# 一元函数的连续性*

## 连续性及一致连续性

1.证明**Riemman**函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

在无理点上连续，在有理点上间断.

2.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明函数

$$M(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t), m(x)=\inf_{a\le t\le x} f(t)$$

在$[a,b]$上连续.

3.设$f(x)$在$(0,1)$内有定义，且函数$e^x f(x)$与$e^{-f(x)}$在$(0,1)$内都是单调不减的，证明：$f(x)$在$(0,1)$内连续.

4.设函数$y=f(x)$在$(a,b)$内有定义，具有介值性质，且是一对一的，试证：

(1)$f(x)$为严格单调的，值域为某个开区间$J$.

(2)$f^{-1}(y)$在$J$内单调，而且也有介值性.

(3)$f(x), f^{-1}(y)$连续.

5.证明：（非常数的）连续周期函数，必有最小正周期.

6.设$f(x)$对$(-\infty,+\infty)$内一切$x$有$f(x^2)=f(x)$，且$f(x)$在$x=0, x=1$连续，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$为常数.

7.设$f:[a,b]\to[a,b]$为连续函数.证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\xi$.

8.设$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}, a>1$为任一正常数,试证：$f(x)$在$(0,a)$内非一致连续，在$[a,+\infty)$上一致连续.

9.证明：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$, $g(x)=x^2$在$(1,+\infty)$内非一致连续.

10.证明：$f(x)$在区间$I$上一致连续的充要条件是：对$I$上任意二数列$\{x_n\},\{x_n'\}$只要$x_n-x_n'\to 0$，就有$f(x_n)-f(x_n')\to 0(n\to\infty)$.

11.设$I$为有限区间，$f(x)$在$I$上有定义，试证：$f(x)$在$I$上一致连续的充要条件是$f$把**Cauchy**序列映射为**Cauchy**序列.

---

* 《数学分析中的典型问题与方法》（裴礼文）

12.设$f(x)$在有限开区间$(a,b)$上连续，试证$f(x)$在$(a,b)$上一致连续的充要条件是极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$及$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在.

13.证明：若$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

14.设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，$\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\varphi(x))=0$，证明：$\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

15.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，则存在非负实数$a$与$b$，使对一切$x\in(-\infty,+\infty)$，都有$|f(x)|\le a|x|+b$.

16.设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，且$\forall x>0$有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，试证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.