高斯消元

一、简介

解决 N 行 M 列的线性方程组解的问题。

求解如下方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

二、预备知识

1、系数矩阵和增广矩阵

$$\text{系数矩阵} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\text{增广矩阵} A|b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

2、矩阵的行初等变换

矩阵的行初等变换主要包括以下三种基本操作：

1.对换变换：交换矩阵的两行位置。

2.倍乘变换：以一个非零数 k 乘以矩阵的某一行所有元素。

3.倍加变换：把矩阵的某一行所有元素乘以一个数 k 后加到另一行对应的元素上。

推论1：如果其中一个矩阵可以通过初等行变换变成另一个矩阵，则称这两个矩阵是行等价的

推论2：若两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，则它们有相同的解集。

三、行阶梯型矩阵（RREF）

行阶梯型矩阵是形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵里的 ■ 是不为零的任意一个数，$*$为任意数。

非零行的主元是指这一行中最左边的非零元素，即图上的■。

1.每一个非零行都在每一个零行之上。

2.某一行的主元所在的列在上一行主元的右边

3.某一行的主元所在的列下方元素都是0。

简化行阶梯型矩阵是形如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.每一非零行的主元是1 。

5.每一个主元1是该元素所在列的唯一非零元素。

定理 每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯型矩阵

记矩阵 A 的秩为 $r(A)$,则 $r(A)$ 等于**行阶梯型矩阵的非零行数。**

四、线性方程组解的情况

考查系数矩阵 $r(A)$，增广矩阵$r(A|b)$，以及方程组未知数个数 n。

线性方程组有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b)$ 。

线性方程组有无穷多个解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) < n$ $\Leftrightarrow$ 有 $n - r(A)$ 个解系
线性方程组有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b) = n$。

唯一解的情况：

其中前 $m-1$ 列每一列都存在主元。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_6 \end{bmatrix}$$

无解的情况：

其中最后非零行只有最后一列的值非零。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix}$$

无穷解的情况：

其中某几列不存在主元。

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{bmatrix}$$

五、高斯消元的算法过程

高斯消元的算法过程其实就是将**增广矩阵**转换成**简化行阶梯型矩阵**，并判断**唯一解，无穷解，无解**的过程。

算法过程：

1.将含有 $m-1$ 个未知数，n 条方程的线性方程组转化为 $n \times m$ 的增广矩阵。

2.确定主元。枚举列，假设当前为第 c 列，前 $c-1$ 列已找到 $w-1$ 个主元，则第 c 列应从第 w 行至第 n 行寻找。

3.交换主元行位置。找到**绝对值最大**的主元所在行（尽量减少误差），与第 w 行交换位置。若绝对值最大为 0，说明没有主元，可能为无穷解，跳过该列。

4.主元单位化，将第 w 行主元变换为 1。具体来说，将第 w 行所有元素除以 a_{wc}。

5.消元，将第 c 列除第 w 行外所有元素变换为 0。具体来说，假设要变换行为第 i 行，则该行的第 j 列元素应减去 $a_{ic} \times a_{wj}$。

6.重复以上步骤，直至将矩阵转换为**简化行阶梯型矩阵**，判断解的情况。

判断最后一行非零行是否只有最后一列非零，若是，则说明无解；

若不是，则判断主元数与未知数个数的大小关系，若主元数 $<$ 未知数个数，说明有无穷解；若主元数 $=$ 未知数个数，说明有唯一解。

7.若有唯一解，则解集为矩阵最后一列向量。

例1：

$$\begin{cases} 5x-3y & =-1 \\ 2x+y & =4 \end{cases}$$

$$A|b=\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{r_1\text{单位化}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_2\text{单位化}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\because r(A)=r(A|b)=n \ \therefore \text{方程有唯一解} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

例2：

$$\begin{cases} 6x-3y & =-1 \\ 2x-y & =4 \end{cases}$$

$$A|b=\begin{bmatrix}6&-3&-1\\2&-1&4\end{bmatrix}\xRightarrow{r_1单位化}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\2&-1&4\end{bmatrix}\xRightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\0&0&\frac{13}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_2单位化}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\0&0&1\end{bmatrix}\xRightarrow{r_1+\frac{1}{6}r_2}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\because r(A)<r(A|b)\ \therefore 方程无解$$

例3：

$$\begin{cases}6x-3y&=3\\2x-y&=1\end{cases}$$

$$A|b=\begin{bmatrix}6&-3&3\\2&-1&1\end{bmatrix}\xRightarrow{r_1单位化}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\2&-1&1\end{bmatrix}\xRightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\because r(A)=r(A|b)<n\ \therefore 方程有无穷解$$

$$通解为\begin{cases}x=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\\y=k\end{cases}\ 其中k\in R$$

六、模版

```
double a[200][200];
const double eps = 1e-8;
int Gauss(int n, int m){//高斯消元，n行，m列，其中第m列为增广列。
    int w = 1;//记录主元数，第c列应该从第w行开始
    for (int c = 1; c <= m; c++){//枚举列。
        int temp = w;
        for (int i = w + 1; i <= n; i++)
            if (abs(a[i][c]) > fabs(a[temp][c])) temp = i;
        if (abs(a[temp][c]) <= eps) continue;//不存在主元
        for (int j = c; j <= m; j++) swap(a[temp][j], a[w][j]);//交换行。
        for (int j = m; j >= c; j--) a[w][j] /= a[w][c];//将a[w][c]单位化
        for (int i = 1; i <= n; i++) if (i != w)//消元
            for (int j = m; j >= c; j--) a[i][j] -= a[i][c] * a[w][j];
        w++;
    }
    if (abs(a[w - 1][m - 1]) <= eps) return -1;//最后一行非零行增广列前一列非零，无解
    return m - w;//若自由元大于0，则无穷解,否则有唯一解，且 xi = a[i][m]。
}
```

七、例题

模版高斯消元法