圆周上的动力系统笔记*

周岐

February 24, 2019

1 圆周自映射的提升

Definition 1 **（提升）**

若F使得

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^1 \\ {\scriptstyle E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

图可交换，即$f \circ E = E \circ F$，则称$F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$为$f : S^1 \to S^1$的提升。其中$E : x \in \mathbb{R}^1 \to e^{i2\pi x} \in S^1$称为$\mathbb{R}^1 \to S^1$的覆迭映射，$(\mathbb{R}^1, E)$称为$S^1$的覆迭空间。

Theorem 1 $f : S^1 \to S^1$连续，则：

*(i)*存在F使得$f \circ E = E \circ F$

(ii)$F(x+1) = F(x) + k, k \in \mathbb{Z}$，即$F(x) - kx$为*1*-周期函数

(iii)$l \in \mathbb{Z}$，则$F(x) + l$也是f的提升，且f的任意提升有$F(x) + l$的形式。

Proof

(ii)$f(E(x)) = E(F(x)) \Rightarrow f(e^{i2\pi x}) = e^{i2\pi F(x)}$

*参考《微分动力系统原理》（张筑生）

由$f(e^{i2\pi x})=f(e^{i2\pi(x+1)})=e^{i2\pi F(x+1)}$，则$e^{i2\pi F(x+1)}=e^{i2\pi F(x)}$

$\Rightarrow F(x+1)$与$F(x)$相差一个整数。

(iii)设F,G都是f的提升，$f(e^{i2\pi x})=e^{i2\pi F(x)}=e^{i2\pi G(x)}$

$\Rightarrow F=G+l$。 □

Definition 2 **（映射度）**

$deg(f)\triangleq F(x+1)-F(x)$称为$f$的映射度。

Proposition 1 $f,g:S^1\to S^1$，F,G为f,g的提升，则$F\circ G$为$f\circ g$的提升。

Proof

$(f\circ g)E=f\circ(g\circ E)=f\circ(E\circ G)=(f\circ E)\circ G=F\circ E\circ G$ □

Proposition 2 $f,g:S^1\to S^1$，$id:S^1\to S^1,z\to z$，则：

(i)$deg(f\circ g)=deg(f)deg(g)$

(ii)$deg(id)=1$。

Proof

(i)$F\circ G(x+1)=F(G(x)+deg(g))=F(G(x))+deg(f)deg(g)$

(ii)$x\to x\Rightarrow F(x+1)=F(x)+1$ □

Proposition 3 设$f:S^1\to S^1$同胚，则$deg(f)=\pm1$。

Proof

$deg(f\circ f^{-1})=deg(id)=1$，又$deg(f\circ f^{-1})=deg(f)deg(f^{-1})=1$

$\Rightarrow deg(f)=\pm1$ □

Proposition 4 $\varphi,\psi,\chi.X\to X.\psi\varphi=\chi$，则：

(i) χ 单 $\Rightarrow$ φ 单

(ii) χ 满 $\Rightarrow$ ψ 满。

Proposition 5 $h: S^1 \to S^1$同胚，H, K为$h.h^{-1}$的提升，则：

$H \circ K = id + l, K \circ H = id + m$，因而，

(i) H, K都是同胚，*(ii)*H^{-1}是h^{-1}的提升，$H^{-1} = k + n$。

Proof

(ii) $E \circ H \circ H^{-1} = E$，又$E \circ H \circ H^{-1} = h \circ E \circ H^{-1}$

$\Rightarrow h \circ E \circ H^{-1} = E \Rightarrow h^{-1} \circ h \circ E \circ H^{-1} = h^{-1} \circ E \Rightarrow E \circ H^{-1} = h^{-1} \circ E$

$\Rightarrow h^{-1}$为H^{-1}的提升$\Rightarrow H^{-1} = K + n$（$K$为$h^{-1}$的提升） □

Definition 3 **（保（反）向同胚）**

若$f: S^1 \to S^1$同胚，$deg(f) = 1$，则称f为保向同胚，反之称为反向同胚。

2 圆周自同胚的旋转数

Theorem 2 设$f: S^1 \to S^1$保向同胚，F为f的提升，则

极限：$\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)}{n}$存在，且与$x$无关，记为$\rho(F)$，

若$F_1 = F + l(l \in \mathbb{Z})$，则$\rho(F_1) = \rho(F) + l$，

$\rho(f) \triangleq \rho(F) mod 1 \in [0,1)$称为$f$的旋转数。

Proof

首先证明一个事实：$F(x) = x + \varphi(x)$为连续单调递增函数，则$\varphi(x)$ 的振幅≤ 1（$max\varphi(x) - min\varphi(x) \le 1$）。

任取$x \le y \le x+1 \Rightarrow F(x) \le F(y) \le F(x+1) = F(x)+1$

$\Rightarrow F(x) - x - 1 \le F(y) - y \le F(x) + 1 - x$，从而，$\varphi(x)$的振幅$\le 1$

$\forall$给定，由归纳法易证：$F^m(x+1) = F^m(x) + 1 \Rightarrow F^m(x) = x + \varphi_m(x)$

记$\alpha_m = min(F^m(x) - x), \beta_m = max(F^m(x) - x)$

$\Rightarrow \alpha_m \le F^m(x) - x \le \beta_m(\beta_m - \alpha_m \le 1)$

$\Rightarrow \alpha_m \le F^{2m}(x) - F^m(x) \le \beta_m \cdots$

$\Rightarrow \alpha_m \le F^{km}(x) - F^m(x) \le \beta_{(k-1)m}$

求和得$k\alpha_m \le F^{km}(x) - x \le k\beta_m$

又$\forall n, \exists k, 0 \le r < m, s.t. \quad n = km + r$

$r\alpha_1 \le F^r(x) - x \le r\beta_1$，$k\alpha_m \le F^{km+r}(x) - F^r(x) \le k\beta_m$

$\Rightarrow k\alpha_m + r\alpha_1 \le F^{km+r}(x) - x \le k\beta_m + r\beta_1$

$\Rightarrow \dfrac{k\alpha_m + r\alpha_1}{n} \le \dfrac{F^{km+r}(x) - x}{n} \le \dfrac{k\beta_m + r\beta_1}{n}$

$\Rightarrow \dfrac{k\alpha_m + r\alpha_1}{km+r} \le \dfrac{F^{km+r}(x) - x}{n} \le \dfrac{k\beta_m + r\beta_1}{km+r}$

当$n \to \infty$即$k \to \infty$，$\Rightarrow \dfrac{\alpha_m}{m} \le \dfrac{F^{km+r}(x) - x}{n} \le \dfrac{\beta_m}{m}$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha_m}{m} \le \liminf \dfrac{F^{km+r}(x)-x}{n} \le \limsup \dfrac{F^{km+r}(x)-x}{n} \le \dfrac{\beta_m}{m} = \dfrac{\alpha_m}{m} + \dfrac{1}{m}$

从而$\liminf \dfrac{F^{km+r}(x)-x}{n} \le \limsup \dfrac{F^{km+r}(x)-x}{n}$ $\Rightarrow$极限存在。

若$F_1 = F+l$则$F_1 \circ F_1 = F_1(F+l) = (F+l)(F+l) = F(F+l)+l = F(F(x))+2l$

依归纳：$F_1^n(x) = F^n(x) + nl$

从而，$\rho(F_1) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F_1^n(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)+nl}{n} = \rho(F) + l$

故$\rho(F_1) = \rho(F) + l$。 □

Remark 1 $\rho(f^{-1}) = -\rho(f)$

$\rho(F^{-1}) \triangleq \lim_{n\to\infty} \dfrac{(F^{-1})^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^{-n}(x)-x}{n} = -\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(y)-y}{n} = -\rho(F)$

Remark 2 $\rho(f^l) = \rho(F^l) mod \quad 1 = l\rho(f) mod \quad 1$

Theorem 3 $\rho(f)$关于$f \in Hom(S^1, S^1)$连续，即$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$|g-f|_{C^0} < \delta$时，$|\rho(g) - \rho(f)| < \varepsilon, |g-f|_{C^0} = inf|G(x) - F(x)|_{C^0}$。

Theorem 4 存在保向同胚h使得

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

图可换，即f g（拓扑共轭），则$\rho(f) = \rho(g)$。

Proof

设F是f的提升，G是g的提升，H是h的提升，

由图可换知：$g \circ h = h \circ f \Rightarrow G \circ H = H \circ F + l$

依归纳法知：$G^m \circ H = H \circ F^m + ml$

求旋转数：$\rho(G) = lim_{n\to\infty} \dfrac{G^n(H(0))}{n}$

由于$G^n(H(0)) = H\circ F^n(0)+nl$，则$\frac{G^n(H(0))}{n} = \frac{H\circ F^n(0)+nl}{n} = \frac{H\circ F^n(0)-F^n(0)+F^n(0)+nl}{n}$

$\Rightarrow lim_{n\to\infty}\frac{G^n(H(0))}{n} = \rho(G) = lim_{n\to\infty}\frac{H\circ F^n(0)-F^n(0)}{n} + \rho(F) + l$

下证$lim_{n\to\infty}\frac{H\circ F^n(0)-F^n(0)}{n} = 0$

由于H微分同胚，则$H(x)-x$为1-周期函数

$\Rightarrow |H(x)-x|$有界$\Rightarrow |H(x)-x| \leq 1 \Rightarrow lim_{n\to\infty}\frac{H\circ F^n(0)-F^n(0)}{n} = 0$

从而$\rho(G) = \rho(F)+l \Rightarrow \rho(G) \quad mod \quad 1 = \rho(F) \quad mod \quad 1+l \quad mod \quad 1$

$\Rightarrow \rho(g) = \rho(f)$ □

Proposition 6 $\rho(f)$为有理数$\Leftrightarrow f$有周期点

Proof

"$\Leftarrow$" $\exists x, s.t. \quad f^N(x) = x$在$S^1$中，即$F^N(x) = x+M$

$\rho(F) = lim_{n\to\infty}\frac{F^{nN}(x_0)}{nN} = lim_{n\to\infty}\frac{Mn+x_0}{nN} = \frac{M}{N}$

$\Rightarrow \rho(f) = \rho(F)mod \quad 1$为有理数

"$\Rightarrow$" 设$\rho(f) = \frac{M}{N}$，要证$f^N(x)$有不动点

反证：设$g(x) = f^N(x)$无不动点，即$l < G(x)-x < l+1$

$\Rightarrow l < \alpha \leq G(x)-x \leq \beta < l+1$

$\Rightarrow l < \alpha \leq G^2(x)-G(x) \leq \beta < l+1$

$\Rightarrow l < \alpha \leq G^n(x)-G^{n-1}(x) \leq \beta < l+1$

求和得：$nl \leq G^n(x)-x \leq nl+n \Rightarrow lim_{n\to\infty}\frac{nl}{n} \leq lim_{n\to\infty}\frac{G^n(x)-x}{n} \leq lim_{n\to\infty}\frac{nl+n}{n}$

$\Rightarrow l < \rho(G) < l+1 \Rightarrow \rho(g) \neq 0$

又$g(x) = f^N(x) \Rightarrow \rho(G) = \rho(f^N) = N\rho(f)mod \quad 1 = Mmod \quad 1 = 0$

矛盾，从而$f^N(x)$有不动点，故f有周期点

$\square$

Proposition 7 f有周期点，则$\exists M, (M,N)=1$，使得$\rho(f)=\dfrac{M}{N}$

$\Rightarrow Per(f)=\{N\}$即只有N周期点

3 Ω 集的分析

Definition 4 （**游荡点**）

设$f: M \to M, x \in M$，$\exists x \in U, s.t. f^n(U) \bigcap U = \varnothing$，则$x$称为游荡点.

Definition 5 （**非游荡点**）

x的任意邻域U，$f^n(U) \bigcap U = \varnothing$，则$x$称为非游荡点.

Definition 6 （**Ω集**）

非游荡点的集合称为非游荡集，记为Ω集.

Example 1 若$\rho(f) = \dfrac{M}{N}, \Rightarrow x_1, x_2, \cdots, x_N.$，其中$f(x_i) = x_{i+1}, f(x_N) = x_1, i = 1, \cdots, n-1$，则$x_1, x_2, \cdots, x_N$为非游荡点.

$Per(f) \subseteq \Omega(f)$.

