# 向量组，方程组，矩阵，线性空间试题（3-4）

## 线性方程组解的存在定理，极大线性无关组的求法

1.已知$A$是$s \times n$的矩阵，$B$是$m \times n$的矩阵，$X$是$n \times 1$的列向量，则齐次线性方程组$AX = 0$与$BX = 0$同解的充要条件是$A$与$B$的行向量等价.

2.设$A, B$分别是数域$P$上的$s \times n$与$t \times n$矩阵，齐次线性方程组$AX = 0$与$BX = 0$的解空间分别为$V_1, V_2$，证明：$V_1 \subseteq V_2$的充要条件是存在数域$P$上的$t \times s$矩阵$C$使得$B = CA$.

3.已知$A, B$分别是$s \times n$与$r \times n$矩阵，$a, b$分别是$s$维与$r$维列向量，则：

(1)线性方程组$AX = a$的解都是$BX = b$的解的充要条件是$(B, b)$的没一个行向量都是可以由$(A, a)$的行向量线性表出，其中$(A, a), (B, b)$分贝时方程组$AX = a$与$BX = b$的增广矩阵.

(2)线性方程组$AX = a$与$BX = b$同解充要条件是$(A, a)$的行向量与$(B, b)$的行向量等价，其中$(A, a), (B, b)$分贝时方程组$AX = a$与$BX = b$的增广矩阵.

4.已知$A$是一个$s \times n$的矩阵，证明：对于任意的列向量$b_{s\times 1}$，$AX=b$都有解的充要条件是$r(A)=s$.

5.$\overrightarrow{\alpha}$是一个$n$维列向量，则$\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{0}$的充要条件是$\overrightarrow{\alpha}'\overrightarrow{\alpha}=0$.

6.设$A$是一个$m \times n$的实矩阵，则$r(A'A)=r(A)$.

7.设$A$是一个$m \times n$的实矩阵，$b$为任一$m$维实列向量，则方程组$A'AX=A'b$一定有解.

8.$A$是$n$级反对称矩阵，$b$为$n$维列向量，则$AX=b$有解的充要条件是 $r(A)=r\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$

9.证明线性方程组$AX=b$无解的充要条件是：存在行向量$\overrightarrow{c}$使得$\overrightarrow{c}A=0$且$\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}=1$.

10.已知$m < n$，矩阵$A_{m\times n}$行满秩，$B_{n\times(n-m)}$列满秩，且$AB = O$，则方程组$AX = 0$的任意解$X_0$，方程组$BX = X_0$有唯一解.

11.$A, B$分别是$s\times m, m\times n$的矩阵，则$ABX = 0$与$BX = 0$同解的充要条件是$r(AB) = r(B)$.

12.$A, B$分别是$s\times m, m\times n$的矩阵，且$r(AB) = r(B)$，证明对任意的$n\times s$矩阵$C$都有$r(ABC) = r(BC)$.

13.设$A$是$n$级方阵，证明：对于任意的正整数$k$有$r(A^n) = r(A^{n+k})$.

14.设$A_{s\times n}$是一个阶梯形矩阵，则它的主元所在的列构成$A$列向量的一个极大线性无关组.