第 九 章　回 归 分 析

§9.1 相关关系与回归分析

§9.2　一元回归分析

§1. 回归分析模型

事物之间的关系 $\xleftrightarrow{\text{量化}}$ 变量之间的关系

确定性关系：比如$S=L^2$

相关关系：比如农作物亩产量Y与播种量X_1、施肥量X_2

回归分析：找出相关关系中变量之间的近似关系

我们把要考察的目标作为因变量(记为Y)，而把影响它的因素称为自变量(记为X_1，X_2，... X_k)。

设自变量(X_1，X_2，… X_k)的取值为：(x_1，x_2，… x_k)

多元回归模型：

$$Y = \mu(x_1, \dots, x_k) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

Y对(X_1，X_2，… X_k)的回归函数

$$y = \mu(x_1, \dots, x_k) \longrightarrow$$ **回归方程**

在回归分析中：因变量被看作随机变量

自变量则是可控制的！

分为：多元回归分析

一元回归分析

回归分析涉及三个问题:

(1) 建立模型(找出自变量与因变量)

(2) 确定回归函数$\mu(x)$的类型

(3) 估计参数

在回归模型中最简单的为一元回归模型:

$$Y=\mu(x)+\varepsilon,\quad \varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$$

相应的一元回归方程为: $y=\mu(x)$

一元回归最简单的情形: 线性回归

§9.2一元线性回归分析

一元正态回归模型:

$$Y=a+bx+\varepsilon, \quad \varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$$

其中，a — 回归常数(又称截距)

b — 回归系数(又称斜率)

ε — 随机扰动项

对于任意一组样本，有 $Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i,\ i=1,\ldots,n$

其中: (1) 各次试验相互独立

(2) $E(\varepsilon_i)=0$

(3) $D(\varepsilon_i)=\sigma^2$

(4) ε_1， …， ε_n相互独立

从而，$Y_i \sim N(a+bx_i, \sigma^2)$，且相互独立，其形状如图:

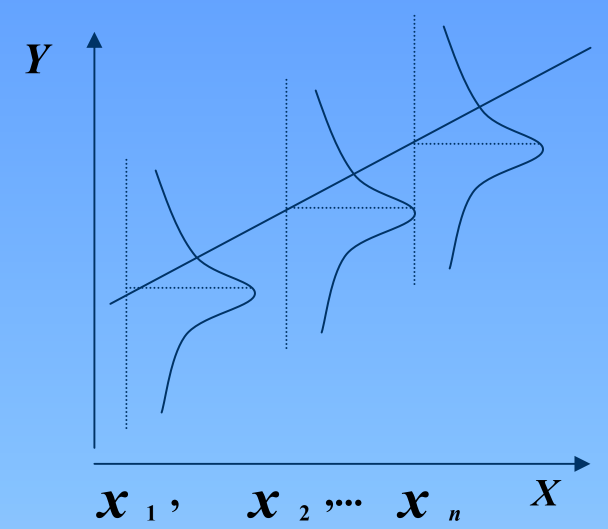
记 $\hat{Y}_i$ 为 Y_i 的估计值，则

$$Y_i = a + b x_i + \varepsilon_i = \hat{Y}_i + \varepsilon_i$$

这可写成：

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (a + b x_i)$$

这表明 ε_i 是Y的实际观测值与估计值之差，即拟合误差。



为确定合适的回归方程，使Y的估计值尽可能接近真实值，为此可选a,b的估计值，使 $\sum\varepsilon_i^2=\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ 达到最小

使误差平方和达到最小以寻求估计值的方法，叫最小二乘法，用最小二乘法得到的估计叫最小二乘估计

由误差(离差)平方和:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$

要使Q达到最小，应使Q对应于a、b的一阶偏导为0，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=-2\sum(y_i-a-bx_i)=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q}{\partial b}=-2\sum(y_i-a-bx_i)x_i=0\end{cases}$$

可化为：
$$\begin{cases}na+b\sum x_i=\sum y_i & (1)\\ a\sum x_i+b\sum x_i^2=\sum x_iy_i & (2)\end{cases}$$

$(1)\times\sum x_i-(2)\times n$ 得：

$$b\left[n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2\right]=n\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i$$

故 $$\hat{b}=\frac{n\sum x_i y_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}=\frac{\sum x_i y_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum x_i^2-n\overline{x}^2}$$

$$=\frac{\sum (x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum (x_i-\overline{x})^2}$$

$$=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}$$,其中,$l_{xx}=\sum (x_i-\overline{x})^2$, $l_{xy}=\sum (x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

由(1)： $$\hat{a}=\frac{\sum y_i}{n}-\hat{b}\frac{\sum x_i}{n}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$$

