一元函数极限（1）*

用定义证明极限的存在性

1.试证：任一对称区间$(-l,l)$上的任一函数$f(x)$，总可以表成一偶函数$H(x)$与一奇函数$G(x)$的和，而且此种表示法是唯一的.

2.证明不等式：

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x(x>-1)$$

等号当且仅当$x=0$时成立.

3.证明不等式：

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x(0<x<\frac{\pi}{2})$$

4.是否存在这样的函数，它在区间$[0,1]$上每点取有限值，在此区间的任何点的任意邻域内无界.

5.设f是$\mathbb{R}$上的奇函数，并且以直线$x=a(a\neq 0)$作为对称轴，试证f必为周期函数并求其周期.

6.试证：若$x_n \to +\infty$（当$n\to+\infty$时），则$\{x_n\}$必达到下确界（即$\exists m\in\mathbb{N}$，使得$x_m=\inf\{x_n\}$）.

7.设f,g是$\mathbb{R}$上的实函数，且

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

在$\mathbb{R}$上$f(x)$不恒等于零，但有界，试证：$|g(y)|\le 1(\forall y\in\mathbb{R})$

8.设f是闭区间$[a,b]$上的增函数，若$f(a)\ge a,f(b)\le b$，试证：$\exists x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)=x_0$.

9.设$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，$f(0)>0,f(1)<1$，试证：$\exists x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=x_0^2$.

10.（1）用$\varepsilon-N$方法证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，试证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=A$.

11.证明：若$p_k>0(k=1,2,\cdots)$且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+\cdots+p_n}=0,\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

*《数学分析中的典型问题与方法》（裴礼文）

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+\cdots+p_na_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$$

12.设实数列$\{x_n\}$满足$|x_n-x_{n-2}|\to 0(n\to n)$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$$

13.设$x\to 0$时，$f(x)\sim x$，$x_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)$，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(a>0)$.

14.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(a_0+C_n^1a_1+C_n^2a_2+\cdots+a_n)=a$$

15.设$x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$，试证：$\{x_n\}$收敛.

16.证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在.

17.证明数列$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}(n=1,2,\cdots)$发散.

18.设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

19.试证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a,\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a.$

20.设函数$f(x)$在点x_0的邻域I内有定义，试证：若对于任意的点列$\{x_n\}.x_n\in I,x_n\to x_0(n\to\infty),0<|x_{n+1}-x_0|<|x_n-x_0|$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

21.证明从任一数列$\{x_n\}$中必可选出一个单调的子数列.