第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

（四） 随机分析（续）

5．随机微分方程初步

设$\{Y(t); t \in T\}$是一均方连续的二阶矩过程，X_0是一存在一、二阶矩的随机变量，假设$\{Y(t); t \in T\}$和X_0是独立的，考虑以下随机微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = Y(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

试研究$\{X(t); t \in T\}$的统计特性。

解：方程两边在均方意义下积分，有：

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(u)du$$

并且该解是唯一的。由于：

$$E\{X(t)\} = E\{X(t_0)\} + \int_{t_0}^{t} E\{Y(u)\}du$$

所以，当$E\{Y(t)\} = 0$时，

$$E\{X(t)\} = E\{X_0\}$$

又相关函数为：

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\} \\ &= E\{|X_0|^2\} + E\{X_0\}\int_{t_0}^{t_2} E\{\overline{Y(u)}\}du + E\{\overline{X_0}\}\int_{t_0}^{t_1} E\{Y(u)\}du \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1} R_Y(u,v)dudv \end{aligned}$$

所以，当$E\{Y(t)\} = 0$时，有：

$$R_X(t_1,t_2) = E\{|X_0|^2\} + \int_{t_0}^{t_2}\int_{t_0}^{t_1} R_Y(u,v)dudv$$

设有一阶线性微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = a(t)X(t) + Y(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

其中$a(t), t \in T$是一确定性函数，$\{Y(t); t \in T\}$是一均方连续的实二阶矩过程，X_0是存在一、二阶矩的随机变量，则此线性方程有唯一的解：

$$X(t) = X_0 \exp\{\int_{t_0}^{t} a(u)du\} + \int_{t_0}^{t} Y(v)\exp\{\int_{v}^{t} a(u)du\}dv$$

下面研究其均值函数和相关函数

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$$

$$= E\{X_0\}\exp\{\int_{t_0}^{t} a(u)du\} + \int_{t_0}^{t} E\{Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t} a(u)du\}dv$$

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

$$= E\{X_0^2\}\exp\{\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\}\exp\{\int_{t_0}^{t_2} a(v)dv\}$$

$$+ \exp\{\int_{t_0}^{t_1} a(u)du\}\int_{t_0}^{t_2} E\{X_0Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t_2} a(u)du\}dv$$

$$+ \exp\{\int_{t_0}^{t_2} a(u)du\}\int_{t_0}^{t_1} E\{X_0Y(v)\}\exp\{\int_{v}^{t_1} a(u)du\}dv$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} R_Y(v_1,v_2)\exp\{\int_{v_1}^{t_1} a(u)du\}\exp\{\int_{v_{21}}^{t_2} a(u)du\}dv_1dv_2$$

（五） 各态历经性

1． 各态历经性

本节主要讨论根据试验记录（样本函数）确定平稳过程的均值和相关函数的理论依据和方法。

一般地，计算平稳过程的均值和相关函数有各种不同的方法，例如：

$$\mu_X(t_1) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)$$

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1 - t_2) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)\overline{x_k(t_2)}$$

这样的计算需要对一个平稳过程重复进行大量地观察，以便获取数量很多的样本函数 $x_k(t)$，而这在实际当中是非常困难的，有时甚至是不可能的。但是根据平稳过程的统计特性是不随时间的推移而变化，于是自然希望在很长时间内观察得到一个样本函数，可以作为得到这个过程的数字特征的充分依据。本节给出的各态历经性定理指出：对平稳过程而言，只要满足一些较宽的条件，那么集平均（均值函数和相关函数）实际上可以用一个样本函数在整个时间轴上的时间平均值来代替。

定义：设 $X(t)$ 是均方连续平稳随机过程，如果它沿整个时间轴上的平均值（时间平均）$\langle X(t)\rangle$ 存在，即

$$\langle X(t)\rangle \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

存在，而且

$$P\{\langle X(t)\rangle = E\{X(t)\} = \mu_X\} = 1$$

则称该随机过程的均值具有各态历经性。

注：$\mu_X = E\{X(t)\}$ 表示该随机过程的集平均或统计平均。

定义：设 $X(t)$ 是均方连续平稳随机过程，且对于固定的 τ，$X(t+\tau)\overline{X(t)}$ 也是连续平稳随机过程，$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$ 表示 $X(t+\tau)\overline{X(t)}$ 沿整个时间轴上的时间平均，即

$$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t+\tau)\overline{X(t)}dt$$

