常微分方程笔记-初等积分法[*]

Zhou Qi

1 初等积分法的理论

1.1 恰当方程

Definition 1.1 对于对称形式的一阶微分方程：

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0 \tag{1}$$

若存在一个可微函数$\Phi\left(x,y\right)$，使得它的全微分为：

$$d\Phi\left(x,y\right)=P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$$

即：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P\left(x,y\right),\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q\left(x,y\right) \tag{2}$$

则称*1*式为**恰当方程**或**全微分方程**.

当1式为恰当方程时，则有

$$d\Phi\left(x,y\right)=P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0$$

从而

$$\Phi\left(x,y\right)=C$$

即为1的通积分.如果能够常数C，那么就可以求解出方程1，显然常数C取决于一些初值.

Question:

（1）如何判断给定微分方程是否为恰当方程.

（2）若为恰当方程，如何求解全微分的原函数.

Theorem 1.1 设函数$P\left(x,y\right),Q\left(x,y\right)$在区域

$$R:\quad \alpha<x<\beta,\gamma<y<\delta$$

[*]参考《常微分方程教程》（丁同仁，李承治）

上连续，且有连续的一阶偏导数$\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 与$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则一阶微分方程*1* 为恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}\left(x,y\right)\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x,y\right)\tag{3}$$

在R内成立，*1*的通积分为

$$\int_{x_0}^{x}P\left(x,y\right)dx+\int_{y_0}^{y}Q\left(x_0,y\right)dy=C$$

或

$$\int_{x_0}^{x}P\left(x,y_0\right)dx+\int_{y_0}^{y}Q\left(x,y\right)dy=C$$

其中(x_0,y_0)在R中任一点.

Proof

必要性：设方程1是恰当方程，则存在函数$\Phi\left(x,y\right)$满足

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P\left(x,y\right),\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q\left(x,y\right)$$

对第一式关于y求偏导，对第二式关于x求偏导，得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}$与$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$是连续的，故$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$是连续的，故$\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$，从而

$$\frac{\partial P}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x,y\right)$$

充分性：设P,Q满足3式，现在构造可微函数$\Phi\left(x,y\right)$，使得2式成立.
为使2中第一式成立：

$$\Phi\left(x,y\right)=\int_{x_0}^{x}P\left(x,y\right)dx+\psi\left(y\right)\tag{4}$$

为使适合2中第二式：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P\left(x,y\right)dx+\psi'\left(y\right)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}P\left(x,y\right)dx+\psi'\left(y\right)$$

由3式知：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}Q\left(x,y\right)dx+\psi'\left(y\right)=Q\left(x,y\right)-Q\left(x_0,y\right)+\psi'\left(y\right)$$

显然只需令$\psi'\left(y\right)=Q\left(x_0,y\right)$，2中第二式成立.从而

$$\psi\left(y\right)=\int_{y_0}^{y}Q\left(x_0,y\right)dy$$

故得函数

$$\Psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy \tag{5}$$

得到通积分：

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy=C$$

□

Remark 1 关于***Theorem****1.1*的充分性的证明即为求解恰当方程的思路.

Example 1 求解微分方程：

$$\left(2x\sin y+3x^2y\right)dx+\left(x^3+x^2\cos y+y^2\right)dy=0$$

Remark 2 对于一类特殊的恰当方程，可使用凑微分法，比如 ***Example****1*
给出分组凑微分的一些结论：

$$ydx+xdy=d(xy)$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-ydx+xdy}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{ydx-xdy}{xy}=d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

Remark 3 求解恰当方程的关键是构造相应全微分的原函数$\Phi(x,y)$，也就是场论中的位势问题.
在单连通区域R上，条件*3*保证了曲线积分

$$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

与积分的路径无关，从而上式确定了一个单值函数.

1.2 变量分离的方程

Definition 1.2 若微分方程

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{6}$$

中的函数$P(x,y),Q(x,y)$均可表示为x的函数与y的函数的乘积，则称为**变量分离方程**.

