服从正态分布，且均值为 0，方差为 1，因此有

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P\left\{\frac{X_1+X_2X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}\le y\,\Big|\,X_3=x_3\right\}f_{X_3}(x_3)dx_3$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right]f_{X_3}(x_3)dx_3=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

所以随机变量$Y\sim N(0,1)$。

（b）可以。

6、设$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$与η为随机变量，$\eta\sim U[0,1]$，而$\xi_i\ (i=1,2,\cdots n)$均以下述条件概率取1和0两个，即：$P\{\xi_i=1|\eta=p\}=p$，$P\{\xi_i=0|\eta=p\}=1-p$；并且条件独立，即对于$i=1,2,\cdots,n$，均有$x_i=0,1$时，有

$$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n|\eta\}=P\{\xi_1=x_1|\eta\}\cdots P\{\xi_n=x_n|\eta\}$$

试回答以下问题：

（a）试求$P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$；

（b）试求随机变量$S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$的分布；

（c）试求条件分布$P\{\eta\le p|S_n=x\}$，并求出密度函数，其中：$x=x_1+\cdots x_n$；

（d）试问分布$P\{\eta\le p|S_n=x_1+\cdots x_n\}$与$P\{\eta\le p|\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$是否相同，其中：$p\in(0,1)$。

解：（a）由题意及全概率公式，有

$$\begin{aligned}P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}&=\int_0^1 P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n|\eta=p\}f_\eta(p)dp\\&=\int_0^1 P\{\xi_1=x_1|\eta=p\}\cdots P\{\xi_n=x_n|\eta=p\}dp=\int_0^1 p^x(1-p)^{n-x}dp\end{aligned}$$

其中：$x=x_1+\cdots x_n$，由Γ函数和贝塔函数的定义及性质，可知

$$\begin{aligned}P\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}&=\int_0^1 p^x(1-p)^{n-x}dp=B(x+1,n-x+1)\\&=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)}=\frac{x!(n-x)!}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)C_n^x}\end{aligned}$$

（b）由题意，当$k=0,1,2,\cdots,n$时，有

$$\begin{aligned}P\{S_n=k\}&=\int_0^1 P\{\xi_1+\cdots+\xi_n=k|\eta=p\}f_\eta(p)dp\\&=\int_0^1 C_n^k p^k(1-p)^{n-k}dp=C_n^k B(k+1,n-k+1)=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

由此可知，随机变量S_n服从集合$\{0,1,2,\cdots,n\}$中的离散均匀分布。

（c）令：$x=x_1+\cdots x_n$，当$p\in(0,1)$时，由求密度函数的微元法及（b）的结果，随机变量η在$S_n=x$条件下的条件密度函数为

$$f_{\eta|S_n}(p|x)=\lim_{h\to 0}\frac{P\{p<\eta\le p+h|S_n=x\}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P\{p<\eta\le p+h, S_n=x\}}{hP\{S_n=x\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\{S_n=x|\ p<\eta\le p+h\}f_\eta(p)h}{hP\{S_n=x\}}=\frac{P\{S_n=x|\eta=p\}}{P\{S_n=x\}}$$

$$=(n+1)C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

（d）设事件 $A=\{\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$，令：$x=x_1+\cdots x_n$，当 $p\in(0,1)$ 时，由求密度函数的微元法及（a）的结果，随机变量 η 在事件 A 发生条件下的条件密度函数为

$$f_{\eta|A}(p|A)=\lim_{h\to 0}\frac{P\{p<\eta\le p+h|A\}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P\{p<\eta\le p+h, A\}}{hP\{A\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\{A|\ p<\eta\le p+h\}f_\eta(p)h}{hP\{A\}}=\frac{P\{A|\eta=p\}}{P\{A\}}$$

$$=(n+1)C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

因此，分布 $P\{\eta\le p|S_n=x_1+\cdots x_n\}$ 与 $P\{\eta\le p|\xi_1=x_1,\cdots,\xi_n=x_n\}$ 相同。

7、设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，对于 $\forall b>0$，试证明正态分布尾概率估计不等式：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sigma}{b}-\left(\frac{\sigma}{b}\right)^3\right]\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}\le P\{X\ge b\}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sigma}{b}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}$$

解：由于 $X\sim N(0,\sigma^2)$，因此，对于 $\forall b>0$，有

$$P\{X\ge b\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_b^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{y}d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}+\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sigma}{b}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sigma}{b}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{y^3}d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sigma}{b}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{y^3}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}+3\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{y^4}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sigma}{b}-\left(\frac{\sigma}{b}\right)^3\right]\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}+\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{b}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{y^4}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

由此，我们有正态分布尾概率估计不等式。

8、设随机向量 $X=(X_1,X_2)^\tau \sim N(\mu,\Sigma)$，其中：$\mu=(\mu_1,\mu_2)^\tau=(1,2)^\tau$，$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 4/5\\ 4/5 & 1\end{pmatrix}$，令随机向量 $Y=(Y_1,Y_2)^\tau=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X$。

（a）　试求随机向量 Y 的协方差矩阵、$E\{Y_2|\,Y_1\}$ 及 $E\{Y_1+Y_2\}$；

（b）　试问 $X_2-E\{X_2|\,X_1\}$ 与 X_1 是否独立？证明你的结论。

解：（a）根据 n 维正态随机变量的性质（4），可知随机向量 Y 服从正态分布，且协方差矩阵、均值向量、相关系数分别为：

$$B=C\Sigma C^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4/5\\ 4/5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}113 & 112\\ 112 & 113\end{pmatrix}$$

$$\mu_Y=C\mu=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}$$

$$\rho_Y=\frac{Cov(Y_1,Y_2)}{\sigma_{Y1}\sigma_{Y2}}=\frac{112}{113}$$

由课程讲义中的例子，我们有：

$$\begin{aligned}E\{Y_2|\,Y_1\}&=\mu_{Y2}+\rho_Y\sigma_{Y2}\sigma_{Y1}^{-1}(Y_1-\mu_{Y1})\\&=8+\frac{112}{113}\sqrt{\frac{113}{5}}\left(\sqrt{\frac{113}{5}}\right)^{-1}(Y_1-7)=8+\frac{112}{113}(Y_1-7)\end{aligned}$$

$$E\{Y_1+Y_2\}=E\{Y_1\}+E\{Y_2\}=15$$

（b）同理有：

$$\begin{aligned}E\{X_2|\,X_1\}&=\mu_{X2}+\rho_X\sigma_{X2}\sigma_{X1}^{-1}(X_1-\mu_{X1})\\&=2+\frac{4}{5}\sqrt{1}\left(\sqrt{1}\right)^{-1}(X_1-1)=2+\frac{4}{5}(X_1-1)=\frac{4}{5}X_1+\frac{6}{5}\end{aligned}$$

$$X_2-E\{X_2|\,X_1\}=X_2-\frac{4}{5}X_1-\frac{6}{5}$$

令：$Z=X_2-E\{X_2|\,X_1\}$，则有：

$$E\{Z\}=E\left\{X_2-\frac{4}{5}X_1-\frac{6}{5}\right\}=0$$

又

$$\begin{aligned}E\{X_1X_2\}&=E\{E\{X_1X_2|X_1\}\}=E\{X_1E\{X_2|X_1\}\}\\&=E\{X_1(\frac{4}{5}X_1+\frac{6}{5})\}=\frac{4}{5}E\{X_1^2\}+\frac{6}{5}E\{X_1\}=\frac{14}{5}\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}
Cov(Z,X_1) &= E\{(Z-E\{Z\})(X_1-E\{X_1\})\} \\
&= E\left\{\left(X_2-\frac{4}{5}X_1-\frac{6}{5}\right)(X_1-1)\right\} \\
&= E\{X_1X_2\}-E\{X_2\}-\frac{4}{5}E\{X_1^2\}+\frac{4}{5}E\{X_1\}-\frac{6}{5}E\{X_1\}+\frac{6}{5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{pmatrix} Z \\ X_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_2-\frac{4}{5}X_1-\frac{6}{5} \\ X_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4/5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此可知随机向量 $(Z,X_1)^T$ 服从正态分布，因此由 $Cov(Z,X_1)=0$，可知随机变量 Z 与 X_1 独立，即 $X_2-E\{X_2|\ X_1\}$ 与 X_1 独立。

9、设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是一个实的均值为零，二阶矩存在的随机过程，其相关函数为 $E\{X(s)X(t)\}=B(t-s),s\leq t$，且是一个周期为 T 的函数，即 $B(\tau+T)=B(\tau),\tau\geq 0$，试求方差函数 $D[X(t)-X(t+T)]$。

解：由定义，有：

$$\begin{aligned}
D[X(t)-X(t+T)] &= D[X(t)]+D[X(t+T)] \\
&\quad -2E\{[X(t)-EX(t)][X(t+T)-EX(t+T)]\} \\
&= B(0)+B(0)-2E\{X(t)X(t+T)\} \\
&= B(0)+B(0)-2B(T)=0
\end{aligned}$$

10、考察两个谐波随机信号 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其中：

$$X(t)=A\cos(\omega_c t+\phi),\quad Y(t)=B\cos(\omega_c t)$$

式中 A 和 ω_c 为正的常数；ϕ 是 $[-\pi,\pi]$ 内均匀分布的随机变量，B 是标准正态分布的随机变量。

（a）求 $X(t)$ 的均值、方差和相关函数；

（b）若 ϕ 与 B 独立，求 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数。

解：（a）$E\{X(t)\}=0$

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\}= \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}A^2\cos(\omega_c t_1+\varphi)\cos(\omega_c t_2+\varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_c(t_1-t_2)) \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau \quad \tau=t_1-t_2
\end{aligned}$$

$$D\{X(t)\}=\int_{-\pi}^{\pi}A^2\cos^2(\omega_c t+\varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi=\frac{A^2}{2}$$

（b）$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}=0$

11、设 $\xi(t)=X\sin(Yt);t\geq 0$，而随机变量 X 、Y 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。

解：

$$\mu_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=\frac{1-\cos t}{2t}$$

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin(t-s)}{t-s}-\frac{\sin(t+s)}{t+s}\right]$$

12、设 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布随机变量序列，且 $P\{\xi_n=-1\}=1-p$，$P\{\xi_n=1\}=p$，令：$X_0=0$，$X_n=(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)/\sqrt{n}$，$n=1,2,\cdots$。**求随机序列 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 的均值函数、协方差函数和相关函数。**

解：由题意：$E\{\xi_n\}=2p-1$，$E\{\xi_n^2\}=1$，可得：

$$E\{X_0\}=0,\quad E\{X_n\}=\frac{1}{\sqrt{n}}E\{(\xi_1+\cdots+\xi_n)\}=(2p-1)\sqrt{n}$$

$$R_X(m,n)=E\{X_mX_n\}=\frac{1}{\sqrt{mn}}E\{(\xi_1+\cdots+\xi_m)(\xi_1+\cdots+\xi_n)\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{mn}}[m+m(n-1)(2p-1)^2]=\frac{1}{\sqrt{mn}}[mn(2p-1)^2+4mp(1-p)],\quad(m<n)$$

因此，相关函数为：

$$R_X(m,n)=\frac{1}{\sqrt{mn}}[mn(2p-1)^2+4\min\{m,n\}p(1-p)],\quad(m,n\geq 0)$$

协方差函数为：

$$C_X(m,n)=\frac{4p(1-p)\min\{m,n\}}{\sqrt{mn}},\quad(m,n\geq 0)$$

均值函数为：

$$\mu_X(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}E\{(\xi_1+\cdots+\xi_n)\}=(2p-1)\sqrt{n},\quad(n\geq 0)$$

13、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y 满足参数为 p 的几何分布，即 $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$，其中：$0<p<1,k=1,2,\cdots$，X 与 Y 独立。令 $X(t)=X+e^{-t}Y$，试求：

（1） $X(t)$ **在 $t>0$ 的一维概率密度函数；**

（2） $E\{X(t)\}$，$Cov(X(s),X(t))$（$0\leq s\leq t$）；

解：（1）由分布函数的定义，有

$$F_{X(t)}(u)=P\{X(t)\le u\}=P\{X+e^{-t}Y\le u\}=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X+e^{-t}Y\le u\mid Y=k\}P\{Y=k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}P\{X\le u-ke^{-t}\}(1-p)^{k-1}p$$

因此，$X(t)$ 的一维概率密度函数为：

$$f_{X(t)}(u)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^{k-1}p}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu-ke^{-t})^2\}$$

（2）由题意：

$$E\{X(t)\}=E\{X+e^{-t}Y\}=\mu+e^{-t}p^{-1}$$

$$R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}=E\{X^2+XYe^{-t}+XYe^{-s}+e^{-s-t}Y^2\}$$

$$=\sigma^2+\mu^2+\frac{\mu}{p}(e^{-s}+e^{-t})+\frac{2-p}{p^2}e^{-s-t}$$

$$Cov(X(s),X(t))=R_X(s,t)-(\mu+e^{-s}p^{-1})(\mu+e^{-t}p^{-1})=\sigma^2+\frac{1-p}{p^2}e^{-s-t}$$

由上面的结果，有：

$$E\{Y(t)\}=E\{\int_0^t X(u)du\}=\int_0^t E\{X(u)\}du=\int_0^t(\mu+e^{-u}p^{-1})du$$

$$=\mu t+p^{-1}(1-e^{-t})$$

14、设 $X(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$，$t\in R$，其中 A 和 B 是独立同分布的均值为零方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

（1）　$X(t)$ 的均值函数和相关函数；

（2）　$X(t)$ 的一维概率密度函数；

（3）　$X(t)$ 的二维概率密度函数。

解：（1）均值函数：

$$\mu_X(t)=E\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\}=\cos(\omega t)E\{A\}+\sin(\omega t)E\{B\}=0$$

（2）由于：

$$D\{X(t)\}=D\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\}=\cos^2(\omega t)D\{A\}+\sin^2(\omega t)D\{B\}=\sigma^2$$

因此，$X(t)\sim N(0,\sigma^2)$；

（3）任意取两个时刻 t_1,t_2，有：

$$\begin{pmatrix}X(t_1)\\X(t_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\omega t_1)&\sin(\omega t_1)\\\cos(\omega t_2)&\sin(\omega t_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

由 A 和 B 是独立性，可知 $\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix}$ 是二维正态分布的随机向量，由（1）可知 $\vec{\mu}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix}$ 协方差矩阵为：$\Sigma=\sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \cos[\omega(t_1-t_2)] \\ \cos[\omega(t_1-t_2)] & 1 \end{pmatrix}$，因此我们有：

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{pmatrix} \sim N(\vec{\mu},\Sigma)$$

15、设随机过程 $\xi(t)=X\cos 2t+Y\sin 2t$，$-\infty<t<+\infty$，其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。