若 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$ 存在，称 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$ 为 $X(t)$ 的时间相关函数。若

$$P\{\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\} = R_X(\tau)\} = 1$$

则称该过程的自相关函数具有各态历经性。

定义：如果 $X(t)$ 是一均方连续平稳随机过程，且其均值和相关函数均具有各态历经性，则称该随机过程具有各态历经性，或者说 $X(t)$ 是各态历经的，或是遍历的。

例：计算随机正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\theta)$ 的时间平均 $\langle X(t)\rangle$ 和时间相关函数 $\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle$，其中 $\theta \sim U(0,2\pi)$，a,ω 为常数。

例：设有平稳随机过程 $X(t)=\eta$，η 是一异于零的随机变量，问该过程是否各态历经？

引理 1：车贝雪夫不等式：设 X 是一随机变量，若 $DX<\infty$，则对于 $\forall \varepsilon>0$，有：$P\{|X-EX|\geq \varepsilon\}\leq \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$。

引理 1：设 X 是一随机变量，则有：$DX=0 \quad \Leftrightarrow \quad P\{X=EX\}=1$，即：

$$DX=0 \quad \Leftrightarrow \quad X=EX \quad a.e$$

定理 1：（均值各态历经定理）平稳随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充分必要条件是：$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\dfrac{|\tau|}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-|\mu_X|^2\right]d\tau=0$

证明：由于 $\langle X(t)\rangle$ 是一随机变量，计算 $\langle X(t)\rangle$ 的均值和方差：

$$E\{\langle X(t)\rangle\}=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{X(t)\}dt=\mu_X$$

$$D\{\langle X(t)\rangle\}=E\{|\langle X(t)\rangle-\mu_X|^2\}=E\{|\langle X(t)\rangle|^2\}-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}\overline{X(t_2)}dt_2\right\}-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}dt_1dt_2\right]-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right]-|\mu_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left[R_X(t_1-t_2)-|\mu_X|^2\right]dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

其中$C_X(t_1-t_2)=R_X(t_1-t_2)-|\mu_X|^2$是$X(t)$的自协方差函数。

作变换：

$$\begin{cases} t_1-t_2=\tau \\ t_1+t_2=u \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} t_1=(\tau+u)/2 \\ t_2=(u-\tau)/2 \end{cases} \quad -T\le t_1,t_2\le T$$

变换的雅可比行列式为：

$$J=\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau,u)}\right|=\frac{1}{2}$$

于是有：

$$D\{\langle X(t)\rangle\}=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1-t_2)dt_1dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|}\frac{1}{2}C_X(\tau)dud\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\left[2T-|\tau|\right]C_X(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]C_X(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]\left[R_X(\tau)-|\mu_X|^2\right]d\tau\right\}$$

由引理 2，即可得定理的结论。

如果随机过程是实过程，则$C_X(-\tau)=C_X(\tau)$，$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$，对于实平稳过程$X(t)$，均值满足各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-\mu_X^2\right]d\tau=0$$

推论：若平实稳随机过程$X(t)$的自协方差函数$C_X(\tau)$满足：

$$\lim_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$$

则平稳随机过程$X(t)$的均值具有各态历经性。

推论：设随机序列$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$是平稳序列，则

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k=\mu_X\right\}=1$$

的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)C_X(k)=0$$

定理 2：（自相关函数各态历经定理）平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)\left[B(u)-|R_X(\tau)|^2\right]du=0$$

其中：

$$B(u)=E\{X(t+\tau+u)\overline{X(t+u)}\,\overline{X(t+\tau)\overline{X(t)}}\}$$

定理 3：平稳随机过程 $X(t)$ 的时间平均

$$\langle X(t)\rangle \mathrel{\hat{=}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

和集平均 $E\{X(t)\}=\mu_X$ 依概率 1 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

如果过程是实的，则充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

定理 4：平稳随机过程 $X(t)$ 的时间相关函数

$$\langle X(t+\tau)\overline{X(t)}\rangle \mathrel{\hat{=}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)\overline{X(t)}dt$$

