BP神经网络

1.激活函数

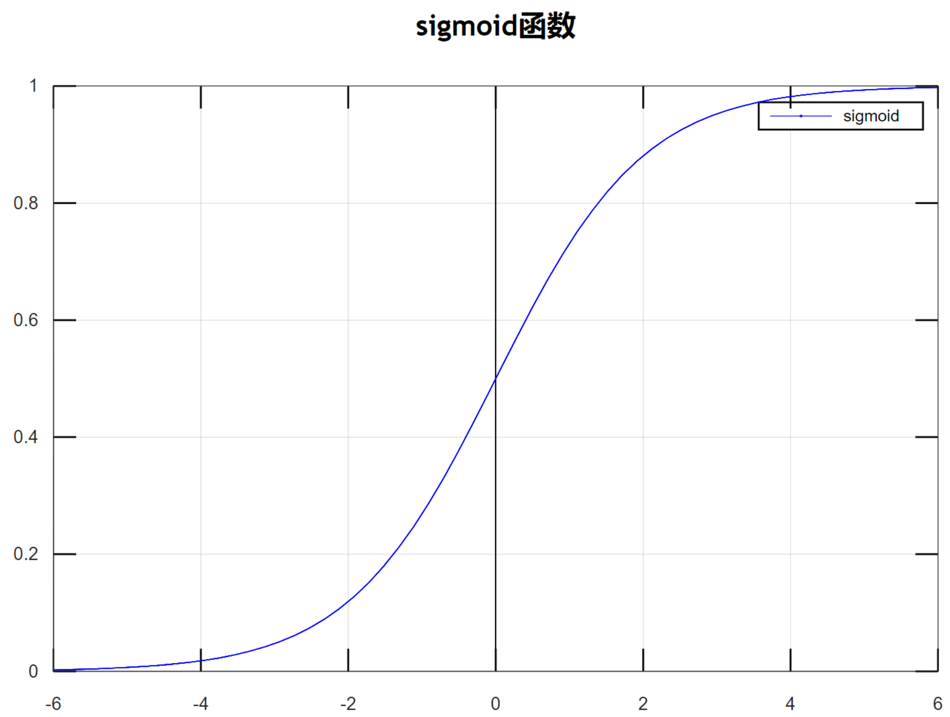
激活函数（Activation Function）是在人工神经网络的神经元上运行的函数，负责将神经元的输入映射到输出端。激活函数对于人工神经网络模型去学习、理解复杂的非线性函数，具有十分重要的作用。

如果不使用激活函数，每一层输出都是上一层输入的线性运算，无论神经网络有多少层，最终的输出只是输入的线性组合，相当于感知机。如果使用了激活函数，将非线性因素引入到网络中，使得神经网络可以任意逼近任何非线性函数，能够应用到更多的非线性模型。

常用的激活函数

$sigmoid$ 函数

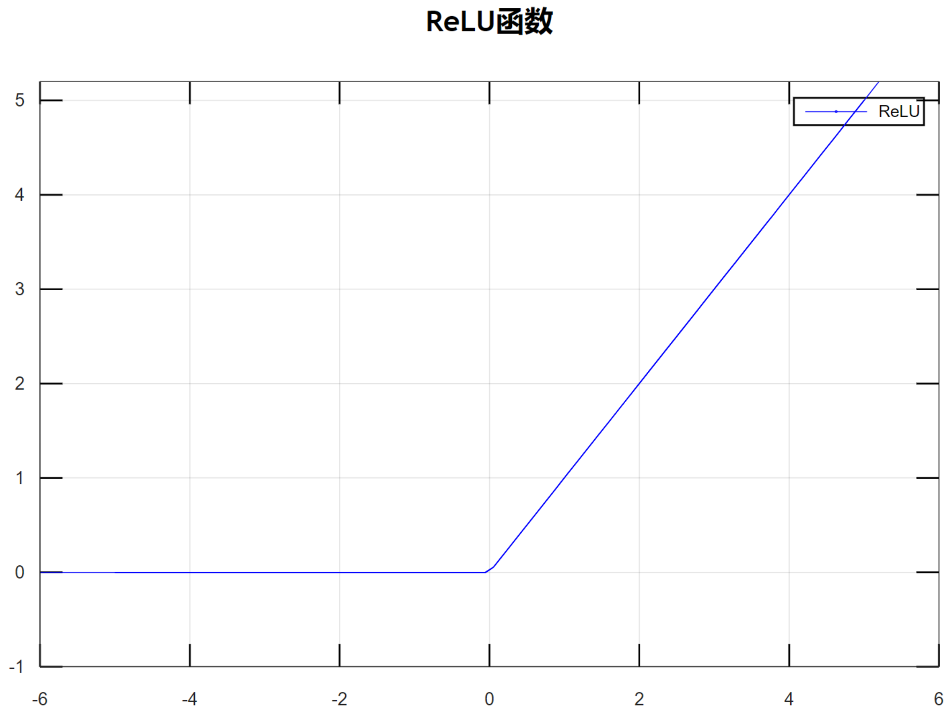
$Sigmoid$函数是一个在生物学中常见的S型函数，也称为S型生长曲线。在信息科学中，由于其单增以及反函数单增等性质，Sigmoid函数常被用作神经网络的阈值函数，将变量映射到0,1之间，公式如下： $$



