向量组，方程组，矩阵，线性空间试题（5-7）

分块矩阵的简单应用，对角占优，伴随矩阵

1.已知A, B分别是$m \times n, n \times s$矩阵，证明$r(AB) = \min\{r(A), r(B)\}$.

2.已知A, B分别是$m \times n, n \times s$矩阵，并且$AB = O$，则$r(A) + r(B) \leq n$.

3.(1)已知n级方阵A满足$A^2 = A$，证明$r(A) + r(A - E) = n$.

(2)已知n级方阵A满足$A^2 = E$，证明$r(A + E) + r(A - E) = n$.

4.已知A, B分别是$m \times n, n \times s$矩阵，并且$r(B) = n$，证明：若$AB = O$，则$A = O$.

5.设A是n级方阵，则$|A|=0$的充要条件是存在非零的n级矩阵B使得$AB=O$.

6.已知A是$n\times s$的实列满秩矩阵，其中$s<n$，则存在$n\times(n-s)$的实列满秩矩阵B使得(A,B)为可逆矩阵，且$B'A=O$.

7.设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是一个n级实矩阵，则

(1)如果$|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，那么$|A|\neq 0$,

(2)如果$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，那么$|A|>0$.

8.A是任意n级实方阵，则存在充分大的M使得$t > M$时，$tE + A$可逆.

9.(1)设A, B, C, D都是n级矩阵，且$AC = CA$，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

(2)已知A是n级方阵，$\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$为$n$维单位列向量，证明：

$$\begin{vmatrix} A & \overrightarrow{\alpha} \\ \overrightarrow{\beta}' & 1 \end{vmatrix}$$

10.求二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$的秩与正惯性指数.

11.证明二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$是正定二次型.

12.设n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足条件：

(1)$a_{ii}>0,i=1,2,\cdots,n$

(2)$a_{ij}<0,i\neq j$

(3)$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}=0,k=1,2,\cdots,n$

13.已知A是一个$n(n\geq 2)$级方阵，则

$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$$

14.已知A是一个秩为$n-1$的$n(n\geq 2)$级方阵，且已知某个元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}非零，求方程组$AX=0$的基础解系.

15.A,B都是n级矩阵，则$(AB)^*=B^*A^*$.

16.已知A是$n(n\geq 2)$级方阵，则

(1)$|A^*|=|A|^{n-1}$

(2)$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$