相似与合同(5-7)

惯性定理、规范型、标准型及一个特殊的二次型

1.任意一个实数域上的二次型,经过一适当的非退化线性替换可以变成规范型,并且规范型是唯一的.

2.设n元二次型 $f(X) = l_1^2 + \dots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \dots - l_{p+q}^2$,其中 $l_i(i=1,2,\dots,p+q)$ 是关于 x_1,x_2,\dots,x_n 的一次齐次式,证明f(X)的正惯性指数 $\leq p$,负惯性指数 $\leq q$.

3.设n元二次型f(X)=X'AX的矩阵A可逆,且 $x_{k+1}=\cdots=x_n=0$ 时,f(X)=0,其中 $k\leq \frac{n}{2}$,证明二次

型f(X)的符号差t满足 $|t| \le n - 2k$.

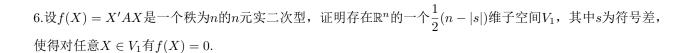
4.(1)设A是n级实对称矩阵,且|A|<0,证明: 必存在实n维列向量X使得X'AX<0. (2)设f(X)=X'AX是一实二次型,并且存在 X_1,X_2 使得

$$X_1'AX_1 > 0$$
 $X_2'AX_2 < 0$

证明: 必存在 $X_0 \neq 0$ 使得 $X'_0AX_0 = 0$.

5.设A是一个n级实对称矩阵,且 $A \neq O$,证明: 如果二次型f(X) = X'AX的符号差为零,那么 \mathbb{R}^n 中存在非零的列向量 X_1, X_2, X_3 使得

$$f(X_1) > 0, f(X_2) < 0, f(X_3) = 0$$



7.设X'AX是n元满秩实二次型,证明 \mathbb{R}^n 可以分解为两个子空间 V_1,V_2 的直和,使得对任意的非零 $\overrightarrow{\alpha}_1 \in V_1$,及非零 $\overrightarrow{\alpha}_2 \in V_2$ 都有

$$\overrightarrow{\alpha}_1' A \overrightarrow{\alpha}_1 > 0 \quad \overrightarrow{\alpha}_2' A \overrightarrow{\alpha}_2 < 0$$

并说明 V_1, V_2 的取法不唯一,但是它们的维数唯一确定.

8.设n级实对称矩阵A的全部特征值按大小顺序排列成 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$,证明:对任意n为实列向量 $\overrightarrow{\alpha}$ 都有

$$|\lambda_n|\overrightarrow{\alpha}|^2 \leq \overrightarrow{\alpha}' A \overrightarrow{\alpha} leq \lambda_1 |\overrightarrow{\alpha}|^2$$

9.设B是一个n级实矩阵,B'B的全部特征值按大小顺序排列成 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$,证明:B的任意实特征 值 μ 满足 $\sqrt{\lambda_n} \le |\mu|\sqrt{\lambda_1}$.

10.设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$ 为实矩阵,则n元二次型

$$f(X) = \sum_{i=1}^{s} (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)^2$$

的矩阵为A'A.

11.设 a_1, \dots, a_n 是实数,证明: n元二次型 $f(X) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$ 为正定二次型的充要条件是 $a_1 a_2 \dots a_n \neq (-1)^n$.