f(x)=\frac{1}{1+e^{(-x)}} $$

$ReLU$函数

$Relu$激活函数（The Rectified Linear Unit），用于隐藏层的神经元输出。公式如下：$$ f(x)=max(0,x) $$



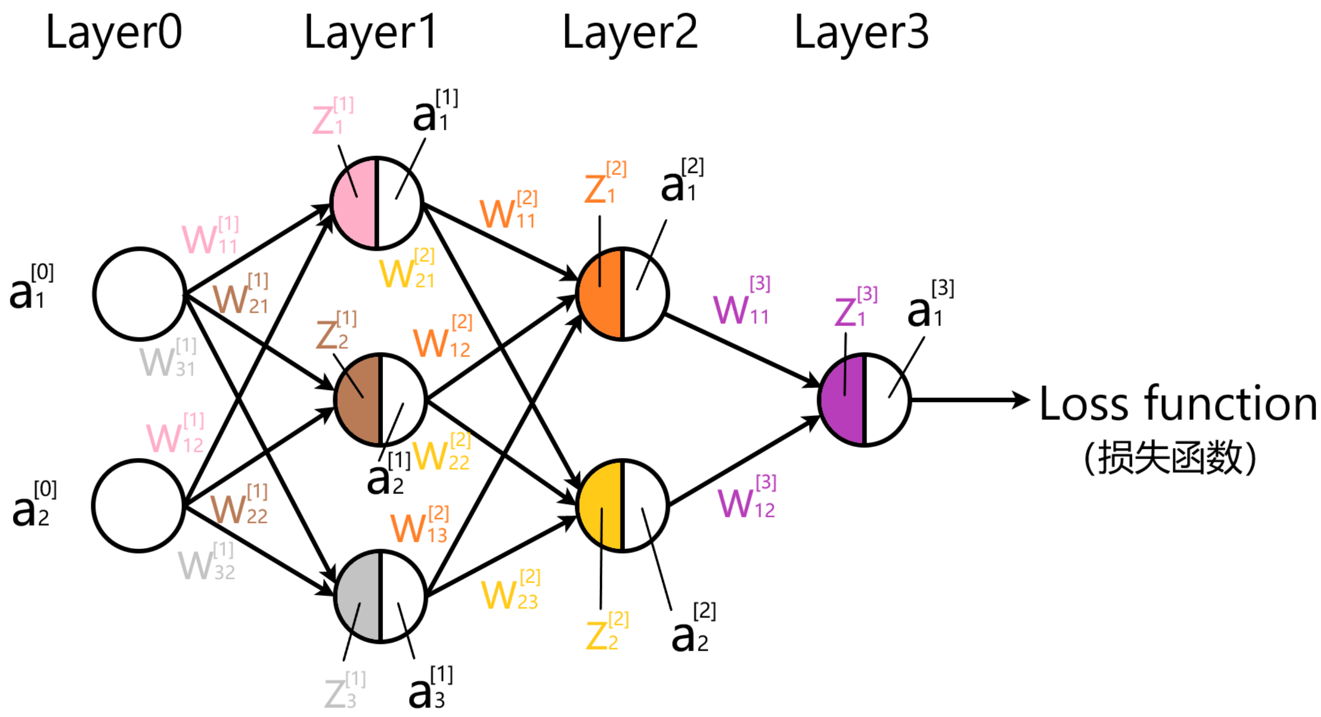
$Tanh$ 函数

$Tanh$ 是双曲函数中的一个，$Tanh()$ 为双曲正切。在数学中，双曲正切"$Tanh$"是由基本双曲函数双曲正弦和双曲余弦推导而来。公式如下：$$ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} $$ **$softmax$ 函数**

$softmax$ 函数用于输出层。假设输出层共有 n 个神经元，计算第 k 个神经元的输出 y_k。$softmax$ 函数的分子是输入信号 a_k 的指数函数，分母是所有输入信号的指数函数的和。$softmax$ 函数公式如下：$$ y_{k}=\frac{e^{a_{k}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{a_{i}}} $$

2.神经网络结构

第0层是输入层（2个神经元），第1层是隐含层（3个神经元），第2层是隐含层（2个神经元），第3层是输出层。



符号约定

$w_{j k}^{[l]}$表示从网络第$(l-1)^{t h}$ 层第$k^{t h}$ 个神经元指向第 $l^{t h}$ 层第 $j^{t h}$ 个神经元的连接权重，同时也是第 l 层权重矩阵第 j 行第 k 列的元素。例如，上图中 $w_{21}^{[1]}$ ，第0层第1个神经元指向第1层第2个神经元的权重（褐色），也就是第 1 层权重矩阵第 2 行第 1 列的元素。同理，使用 $b_{j}^{[l]}$ 表示第 $l^{t h}$ 层第 $j^{t h}$ 个神经元的偏置， 同时也是第 l 层偏置向量的第 j 个元素。使用 $z_{j}^{[l]}$ 表示第 $l^{t h}$ 层第 $j^{t h}$ 个神经元的线性结果，使用 $a_{j}^{[l]}$ 来表示第 $l^{t h}$ 层第 $j^{t h}$ 个神经元的激活函数输出。其中，激活函数使用符号σ表示，第 $l^{t h}$ 层中第 $j^{t h}$ 个神经元的激活为:

$$ a_{j}^{[l]}=\sigma(z_{j}^{[l]})=\sigma\left(\sum_{k} w_{j k}^{[l]} a_{k}^{[l-1]}+b_{j}^{[l]}\right) $$ $w^{[l]}$ 表示第 l 层的权重矩阵，$b^{[l]}$ 表示第 l 层的偏置向量，$a^{[l]}$ 表示第 l 层的神经元向量，结合上图讲述：

$w^{[1]}=\left[\begin{array}{lll}w_{11}^{[1]} & w_{12}^{[1]} & \ w_{21}^{[1]} & w_{22}^{[1]} & \ w_{31}^{[1]} & w_{32}^{[1]}\end{array}\right]$ $w^{[2]}=\left[\begin{array}{lll}w_{11}^{[2]} & w_{12}^{[2]} & w_{13}^{[2]} \ w_{21}^{[2]} & w_{22}^{[2]} & w_{23}^{[2]}\end{array}\right]$

$b^{[1]}=\left[\begin{array}{l}b_{1}^{[1]} \ b_{2}^{[1]} \ b_{3}^{[1]}\end{array}\right]$ $b^{[2]}=\left[\begin{array}{l}b_{1}^{[2]} \ b_{2}^{[2]}\end{array}\right]$

进行线性矩阵运算。

$z^{[1]}=\left[\begin{array}{lll}w_{11}^{[1]} & w_{12}^{[1]} & \ w_{21}^{[1]} & w_{22}^{[1]} & \ w_{31}^{[1]} & w_{32}^{[1]}\end{array}\right] \cdot\left[\begin{array}{c}a_{1}^{[0]} \ a_{2}^{[0]}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{l}b_{1}^{[1]} \ b_{2}^{[1]} \ b_{3}^{[1]}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}w_{11}^{[1]} a_{1}^{[0]}+w_{12}^{[1]} a_{2}^{[0]}+b_{1}^{[1]} \ w_{21}^{[1]} a_{1}^{[0]}+w_{22}^{[1]}a_{2}^{[0]}+b_{2}^{[1]} \ w_{31}^{[1]}a_{1}^{[0]}+w_{32}^{[1]}a_{2}^{[0]}+b_{3}^{[1]}\end{array}\right]$