Theorem 5 若$Per(f) \neq (\Leftrightarrow \rho(f) = \dfrac{M}{N})$，则$\Omega(f) = Per(f)$.

Proof

由于$Per(f)$为闭集，则$S^1 \setminus Per(f)$为开集，又开集能够分解成开区间的并，则设$(\alpha, \beta) \subset S^1 \setminus Per(f)$.

取$\alpha, \beta \in Per(f) \Rightarrow (\alpha, \beta)$为$S^1 \setminus Per(f)$中最大的区间

从而$f^n((\alpha, \beta)) \bigcap (\alpha, \beta) = \varnothing (n = 1, \cdots, N-1), f^N((\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta)$

$\forall x \in (\alpha, \beta), f^N(x) > x$或$f^N(x) < x$

不妨设$f^N(x) > x$，则$f^{kN}(x) > \cdots > f^{2N}(x) > f^N(x) > x$

依单调有界原理，知$lim_{k \to \infty} f^{kN}(x) = \alpha \Rightarrow x$为游荡点.

$\Rightarrow S^1 \setminus Per(f)$里的点都是游荡点$\Rightarrow Per(f)$都是非游荡点

$\Rightarrow Per(f) \subseteq \Omega(f) \Rightarrow Per(f) = \Omega(f)$. □

Remark 3 $\rho(f)$为无理数$\Leftrightarrow Per(f) = \varnothing$.

Example 2 $F(x)=x+\alpha$（α为无理数），$\Omega(f)=S^1$.

Lemma 1 $Per(f)=\varnothing$，设Λ为闭非空不变集，(α,β)为Λ的余集区间，则$\omega(x)\subset\Lambda$，对$\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Proof

由于Λ为闭非空不变集，则$f^1(\Lambda)\subset\Lambda\Rightarrow f^n((\alpha,\beta))$仍为$\Lambda$的余区间

且$f^i((\alpha,\beta))\bigcap f^j((\alpha,\beta))=\varnothing(i\neq j)$，否则有$f^{i-j}((\alpha,\beta))=(\alpha,\beta)$与$Per(f)=\varnothing$矛盾

令$I=(\alpha,\beta)$，则有$I,f(I),f^2(I),\cdots,f^n(I),\cdots$

由$f^i(I)\bigcap f^j(I)=\varnothing(i\neq j)\Rightarrow|f^n(I)|\to 0(n\to\infty)$

$\Rightarrow\forall x\in(\alpha,\beta),\{f^n(x)\}$与$\{f^n(\alpha)\}$有相同的极限点

$\Rightarrow\omega(x)=\omega(\alpha)\subset\Lambda\Rightarrow\omega(x)\subset\Lambda.$ □

Theorem 6 设$Per(f)=\varnothing$，则：*(i)*$\Omega(f)=\omega(x)=\alpha(x)(\forall x\in S^1)$

(ii)$\Omega(f)$为极小不变集

(iii)$\Omega(f)$或为S^1，或是S^1的无处稠密的完全集（***Cantor***集）

Proof

(i)

依**lemma 1**，令$\Lambda=\omega(x)$，对$\forall y\in S^1\setminus\omega(x)$，有$\omega(y)\subseteq\Lambda=\omega(x)$

$\Rightarrow y$为游荡点$\Rightarrow\Omega=S^1\setminus S^1\setminus\omega(x)\subseteq\omega(x)$

又$\omega(x)\subseteq\Omega\Rightarrow\Omega(f)=\omega(x)$

(ii)

设$A\subset\Omega(f)$，A为闭的不变非空集，取$y\in A,\omega(y)\subseteq A$

又$\Omega(f)=\omega(y)\subseteq A\Rightarrow\Omega(f)=A$

(iii)

设$\Omega \neq S^1, f(\Omega) = \Omega$（$\Omega$为不变集）$f(\partial\Omega) = \partial\Omega$（闭集）

$\Rightarrow \partial\Omega \subset \Omega$为闭的非空不变

由(ii)知，$\partial\Omega = \Omega \Rightarrow \Omega$无内点$\Rightarrow \Omega$是$S^1$的无处稠密集.

下证Ω为完全集.