同时，由于 $\sigma^2=D(\varepsilon)=E(\varepsilon^2)$

所以 $$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\frac{1}{n-2}(l_{yy}-\hat{b}^2 l_{xx})$$

$$l_{xx}=\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum x_i^2-n\overline{x}^2$$

$$l_{xy}=\sum\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\sum x_i y_i-n\overline{x}\,\overline{y}$$

$$l_{yy}=\sum\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\sum y_i^2-n\overline{y}^2$$

$$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\left(l_{yy}-\hat{b}^2 l_{xx}\right)$$

例题1： 流经某地区的降雨量X和该地河流的径流量Y的观察值如下表，求Y关于X的线性回归方程。

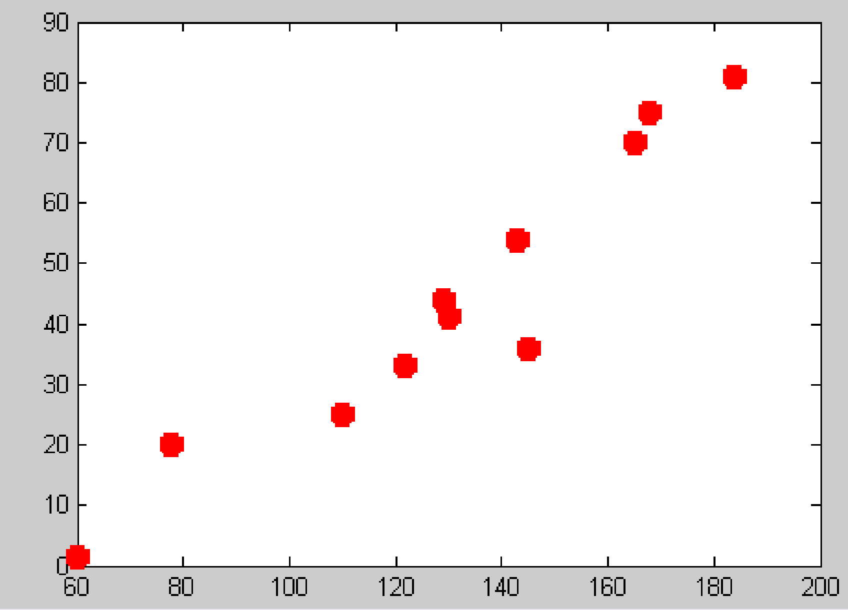
降雨量x_i:	110	184	145	122	165	143	78	129	60	130	168	1434 (Σ)
径流量y_i:	25	81	36	33	70	54	20	44	1.4	41	75	480.4 (Σ)

解：n=11

$$\bar{x} = 130.4 \quad \bar{y} = 43.7$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= 14047$$

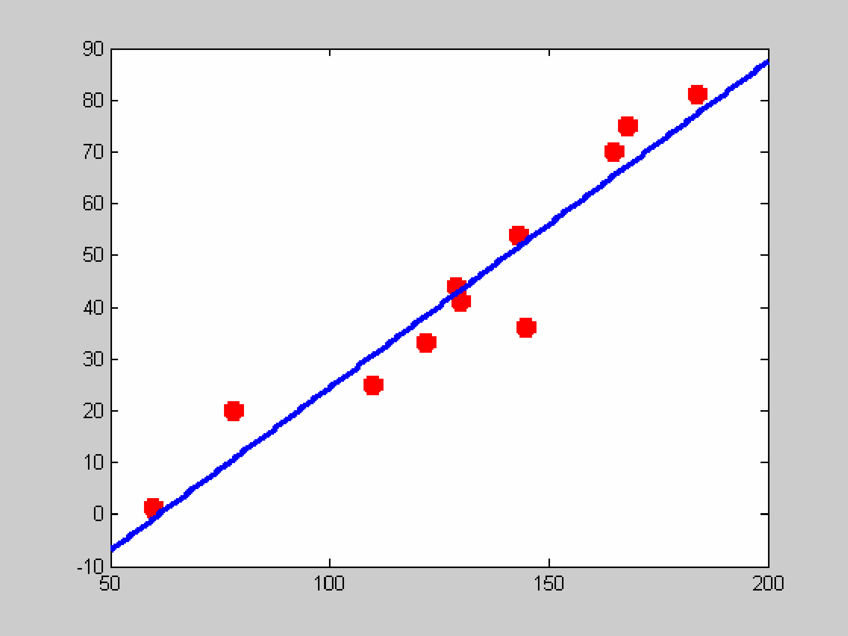


$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}=71424.8-62731.35=8795.3$$

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}=\dfrac{8795.3}{14047}=0.63\\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=43.7-0.63\times130.4=-38.0\end{cases}$$

所求经验回归方程为

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x=0.63x-38.0$$



随机误差的方差σ^2的估计为

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-43.7)^2=6050.6$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}(l_{yy}-\hat{b}^2 l_{xx})$$