矩阵形状 (3,2) (2,1) (3,1) (3,1)

$z^{[2]}=\left[\begin{array}{ccc}w_{11}^{[2]} & w_{12}^{[2]} & w_{13}^{[2]} \ w_{21}^{[2]} & w_{22}^{[2]} & w_{23}^{[2]}\end{array}\right] \cdot\left[\begin{array}{c}a_{1}^{[1]} \ a_{2}^{[1]} \ a_{3}^{[1]}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}b_{1}^{[2]} \ b_{2}^{[2]}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}w_{11}^{[2]} a_{1}^{[1]}+w_{12}^{[2]} a_{2}^{[1]}+w_{13}^{[2]} a_{3}^{[1]}+b_{1}^{[2]} \ w_{21}^{[2]} a_{1}^{[1]}+w_{22}^{[2]} a_{2}^{[1]}+w_{23}^{[2]} a_{3}^{[1]}+b_{2}^{[2]}\end{array}\right]$

矩阵形状 (2,3) (3,1) (2,1) (2,1)

那么，前向传播过程可以表示为： $$ a^{[l]}=\sigma\left(w^{[l]} a^{[l-1]}+b^{[l]}\right) $$ 上述讲述的前向传播过程，输入层只有1个列向量，也就是只有一个输入样本。对于多个样本，输入不再是1个列向量，而是m个列向量，每1列表示一个输入样本。m个$a^{[l-1]}$列向量组成一个m列的矩阵$A^{[l-1]}$。

$A^{[l-1]}=\left[\begin{array}{cccc}| & | & \cdots & | \ a^{l-1} & a^{l-1} & \dots & a^{l-1} \ | & | & \dots & |\end{array}\right]$

多样本输入的前向传播过程可以表示为： $$ \begin{array}{c} Z^{[l]}=w^{[l]} \cdot A^{[l-1]}+b^{[l]} \ A^{[l]}=\sigma\left(Z^{[l]}\right) \end{array} $$ 与单样本输入相比，多样本$w^{[l]}$和$b^{[l]}$的定义是完全一样的，不同的只是$Z^{[l]}$和$A^{[l]}$从1列变成m列，每1列表示一个样本的计算结果。

3.损失函数

在有监督的机器学习算法中，我们希望在学习过程中最小化每个训练样例的误差。通过梯度下降等优化策略完成的，而这个误差来自损失函数。

损失函数用于单个训练样本，而**成本函数**是多个训练样本的平均损失。优化策略旨在最小化成本函数。下面例举几个常用的损失函数。

回归问题

1. 绝对值损失函数(L_{1}损失函数)：

$L(\hat{y},y)=|y-\hat{y}|$

y 表示真实值或期望值，$\hat{y}$ 表示预测值

2. 平方损失函数(L_{2}损失函数)：

$L(\hat{y},y)=(y-\hat{y})^{2}$

y 表示真实值或期望值，$\hat{y}$ 表示预测值

分类问题

1. 交叉熵损失：

$L(\hat{y}, y)=-y \log (\hat{y})-(1-y) \log (1-\hat{y})$

y 表示真实值或期望值，$\hat{y}$ 表示预测值

4.反向传播

反向传播的基本思想：通过计算输出层与期望值之间的误差来调整网络参数，使得误差变小(最小化损失函数或成本函数)。反向传播基于**四个基础等式**，非常简洁优美，但想要理解透彻还是挺烧脑的。

求解梯度矩阵

假设函数 $f:R^{n \times 1} \rightarrow R$ 将输入的列向量（shape: $n \times 1$ ）映射为一个实数。那么，函数 f 的梯度定义为：

$\nabla_{x} f(x)=\left[\begin{array}{c}\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1}} \ \frac{\partial f(x)}{\partial x_{2}} \ \vdots \ \frac{\partial f(x)}{\partial x_{n}}\end{array}\right]$

同理，假设函数 $f: R^{m \times n} \rightarrow R$ 将输入的矩阵（shape: $m \times n$ ）映射为一个实数。函数 f 的梯度定义为：

$\nabla_{A} f(A)=\left[\begin{array}{cccc}\frac{\partial f(A)}{\partial A_{11}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{12}} & \dots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{13}} \ \frac{\partial f(A)}{\partial A_{21}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{22}} & \dots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{2 n}} \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \ \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m 1}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m 2}} & \dots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m n}}\end{array}\right]$

可以简化为：

$\left(\nabla_{A} f(A)\right)*{i j}=\frac{\partial f(A)}{\partial A*{i j}}$

注意：梯度求解的前提是函数 f 返回的必须是一个实数，如果函数返回的是一个矩阵或者向量，是没有办法求解梯度的。例如，函数$f(A) =\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} A_{i j}^{2}$，函数返回一个实数，可以求解梯度矩阵。如果 $f(x)=A x\left(A \in R^{m \times n}, x \in R^{n \times 1}\right),$ 函数返回一个m行的列向量，就不能对 f 求解梯度矩阵。

矩阵相乘

矩阵 $A=\left[\begin{array}{cc}1 & 2 \ 3 & 4\end{array}\right]$，矩阵 $B=\left[\begin{array}{cc}-1 & -2 \ -3 & -4\end{array}\right]$

$A B=\left[\begin{array}{ll}1 \times-1+2 \times-3 & 1 \times-2+2 \times-4 \ 3 \times-1+4 \times-3 & 3 \times-2+4 \times-4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}-7 & -10 \ -15 & -22\end{array}\right]$