由**Definition**知，可令

$$P(x,y)=X(x)Y_1(y),Q(x,y)=X_1(x)Y(y)$$

则6式可写为

$$X\left(x\right)Y_1\left(y\right)dx+X_1\left(x\right)Y\left(y\right)dy=0 \tag{7}$$

考虑特殊情形:$P=X\left(x\right),Q=Y\left(y\right)$.
6式可写为：

$$X\left(x\right)dx+Y\left(y\right)dy=0 \tag{8}$$

易验证其为恰当方程，则它的通积分为：

$$\int X\left(x\right)dx+\int Y\left(y\right)dy=C \tag{9}$$

对于一般情形：
将6式写为：

$$\frac{X\left(x\right)}{X_1\left(x\right)}dx+\frac{Y\left(y\right)}{Y_1\left(y\right)}dy=0 \tag{10}$$

显然也是恰当方程8式，且满足，故它的通积分为：

$$\int\frac{X\left(x\right)}{X_1\left(x\right)}dx+\int\frac{Y\left(y\right)}{Y_1\left(y\right)}dy=C \tag{11}$$

Remark 4 *10式与7式并不等价.因为取决于$X_1(x)Y_1(y)$是否为0*
若$X_1(x)Y_1(y)\neq 0$，则方程同解.
若$X_1(x)Y_1(y)=0$，则有实数a，使得$X_1(a)=0$，或有实数b，使得$Y_1(b)=0$，显然$x=a$或$y=b$满足方程7.即$x=a$ 或$y=b$ 是方程7的解或并非10的解.称这种解为方程7的特解.从而需要注意，使用变量分离法后，还需要加上一些特殊的解.

Example 2 求解微分方程：

$$(x^2+1)(y^2-1)dx+xydy=0$$

1.3 一阶线性方程

讨论一阶线性方程：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{12}$$

其中$p(x),q(x)$在区间$I=(a,b)$上连续.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \tag{13}$$

称为12式得齐次线性微分方程.

下讨论齐次一阶线性微分方程的解法：

$$dy+p(x)ydx=0$$

若$y \neq 0$时$\Longrightarrow$

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

对此积分得

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

由于$y \neq 0$，故$C \neq 0$.当$C = 0$时对应方程的特解$y = 0$.故 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$为通解.
现讨论非齐次一阶非线性微分方程的解法：

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx$$

等式两边同时乘以因子$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ 得：

$$e^{\int p(x)dx}dy + e^{\int p(x)dx}p(x)ydx = e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

显然全微分是：

$$d\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = d\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$\Longrightarrow$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

得到通解：

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

上述方法即为积分因子法.

把通解可以写成：

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(C + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}ds\right)$$

从而得到初值问题

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), y\left(x_0\right) = y_0 \tag{14}$$

解为：

$$y = y_0e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{s}^{x} p(t)dt}ds \tag{15}$$

其中$p(x), q(x)$在区间I上连续.

Example 3 求解微分方程：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3 \quad (x \neq 0)$$

现给出一阶线性方程的另一种解法：常数变易法

设一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

有形如$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$的解，则有

$$\frac{dy}{dx}=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

"$\Longrightarrow$"

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

则有

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C$$

故

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

Remark 5 常数变易法在后面的微分方程组会使用到.

给出线性微分方程的几个性质：

Proposition 1.1 齐次线性微分方程13的解或者恒等于零，或者恒不等于零.

Proposition 1.2 线性方程的解是整体存在的，即方程12或13的任一解都是$p(x),q(x)$有定义且连续的整个区间I上存在.

Proposition 1.3 齐次线性方程13的任何解的线性组合仍是它的解，齐次线性方程13的任一解与非齐次线性方程12的任一解之和是非齐次线性方程12的解，非齐次线性方程12的任意两解之差必是相应齐次微分方程13的解.

Proposition 1.4 非齐次线性方程12的任一解与相应齐次线性方程13 的通解之和构成非齐次线性方程12的通解.

Proposition 1.5 线性方程的初值问题14的解存在且唯一.

1.4 初等变换法

对于一些微分方程，我们能够进行适当的初等变换转化为变量分离方程或一阶线性方程.

齐次方程：

Definition 1.3 （**齐次方程**） 若微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{16}$$

中的函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$都是x和y的同次齐次函数，即

$$P(tx,ty)=t^mP(x,y),Q(tx,ty)=t^mQ(x,y) \tag{17}$$

则称方程16为**齐次方程**.

对于方程16，进行变量替换

$$y = ux$$

又$P(x,y), Q(x,y)$为x和y的同次齐次函数，从而有

$$\begin{cases} P(x,y) = P(x,ux) = x^m P(1,u) \\ Q(x,y) = Q(x,ux) = x^m Q(1,u) \end{cases}$$

从而方程16转化为**变量分离方程**

$$x^m \left(P(1,u) + uQ(1,u)\right) dx + x^{m-1} Q(1,u) du = 0 \tag{18}$$

Remark 6 对方程16进行变形：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

由于$P(x,y), Q(x,y)$为x和y的同次齐次函数，则方程16等价于

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Remark 7 $x = 0$为方程18的特解，而不一定是16的解，这是由于变量替换不一定可逆.

Example 4 讨论形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$$

的方程的求解法.其中a, b, c, m, n, l均为常数.