（1）　如果 $X\sim U(0,1)$，试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数；

（2）　如果 $X\sim N(0,1)$，试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数；

解：计算随机过程 $\xi(t)$ 的相关函数：

$$\begin{aligned} R_\xi(s,t)&=E\{\xi(s)\xi(t)\}=E\{(X\cos 2s+Y\sin 2s)(X\cos 2t+Y\sin 2t)\} \\ &=\cos 2s\cos 2tE\{X^2\}+\sin 2s\sin 2tE\{Y^2\}+[\cos 2s\sin 2t+\sin 2s\cos 2t]E\{XY\} \end{aligned}$$

（1）当 $X\sim U(0,1)$ 时，$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=1/3, E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=1/4$，因此

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\frac{1}{3}\cos 2(t-s)+\frac{1}{4}\sin 2(t+s)$$

所以，此时过程 $\xi(t)$ 不是平稳过程。

（2）当 $X\sim N(0,1)$ 时，$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=1, E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=0$，因此

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\cos 2(t-s)$$

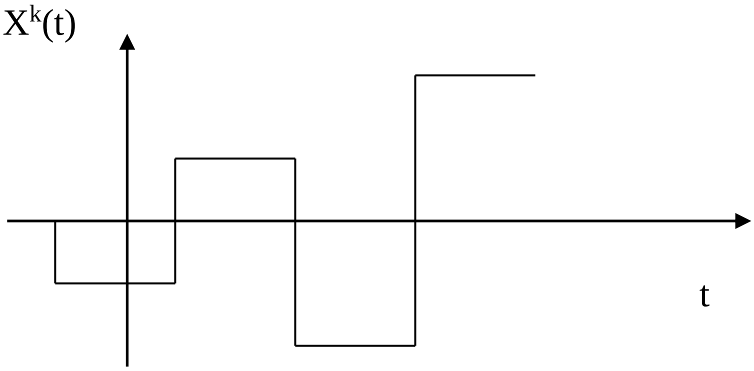
所以，此时过程 $\xi(t)$ 是平稳过程，且均方可微。

16、设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为 T_0 的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差 u 为均匀分布在 $(0,T_0)$ 内的随机变量。试给出随机过程 $X(t)$ 的状态空间，画出样本函数及求出其均值函数和相关函数。

解：状态空间为：　$S=\{+2,+1,-1,-2\}$；典型样本函数：



均值函数为：$\mu_X(t)=2\times\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}-1\times\frac{1}{4}=0$；

在时间轴上任意固定两个时刻t_1,t_2，令：

事件C：t_1,t_2间有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在不同的脉冲周期内；

事件C^c：t_1,t_2间没有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在相同的脉冲周期内；

则有：

（1）　当$|t_1-t_2|>T_0$时，有$P\{C\}=1$　和　$P\{C^c\}=0$

（2）　当$|t_1-t_2|\le T_0$时，$P\{C^c\}=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$　　$P\{C\}=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$

因此，

当$|t_1-t_2|>T_0$时，

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{X(t_1)X(t_2)\}=0$$

当$|t_1-t_2|\le T_0$时，

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{X(t_1)X(t_2)|C^c\}P\{C^c\}+E\{X(t_1)X(t_2)|C\}P\{C\}=$$
$$=E\{X^2(t_1)\}P\{C^c\}+E\{X(t_1)X(t_2)\}P\{C\}=\frac{5}{2}\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right]$$

以上计算用到了：$E\{X^2(t_1)\}=2^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}+(-2)^2\times\frac{1}{4}+(-1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$，最后有：

$$R_X(t_1,t_2)=\begin{cases}\frac{5}{2}\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right], & 0\le|t_1-t_2|\le T_0\\ 0, & |t_1-t_2|>T_0\end{cases}$$

17、设有一质点在X轴上作随机游动，即在$t=1,2,3,\cdots$时质点可以在x轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为p和$q=1-p$，且各次游动是相互独

立的。经过 n 次游动，质点所处的位置为 X_n，试求 X_n 的均值函数、自相关函数及自协方差函数。

解：设质点第 i 次移动时的距离为 ξ_i，则 ξ_i 是离散的随机变量，它可取＋1，也可取－1。且 $P\{\xi_i=+1\}=p,\ \ P\{\xi_i=-1\}=1-p=q$，则有：$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，因此有：

（1）$\mu_X(n)=E(X_n)=nE(\xi_i)=n\cdot[q\cdot(-1)+p\cdot 1]=n(p-q)$

（2）$R_X(n_1,n_2)=E(\sum_{i=1}^{n_1}\xi_i\cdot\sum_{j=1}^{n_2}\xi_j)=E(\sum_{\substack{1\le i\le n_1\\1\le j\le n_2}}\xi_i\xi_j)=\sum_{\substack{1\le i\le n_1\\1\le j\le n_2}}E(\xi_i\xi_j)$

当 $i=j$ 时，$E(\xi_i\xi_j)=1$；否则 $E(\xi_i\xi_j)=(p-q)^2$，令 $n=\min(n_1,n_2)$，$N=\max(n_1,n_2)$，则有：

$$R_X(n_1,n_2)=\sum_{\substack{1\le i\le n_1\\1\le j\le n_2\\i\ne j}}E(\xi_i\xi_j)+n\cdot 1=[n\cdot(N-1)](p-q)^2+n=(n_1\cdot n_2-n)(p-q)^2+n$$

$$\begin{aligned}C_X(n_1,n_2)&=R_{\eta\eta}(n_1,n_2)-E(\eta(n_1))\cdot E(\eta(n_2))\\&=(n_1\cdot n_2-n)(p-q)^2+n-n_1(p-q)\cdot n_2(p-q)=4npq\end{aligned}$$

第二章　Markov 过程 习题解答

1、 设$\{\xi_n, n\ge 1\}$为相互独立同分布的随机变量序列，其分布为：

$$P\{\xi_n=1\}=p>0,\quad P\{\xi_n=0\}=q=1-p>0$$

定义随机序列$\{X_n, n\ge 2\}$和$\{Y_n, n\ge 2\}$如下：

$$X_n=\begin{cases}0, & \xi_n=0,\xi_{n-1}=0;\\ 1, & \xi_n=0,\xi_{n-1}=1;\\ 2, & \xi_n=1,\xi_{n-1}=0;\\ 3, & \xi_n=1,\xi_{n-1}=1;\end{cases}\qquad Y_n=\begin{cases}0, & \xi_n=0,\xi_{n-1}=0;\\ 1, & \text{其它};\end{cases}$$

试问随机序列$\{X_n, n\ge 2\}$和$\{Y_n, n\ge 2\}$是否为马氏链？如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

解：（1）显然，随机序列$\{X_n, n\ge 2\}$的状态空间为$S=\{0,1,2,3\}$。

任意取$i,j,i_2,i_3,\cdots,i_{n-1}\in S$，由于当$X_n=i$给定时，即$\xi_n,\xi_{n-1}$的值给定时，就可以确定$X_{n+1}$的概率特性，即我们有：

$$P\{X_{n+1}=j\,|\,X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_3=i_3,X_2=i_2\}=P\{X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\}$$

因此$\{X_n, n\ge 2\}$是齐次马氏链，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}q&0&p&0\\ q&0&p&0\\ 0&q&0&p\\ 0&q&0&p\end{bmatrix}$$

由于$p>0, q=1-p>0$，画出状态转移图，可知各个状态都相通，且都是非周期的，因此此链是不可约的遍历链。（也可以利用$P^2>0$判定此链是不可约的遍历链）

（2）显然，$\{Y_n, n\ge 2\}$的状态空间为$S=\{0,1\}$，由于：

$$P\{Y_4=0\,|\,Y_3=1,Y_2=1\}=\frac{P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1\}}{P\{Y_3=1,Y_2=1\}}$$

$$P\{Y_4=0\,|\,Y_3=1,Y_2=0\}=\frac{P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0\}}{P\{Y_3=1,Y_2=0\}}$$

由$\{Y_n, n\ge 2\}$的定义，可知

$$\begin{aligned}\{Y_3=1,Y_2=1\}=&\{\xi_3=1,\xi_2=0,\xi_1=1\}\cup\{\xi_3=0,\xi_2=1,\xi_1=0\}\cup\\ &\cup\{\xi_3=1,\xi_2=1,\xi_1=0\}\cup\{\xi_3=0,\xi_2=1,\xi_1=1\}\cup\{\xi_3=1,\xi_2=1,\xi_1=1\}\end{aligned}$$

$$\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1\}=\{\xi_4=0,\xi_3=0,\xi_2=1,\xi_1=0\}\cup\{\xi_4=0,\xi_3=0,\xi_2=1,\xi_1=1\}$$

$\{Y_3=1,Y_2=0\}=\{\xi_3=1,\xi_2=0,\xi_1=0\}$，　$\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0\}=\varnothing$

利用$\{\xi_n,n\ge 1\}$是相互独立同分布的随机变量序列及其分布，我们有：

$$P\{Y_3=1,Y_2=1\}=pq^2+3p^2q+q^3$$

$$P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1\}=pq^3+p^2q^2$$

$$P\{Y_3=1,Y_2=0\}=pq^2$$

$$P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0\}=0$$

即有：

$$P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=1\}=\frac{pq^2+p^2q}{pq+3p^2+q^2}$$

$$P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=0\}=0$$

由于 $p>0,q=1-p>0$，因此有

$$P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=1\}\ne P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=0\}$$

根据马氏链的定义可知$\{Y_n,n\ge 2\}$不是马氏链。

2、天气预拨模型如下：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），试将此问题归纳为马尔可夫链，并确定其状态空间。如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率是 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。试求此马氏链的转移概率矩阵。

解：设一次观察今天及前两天的天气状况，将连续三天的天气状况定义为马氏链的状态，则此问题就是一个马氏链，它有 8 个状态。记每一天天晴为 0，下雨为 1，则此链的状态可以由三位二进制数表示。如三天晴为 000，为状态 0；第一天晴，第二天晴，第三天雨为 001，为状态 1；第一天晴，第二天雨，第三天晴为 010，为状态 2；第一天晴，后两天阴为 011，为状态 3，等等。根据题目条件，得到一步转移矩阵如下：

$$P=\begin{array}{c} \\ 000\\001\\010\\011\\100\\101\\110\\111\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}000&001&010&011&100&101&110&111\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.8&0.2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0.4&0.6&0&0&0&0\\0&0&0&0&0.6&0.4&0&0\\0&0&0&0&0&0&0.4&0.6\\0.6&0.4&0&0&0&0&0&0\\0&0&0.4&0.6&0&0&0&0\\0&0&0&0&0.6&0.4&0&0\\0&0&0&0&0&0&0.2&0.8\end{bmatrix}\end{array}$$

3、设$\{X_n; n\ge 0\}$是一齐次马氏链，状态空间为$S=\{0,1,2\}$，它的初始状态的概率分布为：$P\{X_0=0\}=1/4$，$P\{X_0=1\}=1/2$，$P\{X_0=2\}=1/4$，它的一步转移转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率：$P\{X_0=0, X_1=1, X_2=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}, p_{12}^{(3)}$。

解：（1）由马氏链的马氏性，我们有：

$$\begin{aligned} &P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}= \\ &=P\{X_2=1|X_1=1\}\cdot P\{X_1=1|X_0=0\}\cdot P\{X_0=0\} \\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16} \end{aligned}$$

（2）由齐次马氏链的性质，有：

$$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{36} & \frac{16}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{1}{12} & \frac{13}{48} & \frac{31}{48} \end{bmatrix}$$

因此：$P_{01}^{(2)}=\dfrac{7}{16}$，

同理可求$P_{12}^{(3)}$。

4、独立地连续抛掷一颗质地均匀的骰子，以ξ_n表示前n次抛掷出的最大点数，试证明$\{\xi_n; n\ge 1\}$是一马氏链，并求其n步转移概率矩阵。

解：令X_k表示第k此抛掷掷得的点数，$k\ge 1$，则：

$$\xi_n=\max_{1\le k\le n}\{X_k\},\quad n=1,2,\cdots$$

易见状态空间为：$S=\{1,2,3,4,5,6\}$。因为对于任意的正整数n及状态空间中的状态：$i_1\le i_2\le\cdots\le i_{n-1}\le i$ 及 j，我们有：

$$P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_1=i_1,\xi_2=i_2,\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i\}=$$
$$=\begin{cases}0, & j<i\\ \dfrac{i}{6}, & j=i\\ \dfrac{1}{6}, & j>i\end{cases}$$
$$=P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_n=i\}=p_{ij}$$

所以由定义可知$\{\xi_n;n\ge 1\}$是一齐次马氏链，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求解上面矩阵的特征根及特征向量，我们有：$\lambda_i=i/6,\ i=1,2,3,4,5,6$，及

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3/6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, H^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即有：$P=H\Lambda H^{-1}$，因此有：

$$P^{(n)}=H\Lambda^n H^{-1}=$$
$$=\begin{bmatrix}(1/6)^n & (2/6)^n-(1/6)^n & (3/6)^n-(2/6)^n & (4/6)^n-(3/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & (2/6)^n & (3/6)^n-(2/6)^n & (4/6)^n-(3/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & (3/6)^n & (4/6)^n-(3/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & 0 & (4/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (5/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5、 设有一个三个状态$S=\{0,1,2\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & 0\\ 0 & p_2 & q_2\\ q_3 & 0 & p_3\end{pmatrix}$$

试求：

（1） $f_{00}^{(1)},f_{00}^{(2)},f_{00}^{(3)},f_{01}^{(1)},f_{01}^{(2)},f_{01}^{(3)}$；

（2）确定状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。

解：（1）画出状态转移图，有：

$$f_{00}^{(1)}=p_{00}^{(1)}=p_1,\quad f_{00}^{(2)}=0,\quad f_{00}^{(3)}=q_1q_2q_3;$$
$$f_{01}^{(1)}=q_1,\quad f_{01}^{(2)}=p_1q_1,\quad f_{01}^{(3)}=p_1^2q_1.$$

（2）由状态转移图可知所有状态都是相通的，每一个状态都是非周期状态。因为是有限状态马氏链，因此所有状态都是正常返状态，而且都是遍历状态。

6、 试确定下列齐次马氏链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移矩阵为：

（1） $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$；

（2） $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$；

（3） $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

解：画出状态转移图，有：

（1）由于三个状态都是相通的，所以三个状态都是正常返态。

（2）状态 3、4 无法和其他状态相通，组成一个闭集，且 $f_{33}=1$，所以状态 3、4 为常返态；另外状态 0、2 相通组成一个闭集，且 $f_{00}=1$，故状态 0、2 是常返态；因为 $f_{11}^{(1)}=1/2, f_{11}^{(n)}=0\ (n>1)$，故 $f_{11}=1/2<1$，所以状态 1 为非常返态。