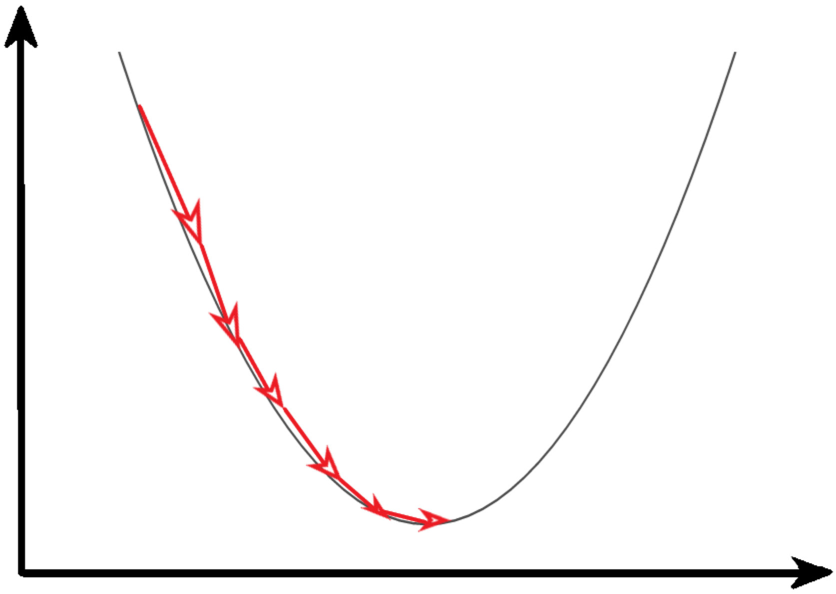
矩阵对应元素相乘

使用符号$\odot$表示：

$A \odot B=\left[\begin{array}{cc}1 \times-1 & 2 \times-2 \ 3 \times-3 & 4 \times-4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}-1 & -4 \ -9 & -16\end{array}\right]$

梯度下降法

从几何意义，梯度矩阵代表了函数增加最快的方向，沿着梯度相反的方向可以更快找到最小值。



反向传播的过程就是利用梯度下降法原理，逐步找到成本函数的最小值，得到最终的模型参数。

反向传播公式推导（四个基础等式）

要想最小化成本函数，需要求解神经网络中的权重 w 和偏置 b 的梯度，再用梯度下降法优化参数。求解梯度也就是计算偏导数 $\frac{\partial L\left(a^{[l]}, y\right)}{\partial w_{j k}^{[l]}}$ 和 $\frac{\partial L\left(a^{[l]}, y\right)}{\partial b_{j}^{[l]}}$ 。为了计算这些偏导数，引入一个中间变量 $\delta_{j}^{[l]}$，它表示网络中第 $l^{t h}$ 层第 $j^{t h}$ 个神经元的误差。反向传播能够计算出误差$\delta_{j}^{[l]},$ 再根据链式法则求出 $\frac{\partial L\left(a^{[l]}, y\right)}{\partial w_{j k}^{[l]}}$ 和 $\frac{\partial L\left(a^{[l]}, y\right)}{\partial b_{j}^{l}}$ 。

定义网络中第 l 层第 j 个神经元的误差为 $\delta_{j}^{[l]}$:

$\delta_{j}^{[l]}=\frac{\partial L\left(a^{[L]},y\right)}{\partial z_{j}^{[l]}}$

其中 $L(a^{[L]},y)$ 表示损失函数，y 表示真实值，$a^{[L]}$ 表示输出层的预测值。

每一层的误差向量可以表示为：

$\delta^{[l]}=\left[\begin{array}{c}\delta_{1}^{[l]} \ \delta_{2}^{[l]} \ \vdots \ \delta_{n}^{[l]}\end{array}\right]$

等式一 输出层误差

$$ \delta_{j}^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial a_{j}^{[L]}} \sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[L]}\right) $$

L表示输出层层数。以下用 ∂L 表示 $\partial L\left(a^{[L]}, y\right)$

写成矩阵形式是：

$\delta^{[L]}= \left[\begin{array}{c}\frac{\partial L}{\partial a_{1}^{[L]}} \ \frac{\partial L}{\partial a_{2}^{[L]}} \ \vdots \ \frac{\partial L}{\partial a_{j}^{[L]}}\end{array}\right] \odot\left[\begin{array} {c}\sigma^{\prime}\left(z_{1}^{[L]}\right) \ \sigma^{\prime}\left(z_{2}^{[L]}\right) \ \vdots \ \sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[L]}\right)\end{array}\right]$

表示成公式： $$ \delta^{[L]}=\nabla_{a} L \odot \sigma^{\prime}\left(z^{[L]}\right) $$

推导

计算输出层的误差 $\delta_{j}^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial z_{j}^{[L]}}$ ，根据链式法则

$\delta_{j}^{[L]}=\sum_{k} \frac{\partial L}{\partial a_{k}^{[L]}} \frac{\partial a_{k}^{[L]}}{\partial z_{j}^{[L]}}$

输出层不一定只有一个神经元，可能有多个神经元。成本函数是每个输出神经元的损失函数之和，每个输出神经元的误差与其它神经元没有关系，所以只有$k=j$ 的时候值不是0。

当$k\neq j$ 时，$\frac{\partial L}{\partial z_{j}^{[L]}}=0$ ，简化误差 $\delta_{j}^{[L]}$ ，得到

$\delta_{j}^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial a_{j}^{[L]}} \frac{\partial a_{j}^{[L]}}{\partial z_{j}^{[L]}}$

σ 表示激活函数，由$a_{j}^{[L]}=\sigma\left(z_{j}^{[L]}\right)$，计算出 $\frac{\partial a_{j}^{[L]}}{\partial z_{j}^{[L]}}=\sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[L]}\right)$ ，代入最后得到

$\delta_{j}^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial a_{j}^{[L]}} \sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[L]}\right)$

等式二 隐藏层误差

$$ \begin{array}{c} \delta_{j}^{[l]}=\sum_{k} w_{k j}^{[l+1]} \delta_{k}^{[l+1]} \sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[l]}\right) \end{array} $$

写成矩阵形式：

$\delta^{[l]}=\left[\begin{array}{lll} \left[\begin{array}{lll}w_{11}^{[l]} & w_{12}^{[l]} & \dots & w_{1k}^{[l]} \ w_{21}^{[l]} & w_{22}^{[l]} & \dots & w_{2k}^{[l]} \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\ w_{j1}^{[l]} & w_{j2}^{[l]} & \dots & w_{jk}^{[l]} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c}\delta_{1}^{[l+1]} \ \delta_{2}^{[l+1]} \ \vdots \ \delta_{k}^{[l+1]}\end{array}\right] \end{array}\right] \odot\left[\begin{array}{c}\sigma^{\prime}\left(z_{1}^{[l]}\right) \ \sigma^{\prime}\left(z_{2}^{[l]}\right) \ \vdots \\sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[l]}\right)\end{array}\right]$

矩阵形状：(j,k) * (k,1) $\odot$ (j,1) = (j,1)

权重矩阵的形状从(k,j)转置变成(j,k)。

表示成公式： $$ \delta^{[l]}=\left[w^{[l+1]^{T}} \delta^{[l+1]}\right] \odot \sigma^{\prime}\left(z^{[l]}\right) $$ **推导**