Solution 当$c = l = 0$时，显然为齐次方程，进行变换：$y = ux$，可进行求解.
当$\Delta = an - bm \neq 0$时，则对于方程组

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx + ny + l = 0 \end{cases}$$

有唯一解，设为α, β，即为

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ m\alpha + n\beta + l = 0 \end{cases}$$

取自变量和未知函数的平移变换，目的在于找一个变换使得，变换后的方程无常数项（齐次）

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$$

则原方程可转化为关于ξ,η的方程：

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{m\xi+n\eta}\right)$$

显然为一个齐次方程，进行变换：$\eta=u\xi$，可进行求解.

当$\Delta=an-bm=0$时，从而有$\dfrac{m}{a}=\dfrac{n}{b}=\lambda$，则原方程转化为：

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+l}\right)$$

令$v=ax+by$，从而方程转化为：

$$\frac{dv}{dx}=a+bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+l}\right)$$

显然为一个变量分离方程. □

Bernoulli方程

Definition 1.4 （***Bernoulli*方程**） 形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \tag{19}$$

的方程称为***Bernoulli*方程**.

当$n=0$时，即为$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$，一阶线性微分方程.

当$n=1$时，即为$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y$，变量分离方程.

当$n=2,3,\cdots$时，方程两边同乘以$(1-n)y^{-n}$，即得：

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{1-n}p(x)=(1-n)q(x)$$

令$z=y^{1-n}$，则有关于未知函数z的微分方程：

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$

显然为一个一阶线性微分方程.

Riccati方程

Definition 1.5 （***Riccati*方程**） 若一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的右端函数$f(x,y)$是一个关于y的二次多项式，可写为

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{20}$$

其中函数$p(x),q(x),r(x)$在区间I上连续，且$p(x)$不恒为0，称方程20为***Riccati*方程**.

Remark 8 一般的***Riccati*方程**不能使用初等积分法求解.

Theorem 1.2 假设***Riccati*方程**20已知一个特解$y=\varphi_1(x)$，则可用积分法求得它的通解.

Proof 对20作变换：$y=u+\varphi_1(x)$，其中u为新的未知函数，代入方程20得：

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dx}=p(x)[u^2+2\varphi_1(x)u+\varphi_1^2(x)]+q(x)[u+\varphi_1(x)]+r(x)$$

由于$y=\varphi_1(x)$是20的解，从而有微分方程

$$\frac{du}{dx}=[2p(x)\varphi_1(x)+q(x)]u+p(x)u^2$$

显然是一个**Bernoulli方程**，那么可得. □

Theorem 1.3 可将二阶微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

化为一个***Riccati*方程**.

Proof 当$y=0$时，显然为方程的一个特解.
当$y\neq 0$时，令$u=\dfrac{y'}{y}$，则

$$u'=\frac{y''y-y'^2}{y^2}=\frac{y''}{y}-u^2=\frac{-p(x)y'-q(x)y}{y}-u^2=-p(x)u-q(x)-u^2=-u^2-p(x)u-q(x)$$

显然为一个**Riccati方程**. □

Theorem 1.4 设***Riccati*方程**为

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m \tag{21}$$

其中$a\neq 0,b,m$都是常数，又设$x\neq 0$和$y\neq 0$，则当

$$m=0,-2,\frac{-4k}{2k+1},\frac{-4k}{2k-1}(k=1,2=,\cdots) \tag{22}$$

时，方程21可通过适当的变换化为**变量分离方程**.

Proof 对自变量可进行变换$\overline{x}=ax$，从而不妨设$a=1$，则有方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=bx^m \tag{23}$$

当$m=0$时，23即为一个变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=b-y^2$$

当$m=-2$时，作变换$z=xy$，其中z为新未知函数，则23 可转化 为

$$\frac{dz}{dx}=\frac{b+z-z^2}{x}$$

显然是一个变量分离方程

当$m=\dfrac{-4k}{2k+1}$时，作变换

$$x=\xi^{\frac{1}{m+1}},y=\frac{b}{m+1}\eta^{-1}$$

其中ξ为新的自变量，η为新的未知函数，则23可转化为

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{b}{(m+1)^2}\xi^n$$

其中$n=\dfrac{-4k}{2k-1}$，作变换

$$\xi=\frac{1}{t},\eta=t-zt^2$$

其中t为新的自变量，z为新的未知函数，则23可转化为

$$\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{b}{(m+1)^2}t^l$$

其中$l=\dfrac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$

显然这与23的形式是相像的，根据m,l,k的关系，可知对上式进行k次这样的操作，可转化为$m=0$的情形，由上面的讨论可知23可转化为变量分离方程.