$=（6050.6-0.63^2\times 14047）/9=60.37$

2. 一元线性回归的假设检验（相关系数法）

问题：变量Y与X间是否存在线性相关关系？

相关系数法:是基于试验数据检验变量间线性相关关系是否显著的一种方法。

相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

是表征随机变量Y与X的线性相关程度的数字特征。

样本相关系数:

$$\hat{\rho}_{XY}=R=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{yy}}}$$

结论:

1）R越接近于1，X与Y间的线性相关关系越显著;

2）R越靠近于0，X与Y间的线性相关关系越不显著。

判别准则： 给定显著性水平 α

当 $|R| > R_{\alpha}(n-2)$ 时

认为X与Y之间的线性相关关系显著。

当 $|R| \leqslant R_{\alpha}(n-2)$ 时

认为X与Y之间的线性相关关系不显著。

EX.（续前例）利用相关系数显著性检验法，检验降雨量X和径流量Y的线性相关关系是否显著。

解：X与Y的样本相关系数为

$$R = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{yy}}}$$

$$= \frac{8795.3}{\sqrt{14047}\sqrt{6050.6}} = 0.954$$

查表得

$$R_{\alpha}(n-2) = R_{0.01}(9) = 0.735 < 0.954 = R$$

可认为X与Y的线性相关关系显著。

3. 非线性回归问题的线性化处理

在实际问题中，变量间的相关关系未必是线性关系，即其回归函数

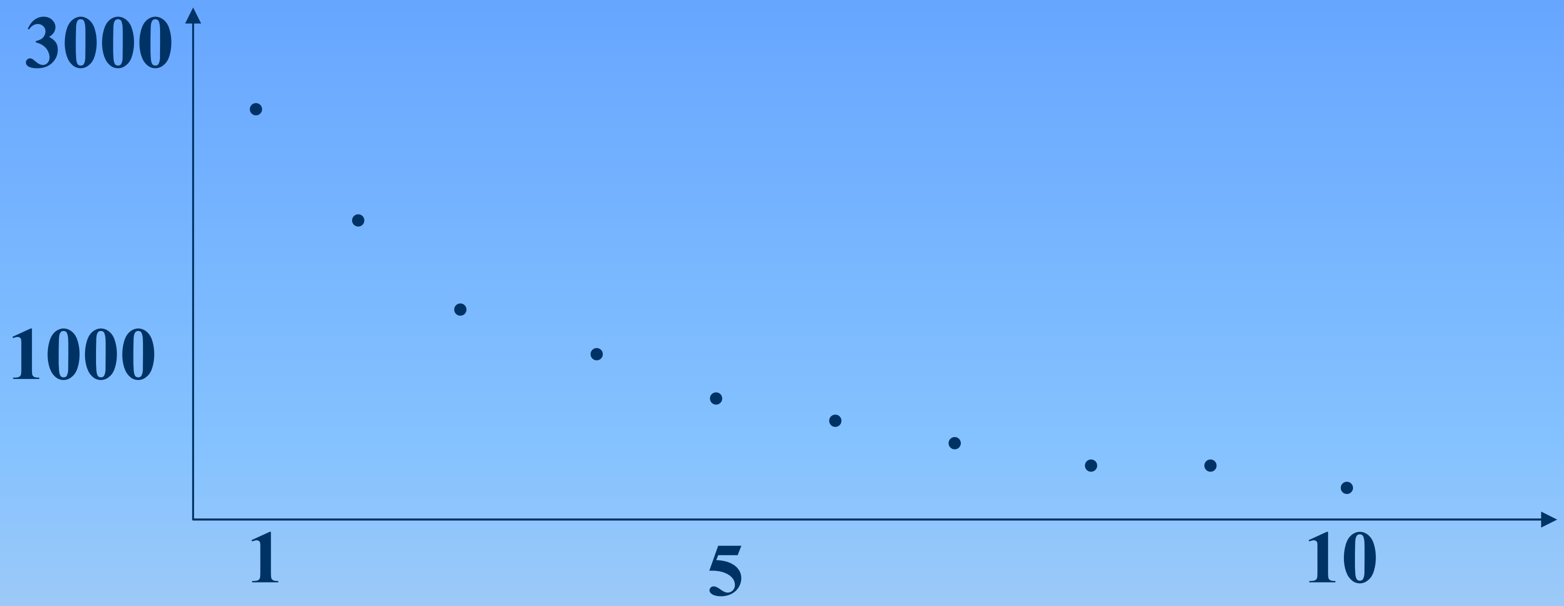
$$\mathbf{y}=\boldsymbol{\mu}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

往往是非线性函数。有时可通过适当的变换，将其转化为线性回归问题。

例题2：下表是1957年美国旧轿车的调查数据表

使用年数x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
平均价格y_i	2651	1943	1494	1087	765	538	484	226	226	204