$z_{k}^{[l+1]}=\sum_{j} w_{k j}^{[l+1]} a_{j}^{[l]}+b_{k}^{[l+1]}=\sum_{j} w_{k j}^{[l+1]} \sigma\left(z_{j}^{[l]}\right)+b_{k}^{[l+1]}$

对 $z_{j}^{[l]}$ 求偏导

$\frac{\partial z_{k}^{[l+1]}}{\partial z_{j}^{[l]}}=w_{k j}^{[l+1]} \sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[l]}\right)$

根据链式法则

$\delta_{j}^{[l]}=\frac{\partial L}{\partial z_{j}^{[l]}}=\frac{\partial L}{\partial z_{k}^{[l+1]}}\frac{\partial z_{k}^{[l+1]}}{\partial z_{j}^{[l]}}=\sum_{k} w_{k j}^{[l+1]} \delta_{k}^{[l+1]} \sigma^{\prime}\left(z_{j}^{[l]}\right)$

等式三 参数变化率

$$ \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial b_{j}^{[l]}}=\delta_{j}^{[l]} \ \frac{\partial L}{\partial w_{j k}^{[l]}}=a_{k}^{[l-1]} \delta_{j}^{[l]} \end{array} $$

写成矩阵形式：

$\frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}=\left[\begin{array}{c}\delta_{1}^{[l]} \ \delta_{2}^{[l]} \ \vdots \ \delta_{j}^{[l]}\end{array}\right]=\delta^{[l]}$

矩阵形状：(j,1)

$\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}=\left[\begin{array}{c}\delta_{1}^{[l]} \ \delta_{2}^{[l]} \ \vdots \ \delta_{j}^{[l]}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c}a_{1}^{[l]} a_{2}^{[l]}\dots a_{k}^{[l]} \end{array}\right]$

矩阵形状：(j,1) * (1,k) = (j,k)

注意：$\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}$ 是一个dim $\left(\delta^{[l]}\right)$ 行 $\operatorname{dim}\left(a^{[l-1]}\right)$ 列的矩阵， 和 $w^{[l]}$ 的维度一致； $ \frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}$ 是一个维度为 $\operatorname{dim}\left(\delta^{[l]}\right)$ 的列向量

表示成公式： $$ \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}=\delta^{[l]} \ \frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}=\delta^{[l]} a^{[l-1] T} \end{array} $$ **推导**

$z_{j}^{[l]}=\sum_{k} w_{j k}^{[l]} a_{k}^{[l-1]}+b_{k}^{[l]}$

L 对 $b_{j}^{[l]}$ 求偏导，根据链式法则得到

$\frac{\partial L}{\partial b_{j}^{[l]}}=\frac{\partial L}{\partial z_{j}^{[l]}} \frac{\partial z_{j}^{[l]}}{b_{j}^{[l]}}= \frac{\partial L}{\partial z_{j}^{[l]}} * 1 = \delta_{j}^{[l]}$

L 对 $w_{j k}^{[l]}$ 求偏导，根据链式法则得到

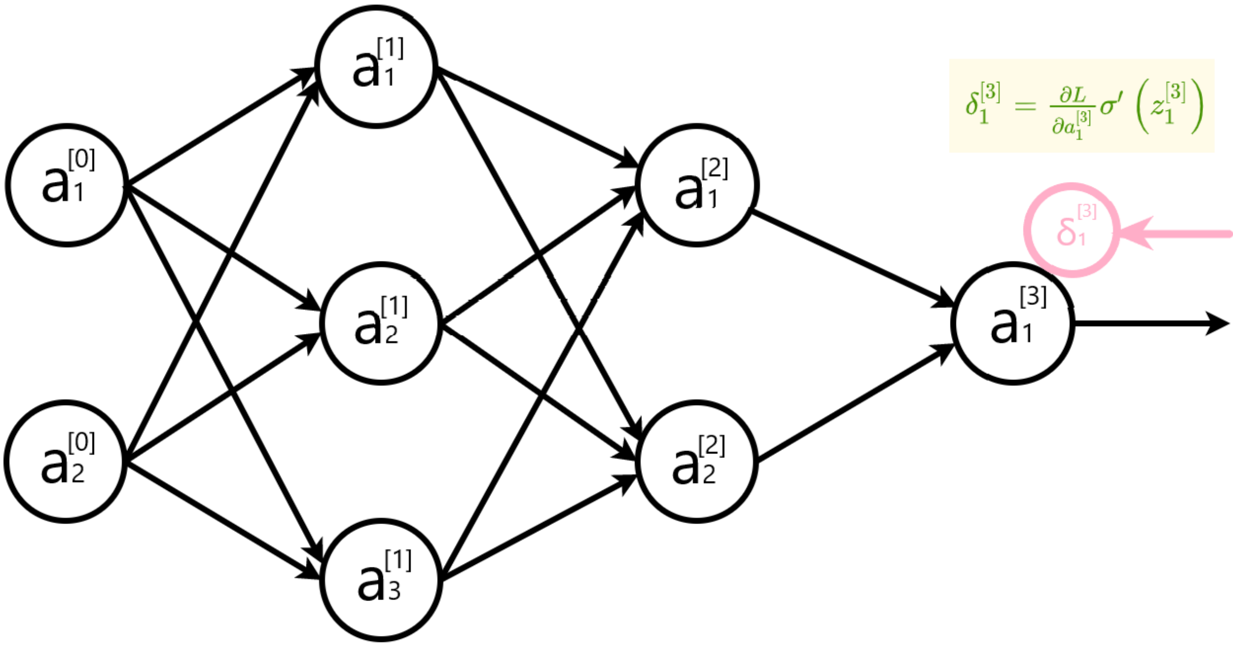
$\frac{\partial L}{\partial w_{j k}^{[l]}}=\frac{\partial L}{\partial z_{j}^{[l]}} \frac{\partial z_{j}^{[l]}}{w_{j k}^{[l]}}=a_{k}^{[l-1]} \delta_{j}^{[l]}$