设$y \in \Omega, \omega(y) \subseteq \Omega$，又$\Omega = \omega(y) \subseteq \Omega \Rightarrow y \in \omega(y), f^i(y) \in \Omega(\forall i)$

$\exists f^{n_i}(y) \to y(n_i \to \infty) \Rightarrow y$ 非孤立点$\Rightarrow \Omega$为完全集.

$\square$

4 *Denjoy*定理

Definition 7 （遍历）

若$\Omega(f)=S^1$，则称f为遍历的.

Lemma 2 $Pef(f)=\varnothing, x\in S^1, \{f^n(x)\}$，对$n,m\in\mathbb{Z}, m\neq n, [f^m(x), f^n(x)]$

$\forall y\in S^1, \{f^n(y)\}, \exists r, s.t. f^r(y)\in[f^m(x), f^n(x)]$

Proof 令$I=[f^m(x), f^n(x)]$，以$f^{k(n-m)}$依次作用于I，得$I, f^{(n-m)}(I), \cdots, f^{k(n-m)}(I), \cdots$首尾相接

若$y\in f^{k_0(n-m)}(I)\Rightarrow f^{-k_0(n-m)}(y)\in I$. 否则：

$f^{k(n-m)}(f^m(x))\to x^{(}*)$（单调有界）$\Rightarrow f^{(n-m)}(f^{(k-1)(n-m)+m}(x))\to x^*$

$\Rightarrow f^{(k-1)(n-m)+m}(x)\to x^*(k\to\infty)$

$\Rightarrow f^{k(n-m)+m}(x)\to f^{(n-m)}(x^*)(k\to\infty)$

$\Rightarrow f^{(n-m)}(x^*)=x^*$，存在不动点与$Per(f)=\infty$矛盾.

$\Rightarrow \exists r, s.t. f^r(y)\in[f^m(x), f^n(x)]$ □

Lemma 3 设$Per(f)=\varnothing, p_0\in S^1, p_j=f^j(p_0)$，则对$\forall N, \exists n>N, s.t.$对$S^1$的适当定向，有

$(A_k):(p_{-k}, p_{n-k})\bigcap\{p_{-n},\cdots,p_0,\cdots,p_{n-1}\}=\varnothing$

即$[p_0,p_n],\cdots,[p_{-n},p_1]$两两不相交

$(B_k):(p_k, p_{n-k})\bigcap\{p_{-n},\cdots,p_0,\cdots,p_{n-1}\}=\varnothing$

Proof

$\{p_{-N},\cdots,p_{-1},p_0,p_1,\cdots,p_{N-1}\}$设$p_m$与$p_0$最近

由**lemma 2**知，$\exists r, s.t. p_r\in[p_0,p_m](r>N)$

在$\{p_{-r},\cdots,p_{-1},p_0,p_1,\cdots,p_{r-1}\}$中取$p_s$与$p_0$ 最近，取$n=|s|$，设$s>0$

显然(A_0):$(p_0,p_n)\bigcap\{p_{-n},\cdots,p_0,\cdots,p_{n-1}\}=\varnothing$

数学归纳：设A_l成立，即：$(p_{-l},p_{n-l})\bigcap\{p_{-n},\cdots,p_0,\cdots,p_{n-1}\}=\varnothing$

作用-1：$(p_{-l-1},p_{n-l-1})\bigcap\{p_{-n-1},\cdots,p_0,\cdots,p_{n-2}\}=\varnothing$ 下证：$p_{n-1}\notin(p_{-l-1},p_{n-l-1})$

反证：若$p_{n-1}\in(p_{-l-1},p_{n-l-1})$则$p_{-l-1}\in(p_{-1},p_{n-1})\Rightarrow p_{-l}\notin(p_0,p_n)$

由于p_n离p_0最近，则矛盾. 从而，$p_{n-1}\notin(p_{-l-1},p_{n-l-1})$

结论成立. □

Theorem 7 （**Denjoy定理**）

设$f:S^1\to S^1$,同胚，C^1,$\rho(f)$为无理数.$F(x)=x+\varphi(x),F'(x)>0,F'(x)$为有界变差函数.则$f:S^1\to S^1$ 是遍历的，即$S^1=\Omega(f)$.

