矩阵（8-9）

等价标准型、矩阵的迹与幂零矩阵

1.设B_1, B_2都是数域P上的$s \times n$的列满秩矩阵，证明：存在数域P上的s级可逆矩阵C使得$B_2 = CB_1$.

2.任意秩为$r(r > 0)$的矩阵都可以分解成r个秩为1的矩阵之和.

3.已知A是一个秩为r的$s \times n$矩阵，求矩阵方程$AXA = A$的通解.

4.已知A是一个n级实对称方阵，且$A^2 = O$，则$A = O$.

5.相似的矩阵有相同的迹.

6.已知A是数域P上的n级矩阵，则A是幂零矩阵的充要条件是对任意的正整数都有$tr(A^k)=0$.

7.已知$M_n(\mathbb{C})$表示所有n级复矩阵组成的线性空间，$\sigma: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$是一个线性映射，并且满足对任意的$A,B\in M_n(\mathbb{C})$，都有$\sigma(AB)=\sigma(BA)$，证明存在$\lambda\in\mathbb{C}$使得对任意的$A\in M_n(\mathbb{C})$，都有$\sigma(A)=\lambda tr(A)$.

8.U是$P^{n\times n}$空间中所有形如$AB-BA$的矩阵生成的子空间，W是$P^{n\times n}$中所有迹为零的矩阵生成的线性子空间，则$U=W$.

9.已知数域K上的两个n级矩阵A,B满足$AB-BA=A$，则A不可逆.

10.已知数域K上的两个n级矩阵A,B满足$AB-BA=A$，则对任意的正整数k，都有$tr(A^k)=0$.

11.设A,B,C是数域K上的n级矩阵，满足$AB-BA=C$，且$AC=CA$，证明：对任意的正整数k，都有$tr(C^k)=0$.

12.已知数域K上的两个2级矩阵A,B满足$AB-BA=A$，则$A^2=O$.