矩阵（5-6）

上（下）三角矩阵、基本矩阵与初等矩阵、秩1矩阵

1.已知数域P上的矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

求证：所有与A可交换的矩阵$C(A)$构成$M_3(P)$的一个线性子空间，并求$C(A)$的一组基.

2.(1)设对角矩阵$A=diag\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的对角元素两两互异，则与$A$可交换的方阵只能是对角阵.

(2)设$A=diag\lambda_1E_1,\cdots,\lambda_sE_s$是一个$n$级准对角矩阵，其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两互异，$E_1,\cdots,E_s$分别为$r_1,\cdots,r_s$级单位矩阵$(r_1+\cdots+r_s=n)$，则与$A$可交换的矩阵只能是准对角矩阵$diagB_1,\cdots,B_s$其中$B_1,\cdots,B_s$分别为任意的 $r_1,\cdots,r_s$级方阵.

(3)与所有n级可逆矩阵可交换的矩阵为数量矩阵，即kE的形式.

(4)与所有n级矩阵可交换的矩阵为数量矩阵.

3.已知$\mathscr{A}$是线性空间P^n上的线性变换，已知对数域P 上任意n级矩阵A，都有$\mathscr{A}(A\overrightarrow{\alpha}) = A\mathscr{A}\overrightarrow{\alpha}$，$\forall\overrightarrow{\alpha} \in P^n$，证明：$\mathscr{A}$是一个数乘变换.

4.已知A, B是方阵，如果$AB = E$，则$BA = E$.

5.(1)已知A, B都是方阵，并且满足$AB = A + B$，证明$AB = BA$.

(2)设$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是有限维线性空间V上的线性变换，并且满足 $\mathscr{A}\mathscr{B} = a\mathscr{A} + b\mathscr{B}$，其中$a, b$是两个非零实数，则$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$.

6.已知方阵A满足$A^k = O$，其中k是一个正整数，求$E - A$得逆.

7.设A是n级方阵，且$E-A,E+A,A$都可逆，证明$(E-A^{-1})^{-1}+(E-A)^{-1}=E$.

8.A,B都是n级方阵，已知$A,B,AB-E$都可逆，求证$A-B^{-1},(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$也可逆，并求出它们的逆.

9.设A,B分别是$n\times m$和$m\times n$的矩阵，且E_n-AB可逆，证明E_m-BA也可逆，并求它的逆.

10.设A是n级方阵，且$E+A$可逆，证明$(E+A')^{-1}+(E+A)^{-1}=E$的充要条件是A是一个正交矩阵.

11.已知A是n级实矩阵，证明：A是反对称矩阵的充要条件是$(E-A)(E+A)^{-1}$是一个正交矩阵.