# 随机过程作业 13

周强 (119) 电子学院 202128019427002

2021 年 11 月 30 日

**题目 1.** 设在时间区间 $(0,t]$ 到达某商店的顾客数 $N(t), t \geq 0$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的齐次泊松过程, $N(0)=0$, 且每个顾客购买商品的概率 $p>0$, 没有买商品的概率为 $q=1-p$, 分别以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示 $(0,t]$ 所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数, $t \geq 0$ 。证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 $\lambda p$ 和 $\lambda q$ 的泊松过程, 并且是相互独立的。进一步求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s,t)$ 。

**解答.** 由题意知，对于 $x, y \in N$

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t)=x, Y(t)=y\} \\
&= P\{X(t)=x, Y(t)=y \big| N(t)=x+y\} \cdot P\{N(t)=x+y\} \\
&= C_{x+y}^{x} p^x q^y \frac{(\lambda t)^{x+y}}{(x+y)!} e^{-\lambda(x+y)} \\
&= \frac{(p\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda x} \cdot \frac{(q\lambda t)^y}{y!} e^{-\lambda y}
\end{aligned}
$$

则有

$$
P\{X(t)=x\} = \sum_{y=0}^{\infty} P\{X(t)=x, Y(t)=y\} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(p\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda x} \cdot \frac{(q\lambda t)^y}{y!} e^{-\lambda y}
$$

$$
= \frac{(p\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda x} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^y}{y!} e^{-\lambda y} = \frac{(p\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda x}
$$

同理可证

$$P\{Y(t)=y\}=\frac{(q\lambda t)^y}{y!}e^{-\lambda y}$$

因此，$X(t), Y(t)$ 分别是服从参数为 $\lambda p, \lambda q$ 的 Poisson 过程。
注意到 $P\{X(t)=x, Y(t)=y\}=P\{X(t)=x\}\cdot P\{Y(t)=y\}$, 因此，$X(t)$ 和 $Y(t)$ 相互独立。
根据 Poisson 过程的性质，我们有

$$\begin{aligned}
&m_X(t)=\lambda pt, m_Y(t)=\lambda qt, t\geq 0\\
&R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}=(\lambda p)^2 st+(\lambda p)\min\{s,t\}, \quad s,t\geq 0\\
&R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}=(\lambda q)^2 st+(\lambda q)\min\{s,t\}, \quad s,t\geq 0
\end{aligned}$$

**题目 2.** 在某公共汽车起点站, 有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 $\lambda_1$ $\lambda_2$ 的齐次 Poisson 过程, 且它们是相互独立的。假设 $t=0$ 时, 两路公交车同时开始接受乘客上车。

(1) 如果甲车在时刻 $t$ 发车, 计算在 $[0,t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值;

(2) 如果当甲路车上有 $n$ 个乘客时, 甲路车发车; 当乙路车上有 $m$ 个乘客时, 乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。(写出表达式即可)

**解答.**

(1) 设 $S_i$ 为第 $i$ 个等待甲路公交车乘客的到达时间, 则 $t-S_i$ 为该乘客的等待时间。甲车乘客的总等待时间为

$$S(t)=\sum_{i=0}^{N_1(t)}(t-S_i)$$

其中 $N_1(t)$ 为 $[0,t]$ 时间内甲车乘客的数量。

$$
\begin{aligned}
&E\{S(t)\big|N_1(t)=n\} = E\left\{\sum_{i=0}^{n}(t-S_i)\big|N_1(t)=n\right\}\\
&= nt - E\left\{\sum_{i=0}^{n}S_i\big|N_1(t)=n\right\}\\
&= nt - E\left\{\sum_{i=0}^{n}Y_{(i)}\right\} = nt - E\left\{\sum_{i=0}^{n}Y_i\right\}\\
&= \frac{1}{2}nt
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&E\{S(t)\} = E\{E\{S(t)\big|N_1(t)=n\}\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}ntP\{N_1(t)=n\} = \frac{1}{2}tE\{N_1(t)\} = \frac{1}{2}\lambda_1 t^2
\end{aligned}
$$

(2) 设 $S_n$ 为甲车第 n 个乘客到达的时间，设 $S_m$ 为乙车第 m 个乘客到达的时间，由于两路乘客的到达人数相互独立，则 $S_n$ 与 $S_m$ 相互独立。综上，甲车发车更早的概率为

$$
P\{S_n < S_m\} = \int_0^{\infty}\int_0^{t_1} f(t_1,t_2)dt_1dt_2
$$

其中 $f(t_1,t_2)$ 是 $S_1$ 和 $S_2$ 的联合概率密度函数，为

$$
f(t_1,t_2) = f_{S_n}(t_1)f_{S_m}(t_2) = \frac{(\lambda_1 t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\cdot\frac{(\lambda_2 t_2)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}
$$

**题目 3.** 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 独立同分布，$X_n$ 的概率密度函数为 $f(x) = \lambda^2 xe^{-\lambda x}, x\geq 0$, 试求相应的更新函数 $m(t)$ 。

**解答.** $f(x)$ 的拉普拉斯变换为

$$
\widetilde{F}(s) = \mathfrak{L}\{f(x)\} = \frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}
$$

则

$$\widetilde{M}(s)=\frac{\widetilde{F}(s)}{1-\widetilde{F}(s)}=\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}$$

做拉普拉斯反变换有

$$\frac{dm(t)}{dt}=\frac{1}{2}\lambda(1-e^{-2\lambda t})$$

结合 $m(0)=0$, 有

$$m(t)=\frac{1}{2}\lambda t+\frac{1}{4}(e^{-2\lambda t}-1)$$

**题目 4.** 设更新过程 $N(t),t\geq 0$ 的时间间隔 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从参数为 $\mu$ 的泊松分布, 试求:

(1) $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的分布;

(2) 计算 $P\{N(t)=n\}$ 。

**解答.**

(1) 由 Poisson 分布的可加性可知，$S_n$ 服从参数是 $(n\mu)$ 的泊松分布，即

$$P\{S_n=k\}=\frac{(n\mu)^k}{k!}e^{-n\mu}$$

(2) 由于 $\{N(t)=n\}=\{S_n\leq t<S_{n+1}\}=\{S_n\leq t\}-\{S_{n+1}\leq t\}$ 则有

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{(n\mu)^k}{k!}e^{-n\mu}-\sum_{k=0}^{[t]}\frac{[(n+1)\mu]^k}{k!}e^{-(n+1)\mu}$$