等式四 参数更新

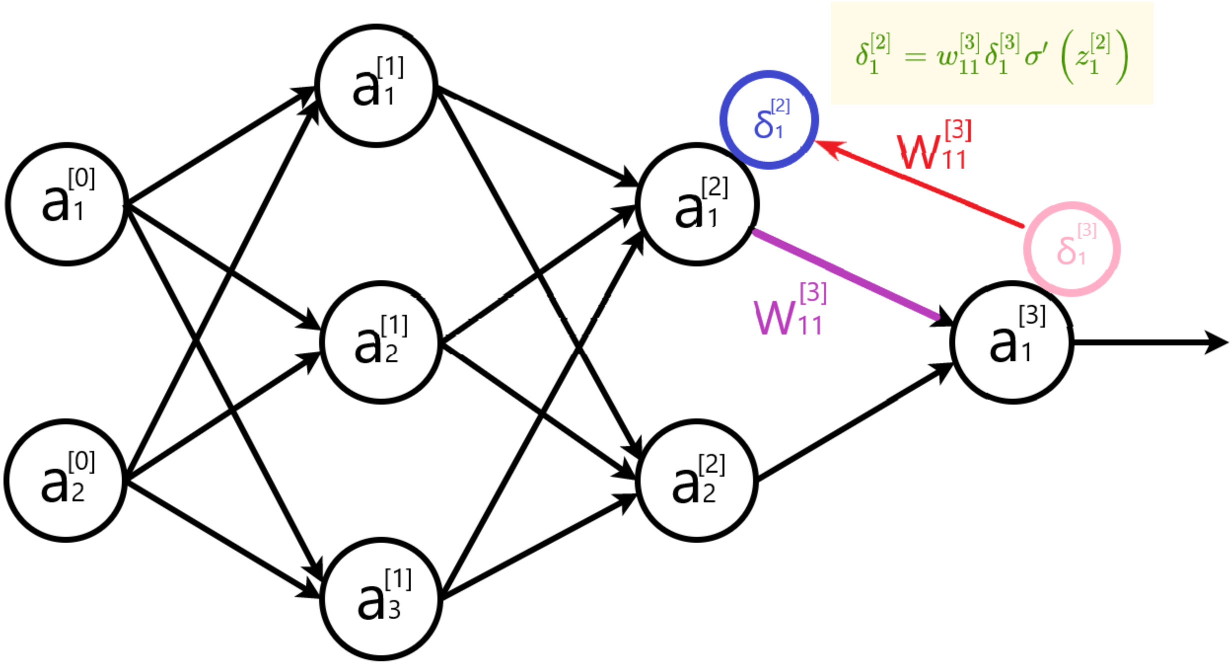
根据梯度下降法原理，朝着梯度的反方向更新参数 $$ \begin{array}{c} b_{j}^{[l]} \leftarrow b_{j}^{[l]}-\alpha \frac{\partial L}{\partial b_{j}^{[l]}} \ w_{j k}^{[l]} \leftarrow w_{j k}^{[l]}-\alpha \frac{\partial L}{\partial w_{j k}^{[l]}} \end{array} $$ 写成矩阵形式： $$ \begin{array}{l} b^{[l]} \leftarrow b^{[l]}-\alpha \frac{\partial L}{\partial b^{[l]}} \ w^{[l]} \leftarrow w^{[l]}-\alpha \frac{\partial L}{\partial w^{[l]}} \end{array} $$ 这里的 α 指的是学习率。学习率决定了反向传播过程中梯度下降的步长。

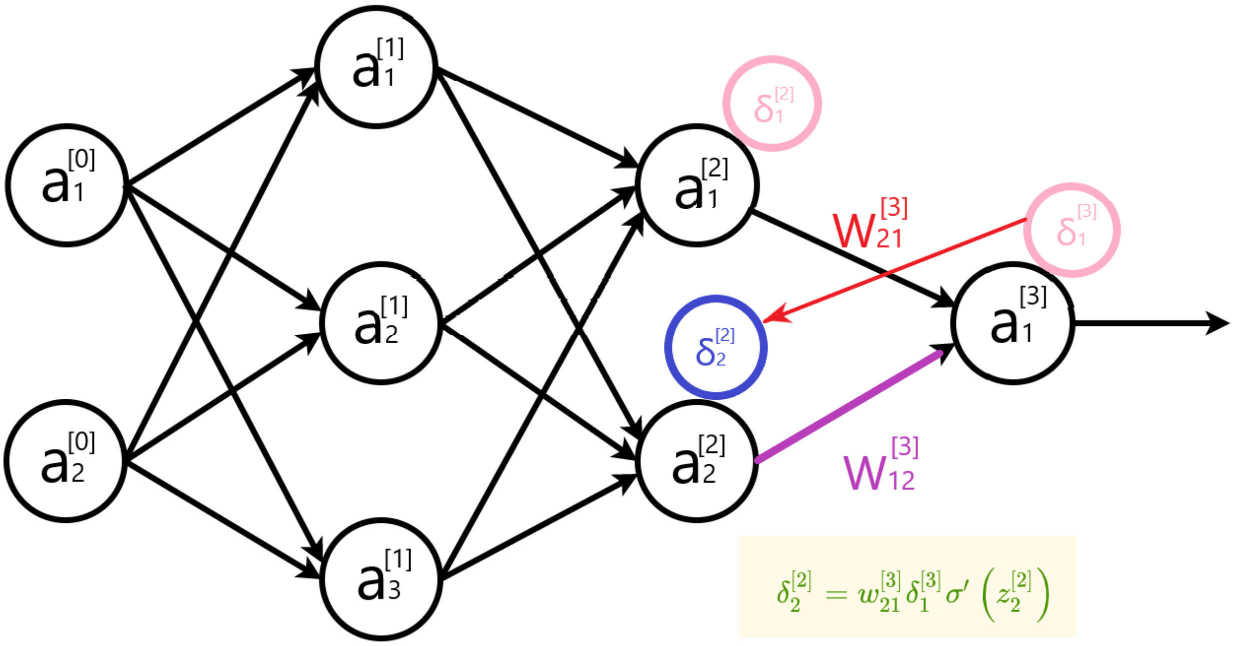
反向传播图解

计算输出层误差


$\delta_1^{[3]} = \frac{\partial L}{\partial a_1^{[3]}} \sigma'\left(z_1^{[3]}\right)$
$\delta_1^{[3]}$
$a_1^{[0]}$
$a_2^{[0]}$
$a_1^{[1]}$
$a_2^{[1]}$
$a_3^{[1]}$
$a_1^{[2]}$
$a_2^{[2]}$
$a_1^{[3]}$