对于$m=\dfrac{-4k}{2k-1}$可进行相同的讨论，转化为$m=0$的情形. □

对上面的论述做一个总结：

对于方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{24}$$

若方程24为恰当方程，则它的通积分为

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$$

若方程24具有变量分离的形式，即

$$X(x)Y_1(y)dx+X_1(x)Y(y)dy=0$$

等式两边同乘因子：$\mu(x,y)=\dfrac{1}{X_1(x)Y_1(y)}$，则有

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy=0$$

显然为一个恰当方程.

若方程24为一阶线性方程，即

$$dy + (p(x)y - q(x))dx = 0$$

等式两边同乘因子：$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$，则有

$$\left(e^{\int p(x)dx}dy + ye^{\int p(x)dx}p(x)dx\right) - q(x)e^{\int p(x)dx}dx = 0$$

显然为一个恰当方程.

1.5 积分因子法

Definition 1.6 （**积分因子法**） 对于方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{25}$$

若找到一可微的非零函数$\mu = \mu(x,y)$，使得

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{26}$$

为恰当方程，即

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{27}$$

称$\mu(x,y)$为方程*25*的**积分因子**.

Remark 9 *27*等价于一阶偏微分方程：

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu \tag{28}$$

即，求解积分因子，就是求*28*这一一阶偏微分方程，根据偏微分方程理论知，*28*的解是存在的，但是它的求解需用到*25* 式，那么这一思路是不可行的.

下讨论一特殊的积分因子:25有一个只与x有关的积分因子$\mu = \mu(x)$.

Theorem 1.5 微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

有一个只依赖于x的积分因子的充要条件是

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right) = G(x)$$

只依赖于x，而与y无关.且 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$的积分因子为： $\mu = e^{\int G(x)dx}$.

Proof

"$\Longrightarrow$" 设$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$有一个只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$.从而方程28写为

$$Q\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu$$

则

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$

左端显然只与x有关，从而右端也只与x有关，即

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$

只依赖于x，而与y无关.

"$\Longleftarrow$" 设

$$G(x)=\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$$

则有

$$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=G(x)$$

故

$$\mu(x)=e^{\int G(x)dx}$$

可验证$\mu(x)$为微分方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$的积分因子. □

同样地，

Theorem 1.6 微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

有一个只依赖于y的积分因子的充要条件是

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)=H(y)$$

只依赖于y，而与x无关.且$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$的积分因子为： $\mu(y)=e^{\int H(y)dy}$.

介绍另一种求积分因子的方法：分组求积分因子

Theorem 1.7 若$\mu=\mu(x,y)$是方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

的一个积分因子，使得

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$$

则$\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$也是微分方程的一个积分因子，其中$g(\dot{})$是任一可微的非零函数.

分组求积分因子的表述：

若微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

左端可以分为两组即

$$(P_1dx+Q_1dy)+(P_2dx+Q_2dy)=0$$

其中第一组和第二组分别有积分因子μ_1,μ_2，使得

$$\mu_1(P_1dx+Q_1dy)=d\Phi_1,\mu_2(P_2dx+Q_2dy)=d\Phi_2$$

依**Theorem 1.6**可知，函数$\mu_1 g_1(\Phi_1)$为第一组的积分因子，函数$\mu_2 g_2(\Phi_2)$为第二组的积分因子.若选取g_1,g_2使得$\mu_1 g_1(\Phi_1)=\mu_2 g_2(\Phi_2)$，则$\mu=\mu_1 g_1(\Phi_1)$为微分方程的一个积分因子.

2 一些定理的补充

关于初值问题的唯一性： 对于变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

在$g\neq 0$的区域，每一步推导都是等价的，则出现通解不包含所有解的情况只有在满足$g(y)=0$的$y=y^*$小邻域内才会出现，从而意味着存在x_0使得满足初值条件$y(x_0)=y^*$的解不唯一。故通解结合特解$y=y^*$是否包含所有解等价于初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)\\ y(x_0)=y_0\\ g(y_0)=0\end{cases}$$

的唯一性.