（3）0、1 相通作成一闭集，且 $f_{00}=1$，故 0、1 为常返态；又 $f_{22}^{(1)}=1,\ f_{22}^{(n)}=0(n>1)$，因此 $f_{22}=1$，故 2 为常返态；$f_{44}=0<1,\ f_{33}=2/3<1$，故 3、4 为非常返态。

7、 设具有三个状态的齐次马氏链的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

（a）　求 3 步首达概率 $f_{02}^{(3)}$；

（b）　写出三个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

解：（a）画出状态转移图，可知：$f_{02}^{(3)}=1/8$；

（b）由状态转移图可知，状态 0 和 2 相通，并且

$$\begin{aligned} &f_{00}^{(1)}=1/2,\ f_{00}^{(2)}=(1/2)(1/4),\ f_{00}^{(3)}=(1/2)(3/4)(1/4),\cdots, \\ &f_{00}^{(k)}=(1/2)(3/4)^{k-2}(1/4),\cdots \quad (k\ge 2) \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} f_{00}&=1/2+(1/2)(1/4)+(1/2)(3/4)(1/4)+\cdots+(1/2)(3/4)^k(1/4)+\cdots \\ &=1/2+(1/8)[1+3/4+(3/4)^2+(3/4)^3+\cdots]=1 \end{aligned}$$

所以状态 0 和 2 是常返的。又因为，$f_{11}^{(k)}=0,\quad (k\ge 1)$，因此，$f_{11}=0<1$，所以状态 1 是非常返的。由于 $p_{00}=1/2>0,\ p_{00}^{(2)}=3/8>0$，因此状态 0 和 2 是非周期的，状态 1 也是非周期的。由于对于任意的正整数 n，我们有 P^n 中的第二列元素均为 0，因此此链不是遍历的。

8、 设 $\{X_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其初始分布为

$$P\{X_0=0\}=p_0,P\{X_0=1\}=p_1,P\{X_0=2\}=p_2,P\{X_0=3\}=p_3$$

一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

（1）试求概率 $P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}$；

（3）试求首达概率 $f_{00}^{(n)},n=1,2,3,\cdots$；

（4）写出四个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

解：（1）$P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}=p_{11}p_{01}p_0=0$；

（2）$p_{01}^{(2)}=0$；

（3）画出状态转移图，可以求得：

$$f_{00}^{(1)}=\frac{1}{2},\quad f_{00}^{(2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad f_{00}^{(3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad f_{00}^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},\quad n\ge 4$$

（4）由状态转移图可知四个状态都是相通的，且都是非周期的，因此所有状态都为非周期的正常返状态，此链是遍历链。

9、 考虑三个状态的齐次马氏链，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中： $p,q,r>0,\ p+q+r=1$，

（a）　假定过程从状态 1 出发，试求过程被状态 0（或 2）吸收的概率；

（b）　试求过程进入吸收态而永远停留在那里所需的平均时间。

解：（a）状态集 $C_0=\{0\}$，$C_2=\{2\}$ 为吸收状态集，状态1为非常返态，且状态 0,1,2 都为非周期状态。由：$P\{C_k \mid i\}-\sum_{j\in D}p_{ij}P\{C_k \mid j\}=\sum_{j\in C_k}p_{ij}$，　$i\in D$，可知

$$P\{C_0 \mid 1\}-p_{11}P\{C_0 \mid 1\}=p_{10}$$

$$P\{C_2 \mid 1\}-p_{11}P\{C_2 \mid 1\}=p_{12}$$

由此得：

$$P\{C_0 \mid 1\}=\frac{p}{1-q},\quad P\{C_2 \mid 1\}=\frac{r}{1-q}$$

（b）由：$E\{T \mid i\}-\sum_{j\in D}E\{T \mid j\}p_{ij}=1,\quad i\in D$，可得：

$$E\{T \mid 1\}-E\{T \mid 1\}p_{11}=1$$

由此可得：

$$E\{T \mid 1\}=\frac{1}{1-q}$$

10、　　设齐次马氏链 $\{X_n,n\ge 0\},\ S=\{1,2,3,4\}$, **一步转移概率矩阵如下：**

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（1）写出切普曼－柯尔莫哥洛夫方程（C－K 方程）；

（2）求 n 步转移概率矩阵；

（3）试问此马氏链是平稳序列吗？ 为什么？

解：（1）略；

（2）$P(n)=P^n=\begin{cases} P & n=\text{奇数} \\ P^2 & n=\text{偶数} \end{cases}$

（3）此链不具遍历性，不是平稳序列。

11、　　某车间有两台独立工作的机器，每台机器有两种状态：正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a，机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b，其中 $0<a,b<1$。令 X_n 表示第 n 天车间正常工作的机器数，试求：

（1）证明 $\{X_n; n=1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，并写出其一步转移概率矩阵；

（2）此马氏链是否存在极限分布？存在的话，计算其平稳分布；

（3）若车间里有 m 台独立工作的机器，假设条件不变，问其平稳分布是什么？

解：（1）由题意可知，随机序列 X_n 将来状态的分布只与目前的状态有关，因此是一齐次马氏链，状态空间为：$S=\{0,1,2\}$，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} (1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{pmatrix}$$

（2）由于 $0<a,b<1$，$P>0$，因此极限分布（平稳分布）存在，令极限分布为 (p_0,p_1,p_2)，则由

$$(p_0,p_1,p_2)\begin{pmatrix} (1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{pmatrix}=(p_0,p_1,p_2)$$

及 $p_0+p_1+p_2=1$

解得：

$$p_0=\frac{a^2}{(a+b)^2}，\quad p_1=\frac{2ab}{(a+b)^2}，\quad p_2=\frac{b^2}{(a+b)^2}$$

令：$p=\dfrac{b}{a+b}$，$q=1-p=1-\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a}{a+b}$，则有：

$$(p_0,p_1,p_2)=(C_2^0q^2,C_2^1pq,C_2^2p^2)$$

因此该马氏链的极限分布（平稳分布）是参数为 $p=\dfrac{b}{a+b}$ 的二项分布。

（3）当有 m 台机器时，由于机器之间是相互独立的，因此其平稳分布为：

$$p_i = C_m^i \left(\frac{b}{a+b}\right)^i \left(\frac{a}{a+b}\right)^{m-i}, \quad i = 0,1,2,\cdots,m$$

12、 **设** $\{X_n; n \ge 0\}$ **是一齐次马氏链，状态空间为** $\bar{S} = S_0 \cup S$ **，其中：** $S = \{1,2,\cdots,m\}$ **为瞬时态集，** $S_0 = \{0\}$ **为吸收态集，且转移矩阵为** $\widetilde{P} = \begin{bmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **，其中** $P_0 = (I-P)\cdot\vec{e}$ **，** $\vec{e} = (1,1,\cdots 1)^\tau$ **。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为：**

$$\tau = \inf\{n : n \ge 0, X_n \in S_0\}。$$

令： $\vec{\pi}(0) = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ **为马氏链的初始分布，记：** $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ **，且满足：**

$$\alpha_k \ge 0\ (k = 0,1,\cdots,m)，\ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1。$$

令： $g_k = P\{\tau = k\}$ **（称为 Phase-Type 分布），** $G(\lambda) = E\{\lambda^\tau\} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ **。**

试证明：

（a）　对于任意 $k \in N$ **，有：** $g_0 = \alpha_0$ **，** $g_k = \vec{\alpha}P^{k-1}P_0 = \vec{\alpha}P^{k-1}(I-P)\vec{e}$ **；**

（b）　对于任意 $0 \le \lambda \le 1$ **，有：** $G(\lambda) = \alpha_0 + \lambda\vec{\alpha}(I-\lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}$ **。**

证明：（a）用数学归纳法证明

当 $k=0$ 时，$g_0 = P\{\tau = 0\} = P\{X_0 = 0\} = \alpha_0$；

当 $k=1$ 时，$g_1 = P\{\tau = 1\} = P\{X_0 \in S, X_1 = 0\} = \sum_{i\in S} \alpha_i p_{i0} = \vec{\alpha}P_0$；

当 $k=2$ 时，

$$\begin{aligned} g_2 &= P\{\tau = 2\} = P\{X_0 \in S, X_1 \in S, X_2 = 0\} = \\ &= \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} P\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = 0\} = \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \alpha_i p_{ij} p_{j0} = \vec{\alpha}P^{2-1}P_0 \end{aligned}$$

假设当 $k=n$ 时结论成立，即 $g_n = \vec{\alpha}P^{n-1}P_0 = \vec{\alpha}P^{n-1}(I-P)\vec{e}$，则当 $k=n+1$ 时，作如下分解，（1）从初始状态 i 转移一步到状态 j；（2）以 j 作为初始状态转移 n 步被吸收，结合归纳假设，我们有：

$$g_{n+1} = P\{\tau = n+1\} = \vec{\alpha}P \cdot P^{n-1}P_0 = \vec{\alpha}P^{(n+1)-1}P_0$$

即当 $k=n+1$ 时结论成立。

因此，对于任意 $k \in N$，有：$g_0 = \alpha_0$，$g_k = \vec{\alpha}P^{k-1}P_0 = \vec{\alpha}P^{k-1}(I-P)\vec{e}$ 。

（b）注意到 S 为瞬时态集，因此有

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = 0$$

因此，当n充分大时，有：$\det(I-P^n)=\left|I-P^n\right|\neq 0$。

由于：

$$(I-P)(I+P+P^2+\cdots+P^{n-1})=I-P^n \qquad \text{（A）}$$

因此当n充分大时，有

$$\left|I-P\right|\cdot\left|I+P+P^2+\cdots+P^{n-1}\right|\neq 0$$

于是$\left|I-P\right|\neq 0$，即$(I-P)^{-1}$存在，在（A）式中左右两边乘以$(I-P)^{-1}$，令$n\to+\infty$，则有

$$(I-P)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}P^k$$

将g_k的表达式代入，利用上面的结论，有

$$\begin{aligned}G(\lambda)=E\{\lambda^\tau\}&=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k\lambda^k=\alpha_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\vec{\alpha}P^{k-1}P_0\lambda^k=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}[\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda P)^{k-1}]P_0\\&=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}(I-\lambda P)^{-1}P_0=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}(I-\lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}\end{aligned}$$

13、　设有一生灭过程$\{\xi(t);t\geq 0\}$，其中参数$\lambda_n=\lambda,\mu_n=n\mu$，$\lambda$和$\mu$均为大于零的常数，其起始状态为$\xi(0)=0$。试求：

（a）　该过程的Q矩阵；

（b）　列出福克－普朗克微分方程；

（c）　其均值函数$M_\xi(t)=E\{\xi(t)\}$；

（d）　证明$\lim_{t\to\infty}p_0(t)=\exp\{-\lambda/\mu\}$。

解：（a）根据题意得到Q矩阵为：

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \cdots & \cdots & n\mu & -(n\mu+\lambda) & \lambda & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}$$

（b）由福克－普朗克方程得：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t)\ (n \ge 1) \end{cases}$$

（c）计算均值函数为

$$\begin{aligned} M_{\xi}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \left\{ \frac{1}{n!} [\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n \right\} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} [\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \cdot \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \cdot \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \end{aligned}$$

（d）计算得：

$$\lim_{t \to \infty} p_0(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

14、　有一个细菌群体，在一段时间内假定可以通过分裂等方式产生新的细菌，并不会死去。假设在长为 Δt 的一段时间内，一个细菌分裂为两个，即产生新细菌的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$，令 $X(t)$ 表示时刻 t 的细菌群体的大小。

（a）　试说明 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是生灭过程；

（b）　试证 $\lambda_i = i\lambda$，$\mu_i = 0$，并列出其前进方程和后退方程；

（c）　验证 $p_{kj}(t) = C_{j-1}^{j-k} (e^{-\lambda t})^k (1-e^{-\lambda t})^{j-k}$，$j \ge k \ge 1$ 是上述方程的解，并计算

$$E\{X(s+t) - X(s) \big| X(s) = m\}。$$

解：（a）由题意，$\{X(t), t \ge 0\}$ 是生灭过程是显然的，其 Q 矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -2\lambda & 2\lambda & & \\ & & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

（b）$\lambda_i = i\lambda$，$\mu_i = 0$，显然；

（c）由前进方程，有

$$p_{kk}^{/}(t) = -k\lambda p_{kk}(t), \quad p_{kj}^{/}(t) = (j-1)\lambda p_{k,j-1}(t) - j\lambda p_{kj}(t) \quad (j > k)$$

将 $p_{kj}(t)=C_{j-1}^{j-k}(e^{-\lambda t})^k(1-e^{-\lambda t})^{j-k}$，$j\ge k\ge 1$，代入前进方程中，可以验证两边相等。同理可以验证后退方程。

记：$E\{X(s+t)-X(s)\big| X(s)=m\}=h(t)$，先令：

$p_{m,n+m}(t)=P\{X(s+t)=n+m\big| X(s)=m\}=P\{X(s+t)-X(s)=n\big| X(s)=m\}$

于是

$$h(t)=E\{X(s+t)-X(s)\big| X(s)=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}np_{m,n+m}(t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nC_{n+m-1}^{n}(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^n$$

注意到

$$1=\sum_{j=0}^{\infty}p_{mj}(t)=\sum_{j=m}^{\infty}p_{mj}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{m,n+m}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{n}(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^n$$

将上式两边对 t 求导数，得

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{n}n(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\lambda e^{-\lambda t}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{n}(-m\lambda)e^{-\lambda mt}(1-e^{-\lambda t})^n=$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}h(t)-m\lambda$$

由此得到

$$E\{X(s+t)-X(s)\big| X(s)=m\}=h(t)=m(e^{\lambda t}-1)$$

15、 在一个线性生灭过程中，假定人口中每个人在间隔 $(t,t+\Delta t)$ 内以概率 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ 生一个儿女，假定这些人是统计独立的，则如果在时刻 t 人口中有 n 个人，在 $(t,t+\Delta t)$ 中出生的概率是 $n\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。同样地，如果在 $(t,t+\Delta t)$ 内一个人死亡的概率是 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$，则如果在 t 时刻有 n 个人活着，在 $(t,t+\Delta t)$ 内死亡的概率是 $n\mu\Delta t+o(\Delta t)$，$X(t)$ 表示 t 时刻人口的数目，且已知 $X(0)=n_0$，则 $X(t)$ 是一马氏过程。

（a） 试写出过程的状态空间及 Q 矩阵，求 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$ 满足的微分方程；

（b） 试导出 $m_X(t)=E\{X(t)\}$ 满足的微分方程；

（c） 求解 $m_X(t)$。

解：（a）当 $\lambda_n=n\lambda+a$，$\mu_n=n\mu$ 　$(\lambda,\mu,a>0)$ 时，

可以得到此过程的 Q 矩阵：

$$Q=\begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+a+\mu) & \lambda+a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(2\lambda+a+2\mu) & 2\lambda+a & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & n\mu & -[n(\lambda+\mu)+a] & & n\lambda+a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

