相似与合同（8）

矩阵可对角化的条件

总结一下：设A为数域$\mathbb{K}$上的n阶矩阵，则A可对角化$\Longleftrightarrow$

(1)A有n个线性无关的特征向量.

(2)A的属于不同特征值的特征子空间的维数之和为n.

(3)A的每个特征值的重数等于对应特征子空间的维数.

(4)A的最小多项式在数域$\mathbb{K}$上可分解成互素的一次因式的乘积.

1.设A是数域$\mathbb{K}$上的一个n阶矩阵，则A可对角化的充要条件为A有n个线性无关的特征向量.

2.矩阵A的属于不同特征值的特征向量线性无关.

3.设$A=(a_{ij})$为数域P上的一个n阶上三角机矩阵，证明：

(1)若$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$两两互异，则$A$可对角化.

(2)若$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，且存在一个$a_{kl}(k<l)$，则$A$不可对角化.

4.(1)数域P上的幂等矩阵($A^2=A$)一定可以对角化.

(2)数域P上的对合矩阵($A^2=E$)一定可以对角化.

(3)数域P上的非零幂零矩阵($A^l=O$)一定不可以对角化.

(4)数域P上的一个秩为1的矩阵A，若A的迹非零，则A可以对角化，若A的迹为零，则A不可以对角化.

5.设$\overrightarrow{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\overrightarrow{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$都为数域$K$上的$n(n>1)$ 维非零向量，令$A=\overrightarrow{\alpha}'\overrightarrow{\beta}$，问$A$是否可以对角化？若$A$可以对角化，求一个可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP$为对角矩阵，并写出这个对角矩阵.

6.已知$b_1,b_2,\cdots,b_n$都是正实数，且$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，设$A=(a_{ij})$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1-b_i & i=j\\ -\sqrt{b_ib_j} & i\neq j\end{cases}$$

求矩阵A的秩，并判断A是否可以对角化，若可以，写出A相似的对角矩阵.