求平均价格Y关于使用年数X的回归方程。



解：观察试验数据的散布图， y 与 x 呈指数关系，设经验回归方程为

$$y = ae^{bx} \quad (b < 0)$$

两边取对数，得　　$\ln y=\ln a+bx$

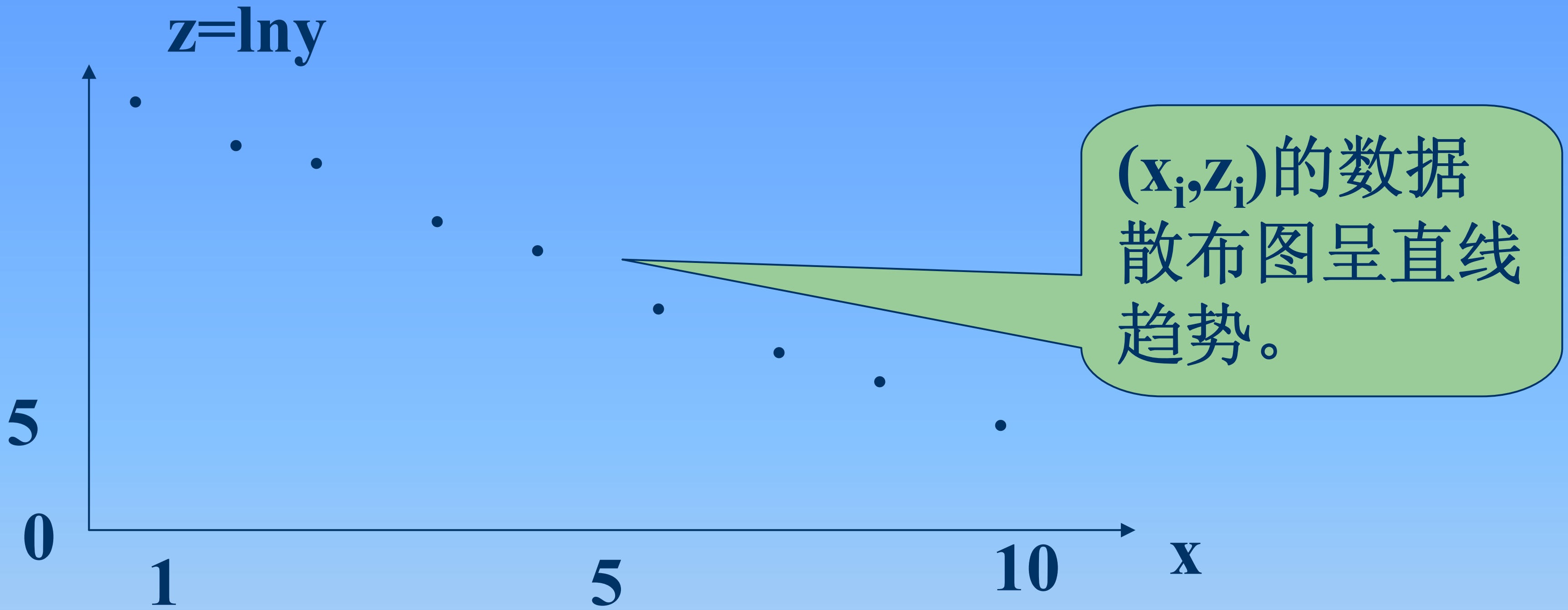
令　$z=\ln y$,　$x=x$,　记 $a'=\ln a$

经变换得回归方程为　　$z=a'+bx$

记　$z_i=\ln y_i$，将原数据转换为（x_i, z_i）,$i=1,2,\ldots,10$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	7.88	7.57	7.31	6.99	6.64	6.29	6.18	5.67

x_i	9	10
z_i	5.42	5.32



$$\bar{x} = 5.5, \bar{z} = 6.527$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10(\bar{x})^2 = 38.5 - 10 \times 5.5^2 = 82.5$$

$$l_{xz} = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\,\overline{xy} = -24.554$$

$$\hat{b} = \frac{l_{xz}}{l_{xx}} = -\frac{24.5538}{82.5} = -0.2976$$

$$\hat{a}' = \bar{z} - \hat{b}\bar{x} = 6.527 + 0.2976 \times 5.5 = 8.1642$$

从而 $\hat{z} = 8.1642 - 0.2976\,x$

代入原变量，得非线性经验回归方程为

$$\hat{y} = e^{\hat{a}'} e^{\hat{b}x} = 3512.91\, e^{-0.2976x}$$

检验X与Y是否存在显著的指数相关关系

$\Leftrightarrow$ 检验X与lnY的线性相关关系是否显著

有 $R=\dfrac{l_{xz}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{zz}}}=-0.996$

$|R|=0.996>0.765=R_{0.01}(8)$，

可以认为X与Y存在显著的指数相关关系。