

## 矩阵 (7)

### 分块矩阵证明秩不等式

1. 已知  $A$  是一个  $n$  级方阵, 证明:  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$  是多项式, 且  $(f_1(x), f_2(x)) = 1$ , 则  $f(A) = O$  的充要条件是  $r(f_1(A)) + r(f_2(A)) = n$ .

2. 已知  $A, B, C$  分别  $s \times m, m \times n, n \times k$  的矩阵, 则

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$$

3. 已知  $A, B$  分别是  $s \times n, n \times m$  的矩阵, 则

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

4. 已知  $A, B$  为  $n$  级方阵, 则

$$r(A - ABA) = r(A) + r(E - BA) - n$$

5. 已知  $A$  是  $n$  级方阵, 证明:

$$r(A) + r(A^3) \geq 2r(A^2)$$

6. 已知  $A, B$  都是  $n$  级方阵, 且  $AB = BA = O$ ,  $r(A^2) = r(A)$ , 证明:

$$r(A + B) = r(A) + r(B)$$

7. 已知  $A, B$  都是  $n$  级方阵, 且  $AB = BA = O$ ,  $r(A^2) = r(A)$ , 证明: 存在正整数  $m$  使得

$$r(A^m + B^m) = r(A^m) + r(B^m)$$

8. 设  $A, B$  是数域  $P$  上的  $n$  级矩阵, 且  $AB = BA$ , 证明:

$$r(A) + r(B) \geq r(AB) + r(A + B)$$

9. 已知  $A$  是一个  $s \times n$  矩阵, 证明:

$$r(E_n - A'A) - r(E_s - AA') = n - s$$