Theorem 2.1 **（唯一性定理）** 设微分方程$\dfrac{dy}{dx}=f(y)$，其中$f(y)$在$y=a$的某邻域（例如$|y-a|<\varepsilon$）内连续，而且$f(y)=0$当且仅当$y=a$，则在直线$y=a$上的每一点，方程$\dfrac{dy}{dx}=f(y)$的解是局部唯一的当且仅当瑕积分

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}\right|=\infty$$

Proof

"$\Longleftarrow$"显然$y=a$为微分方程的解，不妨设$y(x_0)=a$. 假设过$P(x_0,a)$点还有一个解$g(x)$，则存在x_1，满足$0<|g(x_1)-a|<\varepsilon$.不妨设$g(x_1)>a$，令$h=g(x_1)-a>0$，则有

$$\left|\int_a^{a+h}\frac{dy}{f(y)}\right|=\left|\int_{x_0}^{x_1}\frac{f(y)dx}{f(y)}\right|=\left|\int_{x_0}^{x_1}dx\right|=|x_1-x_0|<\infty$$

又

$$\infty=\left|\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}\right|\leq\left|\int_a^{a+h}\frac{dy}{f(y)}\right|+\left|\int_{a+h}^{a+\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}\right|<\infty$$

显然是矛盾的，故在直线$y=a$上的每一点，微分方程的解是局部唯一的.

"$\Longrightarrow$"由于在直线$y=a$上的每一点，微分方程的解是局部唯一，则在直线$y=a$上的每一点，微分方程的解都是$y=a$

假设

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}\right|<\infty$$

不妨设

$$\left|\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}\right|<\infty$$

令$g(x)=\int_a^x \frac{dy}{f(y)}$，从而 $g'(y)=\frac{1}{f(y)}\neq 0$，从而依 **隐函数存在性定理**知，$y$可由$g$表出，令$y=h(g)$.有

$$\frac{dh(g)}{dg}=\frac{\frac{dh(g)}{dy}}{\frac{dg}{dy}}=\frac{1}{g'(y)}=f(y)=f(h(g))$$

从而$h(x)$为微分方程$\frac{dy}{dx}=f(y)$的解，显然$h(x)$不恒为常数a，故矛盾.从而瑕积分发散. □

一般的：

Theorem 2.2 **（唯一性定理）** 考虑区域$\{(x,y)||x-x_0|\leq\alpha,|y-y_0|\leq\beta\}$上变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

f,g连续，假设$g(y)=0$当且仅当$y=y_0$，则：

*（1）*瑕积分$\int_{y_0^+}^{y_0+\beta}\frac{dy}{g(y)}$发 散，则方程的任何解要么恒大于$y_0$要么恒小于等于$y_0$，特别地，$y(x_0)>y_0$的解$y(x)>y_0$

*（2）*瑕积分$\int_{y_0-\beta}^{y_0^-}\frac{dy}{g(y)}$ 发散，则方程的任何解要么恒大于等于y_0要么恒小于y_0，特别地，$y(x_0)<y_0$的解$y(x)<y_0$

*（3）*若瑕积分 $\int_{y_0^+}^{y_0+\beta}\frac{dy}{g(y)}$，$\int_{y_0-\beta}^{y_0-}\frac{dy}{g(y)}$都发散，则满足$y(x_0)=y_0$的解唯一，$y(x)\equiv y_0$.

Proof 对（1）进行证明：反证法，若不然，则必然存在方程的一个解$y=\psi(x)$，以及x_1,x_2使得$\psi(x_2)\leq y_0,\psi(x_1)>y_0$，不失一般性，假设$x_1<x_2$，取

$$x_3=\inf\{x\in[x_1,x_2]|\psi(x)\leq y_0\}$$

则$\psi(x_3)=y_0,x_3>x_1$，且$\psi(x)>y_0,\forall x\in[x_1,x_3)$
依连续性，存在$x_4\in[x_1,x_3)$，使得$\psi'(x)\in(y_0,y_0+\beta],\forall x\in[x_4,x_3)$，因此$g(\psi(x))\neq 0,\forall x\in[x_4,x_3)$.
由于

$$\psi'(x)=f(x)g(\psi(x)),\forall x\in[x_4,x_3]\subset[x_1,x_2]$$

当$x\in[x_4,x_3]$时，$g(\psi(x))\neq 0$，从而

$$\frac{1}{g(\psi(x))}\psi'(x)=f(x),\forall x\in[x_4,x_3)$$

$$\int_{x_4}^{x_3-\delta}f(x)dx=\int_{x_4}^{x_3-\delta}\frac{1}{g(\psi(x))}\psi'(x)dx=\int_{\psi(x_4)}^{\psi(x_3-\delta)}\frac{1}{g(y)}dy$$

令$\delta\to 0^+$，上式左端收敛，右端发散，故矛盾. □

关于周期函数的一些定理及例子：

Theorem 2.3 设方程
$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{29}$$
其中$p(x)$和$q(x)$都是以$\omega>0$为周期的连续函数，则
（*1*）若$q(x)\equiv 0$，则方程*29*的任一非零解以ω为周期，当且仅当函数$p(x)$的平均值
$$\overline{p}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}p(x)dx=0$$
（*2*）若$q(x)\neq 0$，则方程*29*有唯一的ω周期解，当且仅当$\overline{p}\neq 0$.

