一元函数极限（2）*

求极限值的若干方法

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$

(4)设有限数a,b,A均不为零，证明：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=Ae^b$.

2.求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，设

(1)$x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$

(2)$x_n=\dfrac{3}{2}\dfrac{5}{4}\dfrac{17}{16}\cdots\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$

(3)$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+i^3}}$

(4)$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)(i+2)}$

3.求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\ (a\geq 0,b\geq 0)$

(2)已知$a_1,a_2,\cdots,a_n>0(n\geq 2)$，且$f(x)=\left[\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right]^{\dfrac{1}{x}}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4.证明

(1)若数列$x_n(n=1,2,\cdots)$收敛，且$x_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

(2)若$x_n>0(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

5.求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

6.借助**Stirling**公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad{\scriptstyle(0\leq\theta_n\leq 1)}$$

---

*《数学分析中的典型问题与方法》（裴礼文）

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{1-\frac{1}{i}}}{\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^{i}}$.

7.若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n}=ab.$

8.求$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

9.已知$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，试计算$\lim\limits_{p\to+\infty}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{-p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]$ 10.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，设

(1)$x_n=\dfrac{13\cdots(2n-1)}{24\cdots(2n)}$

(2)$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]$

(3)$x_n=(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

11.设$f(x)>0$，在区间$[0,1]$上连续，试证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}=\max_{0\le x\le1}f(x)$$

12.求极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

(2)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(3)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2x-2\tan x}{1+\cos4x}$

(4)$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

13.求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

(3)$\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$

(4)$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$ 其中函数$f(x)$在点A可导，且$f(a)\neq0.$

14.求下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}$

15.求下列极限$\lim_{n\to\infty}x_n$，其中x_n为

(1)$x_n=\frac{5^n n!}{(2n)^n}$

(2)$x_n=\frac{111213\cdots(n+10)}{258\cdots(3n-1)}$

16.求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(1+n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$$

17.设$x_n=\frac{1}{2\ln 2}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}-\ln\ln n$，试证$\{x_n\}$收敛.

18.求$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

19.设函数$f(x)$是周期为T的连续函数，试证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

20.设$f'(x)$在$[0,+\infty)$上连续且$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$，证明$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

21.设$f(x)$在实轴上有界，且连续可微，并满足

$$|f(x)-f'(x)|\le 1\quad(-\infty<x<+\infty)$$

试证：$|f(x)|\le 1$.

22.设$f'(0)=k$，试证明

$$\lim_{a\to 0^-,b\to 0^+}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$$

23.设$n\to+\infty$时，A_n,B_n为无穷大量，若用$A_n\ll B_n$表示无穷大量B_n的阶高于A_n的阶，即$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n}{B_n}=0$，试证：$n\to+\infty$时，下列无穷大量有如下关系（$a>1,0<\alpha<1,k\in\mathbb{N}$）

$$\ln\ln n\ll\ln n\ll n^\alpha\ll n^k\ll a^n\ll n!\ll n^n$$