向量组，方程组，矩阵，线性空间试题（10-1、2）

Zhou Qi

线性空间基本知识点-同构、基变换与坐标变换

1.设$\overrightarrow{\alpha}_1,\cdots,\overrightarrow{\alpha}_n$是$n$ 维线性空间V的一组基，A是一个$n\times s$矩阵，满足

$$\left(\overrightarrow{\beta}_1,\cdots,\overrightarrow{\beta}_s\right)=\left(\overrightarrow{\alpha}_1,\cdots,\overrightarrow{\alpha}_n\right)A$$

则$\dim L\left(\overrightarrow{\beta}_1,\cdots,\overrightarrow{\beta}_s\right)=r(A)$

2.设A是数域F上的n阶可逆矩阵，把A与A^{-1}如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中A_{11}是$l\times k$阶阵，B_{11}是$k\times l$阶阵，l,k为小于n的正整数，用W表示$A_{12}X=0$的解空间，U表示$B_{12}Y=0$的解空间，其中X,Y分别是$(n-k)\times 1,(n-l)\times 1$的列向量，证明 $W\cong U$.

3.在P^4中，求由基$\overrightarrow{\alpha}_1,\overrightarrow{\alpha}_2,\overrightarrow{\alpha}_3,\overrightarrow{\alpha}_4$ 到基$\overrightarrow{\eta}_1,\overrightarrow{\eta}_2,\overrightarrow{\eta}_3,\overrightarrow{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量ξ在所指基下的坐标.

$\overrightarrow{\alpha}_1=(1,1,1,1),\overrightarrow{\alpha}_2=(1,1,-1,-1),\overrightarrow{\alpha}_3=(1,-1,1,-1),\overrightarrow{\alpha}_4=(1,-1,-1,1);\overrightarrow{\eta}_1=(1,1,0,1),\overrightarrow{\eta}_2=(2,1,3,1),\overrightarrow{\eta}_3=(1,1,0,0),\overrightarrow{\eta}_4=(0,1,-1,-1);\overrightarrow{\xi}=(1,0,0,-1)$ 在$\overrightarrow{\eta}_1,\overrightarrow{\eta}_2,\overrightarrow{\eta}_3,\overrightarrow{\eta}_4$ 下的坐标.

4.对于第3题，问是否存在非零向量ζ使得它在基$\overrightarrow{\alpha}_1,\overrightarrow{\alpha}_2,\overrightarrow{\alpha}_3,\overrightarrow{\alpha}_4$ 与$\overrightarrow{\eta}_1,\overrightarrow{\eta}_2,\overrightarrow{\eta}_3,\overrightarrow{\eta}_4$ 有相同的坐标.

5.（1）证明：在$P[x]_n$中，多项式

$$f_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),(i=1,2,\cdots,n)$$

是一组基，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是P的互异数.

（2）在（1）中，取$a_1, a_2, \cdots, a_n$是全体n次单位根，求由基$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$到基$f_1, f_2, \cdots, f_n$的过渡矩阵.

6.设$K \subseteq F \subseteq E$是三个数域，已知$F$作为$K$上的线性空间是$n$维的，$E$作为$F$上的线性空间是$m$维的，则$E$作为$K$上的线性空间是$mn$维的.