相似与合同（9-10）

幂等矩阵、反对称矩阵

1.已知A,B为n阶幂等矩阵，证明：

(1)$A+B$为幂等矩阵的充要条件为$AB=BA=O$.

(2)若$AB=BA$，则$A+B-AB$为幂等矩阵.

2.设$A_1,A_2,\cdots,A_m$为n阶方阵，满足$A_1+A_2+\cdots+A_m=E_n$，则以下三个条件等价：

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_m$为幂等矩阵.

(2)$r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_m)=n$.

(3)对任意$i\neq j(i,j=1,2,\cdots,m)$都有$A_iA_j=O$.

3.设A为n阶反对称矩阵，则A必合同于下列形状的分块矩阵

$$diag\{S, \cdots, S, 0, \cdots, 0\}$$

其中$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.n阶实反对称矩阵A的行列式值总是非负实数.

5.设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & h & -g \\ -b & -h & 0 & f \\ -c & g & -f & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

(1)求$|A|$.

(2)设$\lambda \in \mathbb{R}$，证明线性方程组$(\lambda E + A)X = 0$有非零解的充要条件是$\lambda = af + bg + ch = 0$.