相似与合同（2-3）

一些简单的（半）正定问题、正定与半正定的$C'C$

1.已知A为实对称矩阵，则存在$M > 0$，使得对任意的$t > M$都有$tE + A$.

2.已知A是一个n级实对称矩阵，则存在$\delta > 0$，使得当$|\varepsilon| < \delta$，都有$E + \varepsilon A$.

3.已知A是一个n级实对称矩阵，则A半正定的充要条件是对任意$t > 0$都有$tE + A$为正定矩阵.

4.设A为实对称矩阵，证明：存在正实数c使得对任意的n维列向量X有$|X'AX| \leq cX'X$.

5.已知A为实对称矩阵，B为实反对称矩阵，且对任意的$X \neq \overrightarrow{0}$有$X'(A+B)X > 0$，则$A$为正定矩阵.

6.已知$A=(a_{ij})$为n级正定矩阵，则

（1）$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$

（2）$2|a_{ij}|<a_{ii}+a_{jj}(i\neq j)$

（3）A的所有元素中，绝对值最大的元素一定在主对角线上，从而也一定为正数.

7.（1）已知$\overrightarrow{\alpha}$为n为实列向量，则$\overrightarrow{\alpha}\,\overrightarrow{\alpha}'$一定为半正定矩阵.

（2）证明：$A=(i\times j)_{n\times n},B=\left(\dfrac{1}{i\times j}\right)_{n\times n}$.

8.设A为一个$m\times n$的实矩阵，则$r(A'A)=r(A)$.

9.证明：对实数域上的任意$s\times n$实矩阵A，都有$r(AA'A)=r(A)$.

10.A是任一$s\times n$的实矩阵，则$A'A$是半正定矩阵，且$A'A$是正定矩阵的充要条件是A列满秩.

11.设B为n级正定矩阵，C为$n \times m$的实列满秩矩阵，$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C' & O \end{pmatrix}$，则二次型$f(X) = X'AX$的正负惯性指数分别为$n, m$.

12.设B为n级正定矩阵，C为$n \times m$的实列满秩矩阵，k为正实数，$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C' & -kE_m \end{pmatrix}$，则二次型$f(X) = X'AX$的正负惯性指数分别为$n, m$.

13.已知A为一n级正定矩阵，则二次型

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

为一负定二次型.

14.已知A为n级半正定矩阵，X为一n维实列向量，且$X'AX=0$，则$AX=0$.

15.设A为秩为r的n级半正定矩阵，证明$W=\{X\in\mathbb{R}^n|X'AX=0\}$为$\mathbb{R}^n$的一个线性子空间，并求其维数.

16.已知A为一n级非对称的实矩阵，对任意的n维实列向量X都有$X'AX\geq 0$，已知实列向量$\overrightarrow{\alpha}$满足$A\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{0}$，证明$A'\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{0}$.

17.已知A为一n级非对称的实矩阵，对任意的n维实列向量X都有$X'AX\geq 0$，且存在是向量$\overrightarrow{\beta}$使得$\overrightarrow{\beta}'A\overrightarrow{\beta}=0$.同时对任意的$n$维实列向量$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$，当$\overrightarrow{a}'A\overrightarrow{b}\neq 0$时，有$\overrightarrow{a}'A\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}'A\overrightarrow{a}\neq 0$，证明对任意的$n$维实列向量$\overrightarrow{\eta}$，都有$\overrightarrow{\eta}'A\overrightarrow{\beta}=0$.

18.设$A=(a_{ij})_{n\times n}$与$B=(b_{ij})_{n\times n}$都是n级实对称矩阵，记$C=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$，则

（1）若A,B都是半正定矩阵，则C也是半正定矩阵.

（2）若A,B都是正定矩阵，则C也是正定矩阵.