Proof
（1）方程$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$的解为$y=Ce^{-\int p(x)dx}\rightarrow y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.
“$\Longrightarrow$”由于方程29任一非零解以ω为周期，从而有$y(x+\omega)=y(x)$成立，故
$$e^{-\int_{x_0}^{x+\omega}p(t)dt}=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$
$\Longrightarrow$
$$e^{\int_{x_0}^{x+\omega}p(t)dt-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}=1$$
$\Longrightarrow$
$$e^{\int_{x}^{x+\omega}p(t)dt}=1$$
由于$p(x)$为周期为ω的函数，则
$$e^{\int_0^{\omega}p(t)dt}=1$$
$\Longrightarrow$
$$\int_0^{\omega}p(t)dt=0$$
从而
$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}p(x)dx=0$$
“$\Longleftarrow$”由于$\int_0^{\omega}p(x)dx=0$，又$p(x)$以ω为周期的连续函数，则有
$$\int_0^{\omega}p(x)dx=\int_0^{\omega}p(x+t)dt=\int_t^{\omega+t}p(s)ds=0(\forall t)$$
$\Longrightarrow$
$$e^{-\int_0^{t+\omega}p(s)ds+\int_0^{t}p(s)ds}=1(\forall t)$$
$\Longrightarrow$
$$Ce^{-\int_0^{t+\omega}p(s)ds}=Ce^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}(\forall t)$$
故
$$y(t+\omega)=y(t)(\forall t, C\neq 0)$$

从而方程的任一非零解以ω为周期.

（2）方程$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$的解为 $y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)\to y=e^{-\int_0^x p(s)ds}\left(C+\int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)$

"$\Longrightarrow$"若方程有唯一ω周期解，则存在唯一常数C，使得

$$y=e^{-\int_0^x p(s)ds}\left(C+\int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)==e^{-\int_0^{x+\omega} p(s)ds}\left(C+\int_0^{x+\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)$$

从而

$$y=e^{\int_x^{x+\omega} p(s)ds}\left(C+\int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)=C+\int_0^{x+\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds$$

由于

$$\int_x^{x+\omega} p(s)ds=\int_0^{\omega} p(s)ds$$

由于C存在且唯一，故$e^{\int_0^{\omega} p(s)ds}\neq 1$，即$\overline{p}\neq 0$.

"$\Longleftarrow$" $p(x),q(x)$以ω为周期，则

$$\int_{\omega}^{x+\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds=\int_0^x q(k+\omega)e^{\int_0^{k+\omega} p(t)dt}dk=e^{\overline{p}\omega}\int_0^x q(k)e^{\int_0^k p(t)dt}dk$$

则有

$$\left(\int_{\omega}^{x+\omega}-e^{\overline{p}\omega}\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds=0$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\int_0^{x+\omega}-e^{\overline{p}\omega}\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds=\int_0^{\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds$$

又$\overline{p}\neq 0$，则$C=\dfrac{\int_0^{\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds}{e^{\overline{p}\omega}-1}$. 则周期解为：

$$y=e^{-\int_0^x p(s)}ds\left(\frac{1}{e^{\overline{p}\omega}-1}\int_0^{\omega}+\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds$$

□

就上述**Theorem**2.3给出一个重要的例题.

Example 5 设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=ay=f(x) \tag{30}$$

其中$a>0$为常数，$f(x)$是以2π为周期的连续函数，求方程 *30*的2π周期解.

Proof 对于微分方程30，其通解为

$$y(x)=Ce^{-ax}+\int_0^x e^{-a(x-s)}f(s)ds$$

下找合适的C，使得$y(x+2\pi)\equiv y(x)$成立.

由于$y(x)$为方程30的解，且$f(x+2\pi)=f(x)$，则$y(x+2\pi)$ 也是方程30的解.令$u(x)\triangleq y(x+2\pi)-y(x)$，则$u(x)$

为相应齐次方程的解.若有

$$y(2\pi)\equiv y(0)$$

成立，则$u(x)$满足初值条件$u(0)=0$，从而$u(x)\equiv 0$，即$y(x+2\pi)\equiv y(x)$.可知，常数C满足$y(2\pi)=y(0)$即可求出周期解.根据通解及$y(2\pi)=y(0)$，得

$$C=\frac{1}{1-e^{-2a\pi}}\int_{-2\pi}^{0}e^{as}f(s)ds$$

则周期解为

$$y(x)=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_{x}^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds$$

