# 随机过程第8周作业

周强 202128019427002 电子学院 119

1. 某车间有两台独立工作的机器,每台机器有两种状态:正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为,机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为,其中。令表示第天车间正常工作的机器数,试求:
   1. 证明是一齐次马氏链,并写出其一步转移概率矩阵;

答：状态空间为,则根据题意，第n天车间正常工作的机器数仅与第天的正常工作机器数有关，而与更前面的无关，因此是马氏链，其一步转移概率矩阵为

注意到一步转移概率矩阵与参数n无关，则上述马氏链是齐次马氏链。

* 1. 此马氏链是否存在极限分布?存在的话,计算其平稳分布;

答：一步转移概率矩阵的每个元素都大于0，根据马尔科夫定理可知，此马氏链存在极限分布则

结合,解得。

极限分布就是平稳分布。

* 1. 若车间里有台独立工作的机器,假设条件不变,问其平稳分布是什么?

答：平稳分布为，

其中

1. 设是一齐次马氏链,状态空间为,其中:

为瞬时态集,为吸收态集,且转移矩阵为,其中,。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为:

令:为马氏链的初始分布,记:,且满足:

令: (称为PhaseType分布),。

试证明:

* 1. 对于任意 , 有:;

答：是一个的列向量，P是一个的矩阵，其含义如下。

用数学归纳法证明

时，

时，

时，

时满足待证结论，假设时，上述结论也满足，即。

则时，

表示从初始状态出发，经过步，被状态0吸收的概率。

经过1个时刻以后，此马氏链的分布为

记。

若我们将视为初始状态，则得到一条新的马氏链，其初始分布为和。

则根据假设，我们有

得证。

* 1. 对于任意, 有:

答：由于是非常返态集合，则

则n充分大时，。

由于

则

则，即可逆。则

根据第（1）问的结论有

得证