

相似与合同 (14)

一类相似与合同的综合问题

1. A, B 都是 n 级正定矩阵, 则 AB 也是正定矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

2. A, B 都是 n 级实对称矩阵, 并且 B 是正定的, 证明 BA 的特征值全大于零的充要条件是 A 正定.

3. 设 A, B 都是 n 级实对称矩阵, 并且 A 正定, 证明 AB 的特征值为实数.

4. 设 A 正定, B 实对称, 且 $|(1 - \lambda)A + B|$ 的根大于 1, 则 B 正定.

5. 设 A 为 n 级正定矩阵, B 为 n 级反对称矩阵, 则 $|A \pm B| > 0$.

6. 已知 A, B 都是实反对称矩阵, 且 A 可逆, 证明 $|A^2 - B| > 0$.

7. 已知 A 为 n 级正定矩阵, B 为 n 级半正定矩阵, 则 $|A + B| \geq |A| + |B|$, 并且仅当 $B = O$ 时等号成立.

8. 已知 A, B 都是 n 级矩阵, 且 $E - A'A$ 与 $E - B'B$ 都是半正定矩阵, 则

$$|E - A'B|^2 \geq |E - A'A||E - B'B|$$

9. 已知 A, D 分别是 n 级, m 级实方阵, B 是 $n \times m$ 的实矩阵, 且 $\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 则

(1) $A, D, D - B'A^{-1}B, A - BD^{-1}B'$ 都是正定矩阵.

(2) $\begin{vmatrix} A & B \\ B' & D \end{vmatrix} \leq |A||D|$, 且仅当 $B = O$ 时等号成立.

10. 设 A, B 分别是 $m \times n$ 与 $s \times n$ 的实行满秩矩阵, 记 $Q = AB'(BB')^{-1}BA'$, 证明:

(1) $AA' - Q$ 为半正定矩阵.

(2) $0 \leq |Q| \leq |AA'|$.

11. 已知 A 为一个 n 级正定矩阵, B 为一个 n 级实对称矩阵, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P'AP = E$ 且 $P'BP$ 为对角矩阵.

12. 已知 A 为 n 级正定矩阵, $\vec{\alpha}$ 为 n 维实列向量, 证明:

$$0 \leq \vec{\alpha}'(A + \vec{\alpha}\vec{\alpha}')^{-1}\vec{\alpha} < 1$$

13. 设 A 为一个 n 级可逆实对称矩阵, 则 A 正定的充要条件是对任意的 n 级正定矩阵 B 都有 $tr(AB) > 0$.