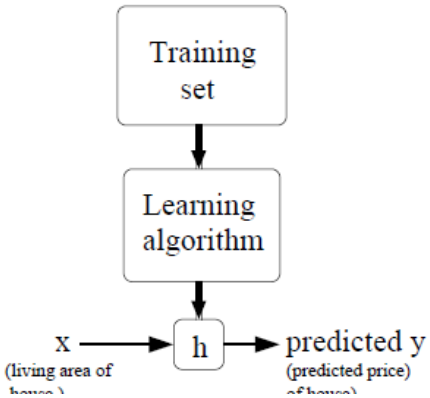
线性回归概率解释（LinearRegression）

模型

监督学习：given a training set, to learn a function h : X Y so that h(x) is a“good” predictor for the corresponding value of y.



对于线性回归,我们假设可以通过一条直线拟合样本，从而预测y。所以我们假设：

那么 cost function 为：

，也就是最小二乘法(LMS)。为了最小化，我们可以采用批梯度下降法(BGD)、随机梯度下降法(SGD)或者用normal equation直接求。

接下来从概率的角度来讨论为什么cost function要采用LMS?

Probabilistic interpretation

1. 我们把输入y看成是随机变量。此时，

   可以代表各种误差，比如测量误差，或者因为其他未知的特征x引起的误差。假设这些误差都是独立同分布的，那么由大数定律可知，

   所以可以得，

   注意，这里不等同于，前者默认为是一个固定的值，一个本身就存在的最佳参数矩阵；而后者认为是一个变量（统计学中frequentist和Bayesian 的差别）。
   此时，我们已知了y的概率分布，因为是独立同分布的，所以每个样本的输出y也是独立同分布的。那么就可以用极大似然估计（MLE）来估计。似然函数为

   ln似然函数得

   可以看出，MLE的最终结果就是要最小化

   这恰好就是我们的cost function。

2.Bayesian线性回归
在一些学习问题中我们经常有上千的feature，如果直接用之前的线性模型，那么我们会发现很容易会导致overfitting。为了防止这个问题我们可以采用贝叶斯方法。
之前我们一直把参数看成是一个未知的固定值，而贝叶斯学派则把看成是一个变量。
我们假设的先验分布是,数据集为S.
那么根据贝叶斯公式可知后验分布为

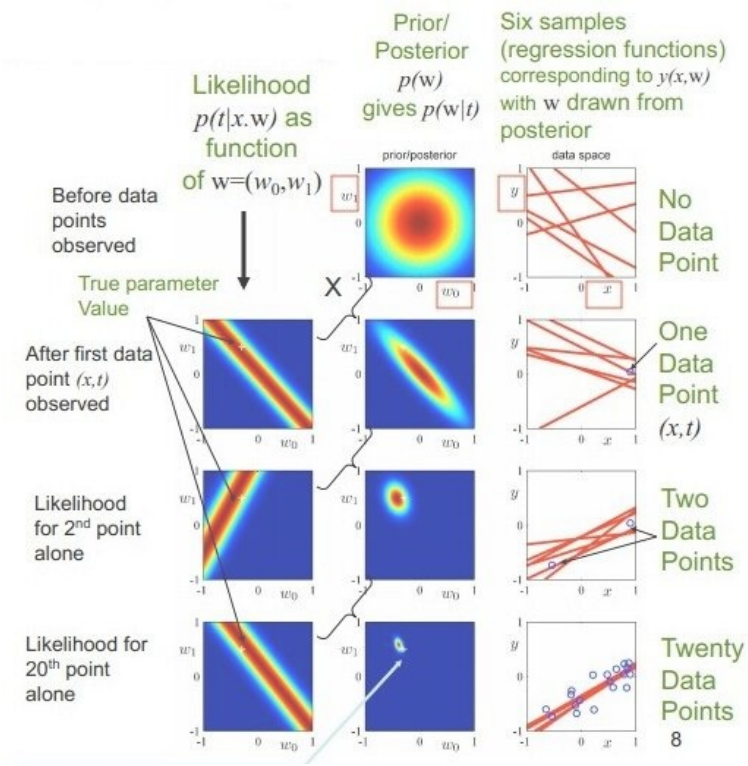
这里的 其实就是在变量 的条件下所以样本数据的似然函数。分母 就是不考虑变量 的分布，即对 空间积分。