和集相关函数 $R_X(\tau)=E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}$ 依概率 1 相等的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|u|}{T}\right)\left[B(u)-|R_X(\tau)|^2\right]du=0$$

其中：

$$B(u)=E\{X(t+\tau+u)\overline{X(t+u)}\,\overline{X(t+\tau)\overline{X(t)}}\}$$

如果过程是实的，则充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\left[B(u)-R_X^2(\tau)\right]du=0$$

例：设$\{x(k)\}$是均值为零的实平稳随机序列，令：

$$\overline{x}_t=\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}x(k)$$

则有：

$$Var\{\overline{x}_t\}=\frac{1}{L}\left[R_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}\left(1-\frac{l}{L}\right)R_x(l)\right]$$

其中：$R_x(l)$是$\{x(k)\}$的自相关函数。

证明：由于随机序列的均值为零，则：

$$\begin{aligned}Var\{\overline{x}_t\}&=E\left\{\frac{1}{L^2}\sum_{k=1}^{L}x(k)\sum_{p=1}^{L}x(p)\right\}\\&=\frac{1}{L^2}\left[LR_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}(L-l)R_x(l)\right]\\&=\frac{1}{L}\left[R_x(0)+2\sum_{l=1}^{L-1}\left(1-\frac{l}{L}\right)R_x(l)\right]\end{aligned}$$

2.　联合平稳随机过程

定义：设$X(t),Y(t)$是两个平稳随机过程，若其互相关函数$E\{X(t+\tau)\overline{Y(t)}\}$和$E\{Y(t+\tau)\overline{X(t)}\}$仅为其时间差$\tau$的函数，而与$t$无关，则称两个随机过程$X(t),Y(t)$是联合平稳随机过程。即有：

$$R_{XY}(t+\tau,t)\triangleq E\{X(t+\tau)\overline{Y(t)}\}=R_{XY}(\tau)$$

$$R_{YX}(t+\tau,t)\triangleq E\{Y(t+\tau)\overline{X(t)}\}=R_{YX}(\tau)$$

显然有：

$$R_{YX}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}$$

注意：若设 $X(t),Y(t)$ 是联合平稳随机过程，则 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 也是平稳随机过程，且有：

$$R_{ZZ}(\tau)=R_{XX}(\tau)+R_{YY}(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

联合平稳随机过程的性质

（1）$R_{YX}(\tau)=\overline{R_{XY}(-\tau)}$，若是实过程，则 $R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)$

（2）若设 $X(t),Y(t)$ 是实平稳随机过程，且联合平稳，则有：

$$\left[R_{YX}(\tau)\right]^2\le R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

$$\left[R_{XY}(\tau)\right]^2\le R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

$$\left[C_{YX}(\tau)\right]^2\le C_{XX}(0)C_{YY}(0)$$

$$\left[C_{XY}(\tau)\right]^2\le C_{XX}(0)C_{YY}(0)$$

由不等式：

$$E\{[X(t)+\lambda Y(t+\tau)]^2\}\ge 0 \quad \forall\lambda$$

即可证明以上的结果。

（六）　各态历经性的应用

遍历转换技术：

（1）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的均值

遍历转换技术是近年来发展起来的用于测量某些对象的数字特征，如均值、相关函数等的一项方法。其特点是对模拟量的测量对象不需要采用乘法器和积分器就可以得到数字特征，在精度上可以达到较高的程度，而且稳定性、可靠性都较高。其基本原理分析如下：

设 $Y(t)$ 是一具有均匀分布的严平稳遍历的随机过程，$X(t)$ 是被测的输入平

稳遍历随机信号，且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 独立，我们设计一转换器，转换器中有一时钟，它给出取样的时刻 t_k，在时刻 t_k 对输入随机信号取样，得到 $X(t_k)$。$Y(t)$ 作为参考电压，在 t_k 诸取样时刻比较 $X(t_k)$ 和 $Y(t_k)$ 的值，记比较后的输出 $Z(t_k)$ 为：

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X(t_k)>Y(t_k)\\ 0, & X(t_k)\le Y(t_k)\end{cases}$$

由此，输入信号 $X(t)$ 从模拟信号转换到了数字信号。即 $X(t_k)\to Z(t_k)$，这一转换称为遍历转换，在一定的条件下，经过遍历转换后，$\{Z(t_k)\}$ 保留了随机信号 $X(t)$ 的某些数字特征。