Proof

反证：设$\Omega(f)\neq S^1$,设I_0为$S^1\backslash\Omega(f)$的一个余子区间 有$\cdots,I_{-n},\cdots,I_{-1},I_0,I_1,\cdots,I_n,\cdots$其中$I_n=f^n(I_0)$两两不相交$\Rightarrow|I_n|\to 0(n\to\infty)$

下证：$|I_n|+|I_{-n}|>\delta>0$

$I_n=F^n(I_)$（提升），$|I_n|=\int_{I_0}(F^n)'dx\Rightarrow|I_n|+|I_{-n}|=\int_{I_0}((F^n)'+(F^{-n})')dx$

由于：$(F^n(x))'=(F(F\cdots F(x)))'=F'(x_{n-1})F'(x_{n-2})\cdots F'(x_0)(F^{-n}(x))'=$
$\dfrac{1}{F'(x_{-n})\cdots F'(x_{-1})}$

又：$(F^n(x))'+(F^{-n}(x))'\geq 2\sqrt{(F^n(x))'(F^{-n}(x))}$

$\Rightarrow (F^n(x))'+(F^{-n}(x))'\geq 2\sqrt{\dfrac{F'(x_{n-1})F'(x_{n-2})\cdots F'(x_0)}{F'(x_{-n})\cdots F'(x_0)}}$

对根号下式子取对数：$ln(F'(x_{n-1}))+\cdots+ln(F'(x_0))-ln(F'(x_{-n}))-\cdots-ln(F'(x_{-1}))$

下说明：$|ln(F'(x_{n-1}))+\cdots+ln(F'(x_0))-ln(F'(x_{-n}))-\cdots-ln(F'(x_{-1}))|<M$

令$\psi(x)=ln(F'(x))$为有界变差函数

依*Lemma 3*知：有$[x_{-1},x_{n-1}],\cdots,[x_{_n},x_0]$两两不相交.

$|\psi(x_{n-1})-\psi(x_1)+\cdots+\psi(x_0)-\psi(x_{-n})|<BV(\psi)$（有界变差）

从而：$\Omega(f) = S^1$ $\square$

Lemma 4 若$\Omega(f) = S^1, F^k(0) + m|k, m \in \mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$上稠密

Lemma 5 若$\Omega(f) = S^1, k\rho + m|k, m \in \mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$上稠密

Lemma 6 $\rho(f)$为无理数，$f : S^1 \to S^1, F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \rho = \rho(F)$

令$A = F^k(0) + m|k, m \in \mathbb{Z}, B = k\rho + m|k, m \in \mathbb{Z}$

定义：$H : F^k(0) + m \in A \to k\rho + m \in B$,则：

(i)H是保序的满映射，且$H(a + 1) = H(a) + 1, \forall a \in A$

(ii)$H : A \to B$是连续映射

(iii)H可唯一地扩充为连续映射：$H : R \to R$,扩充后的映射仍为保序的，满的，从而是一个同胚.

*(iv)*扩充后的映射：$H : R \to R$,仍满足$H(x + 1) = H(x) + 1 \forall x \in \mathbb{R}$

Proof

(i)

$H(a + 1) = H(F^k(0) + m + 1) = k\rho + m + 1 = H(a) + 1$

设$F^k(0) + m < F^l(0) + n$,要证：$k\rho + m < l\rho + n$

$F^{-l}(F^k(0) + m) < F^{-l}(F^l(0) + n) \Rightarrow F^{k-l}(0) + m < n$

$\Rightarrow F^{k-l}(0) < n - m \Rightarrow \dfrac{F^{k-l}(0)}{k - l} < \dfrac{n - m}{k - l}(k - l > 0)$
$\Rightarrow \dfrac{F^{p(k-l)}(0)}{p(k - l)} < \dfrac{n - m}{k - l}(k - l > 0) \Rightarrow lim_{p\to\infty}\dfrac{F^{p(k-l)}(0)}{p(k - l)} = \rho < \dfrac{n - m}{k - l} \Rightarrow \rho(k - l) < n - m \Rightarrow \rho k + m < \rho l + n$

$\square$

Theorem 8 **（Denjoy定理）**[1]

设$f : S^1 \to S^1$,同胚，C^1,$\rho(f)$为无理数.$F(x) = x + \varphi(x), F'(x) > 0, F'(x)$为有界变差函数.则$f \sim R_\rho$（拓扑共轭），其中$\rho$为$f$的旋转数.

