向量组，方程组，矩阵，线性空间试题（8）

Zhou Qi

基础解系问题

1.求如下的齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ \vdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0 \end{cases}$$

其中$a_1+a_2+\cdots+a_n\neq 0$.

2.已知$\overrightarrow{\alpha}_1,\cdots,\overrightarrow{\alpha}_s$是线性无关的$n$维向量组，证明：必然存在以$\overrightarrow{\alpha}_1,\cdots,\overrightarrow{\alpha}_s$为一组基础解系的齐次线性方程组.

3.已知$A=(a_{ij})$是一个n级可逆矩阵，$r<n$，则A^*的后$n-r$个列向量

$$\eta_i\begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}(i=r+1,r+2,\cdots,n)$$

是方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

4.已知A是一个$n(n>2)$级方阵，证明：$AX=0$与$(A^*)'X=0$同解的充要条件是$A=O$或者A可逆.

5.已知$\eta_1,\cdots,\eta_t$是非齐次线性方程组$AX=b$的解，$u_1,\cdots,u_t$是实数，且$u_1+\cdots+u_t=1$，则$u_1\eta_1+\cdots+u_t\eta_t$也是方程组$AX=b$的解.

6.设η_0是非齐次线性方程组$AX=b$的一个特解，$\eta_1,\cdots,\eta_t$是它的导出组的基础解系，令

$$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_1+\eta_0,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0$$

证明线性方程组$AX=b$的任一解γ都可以表示成

$$\gamma=u_1\gamma_1+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1}$$

其中$u_1+\cdots+u_{t+1}=1$.

7.已知$A=(\overrightarrow{\alpha}_1,\cdots,\overrightarrow{\alpha}_n)$是一个$n$级方阵，$r(A)=n-1$且$\alpha_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}$，如果$\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\alpha}_1+\cdots+\overrightarrow{\alpha}_n$，求方程组$AX=\overrightarrow{\beta}$的通解.

8.已知4级方阵$A=(\overrightarrow{\alpha}_1,\overrightarrow{\alpha}_2,\overrightarrow{\alpha}_3,\overrightarrow{\alpha}_4)$的列向量$\overrightarrow{\alpha}_1,\overrightarrow{\alpha}_2,\overrightarrow{\alpha}_4$线性无关，且$\overrightarrow{\alpha}_1=2\overrightarrow{\alpha}_2-\overrightarrow{\alpha}_3$，若$\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{\alpha}_1-\overrightarrow{\alpha}_2+3\overrightarrow{\alpha}_4$，求方程组$AX=\overrightarrow{\beta}$的通解.

9.设矩阵$A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$的行向量组的转置都是方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的解，$M_i$是矩阵$A$中划去第$i$列剩下的$(n-1)\times(n-1)$矩阵的行列式.证明

（1）$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i M_i=0$的充要条件是$A$的行向量组的转置不是方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的基础解系.

（2）若$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i M_i=1$，试求每个$M_i$的值.