令：

$$p_j(t)=P\{\xi(t)=j\}$$

$$\vec{p}(t)=(p_0(t),\, p_1(t),\, p_2(t),\cdots,p_n(t),\cdots)$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt}=-a\,p_0(t)+\mu\,p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt}=a\,p_0(t)-[(\lambda+\mu)+a]p_1(t)+2\mu\,p_2(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt}=(\lambda+a)\,p_1(t)-[2(\lambda+\mu)+a]\,p_2(t)+3\mu\,p_3(t) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=[(n-1)\lambda+a]\,p_{n-1}(t)-[n(\lambda+\mu)+a]\,p_n(t)+ \\ \qquad\qquad +(n+1)\mu\,p_{n+1}(t) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

初始条件：$p_{n_0}(0)=1$，　$p_j(0)=0\quad(j\neq n_0)$。

（b）由数学期望的定义：$E\{\xi(t)\}\triangleq M_\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}n\,p_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_n(t)$，由此，我们有：

$$\begin{aligned} \frac{dM_\xi(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{dp_n(t)}{dt}= \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}n\{[(n-1)\lambda+a]\,p_{n-1}(t)-[n(\lambda+\mu)+a]\,p_n(t)+(n+1)\mu\,p_{n+1}(t)\} \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}na\,p_{n-1}(t)-\sum_{n=1}^{\infty}na\,p_n(t)+ \\ &\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}n\big[(n-1)\lambda\,p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu)\,p_n(t)+(n+1)\mu\,p_{n+1}(t)\big] \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}a\,p_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}n\big[(n-1)\lambda\,p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu)\,p_n(t)+(n+1)\mu\,p_{n+1}(t)\big] \\ &=a+(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_n(t)=a+(\lambda-\mu)M_\xi(t) \end{aligned}$$

即可得到描写 $M_\xi(t)$ 的微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dM_\xi(t)}{dt} = a + (\lambda - \mu) M_\xi(t) \\ M_\xi(0) = n_0 \end{cases}$$

（c）解上面的微分方程，我们有：

$$M_\xi(t) = n_0 e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{a}{\mu-\lambda}\left[1 - e^{(\lambda-\mu)t}\right]$$

以上得求解当 $a = 0$ 时即是所要得解。

16、　一条电路供给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现假设（1）若一焊工在 t 时刻用电，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t + o(\Delta t)$；（2）若一焊工在 t 时刻没有用电，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$。每一焊工的工作情况是相互独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 时刻正在用电的焊工数。

（a）　试写出此过程的状态空间及 Q 矩阵；

（b）　设 $\xi(0) = 0$，写出福克－普朗克方程；

（c）　当 $t \to +\infty$ 时，求极限分布 P_n。

解：（a）令 $\xi(t)$ 表示 t 时刻系统中正在用电的焊工数，则 $\{\xi(t), t \ge 0\}$ 是一马氏过程，其状态空间为：$S = \{0,1,2,\cdots,m\}$。

Q 矩阵为：

$$Q = \begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -[\mu+(m-1)\lambda] & (m-1)\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -[2\mu+(m-2)\lambda] & (m-2)\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}$$

（b）令：$p_j(t) = P\{\xi(t) = j\}$

$$\vec{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_m(t)), \ \vec{p}(0) = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{p}(t) Q \\ \vec{p}(0) = (1, 0, 0, \cdots, 0)_{1\times(m+1)} \end{cases}$$

（c）画出状态转移率图，可得 $t \to \infty$ 时的平衡方程：

$$\begin{cases} m\lambda p_0 = \mu p_1 \\ [(m-1)\lambda + \mu] p_1 = m\lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ [(m-n)\lambda + n\mu] p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \lambda p_{m-1} = m\mu p_m \\ \sum_{n=0}^{m} p_n = 1 \end{cases}$$

由此可得：

$$(m-n)\lambda p_n - (n+1)\mu p_{n+1} = (m-n+1)\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = \cdots = m\lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

即有：

$$(m-n)\lambda p_n - (n+1)\mu p_{n+1} = 0$$

$$p_{n+1} = \frac{(m-n)}{(n+1)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_n\,, \quad n = 0,1,2,\cdots,m$$

由此可以求得：

$$p_n = \frac{(m-n+1)}{n} \cdot \frac{(m-n)}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{m}{1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 = C_m^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\,, \quad n = 0,1,\cdots,m$$

由 $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$，即可确定 p_0，最终得到所要的结果。

1、 设有状态空间为$S=\{0,1,2,3,4\}$的齐次 Markov 链$\{X_n;n\ge 0\}$，其初始分布为

$$\vec{\pi}(0)=(p_0,\,p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4)$$

一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试回答以下问题：

（1） 求出该马氏链进入各常返类的概率；

（2） 求出该马氏链平均多长时间进入常返类集；

（3） 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}P^n$。

2、（网球比赛）：网球一局比赛在两个选手（发球者和接发球者）之间进行，网球的记分制是：**15**、**30**、**40**、和 **60** 分。平分是指第五球后双方分数相同。平分后，从第六球开始，如果发球者得分/失分，则此时发球者占先/接发球者占先。如果发球者在发球占先后再得分，则发球者赢得该局。如果接发球者在接发球后占先后再得分，则接发球者赢得该局。若发球者发一球获胜的概率为p，输的概率为q，$p+q=1$，试回答以下问题：

（**1**） 试用马氏链建模网球一局比赛过程，确定其状态，画出状态转移图；

（2） 分析各状态的性质；

（3） 试确定一局网球比赛发球者获胜的概率；

（4） 试确定一局比赛平均需要发几个球才能结束。

3、 设有状态空间为$S=\{0,1,2,3,4\}$的齐次 Markov 链$\{X_n;n\ge 0\}$，其一步转移概率为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

试回答以下问题：

（1） 研究此马氏链的状态性质，并对各状态进行分类；

（2） 针对状态1和2，确定其平稳分布；

（3） 若i和j是非常返状态，试求f_{ii}、f_{ij}、f_{ji}和f_{jj}；

（4） 假设该链起始的时候等概率处于非常返状态，试求该链进入常返状态集的期望

步数；

（5）　假设该链起始的时候等概率处于非常返状态，求出该马氏链进入各常返类的概率；

（6）　计算：$P\{X_5 = 2 \mid X_3 = 1\}$；

（7）　计算：$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$。

4、 设状态空间为$S = \{0,1,2,3,4,5\}$的齐次 Markov 链$\{X_n; n \ge 0\}$，其一步转移概率为

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

试回答以下问题：

（1）　研究此马氏链状态的性质，并对各状态进行分类；

（2）　计算该链从非常返状态出发进入各常返类的概率；

（3）　求该链的平稳分布，并说明该链的平稳分布是否存在，是否唯一？

（4）　计算：$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$。

5、 张三购置了N把雨伞，分别放在家里和办公室。如出门（不论上班和下班）天晴，他就不带雨伞，如出门遇到下雨，手边也有雨伞，他就带一把雨伞用。只有出门遇到下雨，但手边没有雨伞用，他才遇到困境。因此张三遇到困境的概率α与他购置的雨伞数有关。假设张三每次出门时天是否下雨是随机独立的，且天是否下雨与张三身边有几把伞也独立。试构造一马氏链，研究要使张三遇到困境的概率$\alpha \le 0.05$，他应至少购置多少把雨伞？

6、 设一辆出租车在机场和两家宾馆之间运营，运营模式满足齐次马氏链。假设状态0表示机场，状态1表示宾馆 1，状态2表示宾馆 2，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

试回答以下问题：

（1）　确定三个状态的性质，并确定是否存在平稳分布，存在的话求出平稳分布；

（2）　试求f_{10}和f_{20}，以及$E\{T_{10}\}$和$E\{T_{20}\}$；

（3）　假设该出租车从一地到另一地所花的时间平均为 25 分钟，当你在机场有人抢占了这辆出租车，试问你将平均等待多长时间这辆出租车才能回来。

解答：

1、 解：（1）画出状态转移图可知，常返类：$C_0=\{0\}$ 和 $C_4=\{4\}$；非常返类：$D=\{1, 2, 3\}$，

由：$P\{C_k \mid i\}-\sum_{j\in D}p_{ij}P\{C_k \mid j\}=\sum_{j\in C_k}p_{ij}$， $i\in D$，有

$$\begin{cases} P\{C_0|1\}-p_{12}P\{C_0|2\}=p_{10} \\ P\{C_0|2\}-p_{21}P\{C_0|1\}-p_{23}P\{C_0|3\}=0 \\ P\{C_0|3\}-p_{32}P\{C_0|2\}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P\{C_0|1\}-pP\{C_0|2\}=q \\ P\{C_0|2\}-qP\{C_0|1\}-pP\{C_0|3\}=0 \\ P\{C_0|3\}-qP\{C_0|2\}=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} P\{C_0|1\}=\dfrac{q(1-pq)}{1-2pq} \\ P\{C_0|2\}=\dfrac{q^2}{1-2pq} \\ P\{C_0|3\}=\dfrac{q^3}{1-2pq} \end{cases}$$

由初始分布，可得进入常返类 C_0 的概率为：

$$P_{C_0}=p_0+\frac{p_1q(1-pq)}{1-2pq}+\frac{p_2q^2}{1-2pq}+\frac{p_3q^3}{1-2pq}$$

进入常返类 C_4 的概率为：

$$P_{C_4}=1-p_0-\frac{p_1q(1-pq)}{1-2pq}-\frac{p_2q^2}{1-2pq}-\frac{p_3q^3}{1-2pq}$$

（2）利用：$E\{T|i\}-\sum_{j\in D}E\{T \mid j\}p_{ij}=1$ ，$i\in D$，有

$$\begin{cases} E\{T|1\}-p_{12}E\{T|2\}=1 \\ E\{T|2\}-p_{21}E\{T|1\}-p_{23}E\{T|3\}=1 \\ E\{T|3\}-p_{32}E\{T|2\}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E\{T|1\}-pE\{T|2\}=1 \\ E\{T|2\}-qE\{T|1\}-pE\{T|3\}=1 \\ E\{T|3\}-qE\{T|2\}=1 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} E\{T|1\} = \dfrac{1+2p^2}{1-2pq} \\ E\{T|2\} = \dfrac{2}{1-2pq} \\ E\{T|3\} = \dfrac{1+2q^2}{1-2pq} \end{cases}$$

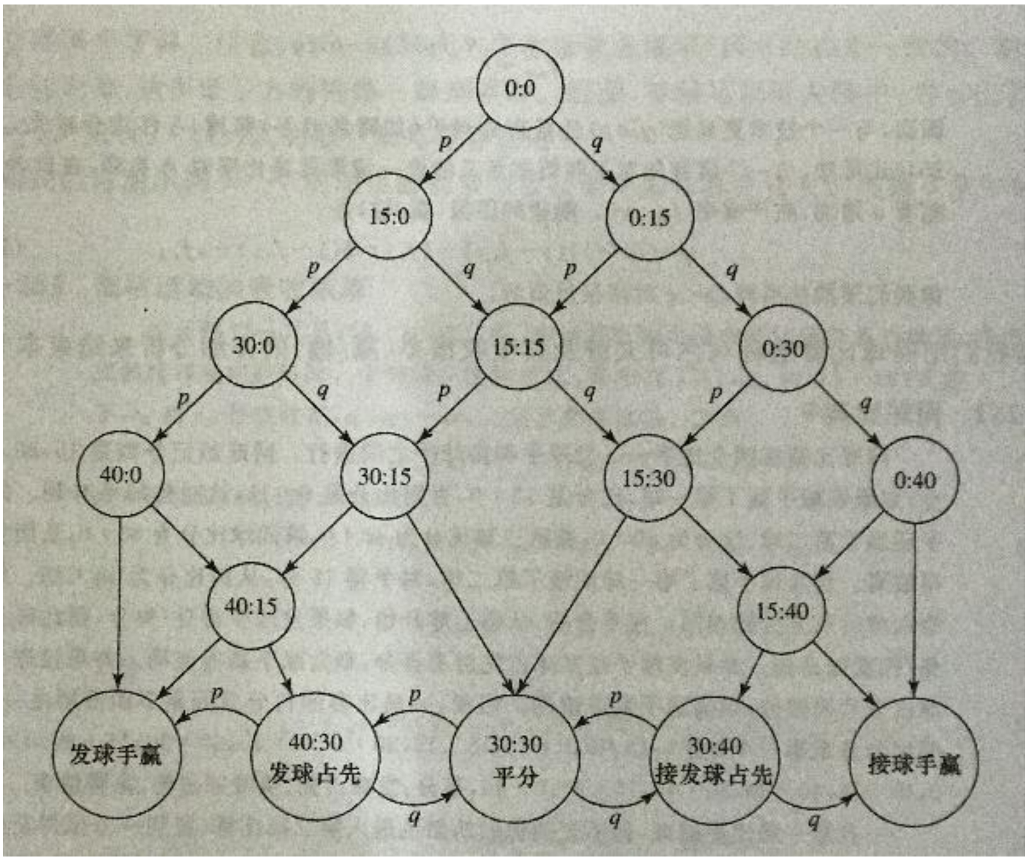
利用初始分布，得该马氏链进入常返状态类的平均时间为：

$$E\{T\} = \frac{p_1(1+2p^2)}{1-2pq} + \frac{2p_2}{1-2pq} + \frac{p_3(1+2q^2)}{1-2pq}$$

（3）由（1）的结果，以及当 j 是非常返状态时，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，可得

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{q(1-pq)}{1-2pq} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{p^3}{1-2pq} \\ \dfrac{q^2}{1-2pq} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{p^2}{1-2pq} \\ \dfrac{q^3}{1-2pq} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{p(1-pq)}{1-2pq} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2、 解：画出状态转移图如下：



初始分布为：

$$\begin{cases} p_0 = P\{发球手赢\} = p^4(1+4q) \\ p_1 = P\{发球占先\} = 4p^3q^2 \\ p_2 = P\{平分\} = 6p^2q^2 \\ p_3 = P\{接发球占先\} = 4p^2q^3 \\ p_4 = P\{接球手赢\} = q^4(1+4p) \end{cases}$$

利用上一题的结果即可得到所要的结果。

3、 解：（1）画出状态转移图，有状态空间的分解如下：$S = C_1 \cup C_2 \cup D$，其中：

$C_1 = \{0\}$（常返集），$C_2 = \{1, 2\}$（常返集），$D = \{3, 4\}$（非常返集）

（2）令状态1和2的平稳分布为(π_1, π_2)，

$$(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2), \quad \pi_1 + \pi_2 = 1$$