□

Theorem 2.4 令集合$H^0=\{f(x)|f$是以2π为周期的连续函数$\}$，易知H^0 关于实数域构成一个线性空间.对于任意$f\in H^0$，定义它的模

$$\parallel f\parallel=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)|$$

则H^0为一个$\boldsymbol{Banach}$空间.在空间H^0上定义一个变换$\varphi:f\to y$，

$$y=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_{x}^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds$$

，则φ是一个从H^0到H^0的线性算子，且有界.即

（*1*）对任何常数C_1和C_2以及任何$f_1,f_2\in H^0$，有

$$\varphi\left(C_1f_1+C_2f_2\right)=C_1\varphi(f_1)+C_2\varphi(f_2)$$

（*2*）对任何$f\in H^0$，有

$$\parallel\varphi(f)\parallel\leq k\parallel f\parallel$$

其中$k>0$是常数.

Proof

（1）设$\{f_n\}$为H^0中一基本列，即$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),s.t.\forall m,n\geq N(\varepsilon)$，有

$$\parallel f_m-f_n\parallel=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

由于$(\mathbb{R},|\cdot|)$是完备的，从而$\forall x,\{f_n(x)\}$ 为收敛列，即$f_n(x)\to f(x)(n\to+\infty)$，则只需证明：

(i)$f(x)$以2π为周期，(ii)$\parallel f_n-f\parallel\to 0(n\to+\infty)$

(i)：对于$\forall x$，有

$$f(x+2\pi)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x+2\pi)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$$

(ii)：

$$\| f_n - f \|= \max_{0\le x\le 2\pi} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\le x\le 2\pi} |f_n(x) - \lim_{m\to+\infty} f_m(x)|$$

$$= \max_{0\le x\le 2\pi} | \lim_{m\to+\infty} (f_n(x) - f_m(x))| \le \lim_{m\to+\infty} \max_{0\le x\le 2\pi} |f_n(x) - f_m(x)| = \lim_{m\to+\infty} \| f_n(x) - f_m(x) \|$$

即有

$$\lim_{x\to+\infty} \| f_n - f \|= \lim_{m,n\to+\infty} \| f_n(x) - f_m(x) \|= 0$$

从而H^0为**Banach**空间.

（2）定义：$\varphi : f \mapsto y = \frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s)ds$

由于f以2π为周期，故y以2π为周期，即$\varphi : H^0 \to H^0$

(i)$\forall C_1, C_2, f_1, f_2 \in H^0$，记$\frac{1}{e^{2a\pi}-1} = K$，则

$$\varphi(C_1f_1 + C_2f_2) = K\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}(C_1f_1(s) + C_2f_2(s))ds = C_1\varphi(f_1) + C_2\varphi(f_2)$$

(ii)对于$\forall f \in H^0$，有

$$\| \varphi(f) \|= \max_{0\le x\le 2\pi} \left|K\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f(s)ds\right| \le \max_{0\le x\le 2\pi} |K| \| f \| \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}ds = \frac{1}{|a|} \| f \|= k \| f \|, (k = \frac{1}{|a|})$$

□

Theorem 2.5 设连续函数$f(x)$在区间$-\infty < x < +\infty$上有界，则方程$y' + y = f(x)$在区间$-\infty < x < +\infty$有且仅有一个有界解，且当$f(x)$还是以ω为周期的周期函数时，这个有界解也是一个以ω为周期的周期函数.

Proof $y' + y = f(x)$有解：$y = e^{-x}\left(C + \int_{x_0}^{x} f(t)e^t dt\right)$ 令$C = \int_{-\infty}^{x_0} f(t)e^t dt$，则

$$y = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t dt$$

$\Longrightarrow$

$$|y| = \left|\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t-x}dt\right| \le M(|f(t)| \le M)$$

则y为方程的一个有界解.

下证唯一性：设有$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$，分别是$y' + y = f(x)$的有界解，则$y_1(x) - y_2(x)$为$y' + y = f(x)$的有界解.由于$y_1(x) - y_2(x) = Ce^{-x}$，故$c = 0$，从而$y_1(x) = y_2(x)$.