定理：设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是相互独立的两个遍历平稳的随机过程，$Y(t)$ 的一维概率分布密度为 $(0,\alpha)$ 上的均匀分布，其中取 α 足够大，使得 $P\{X(t_k)>\alpha\}$ 足够的小。$X(t)>0$，t_k 是取样时刻，且有 $t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$，令

$$Z(t_k)=\begin{cases}1, & X(t_k)>Y(t_k)\\ 0, & X(t_k)\le Y(t_k)\end{cases}$$

若 $E\{X(t)\}=\mu_X$ 存在，则有：

（**a**）$P\{Z(t_k)=1\}=\dfrac{1}{\alpha}E\{X(t)\}=\dfrac{\mu_X}{\alpha}$

（**b**）$\mu_X=E\{X(t)\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}Z(t_k)$

证明：（**a**）由 $Z(t_k)$ 的定义，我们有：

$$\begin{aligned}P\{Z(t_k)=1\}&=P\{X(t_k)>Y(t_k)\}=\iint_{x>y}f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dydx\end{aligned}$$

由于 $X(t)>0$，$Y(t)>0$，及 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的独立性，我们有：

$$\begin{aligned}P\{Z(t_k)=1\}&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}f_{X(t_k)Y(t_k)}(x,y)dydx=\int_0^{\infty}\int_0^{x}f_{X(t_k)}(x)f_{Y(t_k)}(y)dydx\\&=\int_0^{\infty}[f_{X(t_k)}(x)\int_0^{x}\frac{1}{\alpha}dy]dx=\frac{1}{\alpha}\cdot\int_0^{\infty}xf_{X(t_k)}dx=\frac{E\{X(t)\}}{\alpha}=\frac{\mu_X}{\alpha}\end{aligned}$$

（**b**）由于 $Z(t_k)$ 是数字信号，只能取 **0** 或 **1**，而：

$$P\{Z(t_k)=1\}=\frac{\mu_X}{\alpha}$$

$$P\{Z(t_k)=0\}=1-P\{Z(t_k)=1\}=1-\frac{\mu_X}{\alpha}$$

由于 $X(t)$ 是一平稳过程，均值函数与 t 无关，$\{Z(t_k)\}$ 是一平稳遍历的随机过程。因此：

$$E\{Z(t_k)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

上式依概率 **1** 相等。于是有：

$$E\{Z(t_k)\}=1\times P\{Z(t_k)=1\}=P\{Z(t_k)=1\}$$

$$=\frac{E\{X(t)\}}{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

因此，有：

$$\mu_X=E\{X(t)\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

上式依概率 **1** 相等。

（**2**）利用遍历转换技术测量具有各态历经性的随机过程的相关函数

利用遍历转换技术，我们可以求两个遍历严平稳（联合平稳）随机过程的互相关函数，相应的可以得到一个严平稳过程的自相关函数。做法简述如下：

设输入信号为 $X_1(t),X_2(t)$，它们是两个遍历严平稳随机过程，且是联合平稳的和都存在二阶矩，用两个噪声器产生两个相互独立的参考电压 $Y_1(t),Y_2(t)$，它们都均匀分布于 $(0,\alpha)$，其中取 α 足够大，使得 $P\{X_1(t_k)>\alpha\}$ 和 $P\{X_2(t_k)>\alpha\}$ 足够的小。且 $Y_1(t),Y_2(t)$ 都是严平稳的。$X_1(t)$ 与 $Y_1(t),Y_2(t)$ 独立，$X_2(t)$ 与 $Y_1(t),Y_2(t)$ 也独立。那么：

$$R_{X_1X_2}(\tau)=E\{X_1(t)X_2(t-\tau)\}$$

设 $X_1(t) > 0, X_2(t) > 0$，取：

$$Z_1(t_k) = \begin{cases} 1, & X_1(t_k) > Y_1(t_k) \\ 0, & X_1(t_k) \le Y_1(t_k) \end{cases}$$

$$Z_2(t_k) = \begin{cases} 1, & X_2(t_k) > Y_2(t_k) \\ 0, & X_2(t_k) \le Y_2(t_k) \end{cases}$$