解得：$\pi_1 = 2/5$, $\pi_2 = 3/5$。

（3）根据状态转移图，有

$$f_{33}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, k = 1,2,\cdots \quad \Rightarrow \quad f_{33} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}$$

$$f_{34}^{(k)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k}, k = 1,2,\cdots \quad \Rightarrow \quad f_{34} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1}{3}$$

$$f_{43}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}, k = 1,2,\cdots \quad \Rightarrow \quad f_{43} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 1$$

$$f_{44}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, k = 1,2,\cdots \quad \Rightarrow \quad f_{44} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{2}{3}$$

（4）记：从状态3出发进入常返集的平均时间为$E\{T|3\}$，从状态4出发进入常返集的平均时间为$E\{T\,4\}$，利用

$$E\{T|i\} - \sum_{j \in D} E\{T|j\}p_{ij} = 1 \quad, i \in D$$

则有

$$\begin{cases} E\{T|3\} - E\{T|3\}\cdot\dfrac{1}{4} - E\{T|4\}\cdot\dfrac{1}{4} = 1 \\ E\{T|4\} - E\{T|3\}\cdot\dfrac{1}{2} - E\{T|4\}\cdot\dfrac{1}{2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E\{T|3\} = 3, E\{T|4\} = 5$$

由于此链等概率从非常返状态出发，因此此链进入常返类的平均时间（步数）为

$$\frac{1}{2}\cdot E\{T|3\} + \frac{1}{2}\cdot E\{T|4\} = 4$$

即平均经过 4 步，此链从非常返状态进入到常返状态。

（5）由：$P\{C_k \mid i\} - \sum_{j\in D} p_{ij} P\{C_k \mid j\} = \sum_{j\in C_k} p_{ij}$， $i \in D$，有

$$\begin{cases} P\{C_1 | 3\} - p_{33}P\{C_1 | 3\} - p_{34}P\{C_1 | 4\} = p_{30} \\ P\{C_1 | 4\} - p_{44}P\{C_1 | 4\} - p_{43}P\{C_1 | 3\} = 0 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} \frac{3}{4}P\{C_1 | 3\} - \frac{1}{4}P\{C_1 | 4\} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}P\{C_1 | 4\} - \frac{2}{3}P\{C_1 | 3\} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\{C_1 | 3\} = \frac{1}{2} \\ P\{C_1 | 4\} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

同理

$$\begin{cases} P\{C_2 | 3\} - p_{33}P\{C_2 | 3\} - p_{34}P\{C_2 | 4\} = p_{31} \\ P\{C_2 | 4\} - p_{44}P\{C_2 | 4\} - p_{43}P\{C_2 | 3\} = 0 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} \frac{3}{4}P\{C_2 | 3\} - \frac{1}{4}P\{C_2 | 4\} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}P\{C_2 | 4\} - \frac{2}{3}P\{C_2 | 3\} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\{C_2 | 3\} = \frac{1}{2} \\ P\{C_2 | 4\} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

由于初始的时候等概率处于两个非常返状态，因此，该链长期运行下去被常返类C_1吸收的概率是$1/2$，被常返类C_2吸收的概率是$1/2$。

（6）由于

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7/16 & 9/16 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

因此有

$$P\{X_5 = 2 \mid X_3 = 1\} = p_{12}^{(2)} = 9/16。$$

（7）由（2）的结果，以及当j是非常返状态时，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，可得

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/5 & 3/10 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/5 & 3/10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4、 解：（1）画出状态转移图可知，该链的状态可以分解为：$S = D \cup C_1 \cup C_2$，其中：$D = \{0\}$为非常返态集，$C_1 = \{1,2,3\}$，$C_2 = \{4,5\}$都为常返的闭集。

（2）由：$P\{C_k \mid i\} - \sum_{j\in D} p_{ij} P\{C_k \mid j\} = \sum_{j\in C_k} p_{ij}$， $i \in D$，有

$$P\{C_1 \mid 0\} - p_{00} P\{C_1 \mid 0\} = \sum_{j \in C_1} p_{0j} = 1/2 \Rightarrow P\{C_1 \mid 0\} = 3/5$$

$$P\{C_2 \mid 0\} - p_{00} P\{C_2 \mid 0\} = \sum_{j \in C_2} p_{0j} = 1/3 \Rightarrow P\{C_2 \mid 0\} = 2/5$$

（3）针对常返类C_1，有求平稳分布

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_1/4 + \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_1/4 + \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_1 = 4/9, \pi_2 = 1/3, \pi_3 = 2/9$$

针对常返类C_2，有求平稳分布

$$\begin{cases} \pi_4 = \pi_5/3 \\ \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_4 = 1/4, \pi_5 = 3/4$$

因此，$(0, 4/9, 1/3, 2/9, 0, 0)$和$(0, 0, 0, 0, 1/4, 3/4)$都是该链的平稳分布，平稳分布不是唯一的。

（4）由（2）和（3）的结果，我们有

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & 4/15 & 1/5 & 2/15 & 1/10 & 3/10 \\ 0 & 4/9 & 1/3 & 2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 1/3 & 2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 1/3 & 2/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

5、解：假设出门遇到下雨的概率为p（$0 < p < 1$），且各次出门是否下雨相互独立，以X_n表示第n次出门时张三手边可用的雨伞数目，则$\{X_n; n \ge 0\}$是一马氏链，状态空间为$S = \{0,1,2,\cdots,N\}$，其一步转移概率矩阵为

$$p_{0N} = 1, p_{j(N-j+1)} = p, p_{j(N-j)} = q = 1 - p, 1 \le j \le N$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

画出状态转移图易知此链是一遍历链，其极限分布存在且就是平稳分布。长时间后张三出门时身边没有雨伞的概率为$\pi_0 = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = 0\}$。

设该链的平稳分布为：$(\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)$，根据状态转移图，列出平衡方程，有：

$$\begin{cases} \pi_0 = q\pi_N \\ \quad\vdots \\ \pi_k = q\pi_{N-k} + p\pi_{N-k+1}\,,\ 1<k<N \\ \quad\vdots \\ \pi_N = \pi_0 + p\pi_1 \end{cases}$$

由上面的方程可得

$$\pi_k = \frac{1}{q}\pi_0 \ (k=1,2,\cdots,N)$$

利用：$\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_N=1$，得到

$$\pi_0\left(1+\frac{N}{q}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0=\frac{q}{q+N}$$

由于天是否下雨与张三身边有几把伞独立，因此张三出门时遇到困境的概率为

$$\alpha = p\pi_0 = \frac{pq}{q+N}$$

利用：$pq\le 1/4$，我们有

$$\alpha=\frac{pq}{q+N}\le\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{q+N}\le\frac{1}{4N}$$

因此，要使$\alpha\le 0.05$，只要$N\ge 5$即可。因此张三至少需要购置 5 把伞，才能使他出门时遇到困境的概率小于0.05。

6、 解：(1) 画出状态转移图可知此链是相通的，因此都为正常返状态，且都是非周期状态，因此存在唯一的平稳分布，设平稳分布为：(π_0,π_1,π_2)，因此

$$(\pi_0,\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)\,,\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1$$

解得：

$$\pi_0=\frac{4.9}{1.5\times 7.1},\pi_1=\frac{2.75}{1.5\times 7.1},\pi_2=\frac{2}{7.1}。$$

(2) 由状态转移图可知

$$f_{10}^{(2k-1)}=0.8\times(0.2\times 0.1)^{k-1}\,,\ f_{10}^{(2k)}=0.9\times 0.2\times(0.2\times 0.1)^{k-1}\,,\ k=1,2,\cdots$$

$$f_{20}^{(2k-1)}=0.9\times(0.2\times 0.1)^{k-1}\,,\ f_{20}^{(2k)}=0.8\times 0.1\times(0.2\times 0.1)^{k-1}\,,\ k=1,2,\cdots$$

因此

$$f_{10}=0.8\times\sum_{k=1}^{+\infty}(0.02)^{k-1}+0.18\times\sum_{k=1}^{+\infty}(0.02)^{k-1}=1$$

$$f_{20}=0.9\times\sum_{k=1}^{+\infty}(0.02)^{k-1}+0.08\times\sum_{k=1}^{+\infty}(0.02)^{k-1}=1$$

利用：$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$，有

$$E\{T_{10}\}=0.8\times\sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)(0.02)^{k-1}+0.18\times\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)(0.02)^{k-1}=\frac{1.176}{(0.98)^2}$$

$$E\{T_{20}\}=0.9\times\sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)(0.02)^{k-1}+0.08\times\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)(0.02)^{k-1}=\frac{1.078}{(0.98)^2}$$

（3）由于从状态 0 出发首次返回的平均步数为

$$E\{T_{00}\}=1+p_{01}E\{T_{10}\}+p_{02}E\{T_{20}\}=1+0.5E\{T_{10}\}+0.5E\{T_{20}\}$$

因此，假设该出租车从一地到另一地所花的时间平均为 25 分钟，当你在机场有人抢占了这辆出租车，则你将平均等待 $E\{T_{00}\}\times 25$ 分钟，这辆出租车才能回来。即你平均等待的时间为：

$$E\{T_{00}\}\times 25=\left(1+\frac{1.127}{0.98^2}\right)\times 25\approx 54.34\text{（分钟）}$$

注：也可以利用 $\mu_0=E\{T_{00}\}=1/\pi_0$ 计算，计算结果是一样的。

第三章 Poisson 过程（Poisson 信号流）习题解答

1、设$\{N(t), t \ge 0\}$是一强度为λ的齐次泊松过程，而$X(t) = N(t)/2 - 1$，$t \ge 0$。对$s > 0$，试求：

（1）计算$E\{N(t)N(t+s)\}$及$E\{N(s+t) \mid N(s)\}$的分布律；

（2）证明过程$X(t)$，$t \ge 0$是马氏过程并写出转移概率$p(s,i;t,j)$，其中$s \le t$。

解：（1）由泊松过程状态空间可知$X(t)$的状态空间为：

$$S = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots\} = \{(k-2)/2 : k = 0,1,2,\cdots\}$$

$$E\{N(t)N(t+s)\} = \lambda^2 t(t+s) + \lambda \min\{t, t+s\} = \lambda^2 t(t+s) + \lambda t$$

由于

$$\begin{aligned}
E\{N(s+t) \mid N(s) = n\} &= \sum_{k=n}^{+\infty} kP\{N(s+t) = k \mid N(s) = n\} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} k \frac{P\{N(s+t) = k, N(s) = n\}}{P\{N(s) = n\}} = \sum_{k=n}^{+\infty} kP\{N(t) = k - n\} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda t} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+n) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = n + \lambda t
\end{aligned}$$

因此

$$E\{N(s+t) \mid N(s)\} = N(s) + \lambda t$$

其分布列为：

$$P\{E\{N(s+t) \mid N(s)\} = n + \lambda t\} = P\{N(s) = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$$

（2）由泊松过程的独立增量性可知过程$X(t)$也是独立增量的，又因为$X(0) = -1$，因此可知过程$X(t)$是一马氏过程，其转移概率为：

$$\begin{aligned}
p(s,i;t,j) &= \frac{P\{X(s) = i, X(t) = j\}}{P\{X(s) = i\}} = \frac{P\{N(s) = 2(i+1), N(t) = 2(j+1)\}}{P\{N(s) = 2(i+1)\}} \\
&= \frac{P\{N(s) = 2(i+1)\}P\{N(t-s) = 2(j-i)\}}{P\{N(s) = 2(i+1)\}} = \frac{[\lambda(t-s)]^{2(j-i)}}{[2(j-i)]!} e^{-\lambda(t-s)}; (j \ge i, t \ge s)
\end{aligned}$$

$$p(s,i;t,j) = 0; \ (j < i, t \ge s)$$

附：泊松过程相关函数的计算：

设$0 < t_1 \le t_2$，我们有：

$$E\{N(t_1)N(t_2)\} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} m(m+n)P\{N(t_1) = m, N(t_2) = m+n\}$$

由于当$0<t_1\le t_2$时，

$$P\{N(t_1)=m,\, N(t_2)=m+n\}=\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2},\quad m,n=0,1,2,\cdots$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}
E\{N(t_1)N(t_2)\}&=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}m(m+n)P\{N(t_1)=m,\, N(t_2)=m+n\}\\
&=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}m(m+n)\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m^2\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2}+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{mn\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!n!}e^{-\lambda t_2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!(n-1)!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-2)!n!}e^{-\lambda t_2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!n!}e^{-\lambda t_2}+\\
&\quad+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!(n-1)!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\lambda^2t_1^2e^{-\lambda t_2}\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-2}t_1^{m-2}}{(m-2)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}+\lambda t_1e^{-\lambda t_2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-1}t_1^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}\\
&\quad+\lambda^2t_1(t_2-t_1)e^{-\lambda t_2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-1}t_1^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}(t_2-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&=\lambda^2t_1^2e^{-\lambda t_2}e^{\lambda t_1}e^{\lambda(t_2-t_1)}+\lambda t_1e^{-\lambda t_2}e^{\lambda t_1}e^{\lambda(t_2-t_1)}+\lambda^2t_1(t_2-t_1)e^{-\lambda t_2}e^{\lambda t_1}e^{\lambda(t_2-t_1)}\\
&=\lambda^2t_1t_2+\lambda t_1
\end{aligned}$$

同理我们有：

当$0<t_2\le t_1$时

$$E\{N(t_1)N(t_2)\}=\lambda^2t_1t_2+\lambda t_2$$

因此，有：

$$R_N(t_1,t_2)=E\{N(t_1)N(t_2)\}=\lambda^2t_1t_2+\lambda\min\{t_1,t_2\}$$

2、设$\{X(t);\,t\ge0\}$与$\{Y(t);\,t\ge0\}$是相互独立，参数分别为λ_1与λ_2的 Poisson 过程。定义随机过程$Z(t)=X(t)-Y(t),\,t\ge0$，且令：$p_n(t)=P\{Z(t)=n\}$。

（1）试求随机过程$\{Z(t);\,t\ge0\}$的均值函数$E\{Z(t)\}$和二阶矩$E\{Z^2(t)\}$；

（2）试证明：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)u^n=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\cdot\exp\{\lambda_1ut+\lambda_2u^{-1}t\}$。

解：（1）根据泊松过程的均值函数和相关函数，显然有：

$$E\{Z(t)\}=E\{X(t)-Y(t)\}=E\{X(t)\}-E\{Y(t)\}=(\lambda_1-\lambda_2)t$$

$$\begin{aligned}E\{Z^2(t)\}&=E\{X^2(t)\}-2E\{X(t)Y(t)\}+E\{Y^2(t)\}\\&=\lambda_1 t+\lambda_1^2t^2-2\lambda_1\lambda_2t^2+\lambda_2t+\lambda_2^2t^2\\&=(\lambda_1+\lambda_2)t+(\lambda_1-\lambda_2)^2t^2\end{aligned}$$

（2）由母函数的定义及 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 独立性，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_{Z(t)}(u)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)u^n=\Phi_{X(t)-Y(t)}(u)=\Phi_{X(t)+(-Y(t))}(u)=\Phi_{X(t)}(u)\Phi_{-Y(t)}(u)\\&=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\cdot\exp\{\lambda_1ut+\lambda_2u^{-1}t\}\end{aligned}$$