若$f(x)$为周期ω的周期函数，

$$y(x + \omega) = e^{x+\omega}\int_{-\infty}^{x+\omega} f(t)e^t dt = \int_{-\infty}^{x+\omega} f(t)e^{t-(x+\omega)}$$

令$u = t - \omega$，则

$$y(x + \omega) = \int_{-\infty}^{x} f(u + \omega)e^{u-x}du$$

由于$f(u+\omega)=f(u)$，则

$$y(x+\omega)=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}f(u)e^{u}du=y(x)$$

故解也是以ω为周期的周期函数. $\square$

关于积分因子的一些例子及定理：

Theorem 2.6 设方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{31}$$

有形如$\mu=\mu(\varphi(x,y))$的积分因子的充要条件是

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-P\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}=f(\varphi(x,y))$$

Proof

"$\Longrightarrow$" 对于$\mu(\varphi)P(x,y)dx+\mu(\varphi)Q(x,y)dy=0$，由于$\mu$为积分因子，则

$$\frac{\partial\mu(\varphi)P}{\partial y}=\frac{\partial\mu(\varphi)Q}{\partial x}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}P-\frac{\partial\varphi}{\partial x}Q\right)=\mu(\varphi)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{\mu(\varphi)}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-P\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

令$f(\varphi(x,y))=\dfrac{\mu'(\varphi)}{\mu(\varphi)}$，则

$$f(\varphi(x,y))=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-P\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

"$\Longleftarrow$" 若

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-P\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}=f(\varphi(x,y))$$

令$\mu(t)=e^{\int f(t)dt}$，从而$\dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)}=f(t)$，故有

$$\frac{\mu'(\varphi)}{\mu(\varphi)}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-P\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}\Longrightarrow\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

即$\mu(\varphi)=e^{\int f(\varphi)d\varphi}$ 为方程2.6的积分因子. □

Theorem 2.7 齐次方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{32}$$

有积分因子$\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$.

Proof 要证$\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$为齐次方程32的积分因子，即证

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

即证

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}yQ-\dfrac{\partial Q}{\partial x}yP-PQ}{(xP+yQ)^2}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}xP-\dfrac{\partial P}{\partial x}xQ-PQ}{(xP+yQ)^2}$$

即证

$$yQ\frac{\partial P}{\partial y}+xQ\frac{\partial P}{\partial x}=xP\frac{\partial Q}{\partial x}+yP\frac{\partial Q}{\partial Q}\partial y \tag{33}$$

由于方程32为齐次方程，则有$P(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)Q(x,y)$，从而

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)Q(x,y)+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial Q}{\partial x}\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x}\right)Q(x,y)+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial Q}{\partial y}\end{cases}$$

将方程组代入33式左端，得

$$yQ\left(\frac{1}{x}\varphi'Q+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+xQ\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)Q+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

$$=yQ\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial Q}{\partial y}+xQ\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial Q}{\partial x}$$

而右端：$xQ\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial Q}{\partial x}+yQ\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial Q}{\partial y}$ 故左端等于右端，即齐次方程32有积分因子$\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$. □

Theorem 2.8 若$\mu=\mu(x,y)$为方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

的一个积分因子，使得

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$$

则$\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$也是方程的一个积分因子，其中$g(\cdot)$ 为任一可微的非零函数.
其逆定理： 若μ_1为微分方程的另一个积分因子，则μ_1必可表为$\mu_1=\mu g(\Phi)$的形式，其中g和Φ为上述的意义.

Proof 由于

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$$

则

$$\mu g(\Phi)P(x,y)dx+\mu g(\Phi)Q(x,y)dy=g(\Phi)d\Phi(x,y)=d\int g(\Phi)d\Phi$$

故$\mu g(\Phi)$为一个积分因子.

由于μ_1,μ均为$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$的积分因子，则

$$\mu_1(Pdx+Qdy)=d\psi$$

$$\mu(Pdx+Qdy)=d\varphi$$

由于

$$\frac{D(\psi,\varphi)}{D(x,y)}=0$$

从而ψ,φ线性相关，即存在$f(\dot{})$，使得$\psi=f(\varphi)$，故

$$\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{d\psi}{d\varphi}=f'(\varphi)\triangleq g(\varphi)$$

从而$\mu_1=\mu g(\varphi)$. □

Theorem 2.9 设函数$P(x,y),Q(x,y),\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$都是连续可微的，$\mu_1,\mu_2$为微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

的积分因子，且$\frac{\mu_1}{\mu_2}$不恒为常数，则 $\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}=C$为方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的一个通积分.

Proof 由于μ_1,μ_2为方程的积分因子，则

$$\mu_1(Pdx+Qdy)=d\psi$$

$$\mu(Pdx+Qdy)=d\varphi$$

对于

$$g'(\varphi)\mu_2(Pdx+Qdy)=g'(\varphi)d\varphi=dg(\varphi)$$

由于$\frac{u_1}{u_2}=g(\varphi)$不恒为常数，则$g'(\varphi)$ 不恒为0，故$g'(\varphi)\mu_2$为微分方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$的积分因子，从而通积分为

$$g(\varphi)=\frac{\mu_1}{\mu_2}=C$$

□