相似与合同(2-3)

一些简单的(半)正定问题、正定与半正定的C'C

1.已知A为实对称矩阵,则存在M>0,使得对任意的t>M都有tE+A.

2.已知A是一个n级实对称矩阵,则存在 $\delta > 0$,使得当 $|\varepsilon| < \delta$,都有 $E + \varepsilon A$.

3.已知A是一个n级实对称矩阵,则A半正定的充要条件是对任意t > 0都有tE + A为正定矩阵.

4.设A为实对称矩阵,证明:存在正实数c使得对任意的n维列向量X有 $|X'AX| \leq cX'X$.

5.已知A为实对称矩阵,B为实反对称矩阵,且对任意的 $X \neq \overrightarrow{0}$ 有X'(A+B)X > 0,则A为正定矩阵.

- 6.已知 $A=(a_{ij})$ 为n级正定矩阵,则
- (1) $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$
- (2) $2|a_{ij}| < a_{ii} + a_{jj} (i \neq j)$
- (3) A的所有元素中,绝对值最大的元素一定在主对角线上,从而也一定为正数.

- 7. (1) 已知 $\overrightarrow{\alpha}$ 为n为实列向量,则 $\overrightarrow{\alpha}$ $\overrightarrow{\alpha}'$ 一定为半正定矩阵.
- (2) 证明: $A = (i \times j)_{n \times n}, B = \left(\frac{1}{i \times j}\right)_{n \times n}.$

8.设A为一个 $m \times n$ 的实矩阵,则r(A'A) = r(A).

9.证明:对实数域上的任意 $s \times n$ 实矩阵A,都有r(AA'A) = r(A).

10.A是任 $-s \times n$ 的实矩阵,则A'A是半正定矩阵,且A'A是正定矩阵的充要条件是A列满秩.

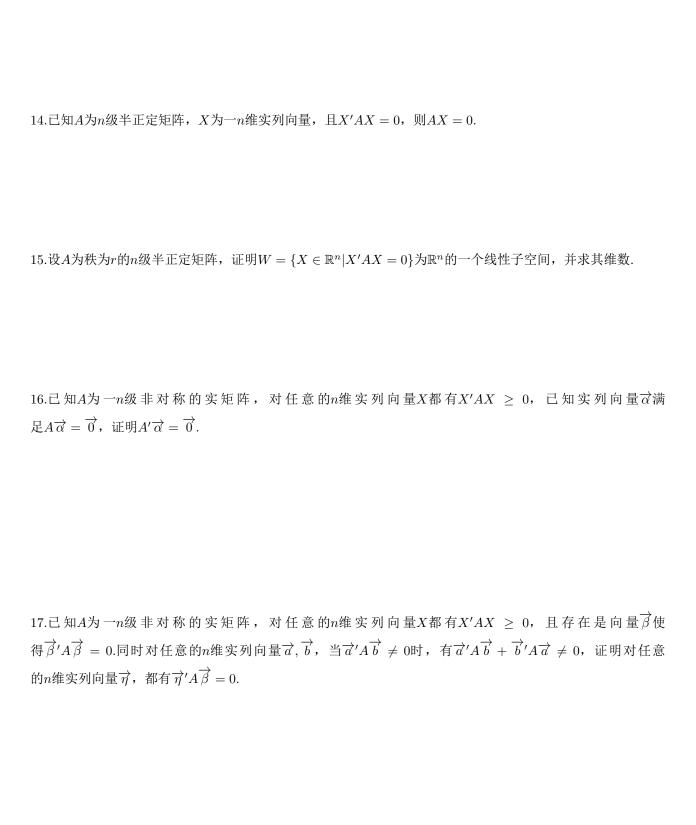
11.设B为n级正定矩阵,C为 $n \times m$ 的实列满秩矩阵, $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C' & O \end{pmatrix}$,则二次型f(X) = X'AX的正负惯性指数分别为n, m.

12.设B为n级正定矩阵,C为 $n \times m$ 的实列满秩矩阵,k为正实数, $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C' & -kE_m \end{pmatrix}$,则二次型f(X) = X'AX的正负惯性指数分别为n,m.

13.已知A为一n级正定矩阵,则二次型

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

为一负定二次型.



18.设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 都是n级实对称矩阵,记 $C=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$,则

- (1) 若A, B都是半正定矩阵,则C也是半正定矩阵.
- (2) 若A, B都是正定矩阵,则C也是正定矩阵.