令：

$$Z(t_k) = Z_1(t_k) Z_2(t_k - \tau)$$

则有：

$$Z(t_k) = \begin{cases} 1, & X_1(t_k) > Y_1(t_k),\ X_2(t_k - \tau) > Y_2(t_k - \tau) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned} P\{Z(t_k) = 1\} &= P\{X_1(t_k) > Y_1(t_k),\ X_2(t_k - \tau) > Y_2(t_k - \tau)\} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\int_0^{x_1} \frac{1}{\alpha} dy_1 \right) \left(\int_0^{x_2} \frac{1}{\alpha} dy_2 \right) f_{X_1(t_k) X_2(t_k - \tau)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 f_{X_1(t_k) X_2(t_k - \tau)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} R_{X_1 X_2}(t_k, t_k - \tau) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} R_{X_1 X_2}(\tau) \end{aligned}$$

由 $\{Z(t_k)\}$ 的遍历性，我们有：

$$E\{Z(t_k)\} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z(t_k) \quad \text{（依概率 1 相等）}$$

而

$$E\{Z(t_k)\} = 1 \times P\{Z(t_k) = 1\} = P\{Z(t_k) = 1\}$$

$$= \frac{R_{X_1 X_2}(\tau)}{\alpha^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z(t_k)$$

故：

$$R_{X_1X_2}(\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)=\alpha^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z(t_k)$$

因此，只要在遍历转换器输出端接一个计数器，对$Z(t_k)$进行计数，就可以得到$X_1(t)$和$X_2(t)$的互相关函数。若$X_1(t)=X_2(t)$，则得到自相关函数。

（七） 典型例子

例 1：设随机过程$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta), -\infty<t<\infty$，其中$\omega_0$是常数，$A$与$\Theta$是相互独立的随机变量，$\Theta\sim U(,0,2\pi)$，$A$服从瑞利分布，即其分布密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（a） 试证$X(t)$是平稳过程。

（b） 若将$X(t)$写成$X(t)=B\cos\omega_0 t+C\sin\omega_0 t$，其中$B=A\cos\Theta$，$C=-A\sin\Theta$，试证$B$和$C$独立同分布于$N(0,\sigma^2)$。

解：（a）计算得：

$$\mu_X(t)=E\{A\cos(\omega_0 t+\Theta)\}=E\{A\}E\{\cos(\omega_0 t+\Theta)\}$$
$$=\int_0^\infty\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t+\phi)d\phi=0$$
$$R_X(t,t+\tau)=E\{A\cos(\omega_0 t+\Theta)A\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\}$$
$$=E\{A^2\}E\{\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)\}$$
$$=\sigma^2\cos\omega_0\tau$$

因此$X(t)$是平稳过程。

（c） 由分布函数的定义

$$F_{B,C}(b,c)=P\{B\le b, C\le c\}=P\{A\cos\Theta\le b, -A\sin\Theta\le c\}$$

$$=\iint_{x\cos\Theta\le b,\ -x\sin\Theta\le c} f_A(x)f_\Theta(\phi)\,dxd\phi$$

作变换：

$$\begin{cases} u = x\cos\phi \\ v=-x\sin\phi \end{cases}$$

雅克比行列式为：

$$J=\frac{\partial(x,\phi)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{x}$$

因此有：

$$F_{B,C}(b,c)=\iint_{u\le b,\ v\le c}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}dudv$$

即有：

$$f_{B,C}(b,c)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}=f_B(b)\cdot f_C(c)$$

因此B和C独立且同分布于$N(0,\sigma^2)$。

例 2：设有一相位调制信号$X(t)=e^{j(\omega t+\theta(t))}, -\infty<t<\infty$，其中$\omega>0$为常数，$\theta(t)$为一二阶严平稳随机过程，设$\Psi_{t_1,t_2}(u_1,u_2)$是随机过程$\theta(t)$的二维特征函数，同时对于任意的$-\infty<t<\infty$，$\Psi_{0,t}(1,0)=0$，试证明随机过程$X(t)$是一宽平稳过程，并求其相关函数。

解：由定义可知：

$$\mu_X(t)=E\{e^{j(\omega t+\theta(t))}\}=e^{j\omega t}E\{e^{j\theta(t)}\}=e^{j\omega t}\int e^{jx}dF_\theta(x,t)$$

