

相似与合同 (5-7)

惯性定理、规范型、标准型及一个特殊的二次型

1. 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范型，并且规范型是唯一的.

2. 设 n 元二次型 $f(X) = l_1^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2$ ，其中 $l_i (i = 1, 2, \cdots, p+q)$ 是关于 x_1, x_2, \cdots, x_n 的一次齐次式，证明 $f(X)$ 的正惯性指数 $\leq p$ ，负惯性指数 $\leq q$.

3. 设 n 元二次型 $f(X) = X'AX$ 的矩阵 A 可逆，且 $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ 时， $f(X) = 0$ ，其中 $k \leq \frac{n}{2}$ ，证明二次

型 $f(X)$ 的符号差 t 满足 $|t| \leq n - 2k$.

4.(1) 设 A 是 n 级实对称矩阵, 且 $|A| < 0$, 证明: 必存在实 n 维列向量 X 使得 $X'AX < 0$.

(2) 设 $f(X) = X'AX$ 是一实二次型, 并且存在 X_1, X_2 使得

$$X_1'AX_1 > 0 \quad X_2'AX_2 < 0$$

证明: 必存在 $X_0 \neq 0$ 使得 $X_0'AX_0 = 0$.

5. 设 A 是一个 n 级实对称矩阵, 且 $A \neq O$, 证明: 如果二次型 $f(X) = X'AX$ 的符号差为零, 那么 \mathbb{R}^n 中存在非零的列向量 X_1, X_2, X_3 使得

$$f(X_1) > 0, f(X_2) < 0, f(X_3) = 0$$

6. 设 $f(X) = X'AX$ 是一个秩为 n 的 n 元实二次型，证明存在 \mathbb{R}^n 的一个 $\frac{1}{2}(n - |s|)$ 维子空间 V_1 ，其中 s 为符号差，使得对任意 $X \in V_1$ 有 $f(X) = 0$.

7. 设 $X'AX$ 是 n 元满秩实二次型，证明 \mathbb{R}^n 可以分解为两个子空间 V_1, V_2 的直和，使得对任意的非零 $\vec{\alpha}_1 \in V_1$ ，及非零 $\vec{\alpha}_2 \in V_2$ 都有

$$\vec{\alpha}_1' A \vec{\alpha}_1 > 0 \quad \vec{\alpha}_2' A \vec{\alpha}_2 < 0$$

并说明 V_1, V_2 的取法不唯一，但是它们的维数唯一确定.

8. 设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值按大小顺序排列成 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ，证明：对任意 n 为实列向量 $\vec{\alpha}$ 都有

$$\lambda_n |\vec{\alpha}|^2 \leq \vec{\alpha}' A \vec{\alpha} \leq \lambda_1 |\vec{\alpha}|^2$$

9. 设 B 是一个 n 级实矩阵, $B'B$ 的全部特征值按大小顺序排列成 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 证明: B 的任意实特征值 μ 满足 $\sqrt{\lambda_n} \leq |\mu| \leq \sqrt{\lambda_1}$.

10. 设 $A = (a_{ij})_{s \times n}$ 为实矩阵, 则 n 元二次型

$$f(X) = \sum_{i=1}^s (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2$$

的矩阵为 $A'A$.

11. 设 a_1, \cdots, a_n 是实数, 证明: n 元二次型 $f(X) = (x_1 + a_1x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$ 为正定二次型的充要条件是 $a_1a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$.