一元微分学（2）*

微分中值定理

1.设(a,b)为有限或无穷区间，$f(x)$在(a,b)内可微，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$（有限或$\pm\infty$），试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

2.若$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$为实系数多项式，且其一切根皆为实数，试证：导数$P_n'(X),P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根.

3.证明：**Legendre**多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根在$(-1,1)$.

4.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，试证：$\forall\alpha\in\mathbb{R},\exists\xi\in(a,b)$使得$\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.

5.设$f(x),g(x),h(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试证存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0$$

6.设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$\forall x\in(a,b),g'(x)\neq 0$，试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

7.设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且$0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi>0$，使得$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

8.设$f(x)$为可微函数，导函数$f'(x)$严格单调递增，若$f(a)=f(b)(a<b)$，试证：对一切$x\in(a,b)$有$f(x)<f(a)=f(b)$.

9.设$f(x)$在区间$[0,1]$上可微，$f(0)=0,f(1)=1$，$k_1,k_2,\cdots,k_n$为n个正数.证明在区间$[0,1]$内存在一组互不相

* 《数学分析中的典型问题与方法》（裴礼文）

等的数$x_1, x_2, \cdots, x_n$使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

10.设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，又$f(x)$不是线性函数，且$f(b) > f(a)$，试证$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

11.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内有二阶导数，试证存在$c \in (a,b)$使

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(c)$$

12.设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，而且有连续的右导数$f'_+(x)$，试证明导数$f'(x)$存在且

$$f'(x) = f'_+(x)$$

13.设$a, b > 0$，试证$\exists \in (a,b)$，使得

$$ae^b - be^a = (1-\xi)e^{\xi}(a-b)$$

14.设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，并设有实数$A>0$，使得$|f'(x)| \le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明在$[0,+\infty)$上$f(x) \equiv 0$.

15.设$[0,a]$上$|f''(x)| \le M$，$f(x)$在$(0,a)$内取最大值，试证：

$$|f'(0)| + |f'(a)| \le Ma$$

16.证明：若函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可微，且$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$，则$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

17.$\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$在$-1 < x < 1$有意义，证明：$\varphi(x) + \varphi(-x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x^2)$.

18.设函数$f(x)$在(a,b)内处处有导数$f'(x)$，证明(a,b)中的点或者为$f'(x)$的连续点或者为$f'(x)$的第二类间断点.

19.若$f(x)$在(a,b)可导，导函数$f'(x)$在(a,b)内单调，则$f'(x)$在(a,b)内连续.

20.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上处处可导$f'(a) < f'(b)$，则$\forall c: f'(a) < c < f'(b), \exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = c$.

21.设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上二次可微，且有界，试证存在点$x_0 \in (-\infty,+\infty)$，使得$f''(x_0) = 0$.

22.设函数$f(x)$在(a,b)内可微，$a, b > 0$，且$f(a+0), f(b-0)$均存在（为有限数），试证明$\exists \xi \in (a,b)$使得

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a+0) & f(b-0) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

23.设$f(x)$在(a,b)内二次可微，试用**Cauchy**中值定理证明：$\forall x, x_0 \in (a,b), \exists \xi$在$x$与$x_0$之间，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

成立.

24.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导$(0 \le a < b), f(a) \neq f(b)$，证明：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

25.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，$0<a<b$.证明：在(a,b)内存在x_1, x_2, x_3使得

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln\dfrac{b}{a}}{b^2-a^2}x_3f'(x_3)$$