[1]详细证明见《微分动力系统原理》（张筑生）

Proof

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists a_n | a_n \in A, a_n \to x, H(x) \triangleq lim_{n\to\infty} H(a_n), x = F^k(0) + m \in A$

左边：$H \circ F(F^k(0) + m) = H \circ (F^{k+1}(0) + m) = (k+1)\rho + m = k\rho + m + \rho$

右边：$R_\rho \circ H(F^k(0) + m) = R_\rho(k\rho + m) = k\rho + m + \rho$

$\Rightarrow H \circ F = R_\rho \circ H$

$\Rightarrow h \circ f = R_\rho \circ h$ $\square$

对$Denjoy$定理中条件：

$F:\theta\to\theta+\rho+\varphi(\theta),\rho(F)=\rho$（旋转数） 现要求条件：

(i)

F解析，即$\varphi(\theta)$实解析

Remark 4 $\varphi(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_k e^{i2\pi k\theta}\quad\theta\in\mathbb{R}$

$\overline{\varphi(\theta)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi_k}e^{-i2\pi k\theta}\varphi(\theta)=\overline{\varphi(\theta)},\Rightarrow\overline{\varphi_k}=\varphi_{-k}$

依Fouier分析知：$\varphi_k=\int_0^1\varphi(\theta)e^{i2\pi k\theta}d\theta$

$\varphi(\theta)$解析

$\Leftrightarrow\exists c,r>0,s.t.|\varphi_k|<ce^{-|k|r}$

$\Leftrightarrow\exists r,s.t.\varphi(theta)$在$|Im\theta|<\rho$上处处可导

$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^b$解析$\Leftrightarrow|a_k|\le r^{-k}(k!)^{-1}$

(ii)

ρ满足：$\exists K,c>0,s.t.|\rho-\dfrac{p}{q}|>\dfrac{K}{|q|^{2+c}},\forall p\neq q$成立（$p$为无理数）

称ρ为(K,c)型$Diophantine$数，等价于$q_{n+1}\le Mq_1^{\tau}$

$\Omega(K,c)\triangleq\{\rho\in[0,1)|\rho$为 (K,c) 型 $Diophantine$ 数$\}$

且有性质：$|\bigcup_{K>0}\Omega(K,c)|=1$测度.

(iii)

加扰动：$F:\theta\to\theta+\rho+\varepsilon\varphi(\theta)$

Theorem 9 **（Arnold定理）**[2]

设圆周同胚.$F:x\to x+\rho+\varepsilon\varphi(x)$,满足：

(i)$\rho(F)=\rho$

(ii)$\varphi(x)$在$|Imx|<r$上解析

[2]证明思想为著名的***KAM***理论

(iii)ρ为Diophantine数,$|k\rho+l|>\dfrac{\gamma}{(|k|+1)^{\tau}}$对$\forall k,l\in\mathbb{Z}$成立.

则当ε充分小时（依赖于γ,l,τ）有f解析共轭与R_ρ（$x\to x+\rho$）.

Proof

要找h解析，使得

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{F} & S^1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S^1 & \xrightarrow{R_\rho} & S^1 \end{array}$$

图可交换，即$R_\rho\circ h=h\circ F$

对于$R_\rho\circ h(x)=h\circ F(x)$

令$h(x)=x+\varphi(x)$,则$h\circ F(x)=h(x+\rho+\varepsilon\varphi(x))=x+\rho+\varepsilon\varphi(x)+\psi(x+\rho+\varepsilon\varphi(x))$

又$R_\rho\circ h(x)=h(x)+\rho=x+\psi(x)+\rho$

从而证明$\varepsilon\varphi(x)+\psi(x+\rho+\varepsilon\varphi(x))=\psi(x)$即可

即找$\psi(x),s.t.\varepsilon\varphi(x)+\psi(x+\rho+\varepsilon\varphi(x))=\psi(x)$

对$\psi(x+\rho+\varepsilon\varphi(x))$进行*Taylor*展开得：

$\psi(x)=\psi(x+\rho)+\psi'(x+\rho)\varepsilon\varphi(x)+\dfrac{1}{2!}\psi''(x+\rho)(\varepsilon\varphi(x))^2+\cdots+\varepsilon\varphi(x)$

先解：$\psi(x)=\psi(x+\rho)+\varepsilon\varphi(x)$

由$\psi(x),\varphi(x)$均为1-周期函数，对$\psi(x),\varphi(x)$进行*Fourier*展开：

$\psi(x)=\sum\psi_k e^{i2\pi kx}$

$\varphi(x)=\sum\varphi_k e^{i2\pi kx}$

代入：$\sum\psi_k e^{i2\pi kx}=\sum\psi_k e^{i2\pi k(x+\rho)}+\varepsilon\sum\varphi_k e^{i2\pi kx}$

$\Rightarrow\sum(1-e^{i2\pi k\rho})\psi_k e^{i2\pi kx}=\varepsilon\sum\varphi_k e^{i2\pi kx}$

$\Leftrightarrow(1-e^{i2\pi k\rho})\psi_k=\varepsilon_k\quad k\in\mathbb{Z}^1$

$\Leftrightarrow\psi_k=\varepsilon\dfrac{\varphi_k}{1-e^{i2\pi k\rho}}$（$k\neq0,\rho$为无理数）

则$\psi(x)=\varepsilon\sum\dfrac{\varphi_k}{1-e^{i2\pi k\rho}}e^{i2\pi kx}$

由假设条件（解析），知$|\varphi_k|<e^{-|k|r}\parallel\varphi\parallel_r$

又$|e^{i2\pi k\rho}-1|=|cos(2\pi k\rho)+isin(2\pi k\rho)-1|\geq|cos(2\pi k\rho)-1|$

$\geq|k\rho|_{\mathbb{Z}^1}\geq\dfrac{\gamma}{(|k|+1)^\tau}$

$\Rightarrow|\psi_k|\leq e^{-|k|r}\gamma^{-1}(|k|+1)^\tau\parallel\varphi\parallel_r$

$=\gamma^{-1}e^{-|k|r'}e^{-|k|(r-r')}(|k|+1)^\tau\quad(r'<r)$

$\leq\gamma^{-1}e^{-|k|r'}\dfrac{1}{(r-r')^{\tau+2}}\parallel\varphi\parallel_r$

$\Rightarrow\parallel\psi\parallel_{r'}\leq\gamma^{-1}\dfrac{1}{(r-r')^{\tau+2}}\parallel\varphi\parallel_r$

有一引理：设$F_n=x+\rho+\varphi_n(x)$,令$\varepsilon_n=\varepsilon_0^{(\frac{3}{2})^2}$,$r_n=\dfrac{1}{2}r+\dfrac{1}{2^n}r$

$\parallel\varphi_n\parallel_{r_n}\leq\varepsilon_n$,则$\exists h_{n+1}(x)=x+\psi_{n+1}(x),s.t.\parallel R_\rho\circ h_n-h_n\circ F\parallel_{r_{n+1}}\leq\varepsilon_{n+1}$

则$h=lim_{n\to\infty}h_n\circ\cdots\circ h_1$将$F$共轭到$R_\rho$中. □

Remark 5 思想为动力系统中著名的KAM理论

Theorem 10 **（Bruno定理）**

设圆周同胚.$F:x\to x+\rho+\varepsilon\varphi(x)$,满足：

(i)$\rho(F)=\rho$

(ii)$\varphi(x)$在$|Imx|<r$上解析

(iii)ρ满足Bruno条件：存在ρ的最优逼近$\{\dfrac{p_n}{q_n}\}$.且$\exists M>0,s.t.\sum_n\dfrac{ln(q_{n+1})}{q_n}<M$

则F解析线性化.

Theorem 11 **（Yoccoz定理）**

设圆周同胚.$F:x\to x+\rho+\varphi(x)$,满足：

(i)$\rho(F)=\rho$

(ii)$\varphi(x)$在$|Imx|<r$上解析

(iii)ρ介于Diophantine条件与Bruno条件之间的条件

则F解析线性化.

Remark 6 关于Arnold定理,Bruno定理,Yoccoz定理的详细证明参见：

Geometrical methods in the theory of Ordinary Differential Equation(Arnold)