3、设 $\{N_1(t);t\ge 0\}$ 和 $\{N_2(t);t\ge 0\}$ 是相互独立的 Poisson 过程,其参数分别为 λ_1 和 λ_2 .若 $N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$，问:

（1）$\{N_0(t);t\ge 0\}$ 是否为 Poisson 过程，请说明理由；

（2）$\{N_0(t);t\ge 0\}$ 是否为平稳过程，请说明理由。

解：（1）由于 $N_0(t)$ 的状态空间为 $S=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$，因此 $N_0(t)$ 不是计数过程，更不是泊松过程。

（2）由于

$$E\{N_0(t)\}=E\{N_1(t)-N_2(t)\}=\lambda(t_1-t_2)$$

不是常数，因此 $N_0(t)$ 不是平稳过程。

4、设 $Y(t)=X(-1)^{N(t)},t\ge 0$，其中 $\{N(t);t\ge 0\}$ 为强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，随机变量 X 与此 Poisson 过程独立，且有如下分布：

$$P\{X=-a\}=P\{X=a\}=1/4,\ P\{X=0\}=1/2,\quad a>0$$

试求随机过程 $Y(t),t\ge 0$ 的均值函数和相关函数。

解：由于 $E\{X\}=0$，由独立性可知 $E\{Y(t)\}=0$，

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E\left\{X^2\cdot(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}\right\}=E\left\{X^2\right\}E\left\{(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}\right\}\\&=\frac{a^2}{2}E\left\{(-1)^{2N(t_1)+N(t_2)-N(t_1)}\right\}=\frac{a^2}{2}E\left\{(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}\right\}\\&=\frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}E\left\{(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}\middle|N(t_2)-N(t_1)=n\right\}P\{N(t_2)-N(t_1)=n\}\\&=\frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^n}{n!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}=\frac{a^2}{2}e^{-2\lambda(t_2-t_1)}=\frac{a^2}{2}e^{-2\lambda\tau},\quad\tau=t_2-t_1\end{aligned}$$

故$\{Y(t)\}$是平稳过程。

5、设$\{N(t), t \ge 0\}$是一强度为λ的泊松过程，$S_0 = 0$，S_n为第n个事件发生的时刻，求：

（1）(S_2, S_5)的联合概率密度函数；

（2）$E\{S_1 \mid N(t) \ge 1\}$；

（3）(S_1, S_2)在$N(t) = 1$条件下的条件概率密度函数。

解：（1）令：$0 < t_2 < t_5$，取充分小的$h > 0$，使得：

$$t_2 - \frac{h}{2} < t_2 < t_2 + \frac{h}{2} < t_5 - \frac{h}{2} < t_5 < t_5 + \frac{h}{2}$$

由

$$\left\{t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \le t_2 + \frac{h}{2}, t_5 - \frac{h}{2} < S_5 \le t_5 + \frac{h}{2}\right\} =$$
$$\left\{N\left(t_2 - \frac{h}{2}\right) = 1, N\left(t_2 + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_2 - \frac{h}{2}\right) = 1,\right.$$
$$\left.N\left(t_5 - \frac{h}{2}\right) - N\left(t_2 + \frac{h}{2}\right) = 2, N\left(t_5 + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_5 - \frac{h}{2}\right) = 1\right\} \cup H_n$$

其中

$$H_n = \left\{N\left(t_2 - \frac{h}{2}\right) = 1, N\left(t_2 + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_2 - \frac{h}{2}\right) = 1,\right.$$
$$\left.N\left(t_5 - \frac{h}{2}\right) - N\left(t_2 + \frac{h}{2}\right) = 2, N\left(t_5 + \frac{h}{2}\right) - N\left(t_5 - \frac{h}{2}\right) \ge 2\right\}$$

因此有

$$P\left\{t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \le t_2 + \frac{h}{2}, t_5 - \frac{h}{2} < S_5 \le t_5 + \frac{h}{2}\right\} =$$
$$= \lambda\left(t_2 - \frac{h}{2}\right)e^{-\lambda\left(t_2 - \frac{h}{2}\right)} \cdot (\lambda h)e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{2}[\lambda(t_5 - t_2 - h)]^2 e^{-\lambda(t_5 - t_2 - h)} \cdot (\lambda h)e^{-\lambda h} + o(h^2)$$

由此可得(S_2, S_5)的联合概率密度函数为

$$g(t_2, t_5) = \lim_{h \to 0} \frac{P\left\{t_2 - \frac{h}{2} < S_2 \le t_2 + \frac{h}{2}, t_5 - \frac{h}{2} < S_5 \le t_5 + \frac{h}{2}\right\}}{h^2}$$
$$= \frac{\lambda^5}{2} t_2 (t_5 - t_2)^2 e^{-\lambda t_5}, \quad 0 < t_2 < t_5$$

（2）由于$\{N(t) \ge 1\} = \{S_1 \le t\}$，由泊松过程与指数分布的关系可知，在$\{S_1 \le t\}$条件下，$S_1$的分布密度函数为

$$f(x)=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}},\quad 0\le x\le t \text{（截尾的指数分布）}$$

因此有：

$$E\{S_1 \mid N(t)\ge 1\}=E\{S_1 \mid S_1\le t\}=\int_0^t x\cdot\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}dx=\frac{1}{\lambda}+\frac{1-te^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$$

（3）由于$\{N(t)=1\}=\{S_1\le t<S_2\}$，令：$0<t_1\le t<t_2$，取充分小的$h_1,h_2>0$，使得：$t_1-h_1<t_1\le t<t_2-h_2<t_2$，由

$$\begin{aligned}&\{t_1-h_1<S_1\le t_1, t_2-h_2<S_2\le t_2\}=\\&=\{N(t_1-h_1)=0,\ N(t_1)-N(t_1-h_1)=1,\\&N(t_2-h_2)-N(t_1)=0, N(t_2)-N(t_2-h_2)=1\}\cup H_n\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}H_n=&\{N(t_1-h_1)=0,\ N(t_1)-N(t_1-h_1)=1,\\&N(t_2-h_2)-N(t_1)=0, N(t_2)-N(t_2-h_2)\ge 2\}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&P\{t_1-h_1<S_1\le t_1, t_2-h_2<S_2\le t_2\}=\\&=e^{-\lambda(t_1-h_1)}\cdot(\lambda h_1)\cdot e^{-\lambda h_1}\cdot e^{-\lambda(t_2-h_2-t_1)}\cdot(\lambda h_2)\cdot e^{-\lambda h_2}+o(h_1h_2)\end{aligned}$$

由此可得在$N(t)=1$的条件下(S_1,S_2)的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}&g(t_1,t_2\mid N(t)=1)=\\&=\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{P\{t_1-h_1<S_1\le t_1, t_2-h_2<S_2\le t_2\}}{h_1h_2P\{N(t)=1\}}=\frac{\lambda}{t}e^{-\lambda(t_2-t)},\quad 0<t_1\le t<t_2\end{aligned}$$

6、设$\{N(t), t\ge 0\}$是一强度为λ的泊松过程，设T为第一个事件出现的时间，$N(T/a)$为第一个事件后，在T/a时间间隔内出现的事件数，其中a为正常数。试计算：

（1） $E\{TN(T/a)\}$；

（2） $E\{[TN(T/a)]^2\}$。

解：（1）由于T为第一个事件出现的时间，因此T服从参数为λ的指数分布，由全概率公式及$E\{N(t)\}=\lambda t$，有

$$E\{TN(T/a)\}=\int_0^{+\infty}E\{TN(T/a)\mid T=t\}f_T(t)dt=\int_0^{+\infty}E\{tN(t/a)\}\lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}tE\{N(t/a)\}e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{+\infty}t\lambda\frac{t}{a}e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda^2}{a}\int_0^{+\infty}t^2e^{-\lambda t}dt=\frac{2}{a\lambda}$$

（2）由$E\{N^2(t)\}=\lambda t+(\lambda t)^2$及全概率公式，有

$$E\{[TN(T/a)]^2\}=\int_0^{+\infty} E\{[TN(T/a)]^2 \mid T=t\} f_T(t)dt=\int_0^{+\infty} E\{[tN(t/a)]^2\}\lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty} t^2 E\{[N(t/a)]^2\}e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{+\infty} t^2\left[\frac{\lambda t}{a}+\frac{\lambda^2 t^2}{a^2}\right]\cdot e^{-\lambda t}dt$$

$$=\frac{\lambda^2}{a}\int_0^{+\infty} t^3\cdot e^{-\lambda t}dt+\frac{\lambda^3}{a^2}\int_0^{+\infty} t^4\cdot e^{-\lambda t}dt=\frac{6a+24}{a^2\lambda^2}$$

7、某商场为调查客源情况，考察男女顾客到达商场的人数。假设 $[0,t)$ 时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为 λ 和 μ 的泊松过程。问：

（1）$[0,t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么分布？

（2）在已知 $[0,t)$ 时间内商场到达 n 位顾客的条件下，其中有 k 位是女顾客的概率为何？平均有多少位女顾客？

解：（1）以 $N_1(t), N_2(t)$ 分别表示 $[0,t)$ 时间内到达的女顾客和男顾客数，对于任意的 $k\in N_0$，有

$$\{N_1(t)+N(t)=k\}=\bigcup_{i=0}^{k}\{N_1(t)=i,\, N_2(t)=k-i\}$$

由 $N_1(t), N_2(t)$ 的独立性，有

$$P\{N_1(t)+N(t)=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{N_1(t)=i\}P\{N_2(t)=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\mu t)^i(\lambda t)^{k-i}}{i!(k-i)!}e^{-(\mu+\lambda)t}=\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=0}^{k}C_k^i(\mu t)^i(\lambda t)^{k-i}\right]e^{-(\mu+\lambda)t}=\frac{[(\mu+\lambda)t]^k}{k!}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

因此 $[0,t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么参数为 $(\mu+\lambda)t$ 的泊松分布。

（2）对于 $0\le k\le n$，有

$$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{P\{N_1(t)=k,\, N_1(t)+N_2(t)=n\}}{P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}}$$

由 $N_1(t), N_2(t)$ 的独立性及（1）的结果，有

$$P\{N_1(t)=k,\, N_1(t)+N_2(t)=n\}=P\{N_1(t)=k, N_2(t)=n-k\}$$

$$=P\{N_1(t)=k\}P\{N_2(t)=n-k\}=\frac{(\mu t)^k}{k!}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k!)}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$P\{N_1(t)+N(t)=n\}=\frac{[(\mu+\lambda)t]^n}{n!}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

因此有：

$$P\{N_1(t)=k\,|\,N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{(\mu t)^k}{k!}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k!)}\cdot\frac{n!}{[(\mu+\lambda)t]^n}=$$

$$=C_n^k\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^k\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-k}\sim B\left(n,\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$$

$$E\{N_1(t)\,|\,N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{n\mu}{(\mu+\lambda)}$$

8、设在时间区间 $(0,t]$ 到达某商店的顾客数 $N(t),t\geq 0$ 是强度为 $\lambda>0$ 的齐次泊松过程，$N(0)=0$，且每个顾客购买商品的概率 $p>0$，没有买商品的概率为 $q=1-p$，分别以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示 $(0,t]$ 所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数，$t\geq 0$。证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 λp 和 λq 的泊松过程，并且是相互独立的。进一步求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s,t)$。

解：由于 $N(t)=X(t)+Y(t)$，$N(t)$ 服从强度为 λ 的泊松过程，由全概率公式有：

$$P\{X(t)=n,Y(t)=m\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m\,|\,N(t)=k\}P\{N(t)=k\}$$

因为 $k\neq n+m$ 时，$P\{X(t)=n,Y(t)=m\,|\,N(t)=k\}=0$，故：

$$\begin{aligned}P\{X(t)=n,Y(t)=m\}&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m\,|\,N(t)=k\}P\{N(t)=k\}\\&=P\{X(t)=n,Y(t)=m\,|\,N(t)=n+m\}P\{N(t)=n+m\}\\&=C_{n+m}^n p^n q^m\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\end{aligned}$$

另外：

$$\begin{aligned}P\{X(t)=n\}&=\sum_{m=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m\}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\right]=\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y(t)=m\}&=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\right]=\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\end{aligned}$$

因此，有：

$$P\{X(t)=n,Y(t)=m\}=P\{X(t)=n\}\cdot P\{Y(t)=m\}$$

由于对任意的 n,m 和 t 上面的式子都成立，所以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 λp 和 λq 的

泊松过程，且相互独立。最后，由泊松过程的性质，我们有：

$$m_X(t)=E\{X(t)\}=\lambda pt,\quad t\ge 0,\quad m_Y(t)=E\{Y(t)\}=\lambda qt,\quad t\ge 0$$

$$R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}=(\lambda p)^2 st+(\lambda p)\min\{s,t\},\quad s,t\ge 0$$

$$R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}=(\lambda q)^2 st+(\lambda q)\min\{s,t\},\quad s,t\ge 0$$

9、 在某公共汽车起点站，有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 λ_1、λ_2 的齐次 Poisson 过程，且它们是相互独立的。假设 $t=0$ 时，两路公交车同时开始接受乘客上车。

（1）如果甲车在时刻 t 发车，计算在 $[0,t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值；

（2）如果当甲路车上有 n 个乘客时，甲路车发车；当乙路车上有 m 个乘客时，乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。（写出表达式即可）

解：（1）设甲车第 i 个乘客到达车站的时刻为 S_i，则 $[0,t]$ 内到达车站的乘客等待时间总和为：

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}(t-S_i)$$

因为：

$$E\{S(t)\mid N_1(t)=n\}=E\{\sum_{i=1}^{N_1(t)}(t-S_i)\mid N_1(t)=n\}=$$

$$=E\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\mid N_1(t)=n\}=nt-E\{\sum_{i=1}^{n}S_i\mid N_1(t)=n\}$$

$$=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故：

$$E\{S(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{N_1(t)=n\}E\{\sum_{i=1}^{N_1(t)}(t-S_i)\mid N_1(t)=n\}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n\}\cdot\frac{nt}{2}=\frac{t}{2}E\{N_1(t)\}=\frac{\lambda_1}{2}t^2$$

（2）设甲车第 n 个乘客到达车站的时刻为 S_n，乙车第 m 个乘客到达车站的时刻为 S_m，由于甲车乘客到达的人数与乙车乘客到达的人数相互独立，根据题意，所要求的概率为：

$$P\{S_n<S_m\}=\int_0^{+\infty}dt_2\int_0^{t_2}\frac{(\lambda_1 t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\cdot\frac{(\lambda_2 t_2)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}dt_1$$

10、　设$\{X_n, n\geq 1\}$独立同分布，X_n的概率密度函数为$f(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x\geq 0$，试求相应的更新函数$m(t)$。

