一元函数极限（3）*

Stolz公式及递推形式的极限

1.证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}\quad (p\text{为自然数})$$

2.设$S_n=\dfrac{\sum_{k=1}^n \ln C_n^k}{n^2}$，其中$C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{12\cdots k}$.

3.求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

4.证明数列$x_0=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n},n=0,1,2,\cdots$有极限，并求其值.

5.设$\alpha>0$，取$x_1<\alpha^{\frac{1}{p}}$，用递推公式

$$x_{n+1}=\frac{p-1}{p}x_n+\frac{\alpha}{p}x_n^{-p+1}$$

来确定$x_2,x_3,\cdots$，试证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{\frac{1}{p}}$.

6.已知数列$\{x_n\}$在区间I上由$x_{n+1}=fx_n(n=1,2,\cdots)$给出，$f$为$I$上连续增函数，若$f$在$I$上有不动点$x^*(x^*=f(x^*))$满足

$$(x_1-f(x_1))(x_1-x^*)\geq 0$$

则此时数列$\{x_n\}$必收敛，且极限A满足$f(A)=A$.

7.设$x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}(c>1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8.设$x_1=1,x_2=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

9.证明：若$f(x)$在区间$I=[a-r,a+r]$上可微，

$$|f'(x)|\leq\alpha<1\quad |f(a)-a|\leq(1-\alpha)r$$

任取$x_0\in I$，令$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，$x^*$为方程$x=f(x)$的根.

---

*《数学分析中的典型问题与方法》（裴礼文）

10.设数列$\{p_n\},\{q_n\}$满足

$$p_{n+1}=p_n+2q_n, q_{n+1}=p_n+q_n, p_1=q_1=1$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$.

11.设$x_0=0, x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

12.证明数列

$$2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \cdots$$

收敛，并求其极限.

13.设$y=f(x)=\dfrac{1}{1+x}, a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

14.设$f(x)$在$[a,b]$上二次可微，且$f(a)f(b)<0, f'(x)>0, f''(x)>0$，$\forall x\in[a,b]$.证明数列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, x_1\in[a,b], n=1,2,\cdots$$

有极限，且极限为方程$f(x)=0$的根.

15.对于数列$x_0=a, 0<a<\dfrac{\pi}{2}, x_n=\sin x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

16.设$0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,\cdots$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.