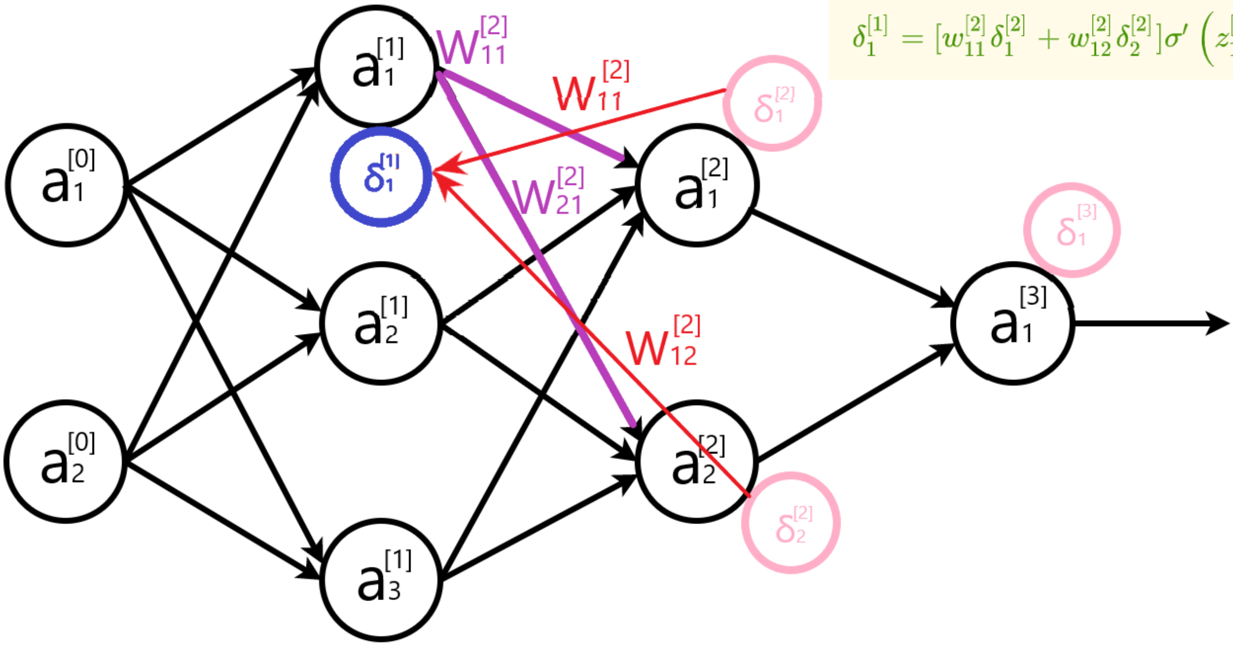
计算隐藏层误差

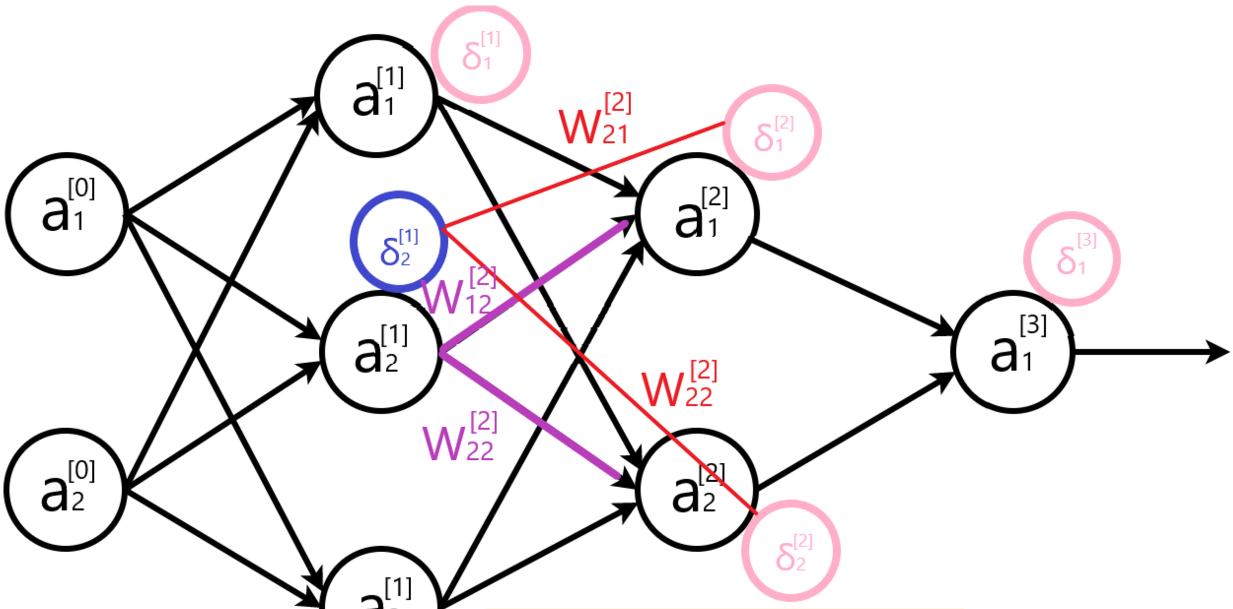




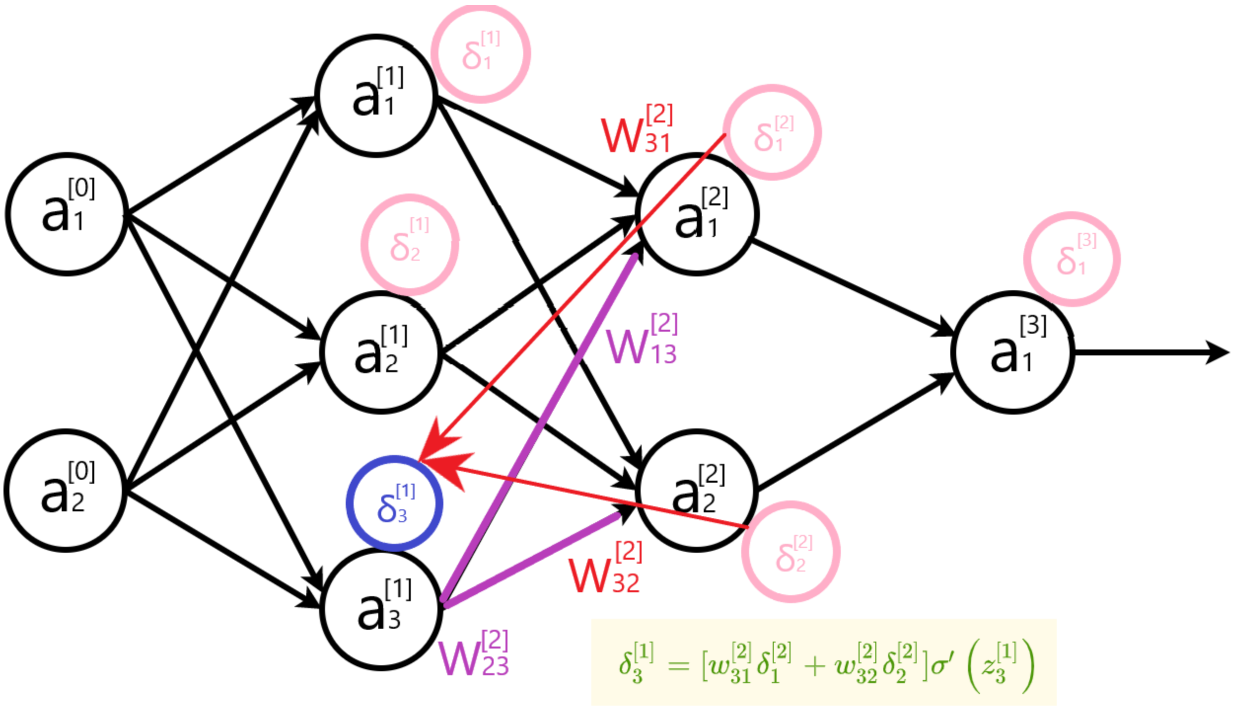
隐藏层误差公式写成矩阵形式 $\delta^{[l]}=\left[w^{[l+1]^{T}} \delta^{[l+1]}\right] \odot \sigma^{\prime}\left(z^{[l]}\right)$ 时， 权重矩阵需要转置。上面两幅图，直观地解释了转置的原因。

$$\delta_1^{[1]} = [w_{11}^{[2]}\delta_1^{[2]} + w_{12}^{[2]}\delta_2^{[2]}]\sigma'\left(z_1^{[1]}\right)$$





$$\delta_2^{[1]} = [w_{21}^{[2]}\delta_1^{[2]} + w_{22}^{[2]}\delta_2^{[2]}]\sigma'\left(z_2^{[1]}\right)$$



计算参数变化率

反向传播参数变化率

最后更新每层的参数。

反向传播公式总结

单样本输入公式表

说明	**公式**
输出层误差	$\delta^{[L]}=\nabla_{a} L \odot \sigma^{\prime}\left(z^{[L]}\right)$
隐含层误差	$\delta^{[l]}=\left[w^{[l+1]^{T}} \delta^{[l+1]}\right] \odot \sigma^{\prime}\left(z^{[l]}\right)$
参数变化率	$\begin{array}{c}\frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}=\delta^{[l]} \\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}=\delta^{[l]} a^{[l-1] T}\end{array}$
参数更新	$$\begin{array}{l}b^{[l]} \leftarrow b^{[l]}-\alpha \frac{\partial L}{\partial b^{[l]}} \w^{[l]} \leftarrow w^{[l]}-\alpha \frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}\end{array}$$

多样本输入公式表

成本函数

多样本输入使用的成本函数与单样本不同。假设单样本的成本函数是交叉熵损失函数。

$L(a, y)=-[y \cdot \log (a)+(1-y) \cdot \log (1-a)]$

那么，对于m个样本输入，成本函数是每个样本的成本总和的平均值。

$C(A,y)=-\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m}\left(y^{(i)} \cdot \log \left(a^{(i)}\right)+\left(1-y^{(i)}\right) \cdot \log \left(1-a^{(i)}\right)\right)$