解：由拉普拉斯变换，$L\{f(x)\}=L\{\lambda^2 xe^{-\lambda x}\}=\dfrac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}$，由更新函数导数的拉普拉斯变换与$X_n$密度函数的拉普拉斯变换的关系，有

$$L\{\frac{dm(t)}{dt}\}=\frac{\dfrac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}}{1-\dfrac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}}=\frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2-\lambda^2}=\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}$$

因此

$$\frac{dm(t)}{dt}=L^{-1}\{\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}\}=\frac{\lambda}{2}(1-e^{-2\lambda t})$$

求积分，可得

$$m(t)=\frac{\lambda t}{2}+\frac{1}{4}(e^{-2\lambda t}-1)$$

11、　设更新过程$N(t), t\geq 0$的时间间隔$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从参数为$\mu$的泊松分布，试求：

（1）$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$的分布；

（2）计算$P\{N(t)=n\}$。

解：（1）由更新过程可知，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$独立同分布，由母函数的知识，泊松分布的母函数为：若$X\sim Po(\mu)$，则$g_X(s)=e^{\mu(s-1)}$。

因此，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$的母函数为：$g_{S_n}(s)=e^{n\mu(s-1)}$，所以

$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$的分布为参数为$n\mu$的泊松分布，即

$$P\{S_n=k\}=\frac{(n\mu)^k}{k!}e^{-n\mu},\quad k\geq 0$$

（2）由$\{N(t)=n\}=\{S_n\leq t<S_{n+1}\}=\{S_n\leq t\}-\{S_{n+1}\leq t\}$，有

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{(n\mu)^k}{k!}e^{-n\mu}-\sum_{k=0}^{[t]}\frac{[(n+1)\mu]^k}{k!}e^{-(n+1)\mu}$$

第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析 习题解答

1、设 $X_n = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)$，其中 σ_k 和 α_k 为正常数，$U_k \sim U(0, 2\pi)$，且相互独立，$k = 1,2,\cdots,N$，试计算 $\{X_n, n = 0,\pm1,\cdots\}$ 的均值函数和相关函数，并说明其是否是平稳过程。

解：计算均值函数和相关函数如下

$$\mu_X(n) = E\{X_n\} = E\left\{\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)\right\} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N} \sigma_k E\{\cos(\alpha_k n - U_k)\} = 0$$

$$R_X(n,m) = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sqrt{2} \cos(\alpha_i n - U_i)\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sqrt{2} \cos(\alpha_j m - U_j)\right]\right\}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_i \sigma_j E\{\cos(\alpha_i n - U_i) \cos(\alpha_j m - U_j)\}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 E\{\cos(\alpha_i n - U_i) \cos(\alpha_i m - U_i)\} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \cos[\alpha_i (n - m)]$$

因此可知，$\{X_n, n = 0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳随机过程。

2、设有随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t + \pi\eta(t))$，其中 $\omega > 0$ 为常数，$\{\eta(t), t \ge 0\}$ 是泊松过程，A 是与 $\eta(t)$ 独立的随机变量，且 $P\{A = -1\} = P\{A = 1\} = 1/2$。

（1）试画出此过程的样本函数，并问样本函数是否连续？

（2）试求此过程的相关函数，并问该过程是否均方连续？

解：（1）样本函数不连续。

（2）令：$t_2 > t_1 \ge 0$，下面求相关函数：

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{A^2 \cos(\omega t_1 + \pi\eta(t_1))\cos(\omega t_2 + \pi\eta(t_2))\}$$

$$= E\{A^2\} \cdot E\{\cos(\omega t_1 + \pi\eta(t_1))\cos(\omega t_2 + \pi\eta(t_2))\}$$

$$= \frac{1}{2} E\{\cos[\omega(t_1 + t_2) + \pi(\eta(t_1) + \eta(t_2))] + \cos[\omega(t_2 - t_1) + \pi(\eta(t_2) - \eta(t_1))]\}$$

$$= \frac{1}{2} E\{\cos[\omega(t_1 + t_2) + 2\pi\eta(t_1) + \pi(\eta(t_2) - \eta(t_1))] + \cos[\omega(t_2 - t_1) + \pi(\eta(t_2) - \eta(t_1))]\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{\cos[\omega(t_1 + t_2)] + \cos[\omega(t_2 - t_1)]\} \cdot \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{1}{2} \{\cos[\omega(t_1 + t_2)] + \cos[\omega(t_2 - t_1)]\} \cdot e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$= \cos\omega t_1 \cos\omega t_2 \cdot e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}$$

因为：

$$R_\xi(t,t)=\cos^2\omega t$$

因此该过程是均方连续的随机过程。

3、设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程，且 $X(t)\sim N(\mu,\sigma^2 t)$。令 $Y(t)=2X(t)-1$，$t\ge 0$。试求过程 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 的相关函数 $R_Y(s,t)$。

解： 由相关函数的定义，有：

$$\begin{aligned}R_Y(s,t)&=E\{Y(s)Y(t)\}=E\{(2X(s)-1)(2X(t)-1)\}\\&=4E\{X(s)X(t)\}-2E\{X(s)\}-2E\{X(t)\}+1\\&=4E\{X(s)X(t)\}-4\mu+1\end{aligned}$$

由 $\{X(t),t\ge 0\}$ 是实的零初值正交增量过程，当 $0\le s\le t$ 时，我们有：

$$\begin{aligned}E\{X(s)X(t)\}&=E\{X(s)(X(t)-X(s)+X(s))\}\\&=E\{X(s)(X(t)-X(s))\}+E\{X^2(s)\}\\&=E\{X^2(s)\}=\sigma^2 s+\mu^2\end{aligned}$$

因此

$$R_Y(s,t)=4E\{X(s)X(t)\}-4\mu+1=4\sigma^2 s+4\mu^2-4\mu+1$$

同理，当 $0\le t\le s$ 时，有：

$$R_Y(s,t)=4\sigma^2 t+4\mu^2-4\mu+1$$

因此：

$$R_Y(s,t)=4\sigma^2\min\{s,t\}+4\mu^2-4\mu+1$$

4、设有随机过程 $X(t)=2Z\sin(t+\Theta)$，$-\infty<t<+\infty$，其中 Z、Θ 是相互独立的随机变量，$Z\sim N(0,1)$，$P(\Theta=\pi/4)=P(\Theta=-\pi/4)=1/2$。问过程 $X(t)$ 是否均方可积过程？说明理由。

解： 由 Z、Θ 的相互独立性，计算随机过程 $X(t)$ 的均值函数和相关函数：

$$E\{X(t)\}=E\{2Z\sin(t+\Theta)\}=2E\{Z\}E\{\sin(t+\Theta)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E\{X(s)X(t)\}=E\{2Z\sin(s+\Theta)\cdot 2Z\sin(t+\Theta)\}\\&=4E\{Z^2\}E\{\sin(s+\Theta)\sin(t+\Theta)\}=4E\{\sin(s+\Theta)\sin(t+\Theta)\}\\&=4[\sin(s+\pi/4)\sin(t+\pi/4)\times 1/2+\sin(s-\pi/4)\sin(t-\pi/4)\times 1/2]\\&=2\cos(t-s)\end{aligned}$$

由此可知，随机过程 $X(t)$ 是平稳过程，且是均方可积的。

5、设随机过程$\xi(t)=X\cos 2t+Y\sin 2t$，$-\infty<t<+\infty$，其中随机变量X和Y独立同分布。

（1）如果$X\sim U(0,1)$，问过程$\xi(t)$是否平稳过程？说明理由；

（2）如果$X\sim N(0,1)$，问过程$\xi(t)$是否均方可微？说明理由。

解：计算随机过程$\xi(t)$的相关函数：

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=E\{(X\cos 2s+Y\sin 2s)(X\cos 2t+Y\sin 2t)\}$$
$$=\cos 2s\cos 2tE\{X^2\}+\sin 2s\sin 2tE\{Y^2\}+[\cos 2s\sin 2t+\sin 2s\cos 2t]E\{XY\}$$

（1）当$X\sim U(0,1)$时，$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=1/3, E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=1/4$，因此

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\frac{1}{3}\cos 2(t-s)+\frac{1}{4}\sin 2(t+s)$$

所以，此时过程$\xi(t)$不是平稳过程。

（2）当$X\sim N(0,1)$时，$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=1, E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=0$，因此

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\cos 2(t-s)$$

所以，此时过程$\xi(t)$是平稳过程，且均方可微。

6、设随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$是一实正交增量过程，并且$E\{X(t)\}=0$，及满足：

$$E\left\{[X(t)-X(s)]^2\right\}=|t-s|,\quad -\infty<s,t<+\infty\text{；}$$

令：$Y(t)=X(t)-X(t-1), -\infty<t<+\infty$，试证明$Y(t)$是平稳过程。

解：因为

$$m_Y(t)=E\{X(t)\}-E\{X(t-1)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_Y(t,t-\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=\\&=E\{[X(t)-X(t-1)]\cdot[X(t-\tau)-X(t-\tau-1)]\}\\&=\frac{1}{2}\{E[X(t)-X(t-\tau-1)]^2-E[X(t)-X(t-\tau)]^2+\\&\quad+E[X(t-1)-X(t-\tau)]^2-E[X(t-1)-X(t-\tau-1)]^2\}\\&=\frac{1}{2}[|\tau+1|-2|\tau|+|\tau-1|]\\&=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1\\ 0, & |\tau|>1\end{cases}\end{aligned}$$

所以随机过程$Y(t)$是平稳过程，其功率谱密度函数为：

$$S_Y(\omega)=\int_{-1}^{1}[1-|\tau|]e^{-j\omega\tau}d\tau=\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^2$$

7、设$\xi(t)=X\sin(Yt);t\ge 0$，而随机变量X、Y是相互独立且都服从$[0,1]$上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程，是否连续、可导？

解：由于：

$$\mu_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=\frac{1-\cos t}{2t}$$

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin(t-s)}{t-s}-\frac{\sin(t+s)}{t+s}\right]$$

因此可知，此过程不是平稳过程，连续、可导。

8、设$\{X(t),t\in R\}$是连续平稳过程，均值为m，协方差函数为$C_X(\tau)=ae^{-b|\tau|}$，其中:$\tau\in R$，$a,b>0$。对固定的$T>0$，令$Y=T^{-1}\int_0^T X(s)ds$，证明：$E\{Y\}=m$，$Var(Y)=2a[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})]$。

证明：由题意，有

$$E\{Y\}=E\left\{T^{-1}\int_0^T X(s)ds\right\}=T^{-1}\int_0^T E\{X(s)\}ds=m$$

$$\begin{aligned}Var(Y)&=E\{Y^2\}-[E\{Y\}]^2=E\{Y^2\}-m^2\\&=E\{[T^{-1}\int_0^T X(s)ds]\cdot[T^{-1}\int_0^T X(u)du]\}-m^2\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T E\{X(s)X(u)\}dsdu-m^2\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T R_X(s-u)dsdu-m^2\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T[C_X(s-u)+m^2]dsdu-m^2\\&=T^{-2}\int_0^T\int_0^T ae^{-b|s-u|}dsdu\\&=2a[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})]\end{aligned}$$

9、设$(X,Y)\sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，令$X(t)=X+tY$，以及$Y(t)=\int_0^t X(u)du$，$Z(t)=\int_0^t X^2(u)du$，对于任意$0\le s\le t$，

（1）求$E\{X(t)\}$，$E\{Y(t)\}$，$E\{Z(t)\}$，$Cov(X(s),X(t))$，$Cov(Y(s),Y(t))$；

（2）证明$X(t)$在$t>0$上均方连续、均方可导；

（3）求$Y(t)$及$Z(t)$的均方导数。

解：（1）由于$(X,Y)\sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，因此

$$E\{X(t)\}=E\{X+tY\}=E\{X\}+tE\{Y\}=0$$

$$E\{Y(t)\}=E\{\int_0^t X(u)du\}=\int_0^t E\{X(u)\}du=0$$

由于 $X(t)$ 的均值函数为零，因此

$$\begin{aligned}Cov(X(s),X(t))&=R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}=E\{[X+sY][X+tY]\}\\&=E\{X^2\}+(s+t)E\{XY\}+stE\{Y^2\}=\sigma_1^2+(s+t)\rho\sigma_1\sigma_2+st\sigma_2^2\end{aligned}$$

因此，有

$$E\{Z(t)\}=E\{\int_0^t X^2(u)du\}=\int_0^t E\{X^2(u)\}du$$

$$=\int_0^t[\sigma_1^2+2u\rho\sigma_1\sigma_2+u^2\sigma_2^2]du=\sigma_1^2t+\rho\sigma_1\sigma_2t^2+\frac{1}{3}\sigma_2^2t^3$$

由于 $E\{Y(t)\}=0$，因此

$$Cov(Y(s),Y(t))=R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}=E\{[\int_0^s X(u)du][\int_0^t X(v)dv]\}$$

$$=\int_0^s du\int_0^t E\{X(u)X(v)\}dv=\int_0^s du\int_0^t[\sigma_1^2+(u+v)\rho\sigma_1\sigma_2+uv\sigma_2^2]dv$$

$$=\sigma_1^2st+\frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2st(s+t)+\frac{1}{4}\sigma_2^2s^2t^2$$

（2）由

$$R_X(s,t)=\sigma_1^2+(s+t)\rho\sigma_1\sigma_2+st\sigma_2^2$$

可知，$X(t)$ 在 $t>0$ 上均方连续、均方可导。

（3）由

$$R_Y(s,t)=\sigma_1^2st+\frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2st(s+t)+\frac{1}{4}\sigma_2^2s^2t^2,$$

可知，$Y(t)$ 在 $t>0$ 上均方可导。其均方导数 $Y'(t)$ 的均值函数和相关函数分别为

$$\mu_{Y'}=E\{Y'(t)\}=0$$

$$R_{Y'}(s,t)=\frac{\partial^2R_Y(s,t)}{\partial s\partial t}=\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2(s+t)+\sigma_2^2st$$

下面求 $Z(t)$ 的相关函数：由于 $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，因此有

$$\begin{aligned}E\{X^2(u)X^2(v)\}&=E\{X^2(u)\}E\{X^2(v)\}+2[E\{X(u)X(v)\}]^2\\&=[\sigma_1^2+2u\rho\sigma_1\sigma_2+u^2\sigma_2^2][\sigma_1^2+2v\rho\sigma_1\sigma_2+v^2\sigma_2^2]+\\&\quad+2[\sigma_1^2+(u+v)\rho\sigma_1\sigma_2+uv\sigma_2^2]^2\end{aligned}$$

