

相似与合同 (11)

正交矩阵的性质

1. A 是 n 级正交矩阵, 则 A 的行 (列) 向量全体构成 \mathbb{R} 的一组标准正交基.

2. A 为 n 级正交矩阵, 则:

- (1) A 的每一行 (列) 都是一个单位向量, 所以若 A 中有一个元素为 ± 1 , 则 ± 1 所在的行列的其他元素一定为零.
- (2) 若 A 是一个上 (下) 三角矩阵, 则 A 为一个对角矩阵, 主对角元素为 ± 1 .

3. A 为 n 级正交矩阵, 则:

- (1) A 的特征值的模长为 1, 并且复特征值成对出现, 同时, A 的行列式为 ± 1 .
- (2) 若 $|A| = -1$, 则 -1 一定是 A 的特征值.
- (3) 若 A 为奇数级的, 且 $|A| = 1$, 则 1 一定是 A 的特征值.

4.(1)一个实对称矩阵 A 的所有特征值都为 ± 1 ，则这个矩阵一定为正交矩阵.

(2)设 $\vec{\alpha}$ 为一个实 n 维单位列向量，则 $E_n - 2\vec{\alpha}\vec{\alpha}'$ 为一个对称正交矩阵.

5.已知 b 为一个 n 维单位列向量，证明：存在 n 级对称正交矩阵 A 使得 b 为 A 的第一列.

6.求出所有的2级正交矩阵.

7. 设 A 为一个 2 级正交矩阵，则：

(1) 若 $|A| = 1$ ，则 A 正交相似于以下形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$.

(2) 若 $|A| = -1$ ，则 A 正交相似于以下形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$