误差

单样本输入的每一层的误差是一个列向量

$\delta^{[l]}=\left[\begin{array}{c}\delta_{1}^{[l]} \ \delta_{2}^{[l]} \ \vdots \ \delta_{n}^{[l]}\end{array}\right]$

而多样本输入的每一层的误差不再是一个列向量，变成一个m列的矩阵，每一列对应一个样本的向量。那么多样本的误差定义为：

$dZ^{[l]}=\left[\begin{array}{c}\delta^{l} \delta^{l} \dots \delta^{l}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\delta_{1}^{l}&\delta_{1}^{l}&\dots&\delta_{1}^{l} \ \delta_{2}^{l}&\delta_{2}^{l}&\dots&\delta_{2}^{l} \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \ \delta_{n}^{l}&\delta_{n}^{l}&\dots&\delta_{n}^{l} \end{array}\right]$

$dZ^{[l]}$的维度是 $n×m$ ， n 表示第 l 层神经元的个数，m 表示样本数量。

参数变换率

因为$dZ^{[l]}$的维度是 $j×m$ ， 更新 $b^{[l]}$ 的时候需要对每行求平均值，使得维度变为 $j×1$，再乘以 $\frac{1}{m}$。

$dZ^{[l]}$的维度是 $j×m$ ， $A^{[l-1]T} $ 的维度是 $m×k$，矩阵相乘得到的维度是 $j×k$ ， 与$w^{[l]}$ 本身的维度相同。因此更新 $w^{[l]}$ 时只需乘以 $\frac{1}{m}$ 求平均值。

说明	公式
输出层误差	$d Z^{[L]}=\nabla_{A} C \odot \sigma^{\prime}\left(Z^{[L]}\right)$
隐含层误差	$d Z^{[l]}=\left[w^{[l+1] T} d Z^{[l+1]}\right] \odot \sigma^{\prime}\left(Z^{[l)}\right]$
参数变化率	$d b^{[l]}=\frac{\partial C}{\partial b^{[l]}}=\frac{1}{m} m e a n O f E a c h R o w\left(d Z^{[l]}\right) \d w^{[l]}=\frac{\partial C}{\partial w^{[l]}}=\frac{1}{m} d Z^{[l]} A^{[l-1] T}$
参数更新	$\begin{array}{l}b^{[l]} \leftarrow b^{[l]}-\alpha \frac{\partial C}{\partial b^{[l]}} \w^{[l]} \leftarrow w^{[l]}-\alpha \frac{\partial C}{\partial w^{[l]}}\end{array}$