因此

$$R_Z(s,t)=E\{Z(s)Z(t)\}=E\{[\int_0^s X^2(u)du][\int_0^t X^2(v)dv]\}$$

$$=\int_0^s du\int_0^t E\{X^2(u)X^2(v)\}dv$$

将上式代入计算即可得$Z(t)$的相关函数。

10、　设随机过程$\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的实平稳正态过程。设$X(t)$通过线性全波检波器后，其输出为 $Y(t) = |X(t)|$，试求：

（1）随机过程$Y(t)$的相关函数$R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（2）随机过程$Y(t)$的均值和方差；

（3）随机过程$Y(t)$的一维概率分布密度函数$f_Y(y)$。

解：（1）设X, Y是服从均值为零的正态分布二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则有：

$$E\{|XY|\} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi]$$

其中：$\sin\varphi = r,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

因为$X(t+\tau)$与$X(t)$是联合正态分布的，且各自的均值为零，方差为$R_X(0)$，相关系数为

$$r = \frac{E\{X(t+\tau)E(t)\}}{\sqrt{E\{X^2(t+\tau)\}}\sqrt{E\{X^2(t)}} = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由此，我们有：

$$R_Y(\tau) = E\{|X(t+\tau)||X(t)|\} = \frac{2R_X(0)[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi]}{\pi}$$

其中：$\sin\varphi = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)},\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

$$m_Y = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx = 2\int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\}dx = \sqrt{\frac{2R_X(0)}{\pi}}$$

由此可知，随机过程$Y(t)$是平稳过程。

（2）均值计算如上（1），方差计算如下：

$$E\{Y^2(t)\} = E\{X^2(t)\} = R_X(0)$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} - m_Y^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)R_X(0)$$

（3）因为$X(t)$的一维分布为正态分布，其分布密度函数为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\},\quad -\infty<x<+\infty$$

因此，我们有：

$$f_Y(y)=\left[f_X(y)+f_X(-y)\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\{-\frac{y^2}{2R_X(0)}\},\quad y>0$$

第五章 平稳过程的谱分析 习题解答

1、 设有一线性系统，其输入为零均值白高斯噪声$n(t)$，其功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$，系统的冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0 \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

此线性系统的输出为$\xi(t)$。令：$\eta(t)=\xi(t)-\xi(t-T)$，其中$T>0$为一常数，试求过程$\eta(t)$的一维概率密度函数。

解：由于线性系统的输入是零均值的高斯白噪声，因此输出$\xi(t)$是正态过程，由题意有：

$$\eta(t)=\xi(t)-\xi(t-T)$$

因此，$\eta(t)$也是正态过程。由题意，可知系统的转移函数为：

$$H(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}\quad\Rightarrow\quad |H(j\omega)|^2=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

因此我们有：

$$S_\xi(\omega)=|H(j\omega)|^2 S_n(\omega)=\frac{N_0}{2(\alpha^2+\omega^2)}$$

由维纳－辛嵌定理，有：

$$R_\xi(\tau)=F^{-1}[S_\xi(\omega)]=\frac{N_0}{4\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$$

由于

$$E\{\eta(t)\}=0\text{，}\ D\{\eta(t)\}=E\{\eta(t)\eta(t)\}=2[R_\xi(0)-R_\xi(T)]=\frac{N_0}{2\alpha}\left[1-e^{-\alpha T}\right]\hat{=}\sigma_\eta^2$$

由此得一维分布密度函数为：

$$f_{\eta_t}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}\right\}$$

2、 设$s(t)$为一确定性信号，在$(0,T)$内具有能量$E_s=\int_0^T s^2(t)dt$，$n(t)$为一零均值的白高斯过程，其相关函数为：$R_n(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$。令：$\eta_1=\int_0^T s(t)[s(t)+n(t)]dt$，$\eta_2=\int_0^T s(t)n(t)dt$。试求：

（1）给定一常数γ，求概率$P\{\eta_1>\gamma\}$；

（2）给定一常数γ，求概率$P\{\eta_2 > \gamma\}$。

解：由于噪声是零均值高斯随机过程，由题意可知，η_1, η_2是正态分布的随机变量。

（1）由于：

$$\eta_1 = \int_0^T s(t)[s(t)+n(t)]dt = \int_0^T s^2(t)dt + \int_0^T s(t)n(t)dt = E_s + \int_0^T s(t)n(t)dt$$

因此：

$$E\{\eta_1\} = E\left[\int_0^T s^2(t)dt + \int_0^T s(t)n(t)dt\right] = E_s$$

$$\begin{aligned}D\{\eta_1\} &= E\{\eta_1^2\} - [E\{\eta_1\}]^2 = E_s^2 + 2E_s\int_0^T s(t)E[n(t)]dt + E\left[\{\int_0^T s(t)n(t)dt\}^2\right] - E_s^2 \\ &= E\left[\{\int_0^T s(t)n(t)dt\}^2\right] = E\left[\int_0^T s(u)n(u)du \cdot \int_0^T s(v)n(v)dv\right] \\ &= \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T s(u)s(v)\delta(u-v)dudv = \frac{N_0E_s}{2}\end{aligned}$$

由此所求概率为：

$$P\{\eta_1 > \gamma\} = 1 - P\{\eta_1 \le \gamma\} = 1 - \int_{-\infty}^{\gamma} f_{\eta_1}(u)du$$

其中：

$$f_{\eta_1}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_s}} e^{-\frac{(u-E_s)^2}{N_0E_s}}$$

（2）由于：$\eta_2 = \int_0^T s(t)n(t)dt$，

因此

$$E\{\eta_2\} = E\left[\int_0^T s(t)n(t)dt\right] = 0$$

$$\begin{aligned}D\{\eta_2\} &= E\{\eta_2^2\} - [E\{\eta_2\}]^2 = E\left[\{\int_0^T s(t)n(t)dt\}^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T s(u)n(u)du \cdot \int_0^T s(v)n(v)dv\right] \\ &= \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T s(u)s(v)\delta(u-v)dudv = \frac{N_0E_s}{2}\end{aligned}$$

由此所求概率为：

$$P\{\eta_2 > \gamma\} = 1 - P\{\eta_2 \le \gamma\} = 1 - \int_{-\infty}^{\gamma} f_{\eta_2}(u)du$$

其中：

$$f_{\eta_2}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_s}} e^{-\frac{u^2}{N_0E_s}}$$

3、 设有一非线性系统，其输入为零均值平稳实高斯过程，其协方差函数为：

$$C_\xi(\tau) = Pe^{-\alpha|\tau|}$$

其中 $P > 0$ 为一常数。系统的输出为：

$$\zeta = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt$$

试求：

（1）输出均值：$E\{\zeta\}$；

（2）输出方差：$D\{\zeta\}$；

（3）设 $y = \dfrac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}$， $x = \alpha T$ ，画出 y 对 x 的关系简图。

解：（1）由于输入 $\xi(t)$ 是零均值的实平稳高斯过程，且其相关函数为：

$$R_\xi(\tau) = C_\xi(\tau) = Pe^{-\alpha|\tau|}$$

由此可知输出均值为：

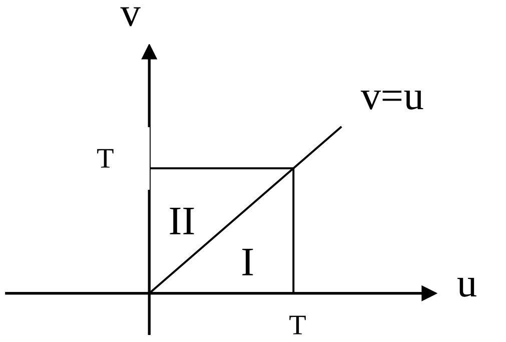
$$E\{\zeta\} = E\left[\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt\right] = \frac{1}{T}\int_0^T E[\xi^2(t)]dt = \frac{1}{T}\int_0^T R_\xi(0)dt = P$$

（2）输出方差为：

$$\begin{aligned}
D\{\zeta\} &= E\{\zeta^2\} - [E\{\zeta\}]^2 = E\left[\frac{1}{T^2}\{\int_0^T \xi^2(t)dt\}^2\right] - P^2 \\
&= \frac{1}{T^2}E\left[\left(\int_0^T \xi^2(u)du\right)\cdot\left(\int_0^T \xi^2(v)dv\right)\right] - P^2 \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\{\xi^2(u)\xi^2(v)\}dudv - P^2 \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [R_\xi^2(0) + 2R_\xi^2(u-v)]dudv - P^2 \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_\xi^2(u-v)dudv
\end{aligned}$$

将相关函数代入计算，我们有：

$$\begin{aligned}
D\{\zeta\} &= \frac{2P^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T e^{-2\alpha|u-v|}dudv \\
&= \frac{2P^2}{T^2}\iint_I e^{-2\alpha|u-v|}dudv + \frac{2P^2}{T^2}\iint_{II} e^{-2\alpha|u-v|}dudv \\
&= \frac{2P^2}{T^2}\int_0^T du\int_0^u e^{-2\alpha(u-v)}dv + \frac{2P^2}{T^2}\int_0^T du\int_u^T e^{2\alpha(u-v)}dv \\
&= \frac{2P^2}{\alpha T} + \frac{P^2}{\alpha^2 T^2}\left[e^{-2\alpha T} - 1\right]
\end{aligned}$$



（3）令 $x=\alpha T$，则有：

$$u(x)=\frac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\left[e^{-2x}-1\right]$$

4、设有一线性系统，输入输出分别为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，其中输入过程 $\xi(t)$ 为零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为：$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}\quad(\alpha>0)$。系统的单位冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}\ , & t\geq 0, \beta>0, \beta\neq\alpha \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

若 $\xi(t)$ 在 $t=-\infty$ 时接入系统，试求：

（1）在 $t=0$ 时输出 $\eta(0)$ 大于 y 的概率 $P\{\eta(0)>y\}$；

（2）求条件概率 $P\{\eta(0)>y\,|\,\xi(-T)=0\}$，其中 $T>0$；

（3）求条件概率 $P\{\eta(0)>y\,|\,\xi(T)=0\}$，其中 $T>0$。

解：由题意，可知系统的转移函数为：

$$H(j\omega)=\frac{1}{\beta+j\omega}\quad\Rightarrow\quad |H(j\omega)|^2=\frac{1}{\beta^2+\omega^2}$$

由维纳－辛嵌定理，有：

$$S_\xi(\omega)=F[R_{\xi\xi}(\tau)]=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

由输入输出功率谱的关系，有：

$$\begin{aligned}S_\eta(\omega)&=|H(j\omega)|^2 S_\xi(\omega)=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{(\beta^2+\omega^2)(\alpha^2+\omega^2)}\\&=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2+\omega^2}-\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\right)\end{aligned}$$

因此，我们有

$$R_{\eta\eta}(\tau)=F^{-1}[S_\eta(\omega)]=\frac{\sigma_\xi^2}{(\alpha^2-\beta^2)\beta}\left[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\right]$$

求互相关函数：

$$R_{\eta\xi}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\xi(t_2)\}=R_{\eta\xi}(\tau)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du=\sigma_\xi^2\int_0^{+\infty}e^{-\beta u}\cdot e^{-\alpha|\tau-u|}du$$

其中$\tau=t_1-t_2$，当$\tau=t_1-t_2\geq 0$时，我们有：

$$R_{\eta\xi}(\tau)=\sigma_\xi^2\int_0^{\tau}e^{-\beta u}\cdot e^{-\alpha(\tau-u)}du+\sigma_\xi^2\int_\tau^{+\infty}e^{-\beta u}\cdot e^{\alpha(\tau-u)}du$$
$$=\sigma_\xi^2e^{-\alpha\tau}\int_0^{\tau}e^{(\alpha-\beta)u}du+\sigma_\xi^2e^{\alpha\tau}\int_\tau^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)u}du$$
$$=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{\alpha^2-\beta^2}e^{-\beta\tau}-\frac{\sigma_\xi^2}{\alpha-\beta}e^{-\alpha\tau}$$

当$\tau=t_1-t_2<0$时，我们有：

$$R_{\eta\xi}(\tau)=\sigma_\xi^2\int_0^{+\infty}e^{-\beta u}\cdot e^{\alpha(\tau-u)}du=\sigma_\xi^2e^{\alpha\tau}\int_0^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)u}du=\frac{\sigma_\xi^2}{\alpha+\beta}e^{\alpha\tau}$$

（1）由题意，由于输入为零均值的平稳实高斯过程，因此输出也是高斯过程，且当$t\geq 0$时是平稳的。由此可知，随机变量$\eta(0)$是正态分布的随机变量，均值和方差为：

$$E\{\eta(0)\}=0\qquad \sigma_\eta^2\triangleq D(\eta(0))=R_{\eta\eta}(0)=\frac{\sigma_\xi^2}{(\alpha+\beta)\beta}$$

因此所求概率为：

$$P\{\eta(0)>y\}=1-P\{\eta(0)\leq y\}=1-\int_{-\infty}^{y}f_\eta(u)du$$

其中：

$$f_\eta(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}e^{-\frac{u^2}{2\sigma_\eta^2}}$$

（2）由于高斯过程经过线性系统的输入输入是联合高斯过程，令：$X=\xi(-T),\ Y=\eta(0)$，则有：X,Y的联合分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中：

$$\sigma_1^2=\sigma_\xi^2,\ \sigma_2^2=\sigma_\eta^2=\frac{\sigma_\xi^2}{(\alpha+\beta)\beta}$$

$$r=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{E\{XY\}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{R_{\eta\xi}(T)}{\sigma_1\sigma_2}$$

其条件分布密度函数为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y-\frac{r\sigma_2 x}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

因此所求的概率为：

$$P\{\eta(0)>y\,|\,\xi(-T)=0\}=1-P\{\eta(0)\le y\,|\,\xi(-T)=0\}=1-\int_{-\infty}^{y}f(u)du$$

其中：

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\right\}$$

（3）解法如上面的（2），唯一的区别为此时的相关系数为：

$$r=\frac{R_{\eta\xi}(-T)}{\sigma_1\sigma_2}$$

5、设实平稳过程 $\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数和功率谱密度分别为 $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$，令随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$ 的相关函数和功率谱密度分别为 $R_Y(\tau)$ 和 $S_Y(\omega)$，其中 a 是常数。

（1）试证明：$R_Y(\tau)=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)$；

（2）试证明：$S_Y(\omega)=4S_X(\omega)\sin^2(a\omega)$。

解：（1）由题设可知：

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}\\&=E\{[X(t+a)-X(t-a)][X(t-\tau+a)-X(t-\tau-a)]\}\\&=R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)+R_X(\tau)\\&=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)\end{aligned}$$

（2）由维纳－辛钦公式，有：

$$\begin{aligned}S_Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+2a)e^{-j\omega\tau}d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+2a)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=S_X(\omega)\left[2-e^{2j\omega a}-e^{-2j\omega a}\right]\\&=S_X(\omega)[2-2\cos(2a\omega)]=4S_X(\omega)\sin^2(a\omega)\end{aligned}$$