然后我们可以得到在样本空间条件下的y的分布。

最后得到对y的预测期望

由于 的参数空间是高维的，很难积分。所以我们就直接使用了MAP(maximum a posteriori)估计，即最大化 ,可以观察到其实Bayesian方法就是在普通线性回归的似然函数中增加了 的前验概率。
和MLE类似我们可以推出最大化 就是要最小化

也就是在LMS后再加一个regularization项，这就是线性模型的Bayesian linear regression，也可以扩展到polynominal regression个logistic regression。
下面是一张描述Bayesian linear regression的图



解释：；当无观察点的时候， 的先验分布是圆圈（正态），然后观察第一个样本点时，得到该样本点可以对应的 空间（第一列第一张图），与开始的先验分布结合就缩小了 空间范围。随观察点增加就进一步确定 。
其实Bayesian Linear regression和ridge regression很相似，其中的概率解释也很复杂，有涉及到无偏估计和检验。但最终目的都是为了防止overfitting和降低模型复杂度。

线性模型的推广-广义线性模型（**generalized linear model**）

可以知道在普通的线性模型中有如下的假设：
(1).响应变量Y和误差项ϵ正态性：响应变量Y和误差项ϵ服从正态分布，且ϵ是一个具有零均值，同方差的特性。

(2).预测量xi和未知参数βi的非随机性：预测量xi具有非随机性、可测且不存在测量误差；未知参数βi认为是未知但不具随机性的常数。

(3).研究对象：如前所述普通线性模型的输出项是随机变量Y。在随机变量众多的特点或属性里，比如分布、各种矩、分位数等等，普通线性模型主要研究响应变量的均值E[Y]。

(4).联接方式：所以我们的假设函数就相当于是预测Y的期望。这里的可以理解为一个响应函数，用来实现从x到y的映射。

此时我们会想到如果Y不是高斯分布会怎么样呢，那响应函数要怎么变化呢？于是可以把线性模型的假设扩展成如下：

(1).响应变量的分布推广至指数分散族(exponential dispersion family)。（正态分布、泊松分布、二项分布、负二项分布、伽玛分布、逆高斯分布都可以转化为指数分布族）

(2).不变

(3).研究对象还是E[Y]。

(4).联接方式：广义线性模型里采用的联连函数(link function)理论上可以是任意的。

既然我们扩展了假设，线性模型就相当于是GLM的一种特例，自然的，我们可以尝试从GLM推出线性模型：
1.首先看指数分布族：

给定T，a，b，我们可以得到一个以 为参数的一个分布族。

2.假设（design choice）
对于一个学习问题，我们可以假设:
(1)
(2)给定，我们要预测的是,通常,所以有
(3)

3.推导
先将高斯分布转化为指数分布，从线性模型可知高斯分布的对没有影响，所以为了方便令

即当

那高斯分布转化为了指数分布族。
此时的响应函数（response function） 是

推导总结：首先我们假设，此时我们是不知道怎么用x来表示。然后我们把高斯转化为指数分布得出了（其实就是一个响应函数：能最佳匹配y的一个映射函数）。此时，然后通过极大似然估计就可以估计出。

对于logistic regression来说也类似：首先我们假设，此时我们是不知道怎么用x来表示。然后我们把伯努利转化为指数分布得出了此时，然后通过极大似然估计就可以估计出。

参考资料:
【1】cs229 by Andrew Ng from 网易公开课.
【2】PRML.