# 向量组，方程组，矩阵，线性空间试题（10-3、4）

Zhou Qi

## 线性空间的和与交，维数公式，直和

1.已知$W, V_1, V_2, \cdots, V_s$是线性空间$V$的子空间，则由 $W \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s$可以得到

$$W = (V_1 \cap W) \cup (V_2 \cap W) \cup \cdots \cup (V_s \cap W)$$

2.已知$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$，其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

分别求$V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$的基与维数.

3.设$V_1,V_2$是有限维线性空间$V$的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

4.已知$A,B$分别是数域$P$上的$s\times k$与$k\times n$矩阵，$X$是$n\times 1$的列向量，则所有满足$ABX=0$的$BX$构成一个线性空间$V$，且维数为$r(B)-r(AB)$.

5.已知$V_1,V_2$是有限维线性空间$V$的子空间，且$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$，证明：要么$V_1\subseteq V_2$，要么$V_2\subseteq V_1$.

6.已知$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_r$是两组线性无关的$n$维向量组，证明：空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\cap L(\beta_1,\cdots,\beta_r)$的维数等于方程组

$$\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_s x_s+\beta_1 x_{s+1}+\cdots+\beta_r x_{s+r}=0$$

的解空间的维数.

7.数域$P$上所有$n$级矩阵组成的线性空间$V=M_n(P)$，$V_1$表示所有对称矩阵组成的集合，$V_2$表示所有反对称矩阵组成的集合，则$V_1,V_2$都是$V$的线性子空间，并且$V=V_1\oplus V_2$.

8.$A$是数域$P$上的$n$级方阵，$f(x),f_1(x),f_2(x)\in P[x]$，且$f(x)=f_1(x)f_2(x),(f_1(x),f_2(x))=1$，记$n$元齐次线性方程组$f(A)X=0,f_1(A)X=0,f_2(A)X=0$的解空间分别为$V,V_1,V_2$，则$V=V_1\oplus V_2$.

9.给定数域$P$，设$A$是数域$P$上的一个$n$级可逆方阵，$A$的前$r$个行向量组成的矩阵为$B$，后$n-r$个行向量组成的矩阵为$C$，$n$元线性方程组$BX=0$与$CX=0$的解空间分别是,$V_1,V_2$，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

10.在数域$P$上，已知$V_1,V_2$分别是齐次线性方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$与$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

11.证明：和$\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$是直和的充要条件是

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=0(i=2,\cdots,s)$$

12.如果$V=V_1\oplus V_2,V_1=V_{11}\oplus\cdots\oplus V_{1s},V_2=V_{21}\oplus\cdots\oplus V_{2t}$，则

$$V=V_{11}\oplus\cdots V_{1s}\oplus V_{21}\oplus\cdots\oplus V_{2t}$$

13.$A$是数域$P$上的$n$级方阵，$f(x),f_1(x),\cdots,f_s(x)\in P[x]$，且$f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$，$f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素，记$n$元齐次线性方程组$f(A)X=0,f_1(A)X=0,\cdots,f_s(A)X=0$的解空间分别为$V,V_1,\cdots,V_s$，则

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$$