由于$\theta(t)$是一二阶严平稳过程，故分布函数与时间无关，即有：

$$\mu_X(t)=e^{j\omega t}\int e^{jx}dF_\theta(x)=e^{j\omega t}E\{e^{j\theta(0)}\}$$

由：

$$\Psi_{0,t}(1,0)=E\{e^{j\theta(0)}\}=0$$

所以

$$\mu_X(t)=0$$

另外：

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=E\{e^{j(\omega s+\theta(s))}\overline{e^{j(\omega t+\theta(t))}}\}\\&=e^{j\omega(s-t)}E\{e^{j(\theta(s)-\theta(t))}\}=e^{j\omega(s-t)}\int e^{j(x-y)}dF_\theta(x,y;s-t)\\&=R_X(s-t)\end{aligned}$$

故随机过程 $X(t)$ 是一平稳过程。

例 **3**：设 $\{N(t);t\ge 0\}$ 是一强度为 λ 的 **Poission** 过程，记 $X(t)=\dfrac{dN(t)}{dt}$，试求随机过程 $X(t)$ 的均值和相关函数。

解：$\mu_X(t)=\dfrac{dE\{N(t)\}}{dt}=(\lambda t)'=\lambda$

$$R_X(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[\lambda^2ts+\lambda\min\{t,s\}]=\lambda^2+\lambda\delta(t-s)$$

例 **4**：设 $X(t)$ 是一实正态分布平稳过程，它的均值为零，定义：

$$Y(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right]$$

试证明

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}[-k_X(\tau)]$$

其中 $k_X(\tau)=C_X(\tau)/\sigma_X^2$，$C_X(\tau)$ 是 $X(t)$ 的协方差函数，$\sigma_X^2=C_X(0)$ 是 $X(t)$ 的方差。

解：为了解此题，先看下面的引理：

引理：设 X,Y 是服从正态分布的二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则 X 和 Y 取不同符号的概率为：

$$P\{XY<0\}=\frac{\cos^{-1}r}{\pi}$$

引理的证明：

$$P\{XY<0\}=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}f(x,y)dxdy$$

令：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{\sigma_1}\\ v=\dfrac{y}{\sigma_2}\end{cases}$$

则有：

$$P\{XY<0\}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dvdu$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dvdu$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}RdR\int_{-\arccos r}^{0}\exp\{-\frac{R^2}{2}\}d\theta=\frac{\arccos r}{\pi}$$

以上式子用了变换：

$$\begin{cases}\dfrac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}=R\cos\theta\\ v=R\sin\theta\end{cases}$$

下面给出例 4 的解：

由：

$$E\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\left[1+E\left\{\frac{X(t)X(t+\tau)}{\left|X(t)X(t+\tau)\right|}\right\}\right]$$

因此只要求：

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right\}= \\
&=1\times P\{X(t)X(t+\tau)\ge 0\}+(-1)\times P\{X(t)X(t+\tau)<0\} \\
&=1-2P\{X(t)X(t+\tau)<0\} \\
&=1-2\frac{\arccos r}{\pi}
\end{aligned}
$$

因此有：

$$
E\{Y(t)\}=\frac{1}{2}\left[1+1-2\frac{\arccos r}{\pi}\right]=1-\frac{\arccos r}{\pi}=\frac{1}{\pi}\arccos(-r)
$$

由于此时：

$$
r=k_X(\tau)
$$

我们即可得到结论。

例 5：设随机振幅、随机相位正弦波过程 $X_t=V\sin(t+\Theta),t\ge 0$，其中随机变量$V$和$\Theta$相互独立，且有分布：

$$
\Theta\sim U[0,2\pi],\ V\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}
$$

令： $Y_t=\begin{cases}1, & 如|X_t|>\sqrt{2}/2\\ 0, & 反之\end{cases},t\ge 0$，试求过程$Y_t,t\ge 0$的均值函数。

解：由定义，随机过程$\{Y(t);t\ge 0\}$的均值函数为：

$$
\begin{aligned}
\mu_Y(t)&=E\{Y(t)\}=1\times P\{Y(t)=1\}+0\times P\{Y(t)=0\}\\
&=P\{Y(t)=1\}=P\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\}
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&P\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\}=P\{|V\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}\\
&\quad=P\{|(-1)\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=-1\}+P\{|0\times\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=0\}+\\
&\qquad+P\{|(1)\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}P\{V=1\}\\
&\quad=\frac{1}{2}P\{|\sin(t+\Theta)|>\sqrt{2}/2\}\\
&\quad=\frac{1}{2}P\{\sin(t+\Theta)>\sqrt{2}/2\}+\frac{1}{2}P\{\sin(t+\Theta)<-\sqrt{2}/2\}
\end{aligned}
$$

由于当$\Theta \sim U(0,2\pi)$时，随机变量$\xi(t)=\sin(t+\Theta)$的分布密度为：

$$f_{\xi(t)}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x\le +1 \\ 0, & \text{其　它} \end{cases}$$

因此有：

$$P\left\{|X(t)|>\sqrt{2}/2\right\}=\frac{1}{4}$$

即：

$$\mu_Y(t)=\frac{1}{4}$$

例六：设随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的实平稳正态过程。设$X(t)$通过线性半波检波器后的输出为：

$$Y(t)=\begin{cases} X(t), & X(t)\ge 0 \\ 0, & X(t)<0 \end{cases}$$

试求：

（1） 随机过程$Y(t)$的相关函数$R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（2） 随机过程$Y(t)$的均值和方差；

（3） 随机过程$Y(t)$的一维概率分布密度函数$f_Y(y)$。

解：（1）由题意及条件数学期望公式，有：

$$\begin{aligned} R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t+\tau)\}=E\{E\{Y(t)Y(t+\tau)\,|\,X(t)X(t+\tau)\}\} \\ &=\iint E\{Y(t)Y(t+\tau)\,|\,X(t)X(t+\tau)\}f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy \\ &=\iint\limits_{x\ge 0,y\ge 0} xyf_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy \end{aligned}$$

其中：

$$f_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=R_X(0),\quad r=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由此可得：

$$R_Y(\tau)=\iint_{x\ge 0,y\ge 0} xyf_{(X(t),X(t+\tau))}(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{xy}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令：

$$u=\frac{x}{\sigma_1}，\quad v=\frac{y}{\sigma_2}$$

则有：

$$R_Y(\tau)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{xy}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

令：

$$\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}=R\cos\theta，\quad v=R\sin\theta$$

得变换：

$$u=\sqrt{1-r^2}R\cos\theta+rR\sin\theta,\quad v=R\sin\theta$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\theta)}=R\sqrt{1-r^2}\quad\Rightarrow\quad dudv=R\sqrt{1-r^2}dRd\theta$$

则有：

$$R_Y(\tau)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{\arccos(-r)}R\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}R\cos\theta+rR\sin\theta\right]\exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\}RdRd\theta$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_0^{\arccos(-r)}\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}\cos\theta+r\sin\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}r\theta-\frac{1}{4}r\sin 2\theta\right]_0^{\arccos(-r)}\right\}$$

$$=\frac{R_X(0)}{2\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi+\cos\varphi\right]$$

其中： $\sin\varphi = r = \dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$，$|\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$**。结合以下（2）的结果可知是平稳的。**

（2）由条件数学期望的计算公式，有：

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = E\{E\{Y(t)|\,X(t)\}\}$$
$$= \int_0^{+\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\} dx = \sqrt{\frac{R_X(0)}{2\pi}}$$

$$E\{Y^2(t)\} = R_Y(0) = \frac{R_X(0)}{2}$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} - m_Y^2 = R_Y(0) - m_Y^2 = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{R_X(0)}{2}$$

（3）当 $y < 0$ **时，** $F_{Y(t)}(y) = 0$**；当** $y \ge 0$ **时，我们有：**

$$F_{Y(t)}(y) = P\{Y(t) \le y\} =$$
$$= P\{Y(t) \le y|\,X(t) \ge 0\}P\{X(t) \ge 0\} + P\{Y(t) \le y|\,X(t) < 0\}P\{X(t) < 0\}$$
$$= \int_0^y f_{X(t)}(x)dx + \frac{1}{2}$$

由此可得 $Y(t)$ **的一维概率分布密度为：**

$$f_{Y(t)}(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2R_X(0)}\right\} U(y)$$