线性变换（7）

高等代数分水岭

非常重要

1.V为数域P上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换.$f(x), f_1(x), f_2(x) \in P[x]$，且$f(x) = f_1(x)f_2(x), (f_1(x), f_2(x)) = 1$.则

$$Kerf(\mathscr{A}) = Kerf_1(\mathscr{A}) \oplus Kerf_2(\mathscr{A})$$

2.V为数域P上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换.$f(x), f_1(x), \cdots, f_s(x) \in P[x], f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，且$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$两两互素，则

$$Kerf(\mathscr{A}) = Kerf_1(\mathscr{A}) \oplus Kerf_2(\mathscr{A}) \oplus \cdots \oplus Kerf_s(\mathscr{A})$$

3.V为数域P上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换，$f(x)\in P[x]$为$\mathscr{A}$的一个零化多项式（$f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$），且$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，其中$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)\in P[x]$且任意两个多项式互素，则

$$V=Kerf_1(\mathscr{A})\oplus Kerf_2(\mathscr{A})\oplus\cdots\oplus Kerf_s(\mathscr{A})$$

4.设$\mathscr{A}$为线性空间V上的幂等变换，证明：

$$V=Ker\mathscr{A}\oplus Ker(\mathscr{A}-\mathscr{E})$$

5.V为复数域$\mathbb{C}$上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换，$f(\lambda)$为$\mathscr{A}$的特征多项式，且$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$的$s$个互异特征值，则

$$V=Ker(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{r_1}\oplus Ker(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{r_2}\oplus\cdots\oplus Ker(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{r_s}$$

6.V为复数域$\mathbb{C}$上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换，$m(\lambda)$为$\mathscr{A}$的最小多项式，且$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$的$s$个互异特征值，则

$$V=Ker(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{t_1}\oplus Ker(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{t_2}\oplus\cdots\oplus Ker(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{t_s}$$

7.V为复数域$\mathbb{C}$上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换，$m(\lambda)$为$\mathscr{A}$的最小多项式，且$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$的$s$个互异特征值，则对于任意的$k_i\geq t_i(i=1,2,\cdots,s)$，有

$$Ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{t_i}=Ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{k_i}$$

8.V为数域P上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换.$f(x),f_1(x),\cdots,f_s(x)\in P[x]$，$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$为$\mathscr{A}$的零化多项式，且$f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素，现设$F_i(x)=\dfrac{f(x)}{f_i(x)}(=1,2,\cdots,s)$，则对于任意的$i=1,2,\cdots,s$有

$$Kerf_i(\mathscr{A})=ImF_i(\mathscr{A})$$

9.V为数域P上的线性空间，$\mathscr{A}$为空间V上的线性变换，$f(x) \in P[x]$为$\mathscr{A}$的一个零化多项式，且$f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，其中$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x) \in P[x]$且任意两个多项式互素，现在设$F_i(x) = \dfrac{f(x)}{f_i(x)}(i = 1, 2, \cdots, s)$，则

$$V = ImF_1(\mathscr{A}) \oplus ImF_2(\mathscr{A}) \oplus \cdots \oplus ImF_s(\mathscr{A})$$

10.$\mathscr{A}$为数域P上线性空间V的线性变换，$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x \in P[x]$为线性变换$\mathscr{A}$的一个零化多项式，其中$a_1 \neq 0$，则

$$V = Ker\mathscr{A} \oplus \mathscr{A}V$$

11.设$\mathscr{A}$为数域P上线性空间V的线性变换，$f(x) \in P[x]$ 为$\mathscr{A}$的一个零化多项式，满足$f(0) = 0$，且$f'(0) \neq 0$，证明

$$V = Ker\mathscr{A} \oplus \mathscr{A}V$$

12.已知$f(x),g(x)$为数域P上的两个非零多项式，$d(x),r(x)$分别为$f(x),g(x)$的首一的最大公因式与最小公倍式，A为数域P上的一个n 级方阵，现在设$f(A)X=0,g(A)X=0,d(A)X=0,r(A)X=0$的解空间分别为$V_1,V_2,V_3,V_4$，证明

$$V_3=V_1\cap V_2,V_4=V_1+V_2$$

13.A为数域P上的n级矩阵，$f(x),f_1(x),\cdots,f_s(x)\in P[x],f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，且$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$两两互素，设线性方程组$f(A)X=0,f_1(A)X=0,\cdots,f_s(A)X=0$的解空间分别为$V,V_2,\cdots,V_s$，则

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

14.已知$\mathscr{A},\mathscr{B}$为线性空间V上的线性变换，满足$\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$，证明：

(1)$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$有相同的值域的充要条件为$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$.

(2)$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$有相同的核的充要条件为 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

15.设$\mathscr{A},\mathscr{B}$为数域P上的线性空间V上的线性空间V上的线性变换，且$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，证明：

(1)$\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\overrightarrow{\alpha}-\mathscr{A}\overrightarrow{\alpha}|\overrightarrow{\alpha}\in V\}$.

(2)$V=\mathscr{A}^{-1}(0)\oplus\mathscr{A}V$.

(3)$\mathscr{A}^{-1}(0),\mathscr{A}V$为$\mathscr{B}-$子空间的充要条件为$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

16.设$\mathscr{A}$为数域P上的线性空间V上的线性变换，且$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$，令$V_1=\{\overrightarrow{\alpha}\in V|\mathscr{A}\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{\alpha}\},V_2=\{\overrightarrow{\alpha}\in V|\mathscr{A}\overrightarrow{\alpha}=-\overrightarrow{\alpha}\}$，证明：

(1)V_1,V_2都是V的线性子空间.

(2)$V=V_1\oplus V_2$.