

## 相似与合同 (4)

### 正交相似的应用及实对称矩阵的正交对角化

1. 任意实对称矩阵  $A$  的特征值都是实数.

2. 任意  $n$  级实对称矩阵  $A$  都正交相似于一个对角矩阵.

3. 已知实对称矩阵  $A$  为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 已知  $tE + A$  为正定矩阵, 求  $t$  的取值范围

(2) 求一个正交矩阵  $T$  使得  $T'AT$  为对角矩阵

(3) 令  $V$  是所有与  $A$  可交换的实矩阵全体, 证明  $V$  构成  $M_3(\mathbb{R})$  的一个线性子空间, 并求  $V$  的维数.

4. 已知  $A$  是一个  $n$  级实对称矩阵, 则存在  $n$  级实对称矩阵  $B$  使得  $A = B^3$ .

5. 设  $A$  是一个实  $n$  级方阵, 且  $A$  的特征值都是实数, 证明  $A$  为对称矩阵的充要条件是  $AA' = A'A$ .

6.  $A$  是一个  $n$  级实方阵, 满足  $AA' = A^2$ , 证明  $A$  是一个对称方阵.

7.证明： $n$ 级实矩阵 $A$ 正交相似于一个上三角矩阵的充要条件为 $A$ 的特征值都是实数.

8.证明：任意 $n$ 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵.