一元微分学*

导数

1.证明**Riemman**函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为有理数}\end{cases}$$

在$[0,1]$上处处不可微.

2.证明：$f(x)=|x|^3$在$x=0$处三阶导数$f'''(0)$不存在.

3.设函数$f(x)$在点x_0的邻域I内有定义，证明：导数$f'(x_0)$存在的充分必要条件为存在这样的函数$g(x)$，它在I内有定义，在点x_0连续，且使得在I内成立等式$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)g(x)$又这时还有等式$f'(x_0)=g(x_0)$.

4.设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)$，且在开区间(a,b)内有连续的右导数

$$f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad (a<x<b)$$

试证：存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'_+(\xi)=0$.

5.设$f(x)$在$x=x_0$处可微，$\alpha_n<x_0<\beta_n(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$$

6.设函数$f(x)$在$x=0$连续并且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$，求证：$f'(0)$存在，且$f'(0)=A$.

7.设$f(x)$在$[a,b]$上可微.试证：$f'(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是$f(x)$在$[a,b]$上一致可微.即：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|h|<\delta$时，有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

对一切$x\in[a,b]$成立.

---

*《数学分析中的典型问题与方法》（裴礼文）